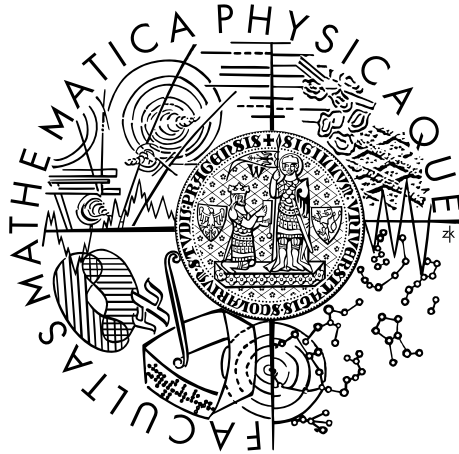


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Kateřina Koňasová

Varianty K -funkce pro stacionární bodové procesy

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Varianty K-funkce pro stacionární bodové procesy

Autor: Kateřina Koňasová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Hlavním tématem této práce je teorie stacionárních bodových procesů, s důrazem na varianty K-funkce pro bodové procesy v rovině. V první kapitole vyloužíme základy teorie bodových procesů včetně klasické definice K-funkce a jejího neparametrického odhadu. Tato funkce představuje cenný nástroj pro posuzování regularity nebo naopak tendence k vytváření shluků u bodových procesů. Ve druhé kapitole podáme shrnutí poznatků o variantách K-funkce pro stacionární bodové procesy ve dvourozměrném resp. trojrozměrném eukleidovském prostoru. Naši pozornost zaměříme na válcovou K-funkci, využívající různě orientovaných válců resp. obdélníků, a směrovou K-funkci, která využívá kruhových resp. kulových výsečí. Ve třetí kapitole nabídneme porovnání směrové K-funkce a jejího neparametrického odhadu pro anizotropní Thomasové procesy. Dále zde ilustrujeme hlavní přínos směrové K-funkce při analýze bodových procesů, spočívající ve využití směrové K-funkce při detekci dominantního směru pro shluková i regulární data.

Klíčová slova: stacionární bodové procesy, K-funkce, směrová K-funkce, válcová K-funkce

Title: Alternative K-functions for stationary point processes

Author: Kateřina Koňasová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jiří Dvořák, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The main theme of this thesis is the theory of stationary point processes, in particular the directional K-function. In the first chapter we explain the essentials of planar point process theory including the classical definition of K-function and its estimator. The second chapter introduces two types of the directional K-function: cylindrical K-function whose structural element is a cylinder and directional K-function using double spherical cones. The third chapter presents the comparison of directional K-function and its estimator on an anisotropic version of Thomas process. We also illustrate the major contribution of directional K-function in orientation analysis of point patterns. We introduce a heuristic method for detecting anisotropies in clustered or regular data.

Keywords: stationary point processes, K-function, directional K-function, orientation analysis

Ráda bych zde poděkovala vedoucímu bakalářské práce RNDr. Jiřímu Dvořákovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a především za trpělivost, vstřícnost a čas, který mi v průběhu zpracování bakalářské práce věnoval.

Obsah

Úvod	2
1 Bodové procesy v \mathbb{R}^2	3
1.1 Základní pojmy	3
1.2 Některé příklady bodových procesů v \mathbb{R}^2	4
1.2.1 Poissonův proces v \mathbb{R}^2	5
1.2.2 Thomasové shlukový proces	5
1.2.3 Matérnův proces s pevným jádrem	7
1.3 Základní charakteristiky bodového procesu	7
1.3.1 Základní charakteristiky prvního a druhého řádu	8
1.3.2 K-funkce	10
1.3.3 Neparametrický odhad K-funkce	12
2 Varianty K-funkce pro stacionární bodové procesy	15
2.1 Válcová K-funkce a její odhad	15
2.2 Směrová K-funkce	16
2.2.1 Směrová K-funkce v \mathbb{R}^2	16
2.2.2 Směrová K-funkce v \mathbb{R}^3	18
2.2.3 Implementace odhadu směrové K-funkce v softwaru R	19
3 Směrová K-funkce pro shluková a regulární data	21
3.1 Směrová K-funkce pro Thomasové shlukové procesy	21
3.1.1 Výpočet párové korelační funkce a směrové K-funkce	21
3.1.2 Porovnání směrové K-funkce a jejího neparametrického odhadu	22
3.1.3 Aplikace směrové K-funkce na reálná data redwood	28
3.2 Aplikace směrové K-funkce na regulární data	30
3.3 Shrnutí	31
Závěr	33
Seznam použité literatury	34
Seznam obrázků	36
Přílohy	37
A Implementace odhadu směrové K-funkce	37
B Směrová K-funkce pro Thomasové shlukové procesy	39
C Elektronická příloha	40

Úvod

Bodové procesy slouží k modelování bodových vzorů v rovině nebo prostoru. Každý z bodů zpravidla představuje pozici nebo střed nějakého objektu. Může se jednat například o pozice stromů v daném úseku lesa, pozice epicenter zemětřesení, výskyt nakažených určitou nemocí nebo místa dopadů částic na detektor. Jak je vidět, teorie bodových procesů má velmi široký okruh aplikací, a to například astronomii, biologii, ekologii, geografii nebo epidemiologii. Po více než 30 let byly bodové procesy jednou z hlavních oblastí výzkumu v prostorové statistice (Møller a Waagepetersen, 2004). Navíc se díky rozvoji nových technologií (a velkému množství dat, reprezentovatelných bodovými procesy, které tyto technologie zprostředkovávají) v medicíně a dalších oborech lidské činnosti dá předpokládat, že výzkum bodových procesů bude i nadále pokračovat.

U bodových procesů nás zajímá otázka, zda existují nějaké interakce mezi jednotlivými body procesu, např. jestli mají tyto body tendenci se shlukovat. K-funkce je popisnou charakteristikou bodových procesů, která nám pomáhá tuto otázku zodpovědět. V reálném životě se však kromě situací, kdy modelované objekty pouze vytvářejí shluky, setkáváme i s bodovými vzory, ve kterých je patrný nějaký směr. V tomto případě nám klasicky definovaná K-funkce o chování procesu v daném směru nic neříká. Proto se v odborné literatuře začaly objevovat úpravy klasické definice K-funkce, a to tak, aby tato popisná charakteristika reagovala na změny směru. Dodejme, že zkoumání vhodných variant klasické K-funkce je objektem zájmu i v aktuálních vědeckých pracích. Např. Møller, Safavimaneshyand a Rasmussen (2015) ve svém článku využívají válcovou variantu K-funkce k analýze trojrozměrného bodového vzoru tvořeného mozkovými buňkami.

V této práci se budeme věnovat zejména dvěma variantám klasické K-funkce, a to válcové a tzv. směrové K-funkci, které nám umožňují porovnávat chování procesu v různých směrech. Pro třídu Thomasové shlukových procesů nabídneme srovnání teoretické směrové K-funkce a jejího neparametrického odhadu. Na reálných i simulovaných datech budeme ilustrovat využití směrové K-funkce při analýze bodových vzorů. K simulacím je použito prostředí R (verze 3.1.3) s knihovnou spatstat (verze 1.41-1), numerická integrace je prováděna za pomoci softwaru Wolfram Mathematica (verze 10.4).

1. Bodové procesy v \mathbb{R}^2

V první kapitole se seznámíme se základními pojmy z teorie bodových procesů v rovině, tedy dvourozměrném eukleidovském prostoru \mathbb{R}^2 . Poznamenejme, že všechna uvedená tvrzení a definice zůstávají v platnosti i pro bodové procesy v \mathbb{R}^d , kde d je libovolné přirozené číslo. Námi zvolené omezení na bodové procesy v rovině poslouží při formulaci základních poznatků k větší přehlednosti a názornosti výkladu. Upozorňujeme, že odborná literatura není při zavádění teorie bodových procesů jednotná, lze ji tedy vyložit několika různými způsoby. V této kapitole se budeme držet zejména publikací Møller a Waagepetersen (2004) a Baddeley a kol. (2007).

1.1 Základní pojmy

V následujícím textu vyložíme stručný úvod do teorie stacionárních bodových procesů, s důrazem na klasickou definici K-funkce a její neparametrický odhad. Také představíme tři důležité příklady rovinných stacionárních procesů, a to proces Poissonův, Matérnův proces s pevným jádrem a Thomasové shlukové procesy.

Definice 1 (Stavový prostor). *Bud' \mathfrak{B}^2 borelovská σ -algebra na \mathbb{R}^2 a \mathfrak{B}_0^2 množina všech omezených borelovských množin na \mathbb{R}^2 . Bud'*

$$\mathbf{N} = \{N \subseteq \mathbb{R}^2 : N(B) < \infty \forall B \in \mathfrak{B}_0^2\},$$

kde $N(B)$ značí mohutnost množiny $N \cap B$, tj. počet prvků N , které jsou obsaženy v B . Označme

$$E_{B,k} = \{N \in \mathbf{N} : N(B) = k\},$$

kde $B \in \mathfrak{B}_0^2$ a $k = 0, 1, 2, \dots$. Bud' \mathcal{N} σ -algebra na \mathbf{N} generovaná $E_{B,k}$, $B \in \mathfrak{B}_0^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Dvojici $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ nazýváme stavový prostor bodového procesu v \mathbb{R}^2 .

Poznamenejme, že množinu \mathbf{N} nazýváme souborem všech lokálně konečných podmnožin roviny. σ -algebra \mathcal{N} obsahuje takové jevy, jako např.

$$E_{B_1, k_1} \cap \dots \cap E_{B_m, k_m} = \{N \in \mathbf{N} : N(B_1) = k_1, \dots, N(B_m) = k_m\},$$

tedy jevy, že množina B_i obsahuje právě k_i prvků $\forall i = 1, 2, \dots, m$. Obsahuje také jev

$$\{N = \emptyset\} = \{N \in \mathbf{N} : N(B) = 0 \forall B \in \mathfrak{B}_0^2\},$$

jelikož ho může zapsat jako spočetný průnik jevů $E_{b(o,r), 0}$, $n = 1, 2, \dots$, kde $b(o, r)$ představuje kruh se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem r . Nyní můžeme přistoupit k samotné definici bodového procesu v rovině.

Definice 2. *Bud' (Ω, \mathcal{A}, P) pravděpodobnostní prostor. Bodový proces X na \mathbb{R}^2 je měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\mathbf{N}, \mathcal{N})$.*

Povšimněme si, že tato definice je obdobou definice reálné náhodné veličiny. Zatímco reálná náhodná veličina přiřazuje elementárním jevům reálná čísla (tj. modeluje takové náhodné události, jejichž výsledek se dá popsat reálným číslem,

např. hod kostkou), bodový proces jim přiřazuje prvky z \mathbf{N} , tedy lokálně konečné podmnožiny roviny. Tyto lokálně konečné podmnožiny roviny představují konkrétní realizace daného bodového procesu. $N_X(B)$ potom značí počet prvků procesu X , které jsou obsaženy v množině B . Stejně jako u náhodných veličin chceme přiřazovat pravděpodobnosti prvkům σ -algebry \mathcal{N} . Poznamenejme ještě, že měřitelnost X je ekvivalentní tomu, že $N_X(B)$ je náhodná veličina $\forall B \in \mathfrak{B}_0^2$, viz Møller a Waagepetersen (2004, Příloha B).

Definice 3. *Rozdělení P_X bodového procesu X je definováno vztahem*

$$P_X(\mathfrak{N}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathfrak{N}\}), \forall \mathfrak{N} \in \mathcal{N}.$$

Definice 4. *Konečně-rozměrným rozdělením procesu X rozumíme sdružené rozdělení náhodných veličin*

$$N_X(B_1), \dots, N_X(B_m) \forall B_1, \dots, B_m \in \mathfrak{B}_0^2, m \in \mathbf{N}.$$

Konečně-rozměrná rozdělení bodového procesu specifikují pravděpodobnosti jevů ve tvaru

$$\{N_X(B_1) = k_1, \dots, N_X(B_m) = k_m\}, m \in \mathbf{N}.$$

Tato rozdělení ovšem nevyčerpávají celou informaci obsaženou v rozdělení procesu X , neboť například pravděpodobnost jevu $\{X = \emptyset\}$ z nich neumíme určit, jelikož tento jev nemůže být popsán za pomoci konečného počtu množin B_i . Přesto se ale ukazuje, že konečně-rozměrná rozdělení obsahují dostatek informací o rozdělení procesu X na to, aby platilo následující lemma.

Lemma 1. *Nechť X a Y jsou bodové procesy se stejnými konečně-rozměrnými rozděleními. Pak $P_X = P_Y$.*

Důkaz. Viz Møller a Waagepetersen (2004, Lemmma B.2)

□

Jak jsme upozorňovali výše, definice bodového procesu v odborné literatuře není jednotná. Můžeme se setkat např. s tím, že místo lokálně konečných podmnožin roviny uvažujeme množinu všech lokálně konečných čítacích měr. Symbol $N(B)$ potom značí míru množiny B , bráno vzhledem k dané čítací míře N . Obecnější definici využívající náhodné čítací míry můžeme vidět např. v publikaci Daley a Vere-Jones (1988). Dodejme, že v obecnějším výkladu by námi zavedená definice bodového procesu odpovídala tzv. jednoduchému bodovému procesu, viz Rataj (2006, definice 4.1).

1.2 Některé příklady bodových procesů v \mathbb{R}^2

V následující podkapitole představíme tři příklady stacionárních bodových procesů v rovině, se kterými se setkáme i v dalších částech práce. Svoji pozornost zaměříme zvláště na Poissonův proces, který má v teorii bodových procesů zásadní roli, a dále na třídu shlukových procesů. Shlukové procesy jsou pro nás zajímavé zejména tím, že slouží jako model pro některé bodové vzory přirozeně se vyskytující v přírodě, např. mladé stromky ve volné přírodě nebo galaxie

ve vesmíru. Nakonec jako model hojně využívaný v biologii představíme třídu tzv. procesů s pevným jádrem. Dodejme, že daný bodový proces X pozorujeme pouze na nějakém omezeném pozorovacím okně W , $W \subset \mathbb{R}^2$, $|W| > 0$, kde $|W|$ je dvourozměrná Lebesgueova míra množiny W . Standardním pozorovacím oknem je čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$. Nebude-li uvedeno jinak, používáme standardní pozorovací okno.

1.2.1 Poissonův proces v \mathbb{R}^2

Jak již bylo zmíněno, Poissonův proces je jedním ze základních kamenů teorie bodových procesů, neboť představuje vhodný model pro bodový proces, mezi jehož body neexistují žádné interakce. Říkáme, že takový proces splňuje předpoklad úplné prostorové náhodnosti. Poissonův proces se dále využívá jako referenční proces při analýze bodových procesů a také při konstrukci některých pokročilejších modelů.

