Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Eva Dohnalová

Platónská a archimédovská tělesa a jejich vlastnosti ve výuce matematiky na středních školách

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní program: Fyzika zaměřená na vzdělávání

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 27.4.2016 Eva Dohnalová

Název práce: Platónská a archimédovská tělesa a jejich vlastnosti ve výuce matematiky na středních školách

Autor: Eva Dohnalová

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Abstrakt: Tato diplomová práce vznikla jako rozšíření mé bakalářské práce a je určena pro všechny zájemce o geometrii pravidelných a polopravidelných mnohostěnů. Jedná se o ucelený text shrnující stručnou historii, popis a klasifikaci těles pravidelných a polopravidelných. Obsahuje také důkaz Descartovy a Eulerovy věty a důkazy o počtu pravidelných a polopravidelných mnohostěnů. Lze ji také použít jako pomůcku při seznamování studentů s pravidelnými a polopravidelnými mnohostěny na středních školách. Text je doplněn obrázky z převážné části vytvořenými v modelovacích softwarech GeoGebra a Cabri3D.

Klíčová slova: Pravidelné mnohostěny, platónská tělesa, Platón, polopravidelné mnohostěny, archimédovská tělesa, Archimédés, dualismus, Descartova věta, Eulerova věta.

Title: Platonic and Archimedean solids and their properties in teaching of mathematics at secondary schools

Author: Eva Dohnalová

Department: Department of Didactics of Mathematics

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Abstract: This work is an extension of my bachelor work and it is intended for all people interested in regular and semiregular polyhedra geometry. It is a comprehensive text which summarizes brief history, description and classification of regular and semiregular polyhedra. The work contains proofs of Descartes‘ and Euler‘s theorems and proofs about number of regular and semiregular polyhedra. It can be also used as a didactic aid in the instruction of regular and semiregular solids at secondary schools. This text is supplemented by illustrative pictures made in GeoGebra and Cabri3D.

Keywords: Regular polyhedra, platonic solids, Platon, semiregular polyhedra, Archimedean solids, Archimedes, dulaism, Descartes‘ theorem, Euler’s theorem.

Úvodem bych chtěla poděkovat doc. Jarmile Robové, vedoucí mé diplomové práce, za vedení, zájem, pomoc, cenné rady a spoustu času, který mi věnovala při konzultacích. Dále děkuji svému manželovi, rodině a blízkým přátelům za pomoc, trpělivost a podporu během studia.

Obsah

Úvod

Tato diplomová práce je rozšířením mé bakalářske práce o pravidelných mnohostěnech, která byla rozšířena o mnohostěny polopravidelné. Tématem diplomové práce jsou tedy pravidelné a polopravidelné mnohostěny, stručné shrnutí jejich historie, klasifikace a vlastnosti. Práce je určena nejen studentům a učitelům, ale také všem příznivcům matematiky a geometrie. Práce je psána tak, aby byla pochopitelná i studentům na středních školách. Je třeba podotknout, že některá polopravidelná tělesa svými vlastnostmi značně přesahují rámec středoškolské matematiky, příkladem může být otupená krychle či otupený dvanáctistěn.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole se neprve seznámíme s obecnými vlastnostmi mnohostěnů, zavedeme mnohostěny pravidelné a polopravidelné a stručně shrneme jejich historii. Druhá polovina první kapitoly je věnována Descartově a Eulerově větě a jejich důkazům. Dále je uveden důkaz o počtu pravidelných mnohostěnů a mnohostěnů polopravidelných. Náplní druhé kapitoly je klasifikace pravidelných mnohostěnů, obsahuje vlastnosti a výpočty objemů a povrchů těchto mnohostěnů. Tato kapitola je zakončena zmínkou a dualitě pravidelných mnohostěnů. Třetí kapitola je nerozsáhlejší, obsahuje klasifikaci polopravidelných mnohostěnů s popisem stručné konstrukce polopravidelného mnohostěnu z mnohostěnu pravidelného, dále uvádí poměr mezi délkami hran pravidelného a polopravidelného tělesa a výpočty objemů a povrchů těchto těles. Ke každému tělesu je uvedena síť vygenerovaná matematickým softwarem Cabri 3D. Třetí kapitola je zakončena zmínkou o duálních mnohostěnech k Archimédovým tělesům.

Každá kapitola je doplněna řadou obrázků. Téměř všechny byly vytvořeny pro potřeby této diplomové práce v modelovacích softwarech GeoGebra a Cabri3D. Obrázky převzaté z knih nebo internetu mají v seznamu obrázků v závěru práce uveden zdroj. U některých obrázků, zvláště v druhé polovině třetí kapitoly, není striktně dodržena viditelnost úseček a to z důvodu lepší názornosti.

Cílem této práce bylo sepsat ucelený text o pravidelných a polopravidelných mnohostěnech, který by mohl sloužit učitelům pro zpestření výuky stereometrie, protože tato tělesa mají bohatou historii, dají se celkem snadno určit jejich objemy a povrchy a myslím, že studenty dokáží zaujmout.

Věřím, že tato diplomová práce zaujme čtenáře nejen výběrem tématu, ale že mu také umožní lépe těmto tělesům porozumět.

1. Pravidelné a polopravidelné mnohostěny

1.1. Mnohostěn

Na úvod práce připomeneme několik základních pojmů, kterými jsou mnohoúhelník, mnohostěn a konvexní útvar.

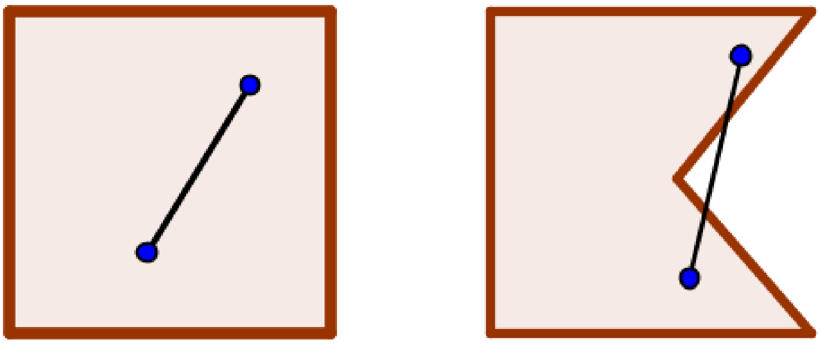
1.1.1 Definice. *Mnohoúhelníkem* nazveme část roviny ohraničenou uzavřenou lomenou čarou, která sama sebe neprotíná.

Příkladem mnohoúhelníku je čtverec, obdélník, trojúhelník, obecně *n*-úhelník.

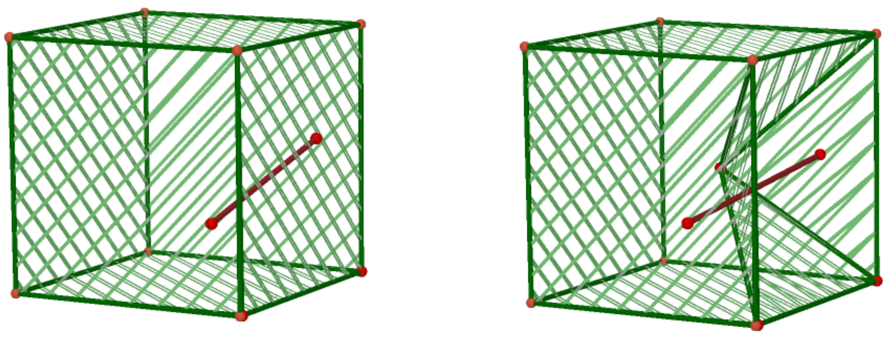
1.1.2 Definice. Těleso, jehož hranice je tvořena mnohoúhelníky neležícími v jedné rovině, nazveme *mnohostěn* nebo také *polyedr*.

Mezi tělesa řadíme například krychli, hranol, válec, kouli. Krychle a hranol patří i mezi zástupce mnohostěnů.

1.1.3 Definice. *Konvexním útvarem* nazveme takový geometrický útvar, který s libovolnou dvojicí svých bodů obsahuje i úsečku, spojující tyto dva body.



Obr. 1.1: Konvexní a nekonvexní útvar v rovině



Obr. 1.2: Konvexní a nekonvexní útvar v prostoru

Příkladem konvexních útvarů v rovině je čtverec (obr. 1.1), obdélník, kruh, trojúhelník, v prostoru to je například krychle (obr. 1.2) nebo koule. Nás budou zajímat právě mnohostěny konvexní.

Mnohostěn je tedy část prostoru ohraničená mnohoúhelníky, tyto mnohoúhelníky nazýváme **stěny mnohostěnu**. Vrcholy mnohoúhelníků jsou též **vrcholy mnohostěnu** a jejich strany jsou **hranami mnohostěnu**. V každé hraně se stýkají dvě stěny a každá hrana obsahuje dva vrcholy. V každém vrcholu se sbíhají nejméně tři hrany, tj. také tři stěny.

Konvexní mnohostěny dělíme na:

- pravidelné (všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a z každého vrcholu vychází stejný počet hran)
- polopravidelné (stěny tvoří pravidelné mnohoúhelníky, dvou nebo více typů)
- nepravidelné

V této práci se dále budeme zabývat mnohostěny pravidelnými a mnohostěny polopravidelnými. Pravidelné mnohostěny nazýváme také mnohostěny platónskými či Platónovými, polopravidelné potom mnohostěny archimédovskými nebo Archimédovými.

1.2. Pravidelné mnohostěny

1.2.1 Definice. *Pravidelným mnohostěnem* (nebo též *platónským* či *Platónovým tělesem*) nazveme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v každém jeho vrcholu se stýká stejný počet hran.

Pro pravidelné polyedry je charakteristické, že stěny tvoří pravidelné shodné mnohoúhelníky. Všechny hrany jsou proto stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly jsou shodné, v každém vrcholu se stýká stejný počet stěn a hran. Můžeme jim opsat i vepsat kulovou plochu, resp. sféru, přičemž platí, že střed tělesa má stejnou vzdálenost od jeho vrcholů (střed kulové plochy opsané) a stejnou vzdálenost od jeho stěn (střed kulové plochy vepsané).

Pravidelné mnohostěny jsou obdobou pravidelných mnohoúhelníků v rovině. Zatímco pravidelných mnohoúhelníků máme nekonečně mnoho (pravidelný mnohoúhelník existuje pro všechna přirozená $n \geq 3$), pravidelných mnohostěnů existuje právě pět. Proč je jich právě pět, bude vysvětleno v kapitole 1.6.

Názvy těchto pěti těles v řečtině označují počet stěn:

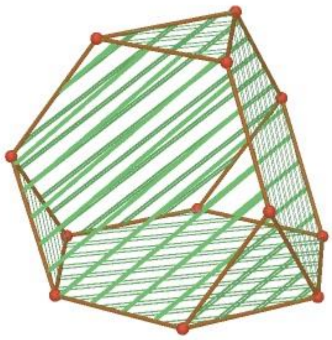
- *čtyřstěn* (*Tetraedr*), stěnami jsou čtyři rovnostranné trojúhelníky
- *šestistěn* (*Hexaedr*), krychle, stěnami je šest čtverců
- *osmistěn* (*Oktaedr*), stěnami je osm rovnostranných trojúhelníků
- *dvanáctistěn* (*Dodekaedr*), stěnami je dvanáct pravidelných pětiúhelníků
- *dvacetistěn* (*Ikosaedr*), stěnami je dvacet rovnostranných trojúhelníků

Další zajímavou vlastností pravidelných mnohostěnů je jejich dualita. Spojením středů sousedních stěn platónského tělesa úsečkami, vzniknou hrany jiného pravidelného mnohostěnu. Takto vzniklé těleso označujeme jako duální k tělesu původním. Dualita pravidelných mnohostěnů bude podrobněji vysvětlena v kapitole 2.6.

1.3. Polopravidelné mnohostěny

1.3.1 Definice. *Polopravidelným mnohostěnem* (nebo též *archimédovským* či *Archimédovým tělesem*) rozumíme konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou pravidelné mnohoúhelníky dvou, nebo více typů. V každém vrcholu polopravidelného mnohostěnu se stýká stejný počet hran i stěn vždy ve stejném pořadí a žádné dva vrcholy nejdou rozlišit, jsou rovnocenné.

Stěny polopravidelné mnohostěnu jsou tedy tvořeny pravidelnými mnohoúhelníky nejméně dvou typů. Mnohoúhelníky se v každém vrcholu stýkají vždy ve stejném pořadí. Tyto mnohostěny lze jednoznačně specifikovat pomocí posloupnosti čísel, která udává pořadí a označuje typy mnohoúhelníků stýkajících se v jednom vrcholu. Jako příklad můžeme uvést *osekaný čtyřstěn*, ten je definován čísly (*3*,*6*,*6*). Tato čísla nám říkají, že v každém vrcholu tohoto tělesa se stýká vždy po řadě jeden rovnostranný trojúhelník a dva shodné pravidelné šestiúhelníky, viz obr. 1.3.