Definice 5 (Poissonův bodový proces). *Řekneme, že bodový proces X na \mathbb{R}^2 je Poissonův bodový proces s intenzitou $\lambda > 0$, jestliže jsou splněny následující podmínky:*

- Pro každou kompaktní množinu $B \subseteq \mathbb{R}^2$ má náhodná veličina $N_X(B)$ Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\lambda|B|$.
- Pro všechny B_1, B_2, \dots, B_m po dvou disjunktní kompaktní podmnožiny \mathbb{R}^2 jsou $N_X(B_1), N_X(B_2), \dots, N_X(B_m)$ nezávislé náhodné veličiny, pro každé $m = 2, 3, \dots$.

Poznámka. Říkáme, že X je homogenní Poissonův proces na \mathbb{R}^2 , neboť jeho intenzita λ je konstantní. Tuto myšlenku můžeme ovšem zobecnit a uvažovat λ jako funkci $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, která je lokálně integrovatelná, tj.

$$\int_B \lambda(u) du < \infty \quad \forall B \subseteq \mathfrak{B}_0^2.$$

Pokud je $\lambda(X)$ nekonstantní, říkáme, že proces X je nehomogenní Poissonův proces na \mathbb{R}^2 .

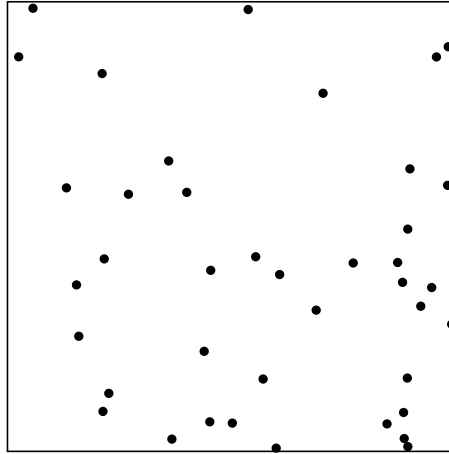
Homogenní Poissonův proces je stacionární a izotropní, a to ve smyslu následující definice.

Definice 6 (Stacionární a izotropní bodový proces). *Řekneme, že bodový proces na \mathbb{R}^2 je stacionární, jestliže je jeho rozdělení invariantní vůči posunutí, tj. $\forall s \in \mathbb{R}^2 : P_{X+s} = P_X$, kde $X + s = \{x + s : x \in X\}$.*

Řekneme, že bodový proces na \mathbb{R}^2 je izotropní, jestliže je jeho rozdělení invariantní vůči rotacím kolem počátku v \mathbb{R}^2 , tj. $P_{OX} = P_X$, kde $OX = \{Ox : x \in X\}$, pro každou O rotaci kolem počátku v \mathbb{R}^2 .

1.2.2 Thomasové shlukový proces

Poissonův proces, zavedený výše, je bohužel většinou příliš jednoduchým modelem pro reálná data. Na druhou stranu se v tomto případě dá využít při konstrukci komplexnějších modelů.



Obrázek 1.1: Realizace homogenního Poissonova bodového procesu s intenzitou $\lambda = 40$.

Podívejme se nyní podrobněji na třídu shlukových bodových procesů. Při vytváření shlukového procesu začínáme s bodovým procesem X a každý bod $x \in X$ nahradíme konečnou náhodnou množinou bodů Z_x . Z_x je konečný bodový proces a nazývá se shlukem přidruženým k bodu x . Sjednocení těchto shluků $Z = \bigcup_{x \in X} Z_x$ tvoří shlukový bodový proces. Zpravidla se na proces X díváme jako na množinu rodičovských bodů, na body jednotlivých shluků poté nahlížíme jako na body dceřiné (např. pokud modelujeme rozmístění semen nějaké rostliny). Podrobnější výklad o shlukových procesech lze nalézt např. v knize Illian a kol. (2008).

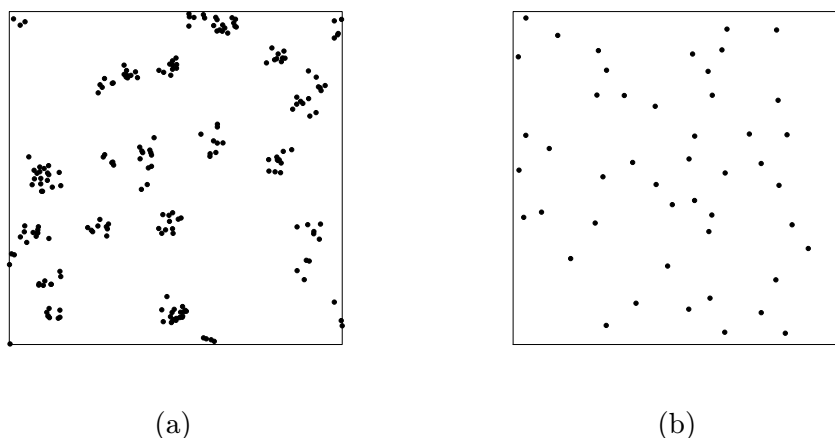
Důležitým zástupcem shlukových bodových procesů jsou Neyman-Scottovy procesy, které byly poprvé představeny Neymanem a Scottem v roce 1952 (Neyman a Scott, 1952) jako model pro bodové vzory, které vytvářejí galaxie ve vesmíru. Jako zástupce třídy shlukových procesů má Neyman-Scottův proces četná využití, např. ho používáme jako model pro výskyt borovic ve volné přírodě (více v článku Tanaka, Ogata a Stoyan (2008)). Tento proces vzniká tak, že nejdříve vygenerujeme homogenní Poissonův proces. Každý z bodů tohoto procesu pak generuje náhodný počet bodů rozmístěných ve shluku kolem bodu původního. Rodičovské body jsou tedy body Poissonova procesu s intenzitou λ_p . Počet dceřiných bodů v jednom shluku je náhodný, tyto body jsou kolem bodu rodičovského rozmístěny nezávisle, dle nějaké dvourozměrné hustoty. Zdůrazněme, že rodičovské body nepozorujeme, pozorujeme pouze body dceřiné.

Thomasové procesy jsou speciálním případem Neyman-Scottova procesu. Počet bodů ve shluku je zde náhodná veličina s Poissonovým rozdělením, dceřiné body jsou kolem rodičovských bodů rozmístěny s hustotou

$$f_{\sigma}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\sigma^2} + \frac{x_2^2}{\sigma^2} \right) \right\},$$

tedy s hustotou dvourozměrného normálního rozdělení s nulovým vektorem středních hodnot a varianční maticí $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$.

Realizaci tohoto procesu můžeme vidět na obrázku 1.2a.



Obrázek 1.2: (a) Realizace Thomasové shlukového procesu s $\lambda_p = 30$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.02$. Střední hodnota počtu bodů v jednom shluku je 8. (b) Realizace Matérnova procesu s pevným jádrem s parametry $\lambda_p = 80$ a $r_0 = 0.05$.

1.2.3 Matérnův proces s pevným jádrem

Bodovým procesem s pevným jádrem nazveme takový proces X , pro který neexistují dva různé body $x, y \in X$, jejichž vzdálenost by byla menší než nějaké pevně dané r_0 . Tato třída procesů obvykle popisuje vzory tvořené středy navzájem se nepřekrývajících objektů, většinou kruhů nebo koulí s poloměrem $R \leq \frac{r_0}{2}$. Tato třída procesů slouží jako typický příklad regulárních dat. Tyto procesy mohou vznikat dvěma způsoby. Jednak vznikají promazáváním některých bodů procesu (např. při vysetí určitého počtu semen nevyklíčí všechna, některá semena se v půdě neuchytí). Druhou příčinou vzniku procesů s pevným jádrem je samotná podstata objektů, které bodový proces reprezentuje. Jedná-li se o objekty, které mají určitou velikost a nemohou se navzájem pronikat (tzv. „hard objects“), pak k sobě dva tyto objekty nemohou být blíže, než jim dovoluje jejich velikost.

Matérnův proces s pevným jádrem typu II vzniká promazáváním bodů stationárního Poissonova procesu s intenzitou λ_p dle určitého klíče. Jednotlivým bodům výchozího Poissonova procesu nezávisle přiřadíme čísla z intervalu $(0, 1)$, jako kóty nám tedy slouží realizace náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, 1)$. Bod x původního Poissonova procesu s kótou $m(x)$ zachováme, jestliže se pro nějaké pevně dané r_0 v okolí $b(x, r_0)$ bodu x nenachází žádné body původního Poissonova procesu s kótou menší než kóta $m(x)$. Příklad realizace tohoto procesu můžeme vidět na obrázku 1.2b.

1.3 Základní charakteristiky bodového procesu

V následující kapitole se seznámíme se základními charakteristikami bodového procesu. Např. intenzita (nebo také první moment) bodového procesu je analogií

ke střední hodnotě náhodné veličiny. Zajímat nás bude zejména tzv. K-funkce, která je často využívána při statistické analýze bodových procesů.

1.3.1 Základní charakteristiky prvního a druhého řádu

V této části se zaměříme na ty charakteristiky bodového procesu, které popisují jeho vlastnosti prvního a druhého řádu. Zaměříme se na intenzitu a párovou korelační funkci. Připravíme si tak ucelený teoretický základ pro zavedení K-funkce, jejíž definice bude následovat v další podkapitole.

Mějme bodový proces

$$X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbf{N}, \mathcal{N}).$$

Buď $N \in \mathbf{N}$. Připomeňme, že $N_X(B)$, $B \in \mathfrak{B}_0^2$ značí počet bodů procesu X , které padnou do množiny B , a že pro libovolnou množinu $B \in \mathfrak{B}_0^2$ je $N_X(B)$ náhodná veličina. Podívejme se nyní na její první a druhý moment.

Definice 7 (Míra intenzity prvního řádu). *Míra intenzity prvního řádu μ procesu X na \mathbb{R}^2 je dána vztahem $\mu(B) = \mathbb{E}N_X(B)$, $B \in \mathfrak{B}_0^2$. Symbolem \mathbb{E} značíme střední hodnotu náhodné veličiny.*

Definice 8 (Funkce intenzity bodového procesu). *Můžeme-li míru intenzity prvního řádu μ zapsat jako $\mu(B) = \int_B \lambda(u) du$, kde λ je nezáporná funkce, pak λ nazýváme funkcí intenzity bodového procesu X .*

K předchozí definici uvedme několik poznámek.

- Je-li λ konstantní, nazýváme ji intenzitou a říkáme, že bodový proces X je homogenní (nebo též mluvíme o stacionaritě prvního řádu procesu X), viz Møller a Waagepetersen (2004, definice 4.2). Jinak mluvíme o nehomogenním procesu.
- Heuristicky je $\lambda(u) du$ pravděpodobnost výskytu nějakého bodu procesu v nekonečně malém okolí bodu u o obsahu du .
- Pro homogenní proces λ spočítáme jako střední hodnotu počtu bodů na jednotkovou plochu.

Definice 9 (Faktoriální momentová míra druhého řádu). *Faktoriální momentová míra druhého řádu $\alpha^{(2)}$ na $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ je dána vztahem*

$$\alpha^{(2)}(C) = \mathbb{E} \sum_{x,y \in X}^{\neq} \mathbf{1}\{(x,y) \in C\}, \quad C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2),$$

kde $\mathbf{1}$ značí indikátor dané množiny, tj.

$$\mathbf{1}\{(x,y) \in C\} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (x,y) \in C, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$ značí borelovskou σ -algebru na součinném prostoru $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Symbolem $\sum_{x,y \in X}^{\neq}$ rozumíme, že sčítáme přes takové dvojice bodů (x, y) procesu X , pro které platí $x \neq y$. Poznamenejme, že existuje vztah mezi $\alpha^{(2)}$ a μ :

$$\mathbb{E}(N_X(B_1)N_X(B_2)) = \alpha^{(2)}(B_1 \times B_2) + \mu(B_1 \cap B_2), \quad B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Tedy $\alpha^{(2)}$ a μ určují druhé momenty náhodné veličiny $N_X(B)$.

Definice 10 (Funkce intenzity druhého řádu). *Lze-li faktoriální momentovou míru druhého řádu $\alpha^{(2)}$ zapsat jako $\alpha^{(2)}(C) = \iint \mathbf{1}\{(x, y) \in C\} \varrho^{(2)}(x, y) dx dy$, $C \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, kde $\varrho^{(2)}$ je nezáporná funkce, pak $\varrho^{(2)}$ nazýváme funkcí intenzity druhého řádu.*

Poznámka. Heuristicky je $\varrho^{(2)}(x, y) dx dy$ pravděpodobnost, že pozorujeme dvojici bodů $(u, v) \in X$, které se (zároveň) objeví v nekonečně malých okolích bodů x a y s obsahy dx a dy .

Jak již bylo uvedeno, Poissonův proces je základním modelem pro procesy, mezi jejichž body neexistují žádné interakce. Proto při studiu bodových procesů chceme vlastnosti konkrétního procesu porovnávat s procesem Poissonovým. Stejně tak chceme porovnávat procesy s různými intenzitami. V tomto případě je užitečné znormovat hodnoty funkce intenzity druhého řádu, a to následujícím způsobem.

Definice 11 (Párová korelační funkce). *Jestliže existují λ i $\varrho^{(2)}$, pak párovou korelační funkci definujeme jako $g(x, y) = \frac{\varrho^{(2)}(x, y)}{\lambda(x)\lambda(y)}$, kde $x, y \in \mathbb{R}^2$.*

K definici párové korelační funkce dodejme následující pozorování.

- Pro jednoduchost v definici 11 uvažujeme, že $\frac{a}{0} = 0$ pro každé $a \geq 0$.
- Pro Poissonův proces máme $\varrho^{(2)}(u, v) = \lambda(u)\lambda(v)$, tedy párová korelační funkce je konstantně rovna 1, viz Møller a Waagepetersen (2004, sekce 4.1.1).
- Díky tomuto znormování „očistíme“ funkci intenzity druhého řádu od vlivů prvního řádu. Párová korelační funkce nám potom udává informaci o interakcích mezi jednotlivými body procesu.
- Je-li X stacionární, pak g je invariantní vůči posunutí, viz Møller a Waagepetersen (2004, sekce 4.1.1), tj.

$$g(u, v) = g(u - v)$$

Tato rovnost platí ve smyslu skoro všude. Navíc zde dochází k přetížení symbolu g , který značí jednak původní párovou korelační funkci, jednak funkci popisující, jak párová korelační funkce závisí na rozdílu u a v .

- Pro třídu procesů s pevným jádrem samozřejmě platí, že $g(u) = 0$ pro všechna $u \in [0, r_0]$, viz Illian a kol. (2008, str. 387).

Následující dvě tvrzení ilustrují význam funkce intenzity λ resp. funkce intenzity druhého řádu $\varrho^{(2)}$ bodového procesu X . Známe-li tyto charakteristiky a máme-li nějakou měřitelnou funkci f , resp. h , můžeme jednoduše spočítat střední hodnotu náhodné veličiny $\sum_{x \in X} f(x)$ resp. $\sum_{x, y \in X}^{\neq} h(x, y)$.

Tvrzení 2 (Campbellova formule I). *Bud' X bodový proces na \mathbb{R}^2 s mírou intenzity prvního řádu μ a $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak náhodný součet $\sum_{x \in X} f(x)$ je náhodná veličina se střední hodnotou*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} f(x) \right] = \int f(x) \, d\mu(x).$$

Speciálně, je-li X bodový proces s funkcí intenzity λ , pak

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \in X} f(x) \right] = \int f(x) \lambda(x) \, dx.$$

Důkaz. Viz Baddeley a kol. (2007, Věta 2.2). □

Tvrzení 3 (Campbellova formule II). *Bud' X bodový proces na \mathbb{R}^2 , $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Pak*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x, y \in X}^{\neq} h(x, y) \right] = \iint h(x, y) \, d\alpha^{(2)}(x, y).$$

Speciálně, je-li X bodový proces s funkcí intenzity druhého řádu $\varrho^{(2)}$, pak

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x, y \in X}^{\neq} h(x, y) \right] = \iint h(x, y) \varrho^{(2)}(x, y) \, dx \, dy. \quad (1.1)$$

Důkaz. Důkaz tohoto tvrzení provedeme obdobně jako u tvrzení 2. □

1.3.2 K-funkce

V této podkapitole se zaměříme na zavedení K-funkce, jedné z tzv. popisných charakteristik bodového procesu. Po popisných charakteristikách požadujeme, aby dávaly jasný a vyčerpávající popis bodového vzoru za pomoci čísel, funkcí nebo diagramů. Připomínáme, že dvourozměrnou Lebesgueovu míru množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ značíme $|A|$.

Definice 12 (Redukovaná míra intenzity druhého řádu). *Nechť bodový proces X má intenzitu λ a míra*

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \sum_{x,y \in X}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{x \in A, y - x \in B\}}{\lambda(x)\lambda(y)}, \quad B \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

nezávisí na volbě $A \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $0 \leq |A| \leq \infty$. Pak řekneme, že X je „second order intensity reweighted stationary“ a \mathcal{K} nazýváme redukovaná míra intenzity druhého řádu.

Pro jednoduchost v předchozí definici platí, že $\frac{a}{0} = 0$ pro $a \geq 0$. Pro pojem „second order intensity reweighted stationarity“ budeme užívat zkráceného označení SOIRS. Uvědomme si, že stacionarita bodového procesu X implikuje SOIRS. Nechť X je stacionární bodový proces s intenzitou λ a mějme nějaké $s \in \mathbb{R}^2$, kde $X + s$ je posunutý proces X . Pak

$$\sum_{x,y \in X}^{\neq} \mathbf{1}\{x \in A, y - x \in B\} = \sum_{x,y \in X}^{\neq} \mathbf{1}\{x + s \in A, (y + s) - (x + s) \in B\},$$

neboť $(y + s) - (x + s) = y - x$, a proces X je stacionární, rozdělení X je tedy stejné jako rozdělení $X + s$, a tedy rozdělení náhodné veličiny $N_X(A)$ je stejné jako rozdělení náhodné veličiny $N_{X+s}(A)$. Proto je míra ν

$$\nu(A) = |A| \lambda^2 \mathcal{K}(B) = \sum_{x,y \in X}^{\neq} \mathbf{1}\{x \in A, y - x \in B\}$$

invariantní vůči posunutí $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2$ při pevném B . Tedy ν je nějaký násobek Lebesgueovy míry (viz Rataj (2006, Lemma 9.1)). Dostáváme

$$|A| \lambda^2 \mathcal{K}(B) = \nu(A) = c |A|,$$

tedy $c = \lambda^2 \mathcal{K}(B)$. Ukázali jsme, že $\mathcal{K}(B)$ nezávisí na volbě množiny A .

Jestliže párová korelační funkce existuje a je invariantní vůči posunutí, dostáváme vztah

$$\mathcal{K}(B) = \int_B g(u) \, du, \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Rovnost vyplývá ze vztahu (1.2) a (1.1).

Nyní nám nic nebrání vyslovit definici klasické K-funkce. Definice K-funkce se poprvé objevila v článku Ripley (1976). Námi uvedená definice odpovídá definici v Baddeley, Møller a Waagepetersen (2000), která Ripleyho definici rozšiřuje. Připomeňme, že symbolem $b(o, r)$ v \mathbb{R}^2 značíme kruh se středem v počátku soustavy souřadnic o a poloměrem r .

Definice 13 (K-funkce). *K-funkce je pro stacionární bodový proces X definována jako*

$$K(r) = \mathcal{K}(b(o, r)) = \int_{b(o,r)} g(u) \, du.$$

Poznámka. Uvědomme si, že tato definice je korektní. Jak jsme ukázali výše, stacionarita procesu implikuje, že $\mathcal{K}(b(o, r))$ nezávisí na volbě množiny A z definice 12.

Ve stacionárním případě intuitivně chápeme výraz $\lambda K(r)$ jako střední hodnotu počtu bodů, jejichž vzdálenost od počátku je menší nebo rovna r , za podmínky, že se v bodě $(0, 0)$ nachází nějaký bod procesu X . Bod $(0, 0)$ ovšem do výsledné sumy nezapočítáváme.

1.3.3 Neparаметrický odhad K-funkce

V této podkapitole se zaměříme na neparаметrický odhad K-funkce. Abychom mohli tuto funkci spočítat na základě reálných dat, potřebujeme takový odhad, který by nepředpokládal znalost párové korelační funkce ani dalších charakteristik daného bodového procesu. Nechť X je stacionární bodový proces v rovině, jehož párová korelační funkce a redukovaná míra intenzity druhého řádu existují.

Nejprve se zaměříme na redukovanou míru intenzity druhého řádu, pro kterou platí vztah

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \sum_{x, y \in X}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{x \in A, y - x \in B\}}{\lambda^2},$$

pro nějakou $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Ekvivalentně můžeme psát

$$\lambda^2 \mathcal{K}(B) = \mathbb{E} \sum_{x \in X \cap A, y \in X}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y \in B + x\}}{|A|},$$

kde $B + x = \{b + x : b \in B\}$. Neparаметrickým odhadem $\lambda^2 \mathcal{K}(B)$ je poté

$$\widehat{\lambda^2 \mathcal{K}}(B) = \sum_{x \in X \cap A, y \in X}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y \in B + x\}}{|A|}.$$

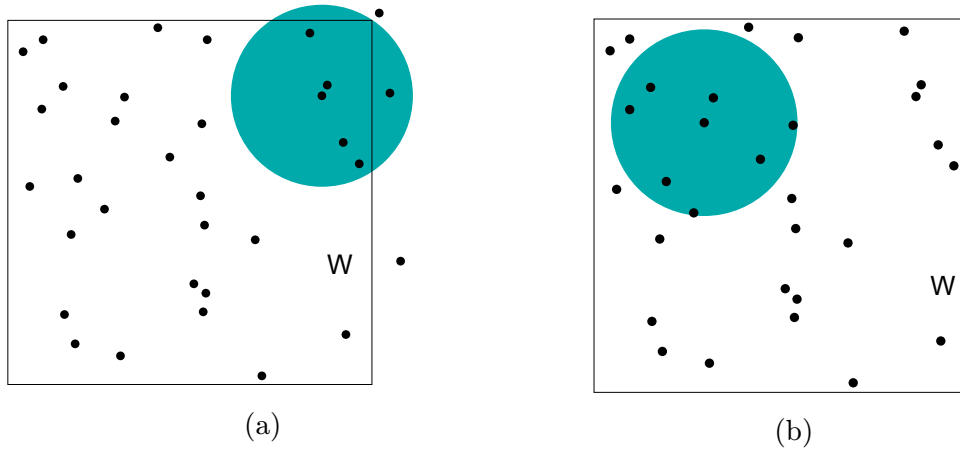
Tento odhad je zřejmě nestranný.

Uvědomme si, že bodový proces ale vždy pozorujeme na nějakém omezeném pozorovacím okně W , pro které platí $W \subset \mathbb{R}^2$, $|W| > 0$. Odhadujme nyní intenzitu procesu λ . Přirozeným nestranným odhadem intenzity je

$$\hat{\lambda} = \frac{n(X)}{|W|},$$

kde symbolem $n(X)$ označujeme počet bodů procesu X v pozorovacím okně W , tedy $n(X) = N(W)$. Poznamenejme, že tento odhad je odhad metodou maximální věrohodnosti pro homogenní Poissonův proces, viz Møller a Waagepetersen (2004, sekce 4.3.1). Pro odhady K-funkce však budeme potřebovat odhadnout druhou mocninu intenzity λ . Ripley v roce 1976 jen umocnil $\hat{\lambda}$, což vedlo k odhadu, který není nestranný. Později autoři začali používat odhad

$$\hat{\lambda}_n^2 = \frac{n(X)(n(X) - 1)}{|W|^2},$$



Obrázek 1.3: (a) Okrajový efekt, do středu jednoho z bodů realizace procesu je umístěn kruh o poloměru $r = 0.25$. (b) Realizace bodového procesu s pozorovacím oknem W , do jednoho z bodů procesu X jsme umístili kruh o poloměru $r = 0.25$.

který je nestranným odhadem λ^2 pro homogenní Poissonův proces, viz Illian a kol. (2008, str. 231). Pro stacionární homogenní proces X , který není Poissonův, již tento odhad není nestranný. I přesto ho v naší práci budeme využívat.

Při práci s daty tedy máme k dispozici pouze ty body procesu, které padnou do pozorovacího okna W . Neznamená to ale, že by vně pozorovacího okna žádné body procesu neexistovaly. To s sebou nese některá úskalí. Při tvorbě empirického odhadu K-funkce se musíme vypořádat s tím, že pro některé body x procesu X budou existovat takové body y procesu X , že rozdíl $y - x$ sice patří do množiny $b(o, r)$, ale body y leží mimo pozorovací okno, viz obrázek 1.3a. Kvůli tomuto jevu, který nazýváme okrajový efekt, zavádíme okrajové korekce. My zde uvedeme dva druhy korekcí, a to korekci minusovou a korekci translační, více např. v Illian a kol. (2008, sekce 4.2.2).

Minusová korekce se vyznačuje tím, že pro danou hodnotu r neuvažujeme všechny dvojice bodů procesu, které náleží do pozorovacího okna, ale uvažujeme pouze ty dvojice bodů (x, y) , pro které platí, že x leží uvnitř zmenšeného pozorovacího okna $W_{\ominus r}$, kdežto y leží uvnitř původního pozorovacího okna W . $W_{\ominus r}$ je zkrácený zápis pro $W \ominus b(0, r)$, kde \ominus značí Minkowského rozdíl, tedy

$$W_{\ominus r} = \bigcap_{b \in b(o, r)} (W - b),$$

kde $W - b = \{w - b : w \in W\}$. Tato korekce však pro velké hodnoty r může vést ke ztrátě informací, proto ji v naší práci nebudeme používat.

Mějme nyní x představující libovolný zafixovaný bod procesu X . Nechť Y označuje množinu bodů procesu X takovou, že rozdíl $y - x$ padne do množiny $b(o, r)$. Myšlenkou translační korekce je dvojicím bodů (x, y) , $y \in Y$, přiřazovat váhy, a dále počítat vážený průměr těchto hodnot. Jednotlivé váhy jsou tvaru

$$\frac{|W|}{|W \cap W_{y-x}|},$$

kde W_{y-x} značí množinu $W + (y - x)$. Poznamenejme, že $W \cap W_{y-x} = W_x \cap W_y$.

Váhou je tedy podíl plochy původního pozorovacího okna a plochy průniku původního pozorovacího okna s oknem posunutým o rozdíl $y - x$.

Neparametrickým odhadem $\lambda^2 K(r)$ s využitím translační korekce je tedy

$$\widehat{\lambda^2 K}(r) = \sum_{x,y \in X \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y \in b(x, r)\}}{|W \cap W_{y-x}|}.$$

Tento odhad je odhadem nestranným, viz Møller a Waagepetersen (2004, Lemma 4.2).

Neparametrický odhad samotné K-funkce je potom tvaru

$$\widehat{K}(r) = \sum_{x,y \in X \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y - x \in b(o, r)\}}{\widehat{\lambda}_n^2 |W \cap W_{y-x}|}. \quad (1.3)$$

Pro Poissonův bodový proces je tento odhad podílově nestranný. Pro stacionární bodový proces, který není Poissonův, tento odhad nestranný (ani podílově) není. Velmi jednoduše řečeno, při provádění odhadu K-funkce postupně kolem každého bodu procesu uděláme kruh o poloměru r a pozorujeme, kolik bodů procesu do tohoto kruhu padne. Ilustraci najdeme na obrázku 1.3b.

2. Varianty K-funkce pro stacionární bodové procesy

V předchozí kapitole jsme stručně vyložili základy teorie bodových procesů, včetně definice klasické K-funkce. Tato funkce je využívána při analýze bodových procesů, kde slouží jako nástroj při rozhodování, zda jsou body procesu rozmístěny zcela náhodně či nikoliv. Jak již víme, Poissonův proces je modelem pro tyto procesy, jejichž body jsou rozmístěny náhodně, bez jakýchkoliv interakcí. Nabízí se tedy myšlenka porovnávat hodnoty K-funkce pro konkrétní proces s hodnotami pro proces Poissonův. Pokud K-funkce pro daný proces dává vyšší hodnoty, než stejná funkce na Poissonově procesu, usuzujeme, že mají body procesu tendenci se shlukovat, a tedy nejsou rozmístěny zcela náhodně (hlubší popis metod pro analýzu bodových procesů přesahuje rozsah naší práce, více např. v publikaci Illian a kol. (2008, kapitola 7)). Samozřejmě je nasnadě tuto myšlenku prohloubit a zajímat se, zda body daného procesu nevytvářejí nějaký vzor, resp. zdali se neshlukují v rámci nějakého směru. K tomu účelu bude potřeba upravit klasickou definici K-funkce tak, aby byla citlivá na nějaký směr či orientaci. Je zřejmé, že kruh je pro tento účel zcela nevhodná množina, neboť u kruhu nemá smysl jakoukoliv orientaci diskutovat. V následujícím textu nabídneme několik vhodných množin, a k nim příslušných variant K-funkce. Dodejme, že problémem směrové analýzy se zabývali již Ohser a Stoyan (1981). V následujícím textu předložíme stručné shrnutí poznatků o variantách K-funkce pro stacionární bodové procesy. Vycházet budeme z článků Stoyan (1991), Redenbach a kol. (2009) a Møller a kol. (2015), zabývajících se danou problematikou.