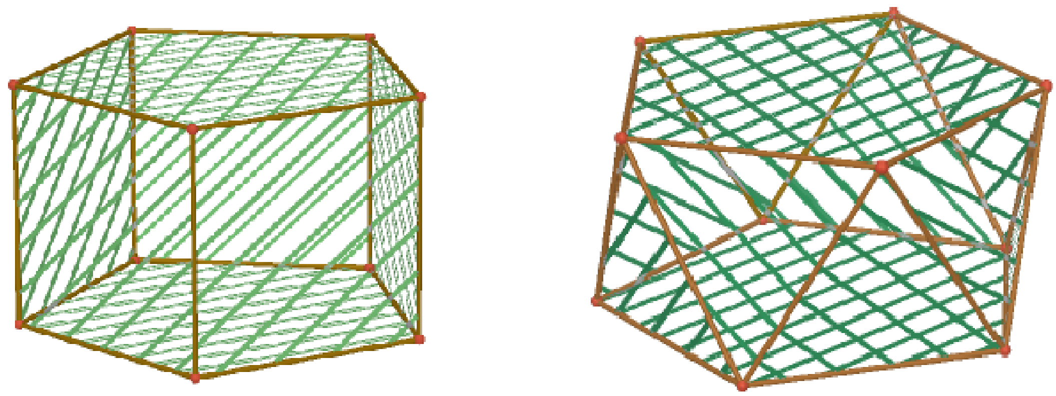
Obr. 1.3: Osekaný čtyřstěn

Archimédovská tělesa vznikla různými způsoby osekaní nebo otočení z těles platónských a existuje jich právě třináct. Je možné se setkat s různými podobami českých názvů těchto těles, proto jsou v následujícím textu v závorkách uvedeny také názvy anglické:

- *osekaný čtyřstěn* (*Truncated Tetrahedron*), stěnami jsou čtyři rovnostranné trojúhelníky a čtyři pravidelné šestiúhelníky
- *osekaný osmistěn* (*Truncated Octahedron*), stěnami je šest čtverců a osm pravidelných šestiúhelníků
- *kuboktaedr* (*Cuboctahedron*), stěnami je osm rovnostranných trojúhelníků a šest čtverců
- *osekaná krychle* (*Truncated Cube*), stěnami je osm rovnostranných trojúhelníků a šest pravidelných osmiúhelníků
- *rombokubooktaedr* (*Rhombicubooctahedron*), stěnami je osm rovnostranných trojúhelníků a osmnáct čtverců

- *velký rombokubooktaedr* (*Truncated Cuboctahedron*), stěnami je dvanáct čtverců, osm pravidelných šestiúhelníků a šest pravidelných osmiúhelníků
- *otupená krychle* (*Snub Cube*), stěnami je třicet dva rovnostranných trojúhelníků a šest čtverců
- *osekaný dvacetistěn* (*Truncated Icosahedron*), stěnami je dvanáct pravidelných pětiúhelníků a dvacet pravidelných šestiúhelníků
- *ikosododekaedr* (*Icosidodecahedron*), stěnami je dvacet rovnostranných trojúhelníků a dvanáct pravidelných pětiúhelníků
- *osekaný dvanáctistěn* (*Truncated Dodecahedron*), stěnami je dvacet rovnostranných trojúhelníků a dvanáct pravidelných desetiúhelníků
- *romboikosododekaedr* (*Rhombicosidodecahedron*), stěnami je dvacet rovnostranných trojúhelníků, třicet čtverců a dvanáct pravidelných pětiúhelníků
- *velký romboikosododekaedr* (*Truncated Icosidodecahedron*), stěnami je třicet čtverců, dvacet pravidelných šestiúhelníků a dvanáct pravidelných desetiúhelníků
- *otupený dvanástistěn* (*Snub Dodecahedron*), stěnami je osmdesát rovnostranných trojúhelníků a dvanáct pravidelných pětiúhelníků

Je třeba podotknout, že výše uvedenou definici polopravidelných mnohostěnů splňují také rovnostranné hranoly, jejichž všechy hrany jsou stejně dlouhé. Pro tuto vlastnost jsou také někdy k polopravidelným mnohostěnům, které jsme si uvedli, připojeny. Tímto rozšířením jsme schopni vytvořit polopravidelných mnohostěnů někonečně mnoho. Například *n*-boký rovnostranný hranol se nazývá *n-boká prizma*, jeho podstavami jsou dva shodné pravidelné *n*-úhelníky a stěnami *n* shodných čtverců. Pootočením horní podstavy hranolu o úhel $\frac{360°}{2n}$ a spojením protějších vrcholů dostaneme ve speciálním případě těleso také splňující naši definici, toto těleso nese název *n-boká antiprizma* (obr. 1.4).



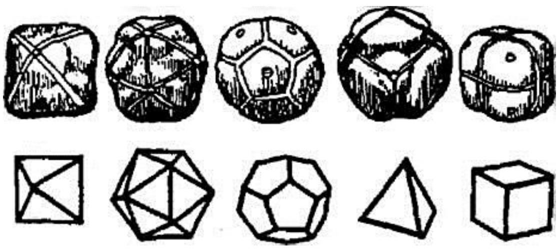
Obr. 1.4. Pětiboká prizma, pětiboká aniprizma

V této práci se dále prizmatem a antiprizmatem zabývat nebudeme, nebudeme je mezi archimédovská tělesa řadit. Blíže si v kapitole 3 klasifikujeme polopravidelné mnohostěny vzniklé ořezáním těles pravidelných či otočením jejich podstav.

1.4. Historie pravidelných a polopravidelných mnohostěnů

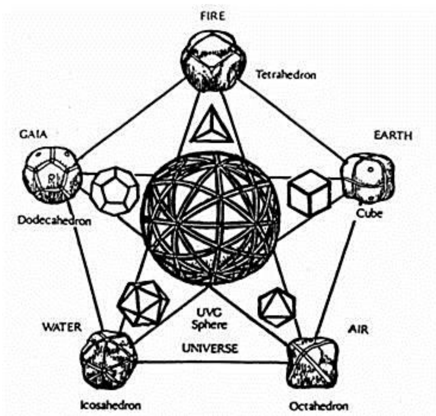
Počátky a objevení **pravidelných mnohostěnů** nemůžeme přesně určit, ovšem podle archeologických nálezů víme, že tato tělesa byla známa již ve starověku. Ve Skotsku byla objevena tělesa připomínající pravidelné mnohostěny vytesaná z kamene, jejich stáří se odhaduje asi na 2000 let př. n. l., některá jsou dokonce označena čarami naznačujícími hrany pravidelného mnohostěnu (obr. 1.5, 1.6).

Obr. 1.5: Kamenné mnohostěny ze Skotska



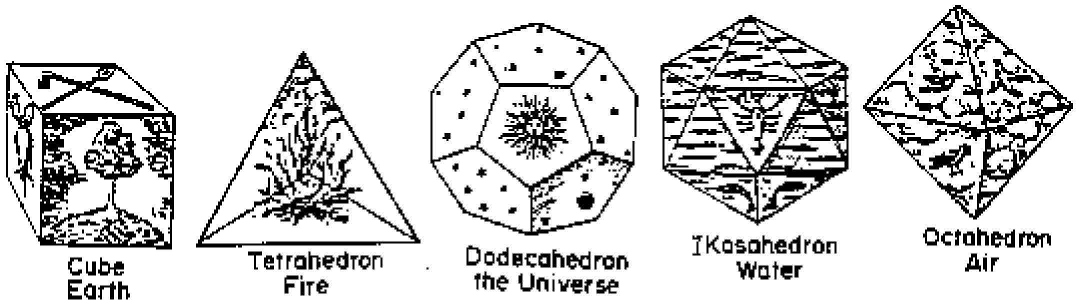
Obr. 1.6: Přiřazení nálezů k pravidelným mnohostěnům

Tato tělesa byla podrobněji popsána na počátku 4. století př. n. l., tj. v době velkých starořeckých matematiků, kteří v nich hledali řád a podstatu světa. Zajímali se o ně hlavně pythagorejci, kteří jejich dokonalost, jež byla těmto tělesům připisována kvůli jejich symetrii, zaznamenali do magického pentagramu – ve vrcholech bylo právě 5 dokonalých těles a ve středu byl veškerý prostor, celý vesmír (obr. 1.7).



Obr. 1.7: Magický pentagram

Pravidelné mnohostěny nesou jméno antického filosofa a matematika *Platóna* (427-347 př. n. l.), který ve svém díle *Tímaios* dokonce popisuje konstrukce těchto mnohostěnů přikládáním jednotlivých mnohoúhelníků k sobě a říká, že stěny lze rozložit do trojúhelníků, z nichž každý je tvořen dvěma trojúhelníky pravoúhlými [3]. Navazuje na učení *Empedokla* o existenci čtyř základních živlů (země, oheň, voda, vzduch). Platón říká, že podstata světa musí být stvořena z dokonalých těles, proto zemi přiřadil krychli, oheň čtyřstěnu, vzduch osmistěnu, vodu dvacetistěnu a dvanáctistěn byl přestavitel jsoucna - všeho, co existuje (obr. 1.8).

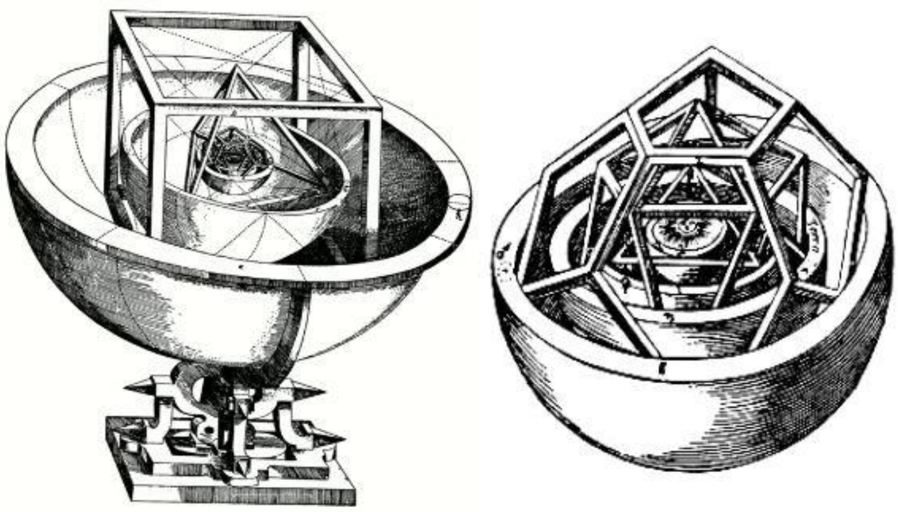


Obr. 1.8: Přiřazení pravidelných mnohostěnů živlům

První zmínka o **polopravidelných tělesech** pochází z doby významného řeckého matematika, fyzika a filozofa *Archiméda ze Syrakus* (287 – 212 př. n. l.). A právě *Archimédés* by měl být tím, kdo těchto 13 těles jako první zaznamenal a popsal. Díla, ve kterých se tato tělesa poprvé objevila, se však nedochovala.

Za období středověku nastal ve zkoumání mnohostěnů útlum a další zmínky máme až z 2. poloviny 15. století od františkánského mnicha *Luci Bartolomea de Pacioliho* (1445 – 1514/1517), který se v díle *O božském poměru* ve spolupráci s *Leonardem da Vincim* zabývá mimo jiné proporcemi zlatého řezu zvláště na dvanátistěnu.

Propojování geometrie a filosofie nebylo obvyklé jen pro starověk, platónská a archimédovská tělesa inspirovala také *Johanna Keplera* (1571 – 1630). Podle jeho zkoumání se tehdy šest známých planet pohybovalo okolo Slunce po kulových plochách opsaných či vepsaných pravidelným mnohostěnům (opět idea, že dokonalost pravidelných mnohostěnů se musela projevit v řádu světa). Například Země obíhala po kulové ploše dotýkající se středů stěn pravidelného dvanáctistěnu (vepsaná kulová plocha) a Mars po kulové ploše procházející vrcholy pravidelného dvanáctistěnu (opsaná kulová plocha). Keplerova teorie ztroskotala, když se zjistilo, že vzdálenost kulových ploch neodpovídá skutečným vzdálenostem planet od Slunce (obr. 1.9).



Obr. 1.9: Keplerův model vesmíru

Zkoumáním polopravidelných těles se Kepler zabývá v díle *Harmonics mundi*, které vznikalo na počátku 17. století, věnuje se zvláště diskuzi o počtu těchto mnohostěnů.

Ke Keplerovým současníkům patří také francouzský filosof a matematik *René Descartes* (1596 - 1650), který se možná jako první zabýval obecnými zákonitostmi platícími pro mnohostěny, s jednou zákonitostí se seznámíme v kapitole 1.5.

Dalším významným matematikem spojovaným s touto tematikou je *Leonhard Euler* (1707 - 1793). Formuloval vztah pro počet stěn, vrcholů a hran, který platí pro každý konvexní mnohostěn, známý pod názvem *Eulerova věta*.

1.5. Descartova a Eulerova věta

Od 17. do 19. století se geometrie začala zobecňovat. Důležitější než tělesa objevit a popsat se jeví najít obecné zákonitosti, které by pro určitou skupinu mnohostěnů platily hromadně. Jedním z prvních, kdo tyto zákonitosti začal hledat, byl *René Descartes* (1596 – 1650), přínosným poznatkem jeho práce je *Descartova věta*, kterou si také dokážeme. Některé vztahy, na které se budeme při zdůvodňování dále odkazovat, budou očíslovány pro každou podkapitolu zvlášť.

Nejprve zavedeme pojem hranového úhlu.

1.5.1 Definice. Úhel sevřený dvěma sousedními hranami mnohostěnu se společným vrcholem nazýváme *hranovým úhlem*.

1.5.1 Descartova věta. Součet velikostí všech hranových úhlů σ daného konvexního mnohostěnu je roven *4R*, tj. 360°, vynásobenému počtem vrcholů *v* , který je zmenšen o dvě.

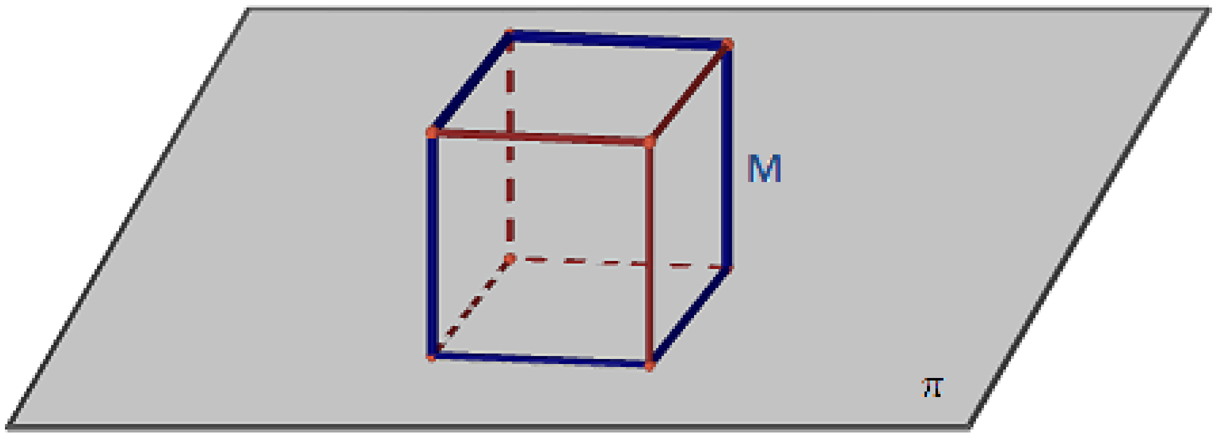
$$\sigma = (v - 2) \cdot 4R$$

Než tvrzení dokážeme, je třeba si uvědomit dvě věci:

1) Součet velikostí vnitřních úhlů *n*-úhelníka je (*n-2*) · *2R*, neboť každý *n*-úhelník jde rozdělit na *n-2* trojúhelníků a součet velikostí vniřních úhlů každého trojúhelníku je *2R*, kde *2R=180°.* Např. součet velikostí vnitřních úhlů v pětiúhelníku je $(5-2)\cdot 2R = 6R = 540°$.

2) Každý *n*-úhelník, který neleží v promítací rovině, se v rovnoběžném promítání zobrazí opět na *n*-úhelník. Proto se nezmění součet velikostí jeho vnitřních úhlů.

Přejděme k důkazu. Daný konvexní mnohostěn, který má *v* vrcholů, rovnoběžně promítneme do vhodné roviny *π.* Směr volíme tak, aby se žádná jeho stěna nepromítala jako úsečka a aby žádné dva vrcholy neměly společný průmět. Pro uvedení příkladu si takto promítneme krychli (krychle má osm vrcholů, obr. 1.10).



Obr. 1.10: Krychle v rovnoběžném promítání

Potom je průmětem daného mnohostěnu konvexní mnohoúhelník *M*. Přitom v_1 vrcholů mnohostěnu má své průměty na obvodu mnohoúhelníku *M* (v případě krychle je jich šest) a (v – v_1) vrcholů má průměty uvnitř (v krychli jsou to dva vrcholy). Součet σ velikostí všech hranových úhlů odpovídá součtu velikostí všech vnitřních úhlů všech stěn původního mnohostěnu, proto se promítnutím nemění. Vypočteme jej nejlépe z průmětu *M.*

Součet velikostí všech hranových úhlů σ je součtem velikostí průmětů všech hranových úhlů při vnitřních vrcholech, který je

$$(v - v_1)\cdot 4R,$$

a součtem velikostí průmětů hranových úhlů při obrysových vrcholech (součet velikostí vnitřních úhlů ve v_1-úhelníku), který je

$$(v_1 - 2)\cdot 2R.$$

Poslední součet je potřeba uvážit dvakrát, jednou za mnohoúhelník viditelný v průmětně, podruhé za mnohoúhelník za průmětem ,,schovaný". A tedy

$$\sigma = (v - v_1) \cdot 4R + 2(v_1 - 2) \cdot 2R = (v - v_1 + v_1 - 2) \cdot 4R = (v - 2) \cdot 4R.$$

Tímto je věta dokázána.

1.5.2. Eulerova věta. V konvexním mnohostěnu označme *v*, *s*, *h* po řadě počet jeho vrcholů, stěn a hran. Pak platí, že součet počtu vrcholů a počtu stěn je roven počtu hran zvětšeném o dvě.

$$s + v = h + 2$$

Provedeme důkaz. Předpokládejme, že stěny daného mnohostěnu jsou tvořeny trojúhelníky v počtu s_3, čtyřúhelníky v počtu s_4, až *k*-úhelníky v počtu s_k, kde $k \geq 3$. Pak platí:

$$s = s_3 + s_4 + \cdots + s_k = \sum_{n=3}^{k} s_n \qquad (1)$$

Počet hran daného mnohostěnu je

$$h = \frac{1}{2}(3s_3 + 4s_4 + \cdots + ks_k) = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{k} n\, s_n. \qquad (2)$$

Nechť má daný mnohostěn v_3 vrcholů, v nichž se stýkají tři hrany, v_4 vrcholů, v nichž se stýkají čtyři hrany, až v_r vrcholů, v nichž se stýká *r* hran, kde $r \geq 3$. Pro počet vrcholů a hran pak platí

$$v = v_3 + v_4 + \cdots + v_r = \sum_{n=3}^{r} v_n,$$

$$h = \frac{1}{2}(3v_3 + 4v_4 + \cdots + rv_r) = \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{r} n\, v_n. \qquad (3)$$

Vypočteme součet velikostí všech hranových úhlů. Tedy vypočítáme součet σ velikostí všech vnitřních úhlů všech stěn mnohostěnu. Dostaneme

$$\sigma = s_3 \cdot 2R + s_4 \cdot 4R + \cdots + s_k \cdot (k - 2) \cdot 2R = 2R \cdot \sum_{n=3}^{k} (n - 2)\, s_n. \qquad (4)$$

Ze vztahů (1) a (2) uvedených v důkazu vyplývá, že

$$2h - 2s = \sum_{n=3}^{k} n\, s_n - 2\sum_{n=3}^{k} s_n = \sum_{n=3}^{k} (n - 2)\, s_n. \qquad (5)$$

Vidíme, že vyjádření (4) pro součet σ velikostí všech vnitřních úhlů můžeme s využitím vztahu (5) zjednodušit a získáme

$$\sigma = 2R \cdot \sum_{n=3}^{k} (n-2)\, s_n = 2R \cdot (2h - 2s)$$

$$\sigma = 4R \cdot (h - s). \tag{6}$$

Porovnáním vztahu (6) s výrazem získaným z Descartovy věty obdržíme rovnost

$$v - 2 = h - s.$$

Tu snadno upravíme na námi hledaný Eulerův vztah

$$s + v = h + 2.$$

Tímto je Eulerova věta dokázána.

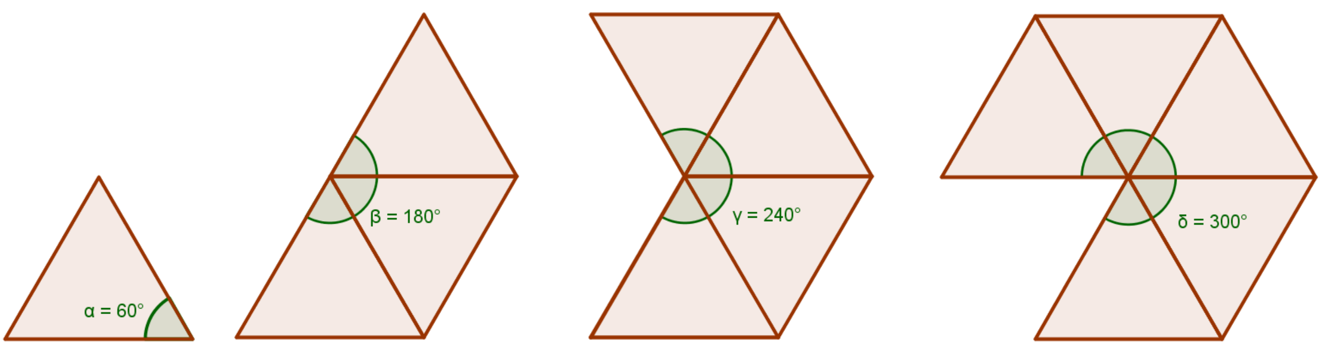
1.6. Počet pravidelných mnohostěnů

V následující kapitole si ukážeme, proč je pravidelných mnohostěnů právě pět.

Z definice pravidelného mnohostěnu víme, že povrch pravidelného mnohostěnu tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky, z nichž žádné dva neleží ve stejné rovině, proto musí být součet hranových úhlů u vrcholu, u kterého se nám stěny sbíhají, menší než 360°. U každého vrcholu mnohostěnu se musí sbíhat alespoň 3 stěny, neboť ze dvou rovinných útvarů není možné vytvořit prostorové těleso.

1.6.1. Stěny rovnostranné trojúhelníky

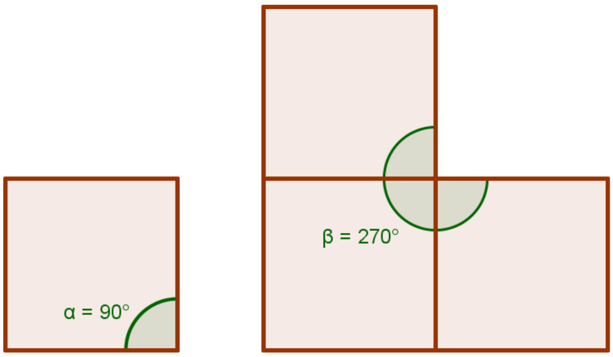
Pokud stěny našeho pravidelného mnohostěnu představují nejjednodušší pravidelné mnohoúhelníky, tj. rovnostranné trojúhelníky (vnitřní úhly mají velikost 60°), pak se v každém vrcholu mohou sbíhat tři (čtyřstěn), čtyři (osmistěn) nebo pět (dvacetistěn), součty velikostí úhlů u vrcholů pak budou 180°, 240° nebo 300°. Šest stěn a více už by bylo v rozporu s výše uvedenou podmínkou.



Obr. 1.11: Stěny rovnostranné trojúhelníky

1.6.2. Stěny pravidelné čtyřúhelníky

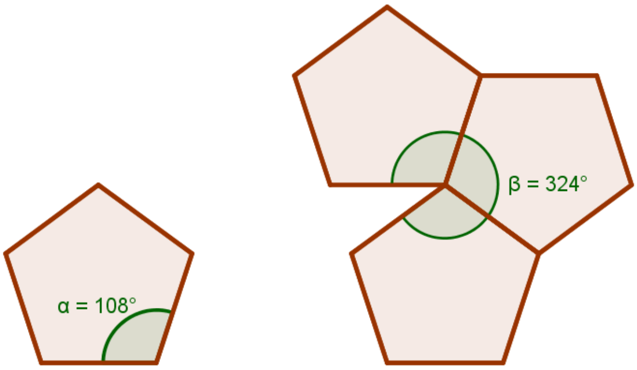
Vezmeme-li v úvahu mnohostěn se čtvercovými stěnami (vnitřní úhly mají velikost 90°), jsou naše podmínky splněny pouze jednou a to v případě, že se ve vrcholu stýkají stěny tři ($3 \cdot 90° = 270°$). Pravidelným mnohostěnem, jehož stěny tvoří pravidelné čtyřúhelníky, je krychle.