2.1 Válcová K-funkce a její odhad

V této části si představíme válcovou variantu K-funkce, kterou Møller a kol. (2015) ve svém článku využívají ke studiu bodových vzorů v rovině i v prostoru. Válec jako množinu citlivou na změnu orientace uvažují proto, že se zabývají detekováním lineárních struktur v bodových vzorech.

Zavedme nyní množinu

$$C(r, t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, |z| \leq t\}.$$

$C(r, t)$ představuje válec se středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy $r > 0$, výškou $2t > 0$, který je orientovaný ve směru osy z . Buď $w \in \mathbb{R}^3$. Symbolem \mathcal{O}_w budeme značit matici rotace takovou, že $w = \mathcal{O}_w e_3$, kde e_3 značí kanonický vektor $(0, 0, 1)^T$. Potom

$$C_w(r, t) = \mathcal{O}_w C(r, t)$$

představuje válec se středem v počátku soustavy souřadnic, poloměrem podstavy $r > 0$, výškou $2t > 0$, který je orientovaný ve směru w .

V souladu s definicí 13, válcovou K-funkci zavádíme jako

$$K_w(r, t) = \int_{C_w(r, t)} g(u) \, du, \quad w \in \mathbb{R}^3, r > 0, t > 0.$$

Dodejme, že autoři tuto variantu K-funkce získali přizpůsobením časoprostorové K-funkce z článku Diggle a kol. (1995). U časoprostorové K-funkce $K(r, t)$ počítáme dvojice bodů $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ pro které platí $\|x_1 - x_2\| \leq r$ a zároveň $|t_1 - t_2| \leq t$. Jelikož souřadnice t_1, t_2 jako souřadnice času mají jiný význam než prostorové souřadnice x_1, x_2 , můžeme v tomto případě také mluvit o jistém druhu anizotropie. Studium časoprostorové K-funkce resp. časoprostorových procesů je objektem zájmu i v aktuálních vědeckých pracích, viz např. Møller a Ghorbani (2012). Neparametrickým odhadem válcové K-funkce je

$$\widehat{K}_w(r, t) = \sum_{x, y \in X \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y - x \in C_w(r, t)\}}{\widehat{\lambda}_n^2 |W \cap W_{y-x}|}.$$

Jelikož chceme za pomoci této varianty K-funkce detekovat dominantní lineární směr v bodovém vzoru, uvažujeme takový válec, pro který je $r < t$. Autoři za pomoci této charakteristiky zkoumali trojrozměrný bodový vzor, tvořený 623 buňkami šedé hmoty lidského mozku. U tohoto vzoru chtěli vyvrátit předpoklad úplné prostorové náhodnosti a potvrdit tak hypotézu, že jsou tyto buňky uspořádány ve sloupcích.

Uvědomme si, že definici válcové K-funkce můžeme s drobnou obměnou použít i v rovině, stačí místo válce uvažovat obdélník s délkou kratší strany $2r$, délkou delší strany $2t$, středem v počátku soustavy souřadnic (středem myslíme průsečík úhlopříček) a osou kratší strany orientovanou ve směru osy y . Místo rotací v \mathbb{R}^3 pak uvažujeme rotace v rovině. Za pomoci obdélníkové varianty K-funkce autoři studovali dvourozměrný bodový vzor tvořený lokacemi 110 kapek ve Welsh Valleys ve Spojeném království. V tomto bodovém vzoru je jasná lineární orientace, neboť kaple byly vystavěny podél 4 více méně paralelních údolí.

2.2 Směrová K-funkce

Zvláštní pozornost v této práci patří směrové K-funkci, která místo kruhu využívá kruhových výsečí. Tuto variantu K-funkce budeme dále využívat při výpočtech na reálných i simulovaných datech. Směrová K-funkce je v odborné literatuře nejběžnější, jednak díky tomu, že typicky jsou data pozorována v rovině, a také díky přirozené parametrizaci kruhové výseče, vycházející ze vztahu mezi polárními a kartézskými souřadnicemi.

2.2.1 Směrová K-funkce v \mathbb{R}^2

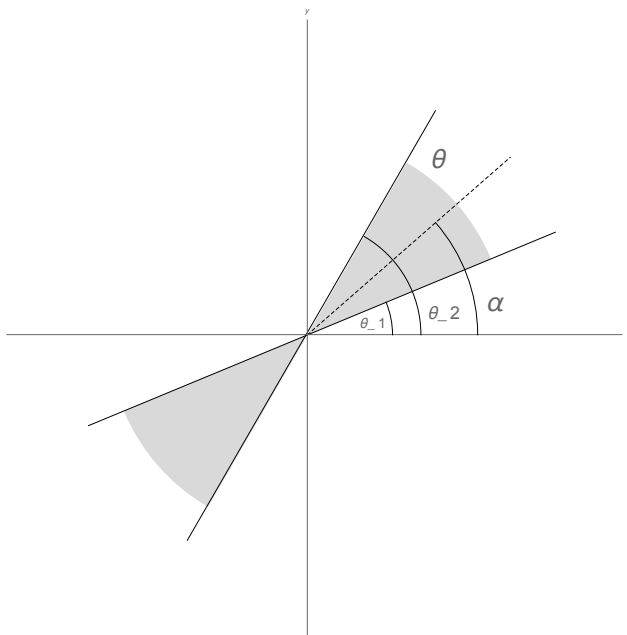
Studiem anizotropních bodových procesů v rovině se zabývá D. Stoyan ve svém článku Stoyan (1991). Autor se zaměřuje na problematiku, jak myšlenky analýzy stacionárních izotropních procesů zobecnit pro anizotropní bodové procesy. Při diskuzi o anizotropní variantě K-funkce popisuje dvě množiny: jednostrannou kruhovou výseč a mezikruží proniknuté s touto výsečí. Stoyan přímo neuvádí pojem směrová K-funkce, ale již upozorňuje na to, že důležitým prvkem při zkoumání vlastností anizotropních procesů je podíl jeho varianty K-funkce využívající kruhové výseče a K-funkce klasické.

My budeme v této i v dalších kapitolách pracovat s oboustrannou kruhovou výsečí, zejména proto, že v empirickém odhadu klasické K-funkce vidíme roz-

díl polohy nějakých dvou bodů procesu dvakrát, jednou s daným znaménkem, a podruhé se znaménkem opačným. Mějme množinu

$$\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2), \theta_1, \theta_2 \in [0, \pi], r > 0.$$

\mathcal{V} reprezentuje oboustrannou kruhovou výseč se středem v počátku soustavy souřadnic, vymezenou přímkami svírajícími s osou x úhel θ_1 resp. θ_2 a kružnicí o poloměru r . Tuto množinu můžeme vidět na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Množina $\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)$.

Šířku výseče θ spočítáme jako $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Směrem (orientací) výseče rozumíme úhel α , který svírá s osou x osa úhlu, který svírají přímky ohraničující tuto výseč. Vypočteme jej jako $\alpha = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Poznamenejme, že rozdíl $\theta_2 - \theta_1$ musí být menší nebo roven π . Zřejmě platí

$$\mathcal{V}(r, 0, \pi) = b(o, r).$$

Při parametrizaci oboustranné kruhové výseče využíváme standardní parametrizaci kruhu a funkci arctan, která se vyskytuje při přechodu z polární soustavy souřadnic do kartézské. Připomeňme, že kvůli vlastnostem funkce arctan si musíme dávat pozor, ve kterém kvadrantu se přímky svírající s osou x úhly θ_1 a θ_2 nacházejí. Nic nám již nebrání definovat směrovou K -funkci a její neparametrický odhad.

Definice 14. Směrovou K -funkci $K(r, \theta_1, \theta_2)$ definujeme jako

$$K(r, \theta_1, \theta_2) = \int_{\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)} g(u) du,$$

kde $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, r > 0$.

Obdobnou definici uvádí v sekci 4.2.2 Møller a Waagepetersen (2004).

Neparametrický odhad směrové K-funkce, s využitím translační korekce, je následujícího tvaru:

$$\widehat{K}(r, \theta_1, \theta_2) = \sum_{x, y \in X \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y - x \in \mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)\}}{\hat{\lambda}_n^2 |W \cap W_{y-x}|}.$$

Vycházíme zde ze vzorce pro odhad klasické K-funkce (1.3). Povšimněme si, že jsme v tomto vzorci pouze nahradili množinu $b(o, r)$ množinou $\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)$. Upozorňujeme, že kvůli odhadu čtverce intenzity se opět nejedná o nestranný odhad.

Jak již bylo naznačeno, v úvahu přicházejí další varianty K-funkce, využívající množin citlivých na změnu orientace. Můžeme uvažovat např. jednostranné výseče, mezikruží proniknuté s výsečí, různě orientované obdélníky atd. Je ovšem potřeba zvážit, zda nám na konkrétních datech mohou tyto varianty přinést více informací, než výše definovaná směrová K-funkce.

2.2.2 Směrová K-funkce v \mathbb{R}^3

V článku Redenbach a kol. (2009) se autoři zaměřují na studium polárního ledu (konkrétně z Antarktidy a Grónska). Blok takového ledu se skládá z jednotlivých vrstev vznikajících postupným stlačováním masy již napadlého sněhu vahou sněhu čerstvě napadaného. Díky zamrznutí vzduchových bublin má polární led pórovitou strukturu. Tyto póry můžeme reprezentovat za pomoci bodového procesu v trojrozměrném eukleidovském prostoru. Vzhledem k tomu, že blok polárního ledu čelí ve vertikálním směru tlaku nově napadaného sněhu, a navíc může docházet k posunům jednotlivých vrstev polozmrzlého sněhu, očekávali bychom, že bodový proces reprezentující lokace pórů nebude izotropní. Autoři se zde zabývají otázkou, jak vhodně zavést trojrozměrnou analogii směrové K-funkce. Na základě této upravené popisné charakteristiky pak představují testy izotropie bodového procesu.

Autoři jako množinu citlivou na orientaci volí oboustrannou kulovou výseč. Označme

$$S_w(r, \theta) = \left\{ R_w \begin{pmatrix} s \sin \vartheta \cos \varphi \\ s \sin \vartheta \sin \varphi \\ s \cos \vartheta \end{pmatrix} : s \in [0, r], \vartheta \in [0, \theta], \varphi \in [0, 2\pi] \right\},$$

kde $r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi$, w značí jednotkový vektor z \mathbb{R}^3 a R_w matici rotace, která zobrazuje osu z do směru vektoru w . $S_w(r, \theta)$ představuje jednostrannou kulovou výseč (umístěnou do počátku soustavy souřadnic) orientovanou ve směru w . Parametr θ určuje šířku této kulové výseče. Označme $\mathcal{S}_w(r, \theta)$ oboustrannou variantu této kulové výseče orientované ve směru w . Směrovou K-funkci v \mathbb{R}^3 tedy spočítáme jako

$$K_w(r, \theta) = \int_{\mathcal{S}_w(r, \theta)} g(u) du, \quad w \in \mathbb{R}^3, r > 0, 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Její neparametrický odhad je dán vztahem

$$\widehat{K}_w(r, \theta) = \sum_{x, y \in X \cap W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}\{y - x \in \mathcal{S}_w(r, \theta)\}}{\hat{\lambda}_n^2 |W \cap W_{y-x}|}.$$

Zde i u definice válcové K-funkce postupujeme při výpočtu empirického odhadu obdobně jako ve vzorci (1.3). Uvědomme si, že pokud bychom tuto definici modifikovali pro použití v rovině, obdržíme (pouze s jinou volbou parametrizace) stejné vzorce jako výše v části o směrové K-funkci v rovině. V článku je testována hypotéza, že jelikož je led ve vertikálním směru stlačován, bude se chování procesu ve směru osy z lišit od chování ve směrech osy x a y . Ke studiu bodového procesu autoři používají oboustranné kulové výseče orientované postupně ve směrech osy x , y a z .

2.2.3 Implementace odhadu směrové K-funkce v softwaru R

Jelikož v následující kapitole naší práce budeme potřebovat počítat neparametrický odhad směrové K-funkce na reálných i simulovaných datech v softwaru R, zajímá nás, jaké funkce týkající se klasické K-funkce a její směrové varianty jsou v tomto softwaru k dispozici. Knihovna **spatstat** nabízí funkci **Kest**, která pro zadanou realizaci bodového procesu spočítá empirický odhad klasické K-funkce, uživatel si může vybrat z několika druhů okrajových korekcí. Tato knihovna nabízí také funkci **Ksector**, která pro zadanou realizaci spočte empirický odhad varianty klasické K-funkce, která pracuje se jednostrannou kruhovou výsečí.

Nejdříve stručně popišme, jak funguje výše zmíněná funkce **Kest**. V souladu s předchozí kapitolou uvažujeme translační okrajovou korekci. Nejdříve upozorníme, že **Kest** počítá hodnoty empirického odhadu klasické K-funkce pro vektor r (ne tedy pro jednu konkrétní hodnotu) přípustných poloměrů kruhu ze vzorce (1.3). Tato funkce u každé dvojice bodů zadané realizace bodového procesu nejdříve zkontroluje, jestli jsou tyto body od sebe vzdáleny nejvýše tolik, kolik je maximální možná hodnota poloměru r . Při tom si u každé dvojice, kterou vyhodnotí jako „blízkou“, uloží souřadnice obou bodů dvojice a eukleidovskou vzdálenost mezi nimi. Dále si pro každou „blízkou“ dvojici spočte váhu opravy u translační korekce. Z eukleidovských vzdáleností mezi body jednotlivých dvojic a vah opravy translační korekce vytváří tato funkce vážený histogram. Hodnota $Kest(r_i)$ je poté součet hodnot histogramu pro intervaly $[0, r_1), [r_1, r_2), \dots, [r_{i-1}, r_i)$ podělený součinem odhadu čtverce intenzity procesu a plochy pozorovacího okna.

Zabudovanou funkci **Ksector** jsme v naší práci nevyužili zejména proto, že je její zdrojový kód poněkud nepřehledný a komplikovaný, navíc obsahuje části, které v naší práci nepotřebujeme. Pro lepší pochopení principu výpočtu odhadu K-funkce v softwaru R jsem se tedy rozhodl vlastními silami upravit funkci **Kest**, a to tak, aby místo kruhu využívala různě orientovaných kruhových výsečí.