Obr. 1.12: Stěny pravidelné čtyřúhelníky

1.6.3. Stěny pravidelné pětiúhelníky

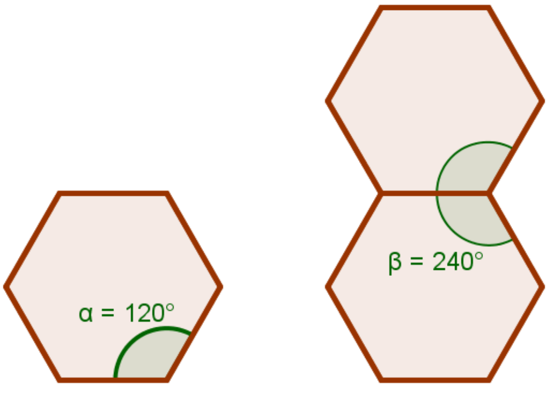
U stěn tvořených pravidelnými pětiúhelníky (vnitřní úhly mají velikost 108°), jsou podmínky splněny také pouze pro tři stěny sbíhající se v jednou vrcholu ($3 \cdot 108° = 324°$). Mnohostěn, jehož stěny tvoří pravidelné pětiúhelníky, je dvanáctistěn.



Obr. 1.13: Stěny pravidelné pětiúhelníky

1.6.4 Stěny pravidelné šestiúhelníky

Nenajdeme však žádné jiné těleso, jež by bylo pravidelným mnohostěnem, v jehož vrcholech by se sbíhaly minimálně 3 stěny a součet vniřních úhlů u sbíhajících se stěn v jednom vrcholu by byl menší než 360°. V pravidelném šestiúhelníku je velikost vnitřního úhlu rovna 120°, spojením tří stěn, dostaneme ($3 \cdot 120° = 360°$) opět rovinný útvar. Totéž platí i pro pravidelné mnohoúhelníky s vyšším počtem vrcholů.



Obr. 1.14: Stěny pravidelné šestiúhelníky

A proto v prostoru nemůže existovat více než právě těchto 5 pravidelných mnohostěnů.

1.7. Počet polopravidelných mnohostěnů

Z definice polopravidelného mnohostěnu víme, že jeho stěny tvoří několik typů pravidelných mnohoúhelníků o stranách stejné délky a vrcholy jsou od sebe nerozeznatelné. V následující podkapitole si ukážeme, kolik takových mnohostěnů existuje.

Budeme postupovat podobně jako u důkazu pro počet pravidelných mnohostěnů. Musíme najít všechna možná uspořádání stěn ve vrcholu polopravidelného mnohostěnu. Pro určení počtu polopravidelných mnohostěnu postačí najít taková tělesa, jejijchž stěny nejsou jednoho typu a jejichž vrcholy od sebe nejdou navzájem rozeznat, tj. jsou izomorfní [10].

Pro každé zjištěné uspořádání stěn ve vrcholu sestavíme schéma. Toto schéma je jednoznačně určeno pro každý polopravidelný mnohostěn.

Definice 1.7.1. Každý polopravidelný mnohostěn je jednoznačně určen posloupností čísel

$$(p_1, p_{2,} \dots, p_k)$$

takovou, že v každém vrcholu mnohostěnu pro $i \in \{1,2, \dots k-1\}$ sousedí p_i-úhelník s p_{i+1}-úhelníkem a p_1-úhelník s p_k-úhelníkem. Takovou posloupnost nazýváme *posloupností vrcholovou.* Je zvykem psát posloupnost tak, aby pro co nejvíce p_i platilo

$$p_i \leq p_{i+1}.$$

Například, střetává-li se v každém vrcholu polopravidelného mnohostěnu po řadě rovnostranný trojúhelník a dva pravidelné desetiúhelníky, jako je tomu u osekaného dvanáctistěnu, tato posloupnost nebude zapsána čísly (*10*,*10*,*3*), ani (*10*,*3*,*10*), ale (*3*,*10*,*10*).

Přejděme k důkazu.

Nechť v je počet vrcholů, s počet stěn a h počet hran polopravidelného mnohostěnu, dále s_1 je počet n_1-úhelníků, s_2 je počet n_2-úhelníků a obecně s_i je počet n_i-úhelníků. Dále nechť se v každém vrcholu mnohostěnu sbíhá S stěn, z toho S_1 je n_1-úhelníkových, S_i je n_i-úhelníkových. Nejprve ukážeme, že se ve vrcholu mnohostěnu nemůže sbíhat příliš mnoho stěn, tj. počet stěn S omezíme shora. V každém vrcholu se také stýká S hran, celkový počet hran ve všech vrcholech mnohostěnu je

$$S \cdot v. \tag{1}$$

Takto ovšem započítáváme každou hranu dvakrát, musí platit rovnost

$$S \cdot v = 2 \cdot h. \tag{2}$$

Každá stěna mnohostěnu musí mít nejméně tři hrany, tedy

$$3 \cdot s \leq h \tag{3}$$

a zároveň každá hrana mnohostěnu patří dvěma stěnám , proto je vždy

$$3 \cdot s \leq 2 \cdot h. \tag{4}$$

Ze vztahů (2) a (4) plyne také

$$3 \cdot s \leq 2 \cdot h = S \cdot v. \tag{5}$$

Jestliže podle Eulerovy věty platí

$$s + v = h + 2,$$

platí také

$$s + v > h. \tag{6}$$

Ze vztahu (5)

$$3 \cdot s \leq S \cdot v \tag{7}$$

získáme

$$\frac{S \cdot v}{3} \geq s, \tag{8}$$

po přičtení *v* k oběma stranám nerovnosti dostaneme

$$v + \frac{S \cdot v}{3} \geq v + s. \tag{10}$$

A dle (6) platí

$$s + v > h,$$

tedy

$$v + \frac{S \cdot v}{3} \geq v + s > h. \tag{11}$$

Dále si z (2) vyjádříme *h* a dosadíme do (11)

$$h = \frac{S \cdot v}{2}$$

$$v + \frac{S \cdot v}{3} > \frac{S \cdot v}{2}. \tag{12}$$

Vyjádříme *S:*

$$1 + \frac{S}{3} > \frac{S}{2}$$

$$\frac{3 + S}{3} > \frac{S}{2}$$

$$2(3 + S) > 3S$$

$$6 > S \tag{13}$$

Odtud plyne, že počet stěn sbíhajících se v jednom vrcholu mnohostěnu může být nejvýše pět, tedy $3 \leq S \leq 5$.

Všechny n_1-úhelníkové stěny obsahují $n_1 \cdot s_1$ hranových úhlů, kde s_1 je počet stěn mnohostěnu, které mají n_1 hran. Totéž číslo jde také vyjádřit součinem počtu vrcholů a počtu S_1 stěn ve tvaru n_1- úhelníku v jednom vrcholu se sbíhajících, tedy

$$v \cdot S_1.$$

Potom $$n_1 \cdot s_1 = v \cdot S_1.$$

Odtud plyne

$$s_1 = \frac{S_1 \cdot v}{n_1}. \tag{14}$$

Analogicky jde najít vztah pro s_2, s_3 , obecně s_k :

$$s_k = \frac{S_k \cdot v}{n_k} \tag{15}$$

Pro počet stěn *s* mnohostěnu dále platí

$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_k = \frac{S_1 \cdot v}{n_1} + \frac{S_2 \cdot v}{n_2} + \cdots + \frac{S_k \cdot v}{n_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{S_i \cdot v}{n_i}. \tag{16}$$

Poslední výraz ze vztahu (16) s *h* vyjádřeným z rovnosti (2) dosadíme do Eulerova vztahu a upravíme:

$$s = h - v + 2,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{S_i \cdot v}{n_i} = \frac{S \cdot v}{2} - v + 2 \quad /: v,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{n_i} = \frac{S}{2} - 1 + \frac{2}{v},$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{n_i} = \frac{S - 2}{2} + \frac{2}{v}. \tag{17}$$

Nyní budeme hledat přirozená čísla $S_1, S_2, S_3, \ldots\ n_1, n_2, n_3, \ldots$ tak, aby splňovala vztah (17), tj.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{n_i} = \frac{S-2}{2} + \frac{2}{v}.$$

V následujícím textu se pokusíme najít všechny polopravidelné mnohostěny, které vztah (17) splňují, když navíc víme, že se v jednom vrcholu mohou sbíhat tři, čtyři, nebo pět stěn.

1. **Uvažujme, že se ve vrcholu sbíhají tři stěny, tj. *S = 3*, tyto stěny mohou být pravidelnými mnohoúhelníky dvou nebo tří různých typů.**
   - **a.** Ve vrcholu se sbíhají stěny dvou typů, uvažujme $S_1 = 2$, $S_2 = 1$, rovnice

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{n_i} = \frac{S-2}{2} + \frac{2}{v}$$

má v tomto případě tvar

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{3-2}{2} + \frac{2}{v}$$

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{v}. \qquad (18)$$

Pak platí:

$$\frac{2}{n_1} + \frac{1}{n_2} > \frac{1}{2}.$$

Víme, že každý n_i-úhelník musí mít alespoň 3 strany, tedy

$$n_2 \geq 3,$$

odtud platí

$$\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{3},$$

proto

$$\frac{2}{n_1} > \frac{1}{6}$$

a tedy

$$n_1 < 12.$$

Číslo n_1 musí být z geometrického hlediska sudé, proto může nabývat jen hodnot 4, 6, 8, 10.

i. Uvažujme $\boldsymbol{n_1 = 4}$.
Ze vztahu (18) plyne:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{v},$$
tedy
$$v = 2n_2 \qquad (19)$$
Jde vidět, že *v* je sudým přirozeným číslem pro každé přirozené n_2.

Ze vztahu (15)
$$s_k = \frac{S_k \cdot v}{n_k}.$$
a (19) plyne, že $\boldsymbol{s_1 = n_2}$ **a** $\boldsymbol{s_2 = 2}$. Našli jsme mnohostěn s *n*$_2$ čtyřúhelníkovými stěnami a dvěma *n*$_2$-úhelníkovými stěnami. Tento mnohostěn je izomorfní s *n*-bokým prizmatem (obr. 1.4). Našli jsme první nekonečnou sérii mnohostěnů, která splňuje tuto podmínku. Jen je třeba vyloučit mnohostěn pro $n_2 = 4$, neboť je pravidelný, je to krychle.

ii. Uvažujme $\boldsymbol{n_1 = 6}$.
Ze vztahu (18) plyne, že
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{v}$$
a odtud snadno vyjádříme *v:*
$$v = \frac{12n_2}{6-n_2} \qquad (20)$$
Je jasné, že
$$n_2 < 6.$$

1. Jestliže $\boldsymbol{n_2 = 3}$, po dosazení do rovnosti (20) dostaneme $\boldsymbol{v = 12}$. Mnohostěn má dvanáct vrcholů a v každém z nich se stýkají dva pravidelné šestiúhelníky a jeden rovnostranný trojúhelník. Tento mnohostěn je izomorfní s *osekaným čtyřstěnem* a pomocí vrcholové posloupnosti jej můžeme zapsat (*3*,*6*,*6*).
2. Je-li $\boldsymbol{n_2 = 4}$, dosazením do (20) získáme $\boldsymbol{v = 24}$**.** Mnohostěn má dvacet čtyři vrcholů a v každém se sbíhají dva shodné pravidelné šestiúhelníky a jeden čtverec. Takový mnohostěn je izomorfní s *osekaným osmistěnem*, je jednoznačně určen posloupností (*4*,*6*,*6*).
3. Pro $\boldsymbol{n_2 = 5}$ a dosazením do (20) získáme $\boldsymbol{v = 60}$, tedy mnohostěn se šedesáti vrcholy, v každém vrcholu se střetávají dva pravidelné šestiúhelníky a jeden pravidelný pětiúhelník. Je

izomorfní s *osekaným dvacetistěnem*, jehož vrcholová posloupnost je (*5*,*6*,*6).*

Tímto máme vyřešeny všechny mnohostěny, v jejichž vrcholech se sbíhají vždy tři stěny, přičemž dvě z nich jsou vždy pravidelnými šestiúhelníky.

iii. Pro $\boldsymbol{n_1 = 8}$ získáme z (18) rovnost

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{v}.$$

Odkud

$$v = \frac{8n_2}{4 - n_2}, \tag{21}$$

proto

$$n_2 < 4.$$

1. Jediná možnost přicházející v úvahu je pro $\boldsymbol{n_2 = 3}$, dosazením do (21) dostaneme $\boldsymbol{v = 24.}$ Získali jsme mnohostěn s dvaceti čtyřmi vrcholy. V každém vrcholu se stýkají dva pravidelné osmiúhelníky a jeden rovnostranný trojúhelník, vrcholová posloupnost je (*3*,*8*,*8*). Tímto tělesem je *osekaná krychle*.

Žádný jiný polopravidelný mnohostěn, v jehož vrcholech se sbíhají vždy tři stěny, z toho dvě jsou vždy pravidelné osmiúhelníky, neexistuje.

iv. Zbývá už jen prošetřit možnost, kdy se v každém vrcholu sbíhají dva desetiúhelníky, tedy $\boldsymbol{n_1 = 10}$. Dosazením do vztahu (18) získáme

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{v}.$$

Vyjádříme *v:*

$$v = \frac{20n_2}{10 - 3n_2}. \tag{22}$$

Je zřejmé, že

$$10 - 3n_2 > 0,$$

proto

$$n_2 \leq 3,$$

ale zároveň víme, že

$$n_2 \geq 3.$$

1. Jedinou možností je $\boldsymbol{n_2 = 3}$. Po dosazení do (22) dostaneme $\boldsymbol{v = 60}$. Mnohostěn má šedesát vrcholů a v každém se potkávají dva pravidelné desetiúhelníky a jeden rovnostranný trojúhelník, tj. vrcholová posloupnost (*3*,*10*,*10*). Těleso je izomorfní s *osekaným dvanáctistěnem*.

Osekaný dvanáctistěn je jediným tělesem, v jehož každém vrcholu se sbíhají tři stěny, přičemž dvě jsou vždy pravidelné desetiúhelníky a třetí stěnou je rovnostranný trojúhelník.

b. Budeme uvažovat, že se v každém vrcholu mnohostěnu sbíhají tři různé stěny, tedy $S_1 = S_2 = S_3 = 1$. I v tomoto případě musí být každá z hodnot n_1, n_2, n_3 sudá. Ze vztahu (17) pro tento případ dostaneme

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{v} \qquad (23)$$

a je zřejmé, že

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{2}.$$

Aby byla tato nerovnost splněna, musí být alespoň jeden člen na levé straně větší než $\frac{1}{6}$.

Zvolme $$\frac{1}{n_1} > \frac{1}{6},$$

nebo-li $$n_1 < 6.$$

Odtud víme, že jediná možná hodnota je

$$n_1 = 4.$$

Po dosazení do vztahu (23) získáme

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{v}. \qquad (24)$$

Je očividné, že

$$\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > \frac{1}{4},$$

tedy, aby byla splněna nerovnost, jedna z hodnot n_2, n_3 musí být větší než $\frac{1}{8}$.

Nechť je

$$\frac{1}{n_2} > \frac{1}{8},$$

tedy $$n_2 < 8.$$

Když uvážíme, že $n_1 \neq n_2$ a pravidelné mnohoúhelníky mají být různého typu,

pak $$n_2 = 6$$

a $$\frac{1}{n_3} > \frac{1}{12},$$

proto $n_3 = 10$, nebo $n_3 = 8$.

i. Uvažujme $\boldsymbol{n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 8.}$

Po dosazení do vztahu (24) dostaneme $\boldsymbol{v = 48}$, dostali jsme mnohostěn se čtyřiceti osmi vrcholy a v každém se stýká jeden čtverec, jeden pravidelný šestiúhelník a jeden pravidelný osmiúhelník, tj. vrcholová posloupnost je (*4*,*6*,*8*). Mnohostěn je izomorfní s *velkým rombokubooktaedrem*.

ii. Mějme $\boldsymbol{n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 10}$.
Po dosazení do stejného vztahu (24) získáme těleso, které má 120 vrcholů a $\boldsymbol{v = 120}$ a v každém se stýká jeden čtverec, jeden pravidelný šestiúhelník a jeden pravidelný desetiúhelník, vrcholová posloupnost je (*4*,*6*,*10*). Mnohostěn je izomorfní s *velkým romboikosododekaedrem.*

Tímto máme vyřešeny všechny případy, kdy se v každém vrcholu mnohostěnu stýkají tři stěny.

2. Dále uvažujme, že se vrcholu mnohostěnu se stýkají 4 stěny, tj. $\boldsymbol{S = 4}$.

a. Nejprve mějme tři stěny jednoho typu, tj. $S_1 = 3$, a jednu stěnu typu jiného, tedy $S_2 = 1$. Dosadíme za S_i do vztahu (17) a postupně upravíme:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{n_i} = \frac{S-2}{2} + \frac{2}{v},$$

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = \frac{4-2}{2} + \frac{2}{v},$$

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = 1 + \frac{2}{v}. \qquad (25)$$

Pak musí platit nerovnost

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} > 1.$$

Víme, že $\qquad n_2 \geq 3,$

musí také platit

$$\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{3}.$$

Proto

$$\frac{3}{n_1} > \frac{2}{3}$$

a tedy $\qquad n_1 \leq 4.$

Číslo n_1 může nabývat jedině hodnot $n_1 = 3$ a $n_1 = 4$.

i. Mějme tedy těleso, jehož tři stěny u jednoho vrcholu jsou rovnostranné trojúhelníky,tj. $\boldsymbol{n_1 = 3}$. Ze vztahu (25)

$$\frac{3}{n_1} + \frac{1}{n_2} = 1 + \frac{2}{v}$$

plyne, že

$$\frac{3}{3}+\frac{1}{n_2}=1+\frac{2}{v}.$$

Po vyjádření *v* dostaneme, že

$$v = 2n_2 \tag{26}$$

Je vidět, že *v* je sudým přirozeným číslem pro každé přirozené n_2.

Ze vztahu (15)

$$s_k = \frac{S_k \cdot v}{n_k}$$

a (26) plyne, že $\boldsymbol{s_1 = 2n_2}$ **a** $\boldsymbol{s_2 = 2}$. Našli jsme mnohostěn s $2n_2$ trojúhelníkovými stěnami a dvěma n_2-úhelníkovými stěnami. Tento mnohostěn je izomorfní s n_2-bokým antiprizmatem (obr. 1.4). Našli jsme druhou nekonečnou sérii mnohostěnů, která splňuje tuto podmínku. Jen je třeba vyloučit mnohostěn pro $n_2 = 3$, neboť je pravidelný a je izomorfní s pravidelným osmistěnem.

ii. Mějme teď těleso, jehož tři stěny u jednoho vrcholu jsou čtverce, $\boldsymbol{n_1 = 4}$. Ze vztahu (25)

$$\frac{3}{n_1}+\frac{1}{n_2}=1+\frac{2}{v}$$

plyne, že

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{n_2}=1+\frac{2}{v},$$

tedy

$$v = \frac{8n_2}{4-n_2} \tag{27}$$

Je zřejmé, že $\boldsymbol{n_2 < 4}$, jedinou možností je $\boldsymbol{n_2 = 3}$. Po dosazení do (27) dostaneme $\boldsymbol{v = 24,}$ tedy těleso s dvaceti čtyřmi vrcholy a v každém se potkávají tři čtverce a jeden rovnostranný trojúhelník, vrcholová posloupnost je (*3*,*4*,*4*,*4*). Těleso je izomorfní s *rombokuboktaedrem.*

b. Dále mějme dvě stěny jednoho typu, tedy $S_1 = 2$, a dvě stěny typu jiného, tj. $S_2 = 2$. Po dosazení do (17) získáme:

$$\frac{2}{n_1}+\frac{2}{n_2}=1+\frac{2}{v},$$

$$\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}=\frac{1}{2}+v. \tag{28}$$

Platí-li vztah (28), platí také nerovnost

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} > \frac{1}{2},$$

kde $n_1, n_2 \geq 3.$

Uvažujeme-li např. $n_2 = 3,$

pak

$$\frac{1}{n_2} \leq \frac{1}{3},$$

a tedy $n_1 < 6.$

Hodnota n_1 může být 4, nebo 5, protože $n_1 \neq n_2$

i. Uvažujme $\boldsymbol{n_1 = 4}$.
Ze vztahu (28)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{v}$$

získáme počet vrcholů

$$v = \frac{4n_2}{4 - n_2}. \tag{29}$$

Ze jmenovatele vztahu (29) jde vidět, že n_2 může nabývat jediné hodnoty a to $n_2 = 3.$

Mějme tedy $\boldsymbol{n_2 = 3}$. Po dosazení do (29) získáme $\boldsymbol{v = 12}$, tedy těleso se dvanácti vrcholy a v každém se stýkají dva rovnostranné trojúhelníky a dva čtverce, vrcholová posloupnost je (*3*,*4*,*3*,*4*). Takový mnohostěn nazýváme *kuboktaedr.*

ii. Teď uvážíme, že se v každém vrcholu stýkají dva pravidelné pětiúhelníky $\boldsymbol{n_1 = 5}$ a dva jiné pravidelné mnohoúhelníky stejného typu. Ze vztahu (17) dostaneme

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{n_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{v}$$

a opět vyjádříme *v:*

$$v = \frac{10n_2}{10 - 3n_2} \tag{30}$$

Ze jmenovatele vztahu (30) je vidět, že jedinou možností je $\boldsymbol{n_2 = 3.}$ Po dosazení do (30) dostaneme $\boldsymbol{v = 30}$, těleso se třiceti vrcholy, kde se v každém vrcholu střetávají dva pravidelné pětiúhelníky a dva rovnostranné trojúhelníky, vrcholová posloupnost je (*3,5,3,5*), tento mnohostěn je izomorfní s *ikosododekaedrem.*

c. Další možností jsou dvě stěny jednoho typu tj. $S_1 = 2$, jedna stěna druhého typu, tj. $S_2 = 1$, a jedna stěna třetího typu, tj. $S_3 = 1$. Pro tento případ získáme $\boldsymbol{v = 60,}$ mnohostěn se šedesáti vrcholy a v každém vrcholu se stýkají dva čtverce, jeden rovnostranný trojúhelník a jeden pravidelný pětiúhelník, vrcholová posloupnost je (*3,4,5,4*), zástupcem je *romboikosododekaedr.*

d. Poslední možnost pro čtyři stěny stýkající se v jednom vrcholu jsou čtyři různé stěny tj. $S_1 = 1$, $S_2 = 1, S_3 = 1$ a $S_4 = 1$, takový mnohostěn, který by navíc splňoval rovnici

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 1 + \frac{2}{v}$$

neexistuje.

Tímto jsme získali všechny polopravidelné mnohostěny, v jejichž každém vrcholu se sbíhají čtyři stěny. Podrobnějším odůvodněním počtu polopravidelných mnohostěnů se zabýval například Johannes Kepler.

3. Posledním možností je, když se v každém vrcholu sbíhá pět stěn, tj. *S = 5*.

a. V mnohostěnu se sbíhají čtyři stěny jednoho typu tj. $S_1 = 4$ a jedna stěna typu druhého, tj. $S_2 = 1$. Analogickými úvahami jako v předchozí části získáme poslední dvě tělesa.

i. Uvažujme $\boldsymbol{n_1 = 3.}$

1. Předpokládejme $\boldsymbol{n_2 = 4}$. Dostaneme $\boldsymbol{v = 24}$. Tedy těleso se dvaceti čtyřmi vrcholy, v každém vrcholu se sbíhají čtyři rovnostranné trojúhelníky a jeden čtverec, vrcholová posloupnost je (*3,3,3,3,4*). Izomorfním mnohostěnem je *otupená krychle*.
2. Uvažujme $\boldsymbol{n_2 = 5.}$ Dostaneme $\boldsymbol{v = 60}$, tedy těleso se šedesáti vrcholy, opět se v každém vrcholu setkávají čtyři rovnostranné trojúhelníky, které ovšem doplňuje pravidelný pětiúhelník, vrcholovou posloupností je (*3,3,3,3,5*). Izomorfním mnohostěnem je *otupený dvanáctistěn*.

Žádný jiný mnohostěn naše podmínky nesplňuje. Našli jsme tedy všechny polopravidelné mnohostěny, kterých je včetně prizmatu a antiprizmatu patnáct.

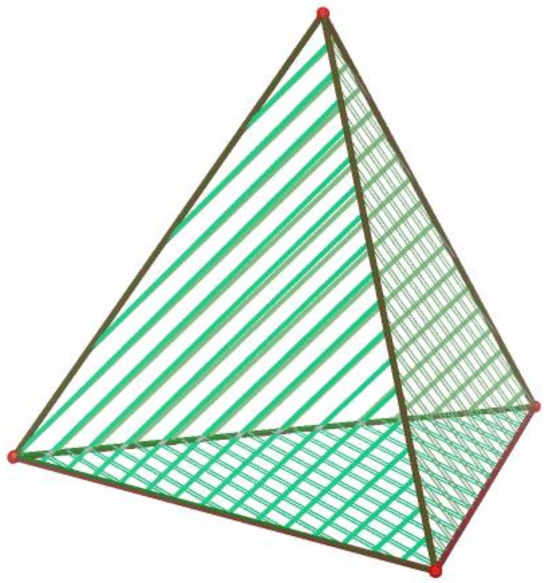
2. Klasifikace pravidelných mnohostěnů

V následující kapitole klasifikujeme všechna Platónova tělesa a budeme sa zabývat jejich dualitou. Shrnutí vlastností je zaznamenáno v tabulkách. Sítí mnohostěnu rozumíme zakreslení všech stěn mnohostěnu do jedné roviny tak, aby stěny tvořily souvislý celek. Ke každému platónskému tělesu si uvedeme jednu síť. Sítě byly vytvořeny grafickým programem Cabri3D, který pro každý mnohostěn generuje stále stejnou síť.

2.1 Pravidelný čtyřstěn – tetraedr

Uvažujme pravidelný čtyřstěn o hraně délky *a*.