Při našich úpravách jsme kód funkce nejprve kvůli přehlednosti a názornosti zbavili všech nadbytečných částí (odstranili jsme volby jiné okrajové korekce než translační, neuvažujeme některá ošetření špatně zadaných vstupních parametrů atd.). Abychom nepočítali empirický odhad K-funkce klasické, ale směrové, bylo potřeba počítat vážený histogram pouze z eukleidovských vzdáleností těch bodů, které padnou do oboustranné kruhové výseče. Z vektoru, který uchovával informace o dvojicích vyhodnocených jako „blízké“, jsme tedy vybrali podvektor, který obsahuje pouze ty dvojice, které padnou do množiny $\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)$. Celý kód takto vzniklé funkce **Ksmerova** nalezneme v elektronické příloze. Několik situací ověřujících správnost naší implementace můžeme vidět v příloze, konkrétně

na obrázcích A.1 a A.2. Výhodu tohoto postupu spatřujeme v tom, že obdobně můžeme „promazat“ nevyhovující dvojice bodů pro libovolnou volbu množiny citlivé na změnu orientace.

3. Směrová K-funkce pro shluková a regulární data

V této kapitole se zaměříme na možnosti využití směrové K-funkce při analýze bodových procesů. Pro rovinné Thomasové procesy uvedeme srovnání hodnot směrové K-funkce a jejího neparametrického odhadu. U anizotropních shlukových i regulárních procesů nás budou zajímat hodnoty směrové K-funkce při různých orientacích množiny \mathcal{V} . Tuto funkci nakonec využijeme k detekci tzv. dominantního směru při použití jak reálných, tak i simulovaných dat.

3.1 Směrová K-funkce pro Thomasové shlukové procesy

Jak již bylo řečeno, Thomasové procesy jsou jednoduchým matematickým modelem pro reálné objekty, jako např. rostliny ve volné přírodě. Připomeňme, že v první kapitole jsme definovali izotropní Thomasové proces jako speciální případ Neyman-Scottových procesů. Zobecníme nyní tuto definici v následujícím smyslu.

Definice 15 (Thomasové anizotropní proces). *Uvažujme Neyman-Scottův proces, kde počet bodů ve shluku je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením a jehož dceřiné body jsou kolem bodů rodičovských uspořádány s hustotou*

$$f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} \right) \right\},$$

tedy s hustotou dvourozměrného normálního rozdělení s nulovým vektorem středních hodnot a varianční maticí $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. Tento proces nazveme anizotropním Thomasovým procesem.

Samozřejmě bychom v definici výše mohli uvažovat obecnější model s varianční maticí $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$, kde $-1 \leq \varrho \leq 1$. Ten lze ovšem za pomoci rotací snadno převést na model z definice 15, který pro nás bude velmi přínosný v dalších částech práce, neboť pro Thomasové procesy umíme snadno vyjádřit párovou korelační funkci.

3.1.1 Výpočet párové korelační funkce a směrové K-funkce

Jak již bylo zmíněno, pro Thomasové procesy umíme vyjádřit párovou korelační funkci v závislosti na dvourozměrné hustotě, se kterou jsou dceřiné body rozmístěny kolem bodů rodičovských, tedy v závislosti na $f_{(\sigma_1, \sigma_2)}$.

Pro Neyman-Scottovy procesy kde počet bodů ve shluku je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením platí, že párovou korelační funkci získáme jako

$$g(u) = 1 + \frac{h(u)}{\lambda_p},$$

kde $h(u) = \int f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(y) f_{(\sigma_1, \sigma_2)}(y - u) dy$ a λ_p je intenzita rodičovského Poissonova procesu (Møller a Waagepetersen, 2004, vzorec (5.8)). $h(u)$ představuje hustotou rozdílu dvou nezávislých stejně rozdělených náhodných vektorů, jejichž hustota je právě $f_{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Jednoduchým výpočtem dostaneme, že pro Thomasové anizotropní proces je

$$h(u) = \frac{\sqrt{\pi\sigma_1^2}\sqrt{\pi\sigma_2^2}}{4\pi^2\sigma_1^2\sigma_2^2} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{u_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{u_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Dostáváme tedy vyjádření párové korelační funkce jako

$$g(u) = 1 + \frac{1}{4\lambda_p\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{4}\left(\frac{u_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{u_2^2}{\sigma_2^2}\right)\right\}.$$

Abychom obdrželi analytické vyjádření směrové K-funkce, budeme párovou korelační funkci integrovat přes množinu \mathcal{V} . Výpočet provedeme za pomoci softwaru *Wolfram Mathematica* pomocí příkazu

```
Integrate[g(u)*Boole[u_1, u_2 \in V(r, \theta_1, \theta_2)],
{u_1, -r, r}, {u_2, -r, r}].
```

Funkce **Boole** slouží v tomto případě jako indikátor množiny $\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)$. Bohužel, analytického vzorce platného pro všechny kombinace hodnot parametrů nelze dosáhnout, budeme se tedy muset spokojit s numerickou integrací. Pro konkrétní volbu parametrů θ_1 a θ_2 lze ovšem najít předpis, který obsahuje funkci arctan a dvě speciální funkce *Erf* a *OwenT*. Tyto funkce jsou užívané ve statistice, *Erf* je definovaná jako

$$Erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt,$$

OwenT představuje Owenovu T-funkci

$$T(x, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{\exp\left\{\frac{-x^2(1+t^2)}{2}\right\}}{1+t^2} dt, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Pro volbu $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ je tento předpis uveden v příloze, vzorec (B.1). Teoretické hodnoty směrové K-funkce využijeme v následující podkapitole. Grafy teoretické směrové K-funkce (pro různé hodnoty parametrů r , θ_1 , θ_2) můžeme vidět na obrázcích 3.4b, 3.5 nebo 3.8.

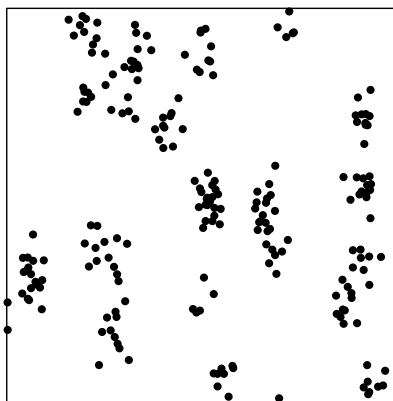
Pro lepší orientaci v následujícím textu ještě připomeňme zavedené značení:

- $K(r, \theta_1, \theta_2)$ značí teoretickou směrovou K-funkci,
- $\hat{K}(r, \theta_1, \theta_2)$ značí neparametrický odhad $K(r, \theta_1, \theta_2)$.

3.1.2 Porovnání směrové K-funkce a jejího neparametrického odhadu

Zaměříme se nyní na jednu konkrétní realizaci X anizotropní varianty Thomasové procesu s parametry $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.04$, $\lambda_p = 25$ a $n = 10$, kde n značí střední hodnotu počtu bodů ve shluku. Dodejme, že pro všechny realizace bodových procesů v této kapitole uvažujeme standardní pozorovací okno $[0, 1] \times [0, 1]$.

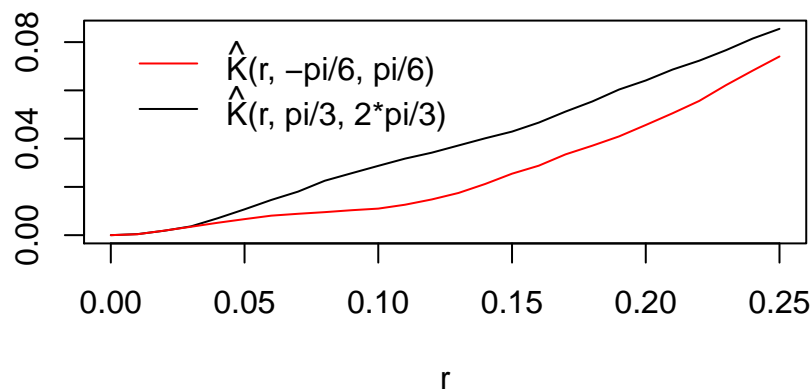
Dle všeobecně užívaného doporučení, které uvádí Diggle (2003) v sekci 6.1.1 své knihy, budeme hodnoty směrové K-funkce počítat pro $0 \leq r \leq 0.25$. Toto doporučení říká, že pokud máme obdélníkové pozorovací okno, je rozumné uvažovat při počítání odhadu K-funkce hodnoty parametru r menší nebo rovny čtvrtině kratší strany tohoto obdélníku. V softwaru R tuto realizaci nasimulujeme pomocí příkazu **rNeymanScott** z balíku **spatstat**, verze 1.41-1. Jedním z parametrů tohoto příkazu je funkce **rcluster**, která popisuje mechanismus vytváření shluků. V našem případě tato funkce pro každý bod $x = (x_1, x_2)$ rodičovského Poissonova procesu vygeneruje p_0 realizací náhodné veličiny s dvourozměrným normálním rozdělením s vektorem středních hodnot $\mu = (x_1, x_2)$ a varianční maticí Σ z definice 15, p_0 je zde náhodná veličina s Poissonovým rozdělením se střední hodnotou n . Realizaci tohoto procesu můžeme vidět na obrázku 3.1.



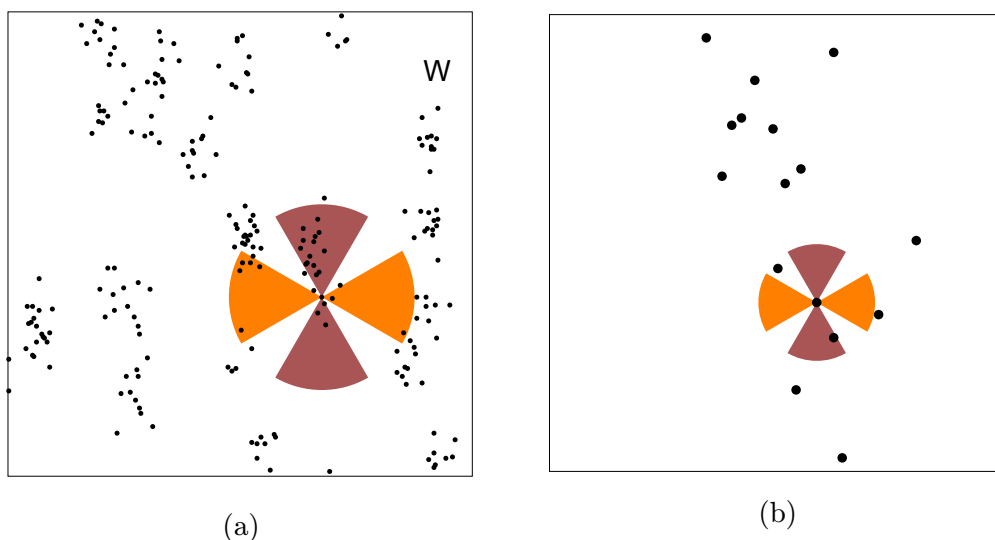
Obrázek 3.1: Realizace anizotropního Thomasové procesu s parametry $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.04$ a $\lambda_p = 25$. Střední hodnota počtu bodů ve shluku je 10.

Nejdříve za pomoci neparametrického odhadu směrové K-funkce na této realizaci porovnejme, jaké hodnoty dostaneme pro dvě výseče o stejné šířce, jednu ve směru osy x a druhou ve směru osy y . Pro výseč ve směru osy x je $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ a $\alpha = 0$. Pro výseč ve směru osy y pak mají parametry hodnoty $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ a $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Výsledek porovnání hodnot \hat{K} pro výše popsané výseče ilustruje obrázek 3.2. Povšimněme si, že pro tuto konkrétní realizaci se hodnoty ve směru osy y až do poloměru $r = 0.025$ liší jen velmi nepatrně od hodnot ve směru osy x (na obrázku tento rozdíl není takřka patrný). Pro $r > 0.025$ jsou už hodnoty ve směru osy y vyšší než ve směru osy x .

Upozorňujeme čtenáře, že není triviální tento výsledek interpretovat. Obrázek 3.3a zachycuje realizaci procesu X na pozorovacím okně W , do jednoho konkrétního bodu x této realizace jsme umístili různě orientované výseče s poloměrem $r = 0.2$. Zde je dobře patrné, že pro vyšší hodnoty parametru r pozorujeme více bodů procesu ve směru osy y . Obrázek 3.3b zachycuje detail okolí shluku této realizace, ve kterém se bod x nachází. Do tohoto bodu jsme tentokrát umístili střed dvou výsečí o poloměru $r = 0.023$. Vidíme, že pro takto malé hodnoty r pozorujeme ve směru osy x a osy y přibližně stejně bodů procesu.



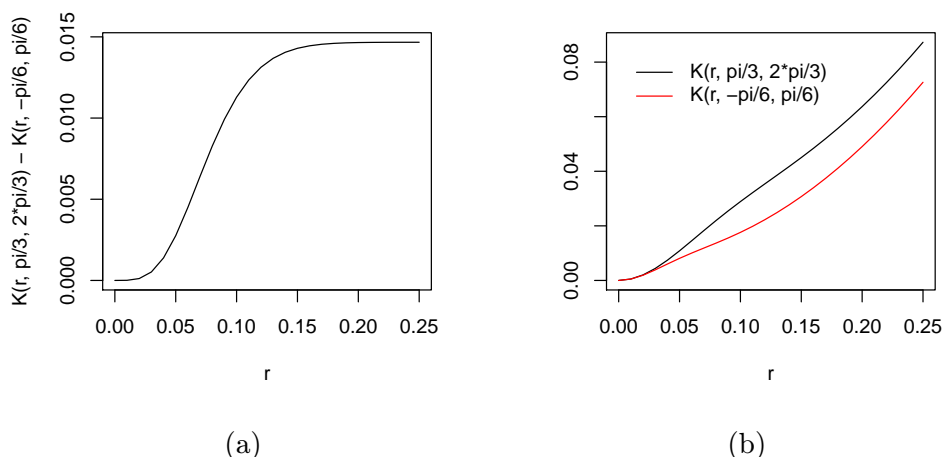
Obrázek 3.2: Porovnání $\hat{K}(r, \theta_1, \theta_2)$ na realizaci procesu X z obrázku 3.1 pro výseč o úhlu $\frac{\pi}{3}$ ve směru osy x a y .



Obrázek 3.3: (a) Realizace bodového procesu X , do jednoho z bodů jsme umístili dvě kruhové výseče o poloměru $r = 0.2$ s různou orientací. (b) Detail na okolí shluku, ve kterém byly umístěny výseče na obrázku 3.3a. Tentokrát jsme do téhož bodu umístili výseče o poloměru $r = 0.023$.