Tetraedr	
Stěna	*trojúhelník*
Počet vrcholů	*4*
Počet hran	*6*
Počet stěn	*4*
Hranový úhel	*60°*
Objem *V*	$\frac{\sqrt{2}}{12}\,a^3$
Povrch *S*	$\sqrt{3}a^2$

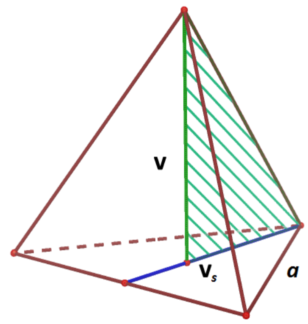


Obr. 2.1: Čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn (tetraedr) je trojrozměrné těleso, jehož povrch je tvořen čtyřmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky, má čtyři vrcholy. Pravidelný čtyřstěn řadíme mezi pravidelné trojboké jehlany. Zajímavé je, že vzdálenost každých dvou vrcholů ve čtyřstěnu je stejná, na rozdíl od ostatních platónských těles. Podle Platóna je tetraedr symbolem ohně.

Nejprve určíme tělesovou **výšku *v* pravidelného čtyřstěnu**, využijeme obr.2.2. Víme, že stěnová výška tetraedru je $v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Těžiště stěny dělí tuto výšku v poměru 2:1, z toho

$$\frac{2}{3}v_s = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$



Obr. 2.2: Výška čtyřstěnu

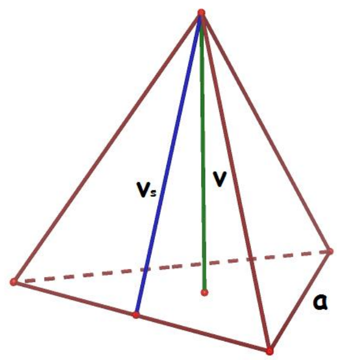
a podle Pythagorovy věty můžeme vypočítat tělesovou výšku:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

Objem *V* pravidelného čtyřstěnu spočítáme jako obsah podstavy násobený tělesovou výškou a vydělený třemi.

Obsahem podstavy S_p je obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky a, tedy:

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$



Obr. 2.3: Objem čtyřstěnu

Teď už jen dosadíme do vztahu pro výpočet objemu jehlanu:

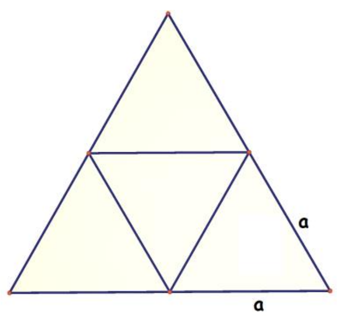
$$V = \frac{1}{3}S_p v = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

Povrch *S* tetraedru vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn, které jsou tvořeny shodnými rovnostrannými trojúhelníky (obr. 2.4). Obsah jedné stěny je

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

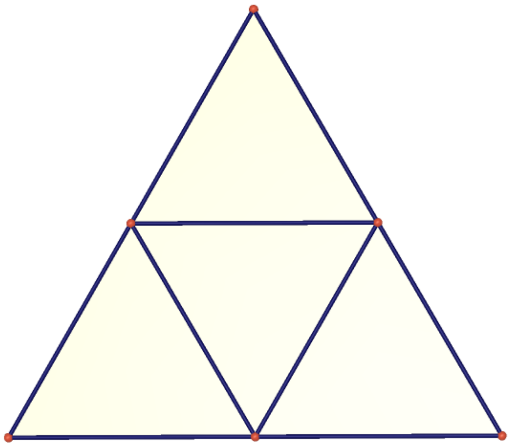
Čtyřstěn má stěny čtyři, proto výsledný povrch bude roven čtyřnásobku S_3, tedy

$$S = 4S_3 = \sqrt{3}a^2.$$



Obr. 2.4: Povrch čtyřstěnu

Síť pravidelného čtyřstěnu:

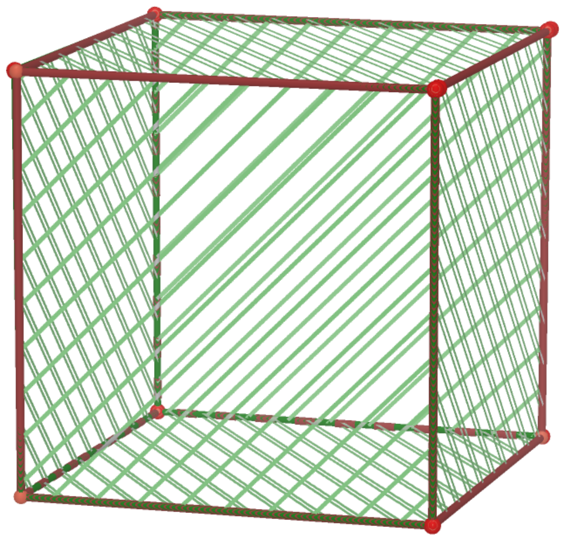


Obr. 2.5: Síť čtyřstěnu

2.2 Pravidelný šestistěn – hexaedr

Uvažujme pravidelný šestistěn o hraně délky *a.*

Hexaedr	
Stěna	*Čtverec*
Počet vrcholů	*8*
Počet hran	*12*
Počet stěn	*6*
Hranový úhel	*90°*
Objem V	a^3
Povrch S	$6a^2$

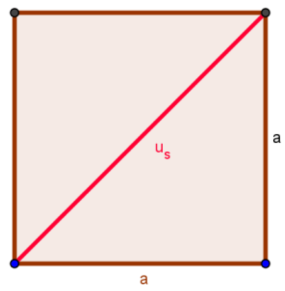


Obr. 2.6: Krychle

Nejznámější název pro pravidelný šestistěn (hexaedr) je krychle. Platón toto těleso, jehož stěny jsou tvořeny shodnými čtverci a které má osm vrcholů a dvanáct hran stejné délky, přiřazoval elementu země.

Délka u_s stěnové úhlopříčky krychle je délkou úhlopříčky čtverce a podle Pythagorovy věty platí (obr.2.7):

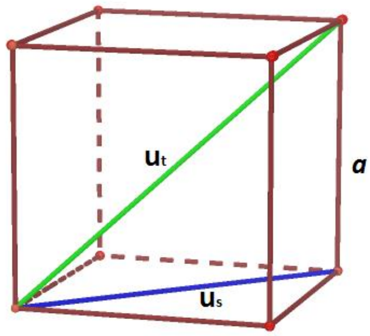
$$u_s = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$



Obr. 2.7: Stěnová úhlopříčka krychle

Délku u_t tělesové úhlopříčky krychle lze vypočítat pomocí strany čtverce a stěnové úhlopříčky také podle Pythagorovy věty (obr. 2.8):

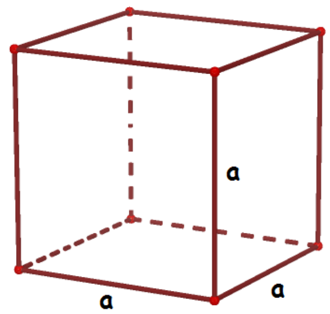
$$u_t = \sqrt{{u_s}^2 + a^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}a\right)^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a.$$



Obr. 2.8: Tělesová úhlopříčka krychle

Objem *V* krychle dokážeme také vypočítat velice snadno. Víme totiž, že výška odpovídá hraně, proto se objem krychle vypočítá:

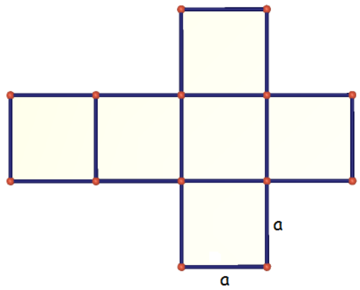
$$V = S_p v = a^2 \cdot a = a^3.$$



Obr. 2.9: Objem krychle

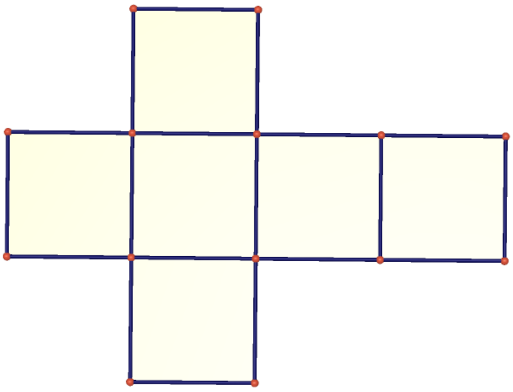
Povrch *S* krychle vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn. Tento případ je nejjednodušší, neboť každá stěna je tvořena čtvercem (obr. 2.10). Obsah jedné stěny $S_4 = a^2$. Krychle má stěn celkem 6, proto:

$$S = 6S_4 = 6a^2.$$



Obr. 2. 10: Povrch krychle

Síť krychle:

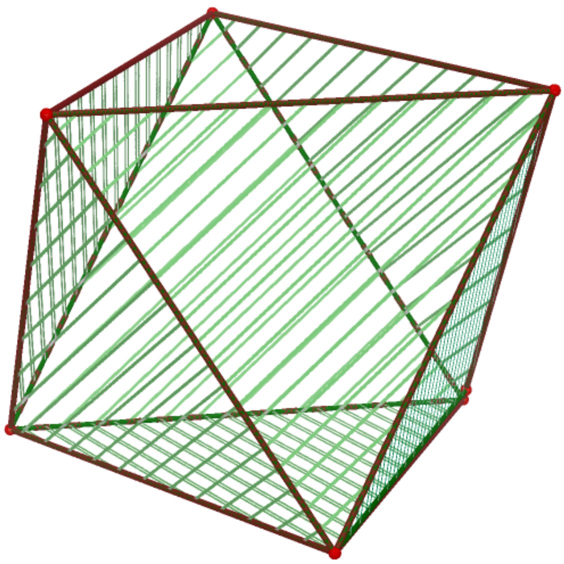


Obr. 2. 11: Síť krychle

2.3 Pravidelný osmistěn – oktaedr

Uvažujme pravidelný osmistěn s hranou délky *a.*

Oktaedr	
Stěna	*Trojúhelník*
Počet vrcholů	*6*
Počet hran	*12*
Počet stěn	*8*
Hranový úhel	*60°*
Objem *V*	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Povrch *S*	$2\sqrt{3}a^2$

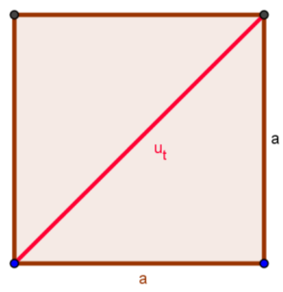


Obr. 2. 12: Pravidelný osmistěn

Stěny pravidelného osmistěnu (oktaedru) jsou tvořeny osmi shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Osmistěn má šest vrcholů. Podle Platóna symbolizoval element vzduchu.

Nejprve vyjádříme **délku u_t tělesové úhlopříčky** pravidelného osmistěnu. Ta je stejná jako úhlopříčka čtverce se stranou *a*:

$$u_t = \sqrt{2}a.$$

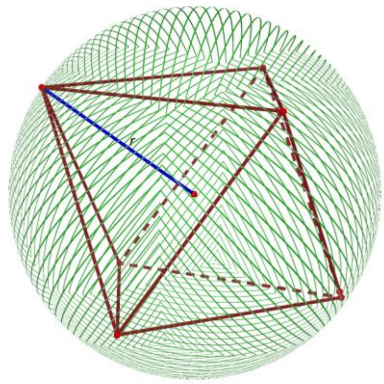


Obr. 2.14: Tělesová úhlopříčka osmistěnu

Objem *V* osmistěnu získáme, sečteme-li objemy dvou shodných jehlanů se společnou čtvercovou podstavou a výškou *r*, která mimo jiného udává také poloměr kulové sféry opsané.

Výška *r* je rovna polovině délky tělesové úhlopříčky, která prochází středem tělesa, tedy:

$$r = \frac{u_t}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



Obr. 2.13: Výška r osmistěnu

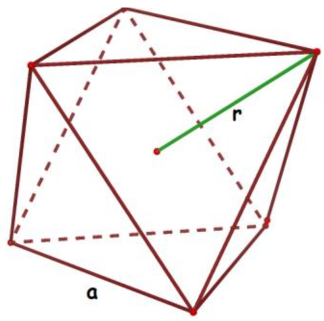
Objem osmistěnu vypočítáme jako $V = 2\frac{1}{3}S_p r,$

kde S_p je obsah čtverce o straně délky *a*, tedy

$$S_p = a^2.$$

Po dosazení získáme objem *V* osmistěnu:

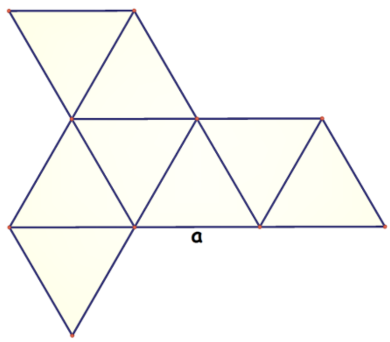
$$V = 2\frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$



Obr. 2.15: Objem osmistěnu

Povrch *S* osmistěnu vypočítáme jako součet obsahů všech stěn. Stěny jsou tvořeny rovnostrannými trojúhelníky se stranou délky *a*, tedy obsah jedné stěny je

$$S_3 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

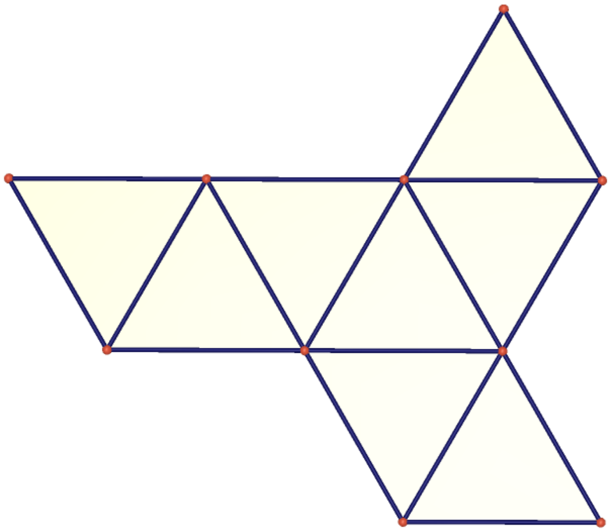


Obr. 2.16: Povrch osmistěnu

Výsledný povrch je

$$S = 8S_3 = 8\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = 2\sqrt{3}a^2.$$

Síť pravidelného osmistěnu:

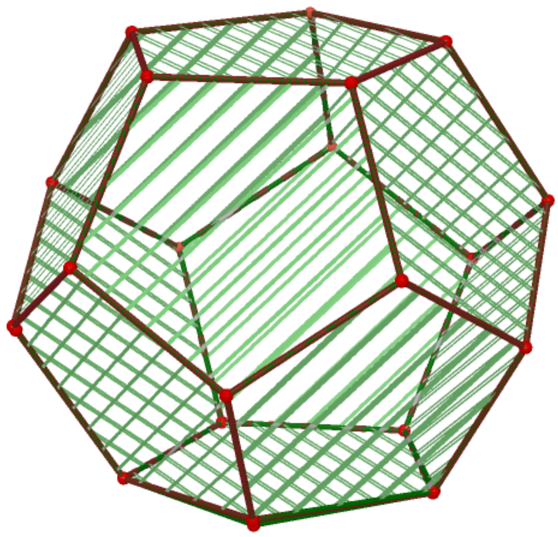


Obr. 2.17: Síť pravidelného osmistěnu

2.4 Pravidelný dvanáctistěn – dodekaedr

Uvažujme pravidelný dvanáctistěn s hranou délky *a.*

Dodekaedr	
Stěna	*pětiúhelník*
Počet vrcholů	*20*
Počet hran	*30*
Počet stěn	*12*
Hranový úhel	*108°*
Objem *V*	$\frac{(15+7\sqrt{5})}{4}a^3$
Povrch *S*	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}a^2}$

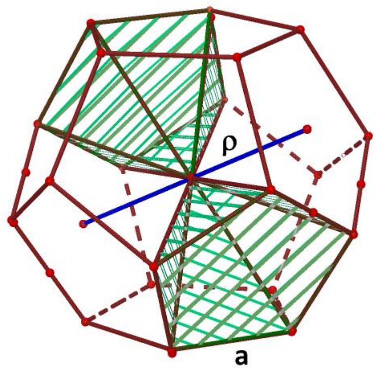


Obr. 2.18: Pravidelný dvanáctistěn

Stěny dvanáctistěnu tvoří shodné pravidelné pětiúhelníky. Platón tomuto tělesu přiřazoval vesmír nebo-li vše kolem nás (jsoucno).

Objem *V* dodekaedru vypočítáme jako součet objemů dvanácti shodných pravidelných pětibokých jehlanů, jejichž podstavy tvoří stěny dvanáctistěnu a jejichž výška je ρ, která je mimo jiné poloměrem kulové sféry vepsané.

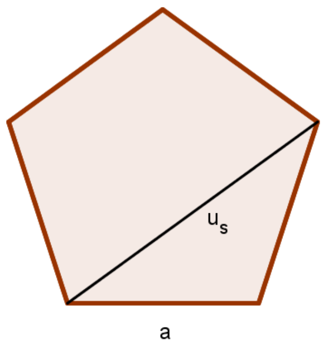
Výpočet této výšky bude náročnější a bude zahrnovat několik dále uvedených mezivýpočtů.



Obr. 2.19: Objem dvanáctistěnu

Délku u_s úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku zjistíme na základě vlastností zlatého řezu. Průsečík dvou úhlopříček dělí každou z nich právě v poměru tohoto řezu [2].

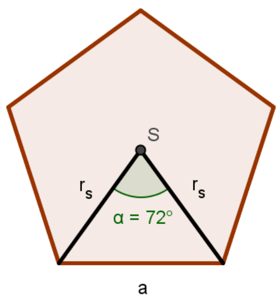
Odtud
$$u_s = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}.$$



Obr. 2.20: Úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku

Délku r_s (poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku) můžeme vypočítat, když si pětiúhelník rozdělíme na pět shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou *a* a rameny r_s. Pro jakýkoliv z těchto trojúhelníků platí kosinová věta:

$$a^2 = r_s{}^2 + r_s{}^2 - 2r_s r_s \cos 72°.$$



Obr. 2.21: Délka $\boldsymbol{r_s}$

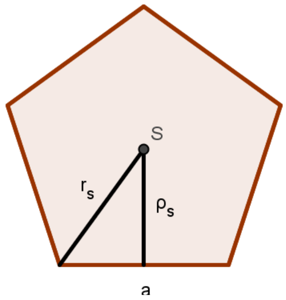
Z [2] víme, že

$$\cos 72° = \frac{1}{1+\sqrt{5}}.$$

Už můžeme vyjádřit r_s v závislosti na délce strany *a*:

$$r_s = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}}} = \frac{a}{10}\sqrt{(5+\sqrt{5})10}.$$

Délku $\boldsymbol{\rho_s}$ (poloměr kružnice vepsané pravidelnému pětiúhelníku) můžeme vypočítat pomocí pravoúhlého trojúhelníku s přeponou r_S a odvěsnami ρ_S a $\frac{a}{2}$ (obr. 2.22) . V tomto trojúhelníku můžeme aplikovat Pythagorovu větu:



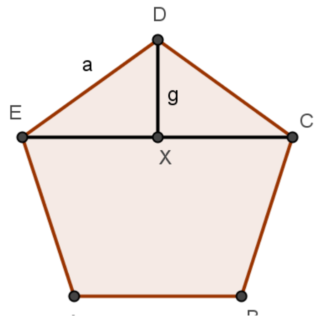
Obr. 2.22: Délka $\boldsymbol{\rho_s}$

$$r_s{}^2 = \rho_s{}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Tedy:

$$\rho_s = \sqrt{r_s{}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2\sqrt{5}} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}}.$$

Označme vzdálenost *DX* jako *g*. *D* je vrchol pravidelného pětiúhelníku a *X* střed úhlopříčky *CE* pravidelného pětiúhelníku. Odvěsnu *g* pravoúhlého trojúhelníku *DXE* potom můžeme vypočítat Pythagorovou větou ze vztahu: $a^2 = \left(\frac{u_s}{2}\right)^2 + g^2$

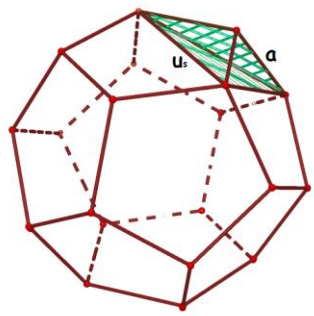


Obr. 2.23: Vzdálenost g

Vyjádříme *g* :

$$g = \sqrt{a^2 - \left(\frac{u_s}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 \left(1+\sqrt{5}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

K výpočtu výšky ρ pravidelného pětibokého jehlanu dále musíme znát **odchylku $\boldsymbol{\omega}$** jeho **sousedních stěn**. Tu zjistíme, když z dodekaedru odřízneme pravidelný trojboký jehlan. Hrany jeho podstavy mají délku úhlopříčky pětiúhelníku u_s a boční hrany jsou hranami dodekaedru. Takto vzniklý jehlan poté řízneme rovinou kolmou k jeho boční hraně, procházející hranou podstavy. Řezem je rovnoramenný trojúhelník s rameny *x* a základnou u_s (obr. 2.26).

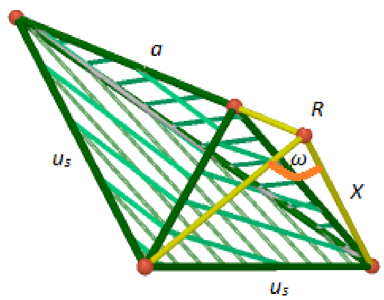


Obr. 2.24: Odchylka sousedních stěn

Délku *x* vypočítáme z rovnosti obsahů trojúhelníku:

$$\frac{a \cdot x}{2} = \frac{u_s \cdot g}{2}.$$

Délka *x* je tedy: $$x = \frac{a}{8}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

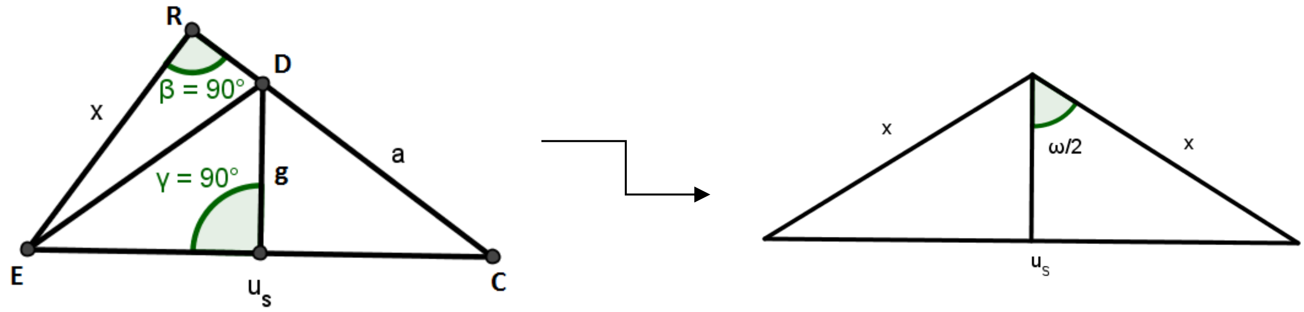


Obr. 2.25: Odchylka sousedních stěn

Díky znalosti *x* můžeme určit **odchylku *ω* sousedních stěn**, kterou vypočítáme:

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\frac{u_s}{2}}{x}=\frac{\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})}{\frac{a}{8}(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}.$$

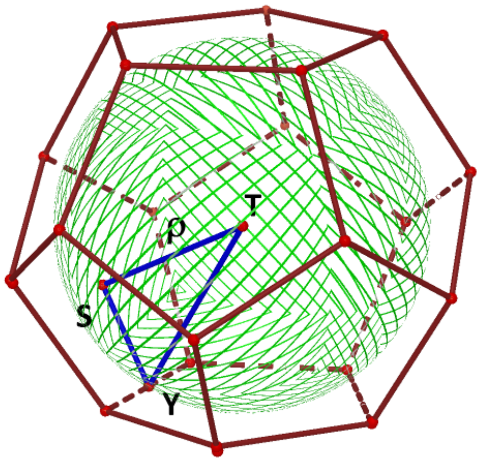
$$\frac{\omega}{2}\approx 58°17';\ \omega\approx 116°34'$$



Obr. 2.26: Odchylka sousedních stěn

Výšku *ρ* (poloměr kulové sféry vepsané) už dokážeme vypočítat, neboť střed této sféry leží v těžišti *T* dodekaedru a výška je rovna vzdálenosti těžiště od středu libovolné stěny. Zjistíme ji tedy pomocí pravoúhlého trojúhelníku *TSY*, kde *T* je střed dodekaedru, *S* střed stěny a *Y* je střed hrany téže stěny. Pak odvěsna *SY* (ρ_s) svírá s přeponou *TY* úhel $\frac{\omega}{2}$ a druhá odvěsna *TS* je hledaný poloměr ρ.