Podívejme se nyní na výpočet teoretické směrové K -funkce pro anizotropní Thomasové proces s parametry $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.04$ a $\lambda_p = 25$. Porovnáváme-li hodnoty K pro dvě výseče ve směru osy x a y , obdržíme výsledek velmi podobný předchozímu případu. Rozdíly těchto hodnot můžeme vidět na obrázku 3.4a. Povšimněme si, že pro $r \in (0, 0.025)$ jsou hodnoty rozdílu zanedbatelné, pro $r \in [0.025, 0.16)$ hodnoty rozdílu narůstají, a pro $r \geq 0.16$ rostou už jen velmi pomalu. Grafy obou funkcí ilustruje obrázek 3.4b.

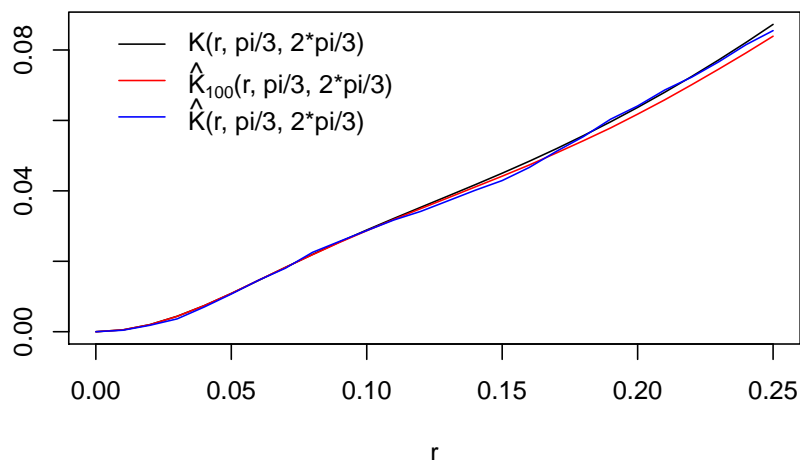
Důležitou otázkou zůstává, jak se hodnoty teoretické K -funkce odlišují od jejího neparametrického odhadu. Jelikož je křivka \hat{K} náhodná, může se od teo-



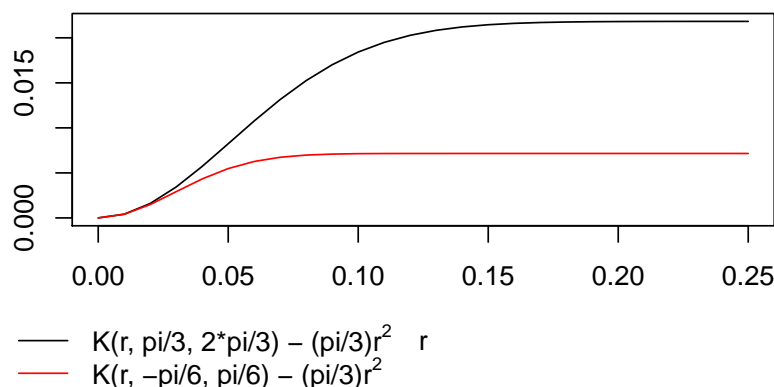
Obrázek 3.4: (a) Rozdíly hodnot $K(r, \theta_1, \theta_2)$ pro výseč o úhlu $\frac{\pi}{3}$ ve směru osy x a osy y . (b) Grafy $K(r, \theta_1, \theta_2)$ pro výseč o šířce $\frac{\pi}{3}$ ve směru osy x a osy y .

retických hodnot směrové K -funkce velmi lišit. Intuice nám napovídá, že při zprůměrování hodnot \widehat{K} přes více realizací dostaneme křivku, která by měla být blízko teoretickým hodnotám. Zprůměrujme tedy hodnoty \widehat{K} přes 100 realizací Thomasové procesu s parametry $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.04$, $\lambda_p = 25$ a $n = 10$. Vzniklý průměr označme jako \widehat{K}_{100} . Na obrázku 3.5 vidíme grafy pro K , \widehat{K} a \widehat{K}_{100} . Pověsimně si, že obě náhodné křivky velmi pěkně kopírují křivku teoretickou. Mohli bychom tedy usuzovat, že teoretických hodnot směrové K -funkce její neparametrický odhad může nabýt. Pro konkrétní realizaci procesu X z obrázku 3.1 dostáváme hodnoty odhadu směrové K -funkce, které teoretickým hodnotám odpovídají (pro většinu hodnot parametru r) lépe než hodnoty zprůměrované přes 100 realizací. To může být způsobeno faktem, že tento odhad není nestranný. Upozorňujeme, že určitý vliv na rozdíl teoretických a empirických hodnot směrové K -funkce může mít i použití translační okrajové korekce ve výpočtu empirického odhadu.

Označme teoretickou směrovou K -funkci pro Poissonův proces jako $K_{Po}(r, \theta)$, kde θ značí velikost úhlu výseče. Párová korelační funkce je pro Poissonův proces konstantně rovna jedné, tedy $K_{Po}(r, \theta) = \theta r^2 \forall \theta \in (0, \pi)$. U tohoto procesu při výpočtu teoretické směrové K -funkce tím pádem nezáleží na orientaci výseče. Obrázek 3.6 ilustruje porovnání rozdílů hodnot K a K_{Po} pro dvě výseče o stejné šířce ve směru osy x a y . Vidíme, že pro směr osy x se rozdíl těchto dvou funkcí ustálí na konstantní hodnotě dříve než pro směr osy y (ve směru osy x se rozdíl ustálí pro $r \geq 0.07$, ve směru osy y pro $r \geq 0.16$). Tento výsledek je v souladu s naší intuicí, neboť parametr σ_1 je menší než σ_2 a dosah interakcí ve směru osy x je tedy menší než ve směru osy y . Zároveň se pro oba dva směry můžeme domnívat, že pro $r \leq 0.07$ resp. $r \leq 0.16$ vyvracíme domněnku, že body procesu jsou rozmístěny zcela náhodně (teoretická směrová K -funkce dává vyšší hodnoty než u Poissonova procesu). Upozorňujeme však, že se v tomto případě nejedná o formální test hypotézy. Pro větší r již křivka teoretické směrové K -funkce na Thomasově procesu tvarem odpovídá teoretické křivce pro Poissonův proces, pouze je nad křivku pro Poissonův proces posunutá o konstantu.

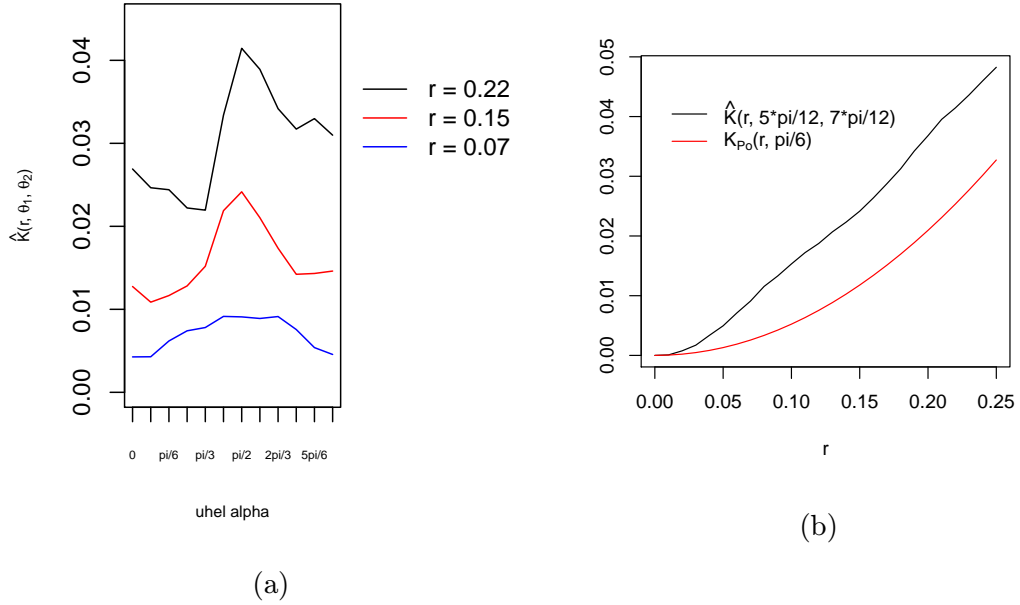


Obrázek 3.5: Srovnání K , \hat{K} a \hat{K}_{100} pro výseč ve směru osy y .



Obrázek 3.6: Rozdíly K a K_{P_o} pro Thomasové anizotropní proces s parametry $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.04$, $\lambda_p = 25$ a $n = 10$.

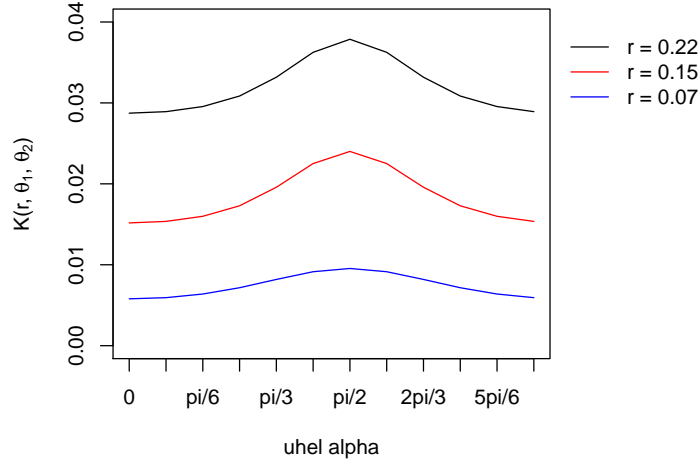
Největší přínos K-funkce při analýze bodových procesů spatřujeme v možnosti detekovat tzv. dominantní směry. Jak již bylo zmíněno, při zkoumání bodových vzorů si klademe otázku, zda se body mohou shlukovat v nějakém konkrétním směru. Pokud ano, nazýváme tento směr směrem dominantním. Uvědomme si, že existence dominantního směru je záležitostí, která se projevuje pro všechny hodnoty poloměru r . Vraťme se nyní k naší realizaci Thomasové procesu označené jako X . Na této konkrétní realizaci jsme napočítali \hat{K} při velikosti výseče $\frac{\pi}{6}$ pro 12 různých směrů a pro 3 konkrétní hodnoty poloměru výseče r , a to $r = 0.07$, $r = 0.15$ a $r = 0.22$. Na obrázku 3.7a můžeme vidět průběh jednotlivých grafů \hat{K} při pevném r a měnící se orientaci výseče. Pro všechna tři r pozorujeme lokální maxima funkce \hat{K} pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (při $r = 0.15$ a $r = 0.22$ je dokonce v bodě $\alpha = \frac{\pi}{2}$ globální maximum, pro $r = 0.07$ je obtížnější globální maximum z obrázku určit). Připomeňme, že α značí orientaci dané výseče. Pro tuto konkrétní realizaci



Obrázek 3.7: (a) Hodnoty $\hat{K}(r, \theta_1, \theta_2)$ napočítané na realizaci procesu X pro měnící se orientaci výseče, pevnou velikost úhlu výseče a pevné r . (b) Porovnání hodnot $\hat{K}(r, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12})$ a $K_{Po}(r, \frac{\pi}{6})$ pro tuto realizaci.

bychom dle výsledků mohli usuzovat, že zde existuje dominantní směr ve směru osy y . Pro představu můžeme na obrázku 3.7b vidět graf \hat{K} pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a graf teoretické křivky pro Poissonův proces.

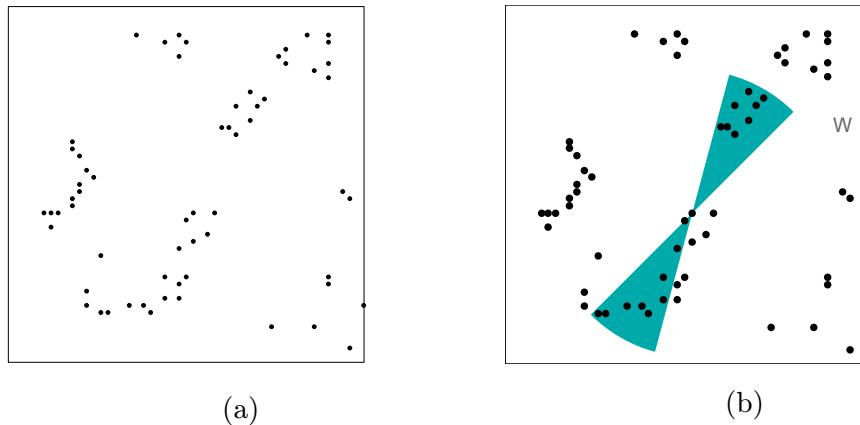
Stejný postup nyní aplikujeme pro teoretickou směrovou K-funkci. V tomto případě pozorujeme pro $r = 0.07$, $r = 0.15$ a $r = 0.22$ jasně nejvyšší hodnoty funkce K ve směru $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Výsledek můžeme vidět na obrázku 3.8.



Obrázek 3.8: Hodnoty $K(r, \theta_1, \theta_2)$ napočítané na anizotropním Thomasové procesu s parametry $\sigma_1 = 0.02$, $\sigma_2 = 0.04$, $\lambda_p = 25$ a $n = 10$ pro měnící se směr výseče, pevnou velikost úhlu výseče a pevné r .

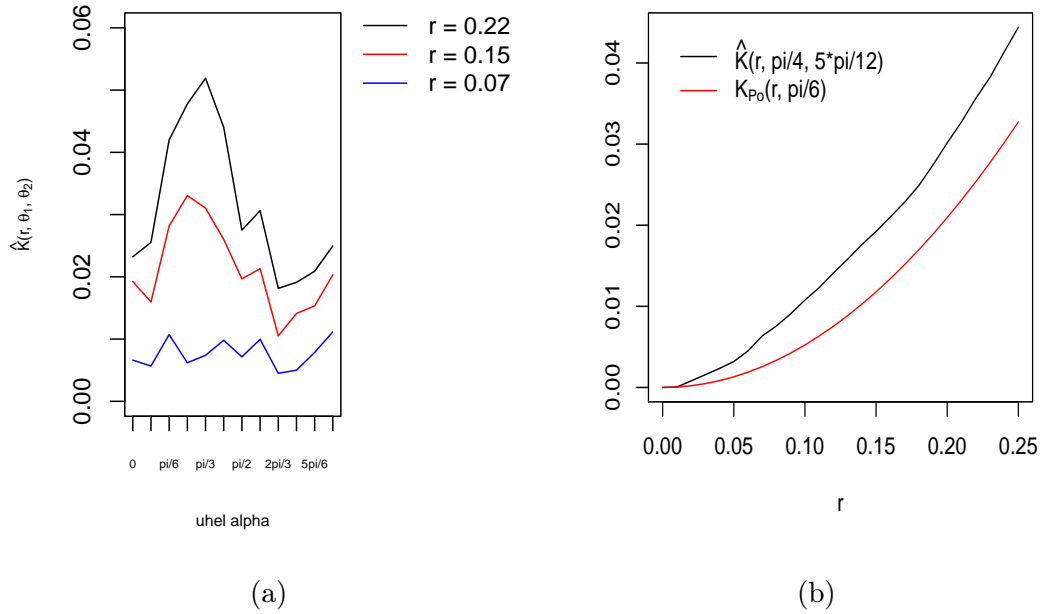
3.1.3 Aplikace směrové K-funkce na reálná data redwood

V následující části se zaměříme na reálný dataset **redwood** knihovny **spatstat**, který můžeme vidět na obrázku 3.9a. Tato data reprezentují lokace 62 semenáčů a mladých stromků kalifornských sekvojí. Dataset pochází z článku Ripley (1977), jedná se o výřez datasetu **redwoodfull**, přeškálovaný na jednotkový čtverec. Vhodným modelem pro tato data by nejspíše mohla být anizotropní varianta Thomasové procesu.



Obrázek 3.9: (a) Reálný dataset redwood. (b) Zanesení kruhové výseče s parametry $r = 0.4$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{5\pi}{12}$ do datasetu redwood.

Na těchto datech se pokusíme odhalit dominantní směr. Opět napočítáme hodnoty \hat{K} při šířce výseče $\frac{\pi}{6}$ pro 12 různých směrů a pro 3 konkrétní hodnoty poloměru výseče r , a to $r = 0.07$, $r = 0.15$ a $r = 0.22$. Jak je vidět na obrázku 3.10a, pro $r = 0.22$ a $r = 0.15$ pozorujeme vrcholy na okolí $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Pro nejmenší z poloměrů už z obrázku není zřejmé maximum hodnot \hat{K} , kandidátů je hned několik: $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\alpha = \frac{5\pi}{12}$, $\alpha = \frac{7\pi}{12}$ a $\alpha = \frac{11\pi}{12}$. I tak bychom mohli usuzovat, že dominantní směr bude pro tato data směr přímky svírající s osou x úhel $\frac{\pi}{3}$. Toto

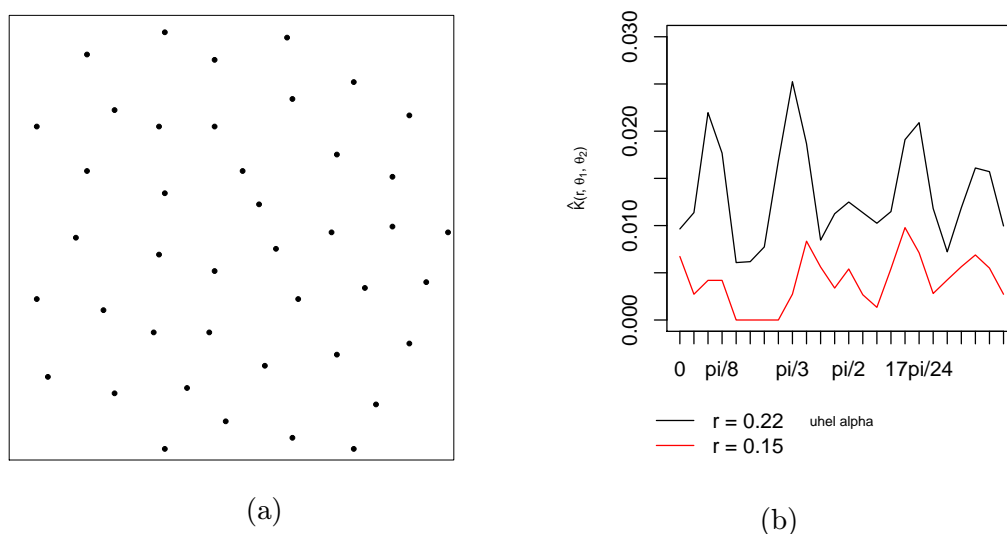


Obrázek 3.10: (a) Hodnoty $\hat{K}(r, \theta_1, \theta_2)$ napočítané na datech redwood pro měnící se orientaci výseče, pevnou velikost úhlu výseče a pevné r . (b) Porovnání hodnot $\hat{K}(r, \frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ a $K_{Po}(r, \frac{\pi}{6})$ pro data redwood.

pozorování se zdá být v souladu s daty, neboť jak můžeme vidět na obrázku 3.9a, jednotlivé shluky se od svislého směru zdají být natočeny lehce doprava. Grafy \hat{K} pro jednotlivé hodnoty r a porovnání $\hat{K}(r, \frac{3\pi}{12}, \frac{5\pi}{12})$ se směrovou K-funkcí pro Poissonův proces můžeme vidět na obrázku 3.10b. Neparametrický odhad směrové K-funkce pro tento dataset dává vyšší hodnoty než teoretická křivka pro Poissonův proces, což opět nasvědčuje tomu, že body procesu v tomto směru nejsou uspořádány náhodně, bez interakcí.

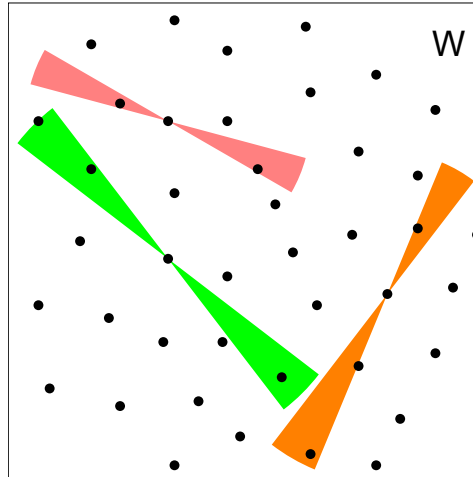
3.2 Aplikace směrové K-funkce na regulární data

V předešlých sekcích jsme se věnovali shlukovým bodovým procesům. Nyní obraťme svoji pozornost na data regulární. Dataset **cells** knihovny **spatstat** představuje polohu středů 42 buněk, které byly pozorovány mikroskopem na histologickém řezu. Vhodným modelem pro tento dataset by mohla být třída procesů s pevným jádrem. Pozorovací okno bylo přeškálováno na jednotkový čtverec. Data byla sebrána F.H.C. Crickem a B.D. Ripplem, analyzována byla např. v článku Ripley (1977) a v knize Diggle (2003). Vidět je můžeme na obrázku 3.11a.



Obrázek 3.11: (a) Reálný dataset cells. (b) Hledání dominantního směru pro dataset cells.

Stejně jako v předchozích odstavcích na tato data aplikujeme postup pro odhalení možného dominantního směru. Tentokrát počítáme hodnoty \hat{K} pro šířku výseče $\frac{\pi}{12}$, 24 různých orientací a pro dvě hodnoty parametru r , konkrétně $r = 0.15$ a $r = 0.22$. Jak můžeme vidět na obrázku 3.11b, pro $r = 0.22$ jsou jasně patrné vrcholy pro směry $\alpha = \frac{\pi}{12}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\alpha = \frac{18\pi}{24}$ a $\alpha = \frac{7\pi}{8}$. Pro $r = 0.15$ křivka \hat{K} nabývá nejvyšších hodnot pro směry $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $\alpha = \frac{7\pi}{8}$. Zanesení výsečí pro několik zajímavých směrů do tohoto datasetu můžeme vidět na obrázku 3.12. Je zřejmé, že na těchto datech existuje jakési uspořádání bodů procesu. Stručně řečeno, máme několik preferovaných směrů vzájemných poloh bodů, což je dáno regulární strukturou pozorovaného bodového vzoru.



Obrázek 3.12: Zanesení různě orientovaných kruhových výsečí do datasetu cells.

3.3 Shrnutí

V této kapitole jsme ukázali, jak pro anizotropní Thomasové procesy odvodit vzorec párové korelační funkce. Neparametrický odhad směrové K -funkce spočtený pro jednu konkrétní realizaci Thomasové procesu jsme porovnali s jejími teoretickými hodnotami. Ukázalo se, že náhodná křivka křivku teoretickou v tomto případě velmi pěkně kopíruje, dokonce lépe než křivka hodnot empirického odhadu zprůměrovaná přes 100 realizací. Musíme mít ovšem na paměti, že tento odhad není nestranný, navíc může určitý vliv hrát i použití translační okrajové korekce.

Pro konkrétní realizaci anizotropního Thomasové procesu se rozdíly hodnot neparametrického odhadu směrové K -funkce ve směru osy x a y ukazují pro malá r takřka nulové, pro větší r však dostáváme vyšší hodnoty ve směru osy y . Tento výsledek je v souladu s tvary shluků, které vidíme na obrázku 3.1. Velmi podobného výsledku dosáhneme i pro teoretické hodnoty K -funkce. Je třeba si uvědomit, že na rozdíl od klasické K -funkce může být náročné hodnoty směrové K -funkce interpretovat.

Při použití směrové K -funkce můžeme (stejně jako u klasické varianty) porovnávat její hodnoty s hodnotami pro Poissonův proces. Toto porovnání nám pomůže při rozhodování, zda jsou body daného procesu rozmístěny zcela náhodně či nikoliv. Při porovnání rozdílu $K - K_{Po}$ ve směru osy x a y vidíme, že ve směru osy x se tento rozdíl ustálí na konstantní hodnotě dříve, než ve směru osy y . Toto opět odpovídá naší představě o tvaru shluků, neboť při volbě parametrů jsme σ_1 volili dvakrát menší než σ_2 , shluky by tedy měly být „protažené“ ve směru osy y .

Největší přínos směrové K -funkce však spatřujeme v možnosti detekovat dominantní směr v bodovém procesu. Dominantní směr může vznikat např. působením větru při roznesení semen nějaké rostliny. Na shlukových i regulárních datech umíme díky směrové K -funkci nominovat kandidáty na směry, ve kterých se body procesu shlukují. Opět upozorňujeme, že náš postup při hledání dominantního směru byl pouze heuristický, nejedná se zde o rigorózní postup analýzy bodových procesů, reprezentovaný např. testem vhodné nulové hypotézy. Některé příklady

hledání dominantního směru již byly zmíněny ve shrnutích článků Redenbach a kol. (2009) a Møller a kol. (2015).

Závěr

V práci jsme se zabývali stacionárními bodovými procesy, s důrazem na klasickou definici K-funkce a její varianty. V první kapitole jsme se seznámili se základy teorie stacionárních bodových procesů, představili jsme si Poissonův proces, Thomasové shlukové procesy a procesy s pevným jádrem. Uvedli jsme základní charakteristiky prvního i druhého řádu a klasickou definici K-funkce, včetně jejího empirického odhadu. Vycházeli jsme hlavně z publikací Møller a Waagepetersen (2004) a Baddeley a kol. (2007).

Ve druhé kapitole jsme nastínili, jak se klasická K-funkce používá při zkoumání interakcí mezi body procesu. Jelikož ale klasická K-funkce, využívající ve své definici kruh se středem v počátku soustavy souřadnic, nic neříká o chování bodů procesu v nějakém určitém směru, uvedli jsme dvě její varianty, které jsou citlivé na změny orientace. Za pomoci článku Møller a kol. (2015) jsme představili válcovou variantu K-funkce, která v prostoru využívá různě orientované válce, v rovině pak obdélníky. V rovině jsme zavedli tzv. směrovou K-funkci, využívající kruhových výsečí. Její trojrozměrnou analogii popisuje článek Redenbach a kol. (2009).

Ve třetí kapitole jsme ukázali, jak pro Thomasové anizotropní procesy vypočítat párovou korelační funkci, a tedy i teoretickou směrovou K-funkci. Tyto teoretické hodnoty jsme poté porovnávali s hodnotami neparametrického odhadu směrové K-funkce. Pro námi zvolenou konkrétní realizaci bychom usoudili, že empirický odhad může teoretických hodnot směrové K-funkce nabývat. Zároveň jsme pro tuto třídu procesů spočetli teoretickou směrovou K-funkci pro směr osy x a y . Ve směru osy y jsme obdrželi vyšší hodnoty než ve směru osy x . Tento výsledek odpovídá tvaru shluků procesu, které jsou díky volbě parametrů více protažené ve směru osy y . Obdobně jsme dopadli i s empirickým odhadem směrové K-funkce spočteným pro konkrétní realizaci Thomasové anizotropního procesu ve směru osy x a y . Naši intuici o interakcích mezi body procesu jsme si potvrdili porovnáním hodnot teoretické směrové K-funkce pro tento proces s hodnotami teoretické směrové K-funkce pro proces Poissonův.

Ve druhé části této kapitoly jsme se zabývali detekcí možného dominantního směru na shlukových i regulárních datech. Při použití teoretické K-funkce na námi uvažovaný Thomasové anizotropní proces nám možný dominantní směr vyšel ve směru osy y . Toto je opět v souladu s naší představou o tvaru shluků tohoto procesu, které jsou protažené ve směru osy y . Stejného výsledku jsme dosáhli i při použití empirického odhadu této funkce na konkrétní realizaci Thomasové procesu. Jako příklad reálných shlukových dat jsme si vybrali dataset **redwood** knihovny **spatstat**. Za použití empirického odhadu směrové K-funkce jsme jako možný dominantní směr označili směr přímky svírající s osou x úhel $\frac{\pi}{3}$. Tento výsledek odpovídá orientaci shluků daného procesu. Jako příklad regulárních dat jsme využili reálný dataset **cells** knihovny **spatstat**. Zde jsme neodhalili přímo dominantní směr, ale na hodnotách empirického odhadu K-funkce spočtených pro různé orientace kruhové výseče a dvě pevné hodnoty parametru r se jasně ukázalo, že v tomto bodovém vzoru existují preferované směry vzájemných poloh bodů, což je dáno jeho regulární strukturou.

Seznam použité literatury

- BADDELEY, A., MØLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. P. (2000). Non-and semiparametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns. *Statistica Neerlandica*, **54**, 329–350.
- BADDELEY, A., BÁRÁNY, I., SCHNEIDER, R. a WEIL, W. (2007). *Stochastic Geometry: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Martina Franca, Italy, September 13-18, 2004*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. ISBN: 978-3-540-38174-7.
- DALEY, D. J. a VERE-JONES, D. (1988). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer series in statistics. Springer-Verlag, New York. ISBN: 0-540-96666-8.
- DIGGLE, P., CHETWYND, A., HÄGGKVIST, R. a MORRIS, S. (1995). Second order analysis of spacetime clustering. *Statistical Methods in Medical Research*, **4**, 124–136.
- DIGGLE, P. J. (2003). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. Arnold, London, 2. vydání.
- ILLIAN, J., PENTTINEN, A., STOYAN, H. a STOYAN, D. (2008). *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*. Wiley, Chichester. ISBN: 978-0-470-01491-2.
- MØLLER, J. a GHORBANI, M. (2012). Aspects of second-order analysis of structured inhomogeneous spatio-temporal point processes. *Statistica Neerlandica*, **66**, 472–491.
- MØLLER, J. a WAAGEPETERSEN, R. P. (2004). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton. ISBN: 1-58488-265-4.
- MØLLER, J., SAFAVIMANESHYAND, F. a RASMUSSEN, J. G. (2015). The cylindrical K-function and Poisson line cluster point processes [online]. Výzkumná zpráva CSGB centra, Dánsko. Dostupné z: <http://data.math.au.dk/publications/csgb/2015/math-csgb-2015-03.pdf> [cit. 22.4.2016]. Poslední úpravy březen 2015.
- NEYMAN, J. a SCOTT, E. L. (1952). A theory for the spatial distribution of galaxies. *Astrophysical Journal*, **116**, 144–163.
- OHSER, J. a STOYAN, D. (1981). On the Second-order and Orientation Analysis of Planar Stationary Point Processes. *Biometrical Journal*, **23**, 523–533.
- RATAJ, J. (2006). *Bodové procesy*. Nakladatelství Karolinum, Praha. ISBN: 80-246-1182-1.
- REDENBACH, C., SÄRKKÄ, A., FREITAG, J. a SCHLADITZ, K. (2009). Anisotropy analysis of pressed point processes. *Advances in Statistical Analysis*, **93**, 237–261.

- RIPLEY, B. D. (1976). The second-order analysis of stationary point processes. *Journal of Applied Probability*, **13**, 255–266.
- RIPLEY, B. D. (1977). Modelling spatial patterns (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society*, **39**, 172–212.
- STOYAN, D. (1991). Describing the Anisotropy of Marked Planer Point Process. *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **22**, 449–462.
- TANAKA, U., OGATA, Y. a STOYAN, D. (2008). Parameter estimation and model selection for neyman-scott point processes. *Biometrical Journal*, **50**, 43–57.

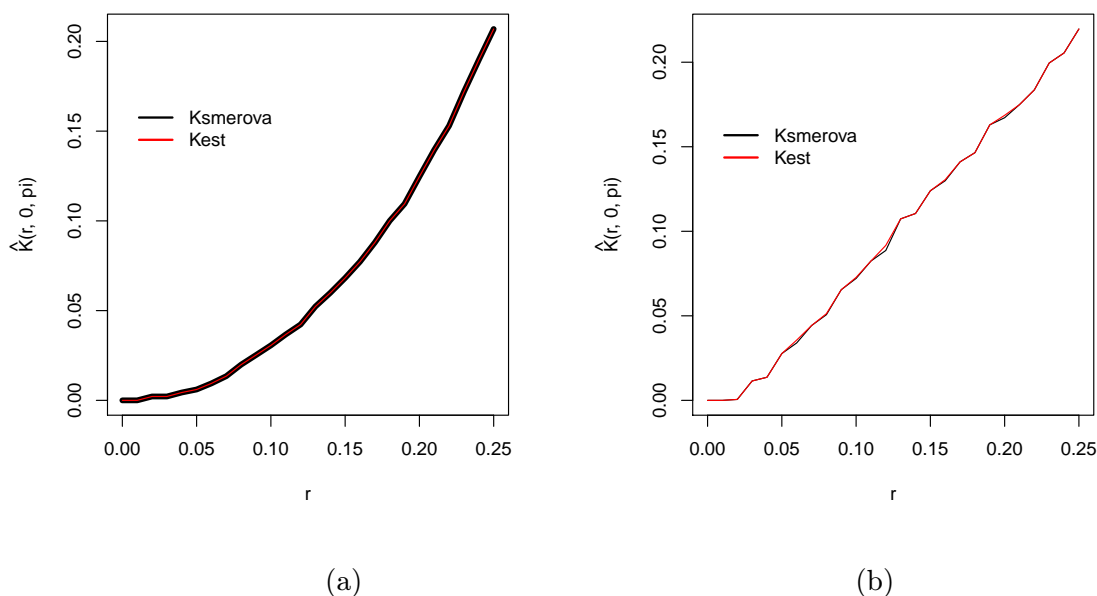
Seznam obrázků

1.1	Poissonův bodový proces	6
1.2	Thomasové shlukový proces a Matérnův proces s pevným jádrem.	7
1.3	Okrajový efekt. Zanesení kruhu do bodového vzoru.	13
2.1	Množina $\mathcal{V}(r, \theta_1, \theta_2)$	17
3.1	Anizotropní Thomasové proces	23
3.2	Porovnání neparametrického odhadu směrové K-funkce ve směru osy x a y	24
3.3	Anizotropní Thomasové proces s přidáním kruhovými výsečemi ve směru osy x a y	24
3.4	Porovnání teoretických hodnot směrové K-funkce na námi uvažovaném Thomasové anizotropním procesu.	25
3.5	Srovnání teoretických hodnot směrové K-funkce a jejího neparametrického odhadu.	26
3.6	Rozdíly teoretické směrové K-funkce pro anizotropní Thomasové proces a Poissonův proces	26
3.7	Hledání dominantního směru na Thomasové anizotropním procesu s využitím neparametrického odhadu směrové K-funkce	27
3.8	Hledání dominantního směru na Thomasové anizotropním procesu s využitím teoretické směrové K-funkce	28
3.9	Reálný dataset redwood	28
3.10	Hledání dominantního směru pro dataset redwood.	29
3.11	Reálný dataset cells	30
3.12	Zanesení různě orientovaných kruhových výsečí do datasetu cells.	31

Přílohy

A Implementace odhadu směrové K-funkce

Jak bylo zmíněno ve druhé kapitole, v softwaru R existují funkce **Kest** a **Ksector**, které slouží k počítání neparametrického odhadu klasické K-funkce, resp. K-funkce využívající jednostranných kruhových výsečí. My jsme pro účely této práce vytvořili funkci **Ksmerova**, která vznikla vhodnými úpravami funkce **Kest**. Celý kód této funkce je přiložen v elektronické příloze. Nyní si však v některých základních situacích ověříme, že se tato funkce chová tak, jak by měla.

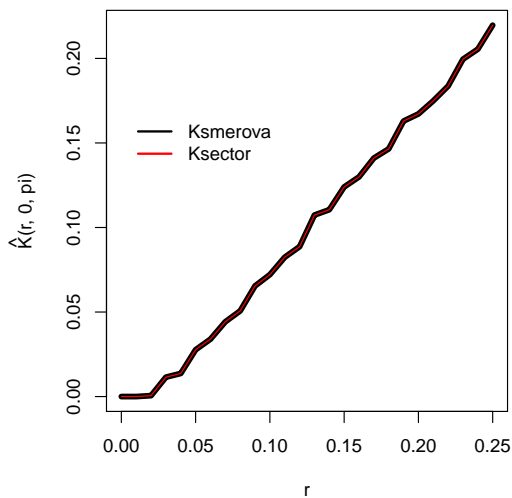


Obrázek A.1: (a) Porovnání funkce Kest a Ksmerova pro plný kruh na Poissonově procesu s intenzitou 65. Vidíme, že se grafy obou funkcí překrývají. Na Poissonově procesu se tedy naše funkce Ksmerova pro plný kruh chová jako funkce Kest. (b) Porovnání funkce Kest a Ksmerova pro plný kruh na reálném datasetu redwood. Jelikož tento dataset využíváme ve třetí kapitole naší práce, chtěli bychom ověřit, že se na něm funkce Ksmerova chová tak, jak bychom očekávali. Vidíme, že se grafy obou funkcí překrývají, až na několik drobných odchylek. Tyto odchylky bychom nejspíše připsali na vrub tomu, že souřadnice jednotlivých bodů jsou v tomto datasetu zaznamenány se zaokrouhlením. Objevují se nám zde tedy body, které mají stejnou x -ovou resp. y -ovou souřadnici. Tento fakt vede k problému, jak se software R vypořádává s tím, když do funkce \arctan dosazujeme hodnoty blízké nekonečnu. Příkladáme zde ještě hodnoty rozdílu funkcí Ksmerova a Kest na výše zmíněném Poissonově procesu.

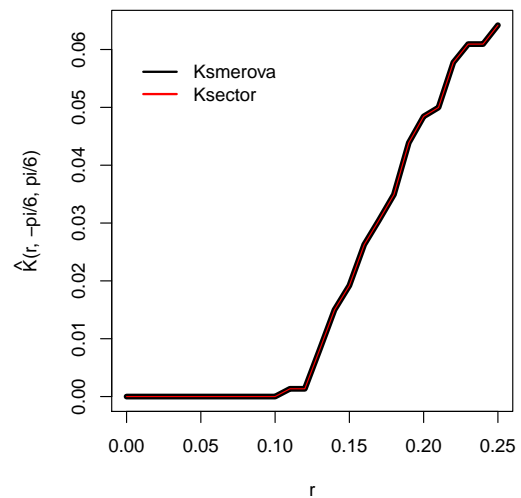
```

> print(Ksmerova(X = X, theta1 = 0, theta2 = pi, r=r)$trans - Kest(X =
      X, r = r, correction = "translate")$trans)
 [1] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
 [5] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
 [9] 0.000000e+00 0.000000e+00 -3.469447e-18 0.000000e+00
[13] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[17] 0.000000e+00 -1.387779e-17 -1.387779e-17 -1.387779e-17
[21] 0.000000e+00 0.000000e+00 -2.775558e-17 -5.551115e-17
[25] 0.000000e+00 -2.775558e-17

```



(a)



(b)

Obrázek A.2: (a) Porovnání funkce Ksector a Ksmerova pro plný kruh na reálném datasetu redwood. Na tomto obrázku se již grafy obou funkcí překrývají. (b) Porovnání dvojnásobku funkce Ksector a funkce Ksmerova na reálných datech cells pro kruhové výseče ve směru osy x a šířce výseče $\frac{\pi}{3}$. Tato data také využíváme ve třetí kapitole práce. I v tomto případě se grafy obou funkcí překrývají, tedy chování funkce Ksmerova odpovídá našemu očekávání. Pro názornost ještě u obou případech přikládáme rozdíly hodnot funkcí Ksmerova a Ksector reps. Ksmerova a $2Ksector$.

```

> print(Ksmerova(X = Y, theta1 = 0, theta2 = pi, r=r)$trans -
- Ksector(X = Y, begin = 0, end = 360, units = "degrees", r = r,
correction = "translate")$trans)
 [1] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 -1.734723e-18
 [5] -1.734723e-18 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
 [9] 0.000000e+00 1.387779e-17 0.000000e+00 0.000000e+00
[13] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[17] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[21] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[25] 0.000000e+00 0.000000e+00

```

```

> print(Ksmerova(X = Z, theta1 = -pi/6, theta2 = pi/6, r=r)$trans -
- 2*Ksector(X = Z, begin = -30, end = 30, units = "degrees", r = r,
correction = "translate")$trans)
[1] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[5] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[9] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[13] 0.000000e+00 -1.734723e-18 0.000000e+00 0.000000e+00
[17] 0.000000e+00 -3.469447e-18 0.000000e+00 0.000000e+00
[21] 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00 0.000000e+00
[25] 0.000000e+00 0.000000e+00

```

B Směrová K-funkce pro Thomasové shlukové procesy

V této části přikládáme výsledek integrace párové korelační funkce pro anizotropní Thomasové shlukové procesy ze třetí kapitoly přes oboustrannou kruhovou výseč s parametry $\theta_1 = -\frac{\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$. Integrovali jsme v softwaru *Wolfram Mathematica*, zdrojový kód je přiložen v elektronické příloze. Nejprve jsme za parametry σ_1 , σ_2 , λ_p a r zvolili $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 2$, $\lambda_p = 1$ a $r = 3$. Obdrželi jsme následující rovnici:

$$\begin{aligned}
\widehat{K}\left(3, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) &= \iint_{\left\{u \in \mathbb{R}^2: u_1^2 + u_2^2 \leq 3^2, -\frac{\pi}{6} \leq \arctan\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \leq \frac{\pi}{6}\right\}} g(u) \, du \\
&= \int_{-3}^{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{9 - u_1^2} + \frac{e^{-\frac{u_1^2}{4}} \operatorname{Erf}\left[\frac{\sqrt{9 - u_1^2}}{4}\right]}{2\sqrt{\pi}} \right) du_1 \\
&\quad + \int_{\frac{3\sqrt{3}}{2}}^3 \left(2\sqrt{9 - u_1^2} + \frac{e^{-\frac{u_1^2}{4}} \operatorname{Erf}\left[\frac{\sqrt{9 - u_1^2}}{4}\right]}{2\sqrt{\pi}} \right) du_1 \\
&\quad + \frac{9\sqrt{3}\pi + 4\operatorname{ArcTan}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\right] - 8\pi\operatorname{OwenT}\left[\frac{3\sqrt{\frac{3}{2}}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right]}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Vzorec jsme následně zobecnili pro neznámé hodnoty σ_1 , σ_2 , λ_p a r .

$$\begin{aligned} \widehat{K}(r, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) = & \int_{-r}^{-\frac{r\sqrt{3}}{2}} \left(2\sqrt{r^2 - u_1^2} + \frac{1}{\sigma_1} \frac{e^{-\frac{u_1^2}{4\sigma_1^2}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\sqrt{t^2 - u_1^2}}{2\sigma_2} \right]}{2\sqrt{\pi}\lambda_p} \right) du_1 \\ & + \int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^r \left(2\sqrt{r^2 - u_1^2} + \frac{1}{\sigma_1} \frac{e^{-\frac{u_1^2}{4\sigma_1^2}} \operatorname{Erf} \left[\frac{\sqrt{t^2 - u_1^2}}{2\sigma_2} \right]}{2\sqrt{\pi}\lambda_p} \right) du_1 \\ & + \frac{r^2\sqrt{3}\pi\lambda_p + 4\operatorname{ArcTan} \left[\frac{\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{3}} \right] - 8\pi\operatorname{OwenT} \left[\frac{r\sqrt{\frac{3}{2}}}{2\sigma_1}, \frac{\sigma_1}{\sigma_2\sqrt{3}} \right]}{2\pi\lambda_p} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

C Elektronická příloha

Součástí bakalářské práce je také elektronická příloha obsahující zdrojový kód funkce **Ksmerova**, ukázkou použití této funkce v softwaru R a ukázkou výpočtu teoretických hodnot směrové K-funkce v softwaru *Wolfram Mathematica*. Tyto přílohy můžeme najít v SISu nebo na přiloženém CD.