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\rho}{\rho_s}$$



Obr. 2.27: Výška ρ dvanáctistěnu

A tedy $\rho=\rho_s\cdot tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$,

kde $\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$ a $\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}$

$$\rho=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}}{\sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}}=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{5(2\sqrt{5}+5)}}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$$

Obsah pětiúhelníku S_5 je součtem obsahů pěti shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou a a výškou ρ_s.

$$S_5 = S_p = 5\frac{a}{2}\rho_s = 5\frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{2\sqrt{5}+5}{5}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{25(2\sqrt{5}+5)}{5}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$

Objem jednoho jehlanu V_j, který je dílčí částí pravidelného dvanáctistěnu, činí

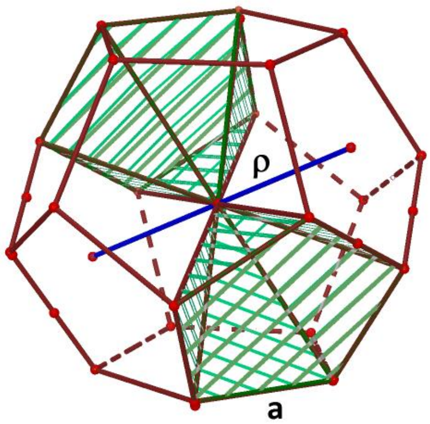
$$V_j = \frac{1}{3}S_p \cdot \rho = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20} =$$

$$= \frac{a^3}{12 \cdot 20}\sqrt{(10\sqrt{5}+25)10(25+11\sqrt{5})} =$$

$$= \frac{5a^3}{12 \cdot 20}\sqrt{470+210\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{a^3}{48}\sqrt{225+210\sqrt{5}+245} =$$

$$= \frac{a^3}{48}\sqrt{\left(15+7\sqrt{5}\right)^2} = \frac{a^3}{48}\left(15+7\sqrt{5}\right).$$



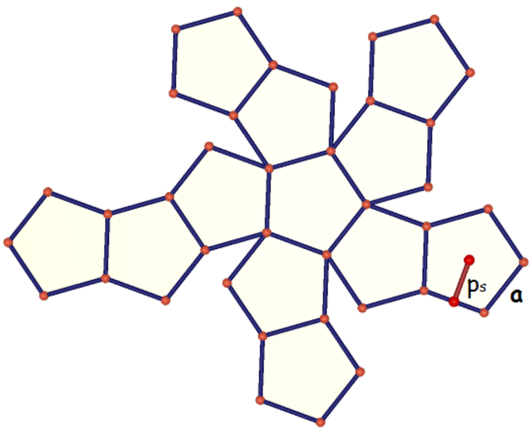
Obr. 2.28: Objem dvanáctistěnu

A tedy objem celého dvanáctistěnu je

$$V = 12V_J = 12\frac{a^3}{48}\left(15+7\sqrt{5}\right) = \frac{a^3}{4}\left(15+7\sqrt{5}\right).$$

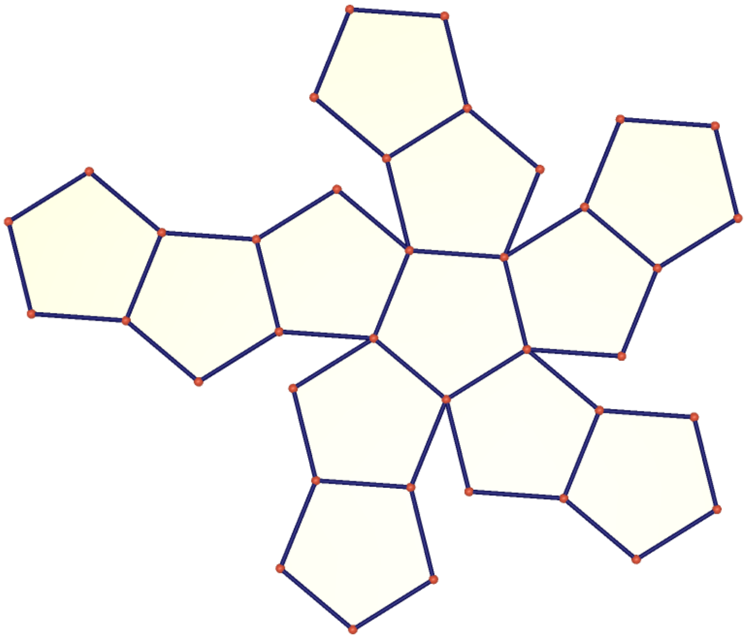
Povrch *S* dvanáctistěnu je součtem obsahů dvanácti shodných pravidelných pětiúhelníků.

$$S = 12S_5 = 12\frac{a^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}.$$



Obr. 2.29: Povrch dvanáctistěnu

Síť pravidelného dvanáctistěnu:

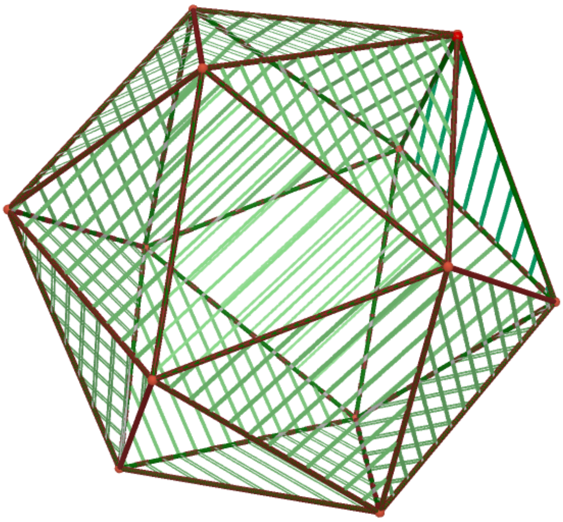


Obr. 2.30: Síť dvanáctistěnu

2.5 Pravidelný dvacetistěn – ikosaedr

Uvažujme pravidelný dvacetistěn s hranou délky *a.*

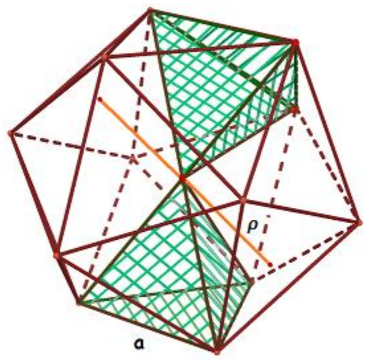
Ikosaedr	
Stěna	*trojúhelník*
Počet vrcholů	*12*
Počet hran	*30*
Počet stěn	*20*
Hranový úhel	*60°*
Objem *V*	$\frac{5(3+\sqrt{5})}{12}a^3$
Povrch *S*	$5\sqrt{3}a^2$



Obr. 2.31: Pravidelný dvacetistěn

Pravidelný dvacetistěn je těleso, jehož stěny tvoří dvacet shodných rovnostranných trojůhelníků. Ikosaedr má 12 vrcholů a 30 hran. Podle Platóna byl pravidelný dvacetistěn symbolem vody.

Objem *V* dvacetistěnu vypočítáme jako součet objemů dvaceti shodných pravidelných trojbokých jehlanů, jejichž podstavy jsou stěny dvacetistěnu a jejichž tělesovou výškou je ρ, která je zároveň poloměrem kulové sféry vepsané.

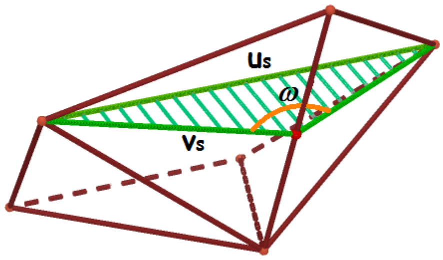


Obr. 2. 32: Objem dvacetistěnu

Výpočet **výšky *ρ* (poloměru kulové sféry vepsané)** je náročnější.

Nejdříve musíme zjistit odchylku sousedních stěn.

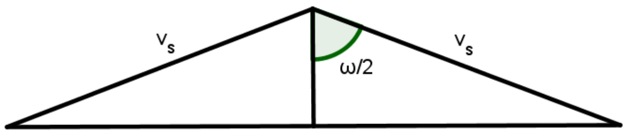
Odchylku *ω* sousedních stěn pravidelného dvacetistěnu vypočítáme, řízneme-li dvacetistěn rovinou tak, aby vznikl pravidelný jehlan s podstavou pravidelného pětiúhleníku. Dále jehlan řízneme rovinou kolmou k boční hraně jehlanu protínající podstavu ve stěnové úhlopříčce. Vzniklý rovnoramenný trojúhelník s rameny v_s a základnou u_s bude s rameny trojúhelníku svírat odchylku ω (obr. 2.33). Odchylku tedy spočítáme:



Obr. 2.33: Odchylka sousedních stěn

$$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{u_S}{2}}{v_S} = \frac{\frac{a}{4}(1+\sqrt{5})}{\frac{a}{2}\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

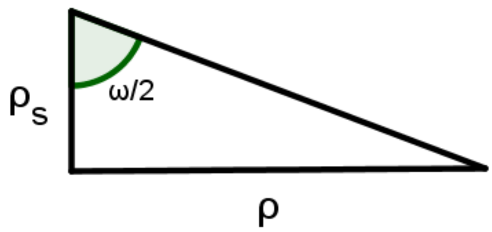
$$\frac{\omega}{2} \approx 69°05', \omega \approx 138°11'.$$



Obr. 2. 34: Odchylka sousedních stěn

Výška *ρ* je rovna vzdálenosti těžiště tělesa od středu libovolné stěny a vypočítáme ji pomocí pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami ρ a ρ_s (obr. 2.35), tedy

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\rho}{\frac{v_S}{3}}.$$



Obr. 2.35: Výška ρ

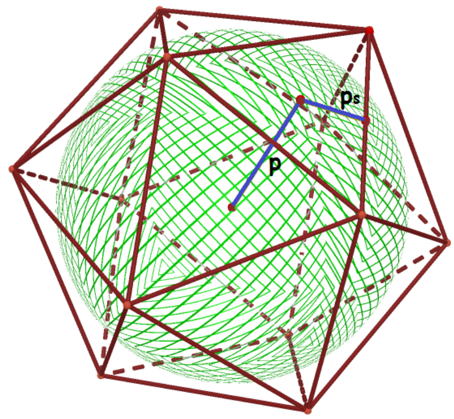
Dále víme, že $$\sin\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}.$$

A tedy podle goniometrického vzorce

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

známe i velikost

$$\cos\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}.$$



Obr. 2.36: Výška ρ

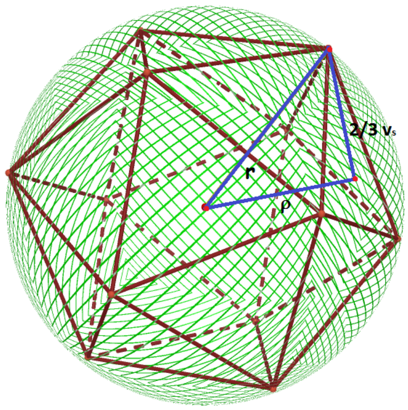
Nyní můžeme určit tangens úhlu $\frac{\omega}{2}$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{3}\sqrt{3-\sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}} = \frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2(3-\sqrt{5})} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2(2+\sqrt{5})^2(3-\sqrt{5})}}{2} = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{5}+5}}{2} = \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})^2}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Výška *ρ* je tedy (obr. 2.37):

$$\rho = \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \frac{v_s}{3} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}.$$



Obr. 2.37: Výška ρ

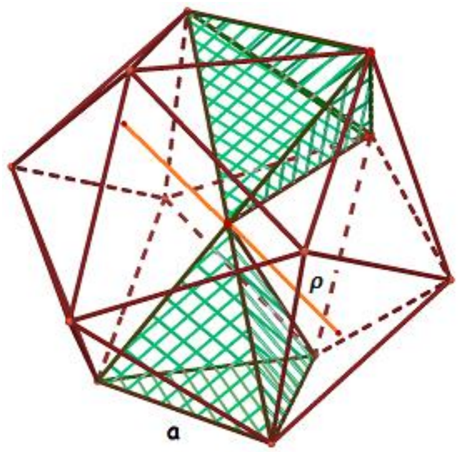
Objem *V* dvacetistěnu vypočítáme jako součet objemů dvaceti shodných pravidelných trojbokých jehlanů, jejichž podstavy jsou stěny dvacetistěnu a výškami je poloměr kulové plochy vepsané.

Obsahem podstavy S_p je obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky a, tedy:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2.$$

Takový jehlan má objem:

$$V_j = \frac{1}{3} S_p \rho = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12} = \frac{a^3(3+\sqrt{5})}{48}.$$



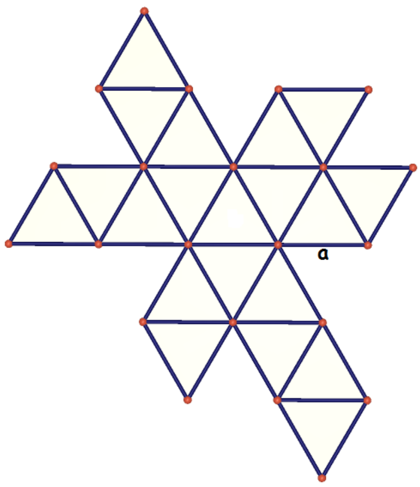
Obr. 2.38: Objem dvanáctistěnu

Objem celého dvacetistěnu tedy je:

$V = 20V_j = 20\frac{a^3(3+\sqrt{5})}{48} = \frac{5}{12}a^3\left(3+\sqrt{5}\right).$

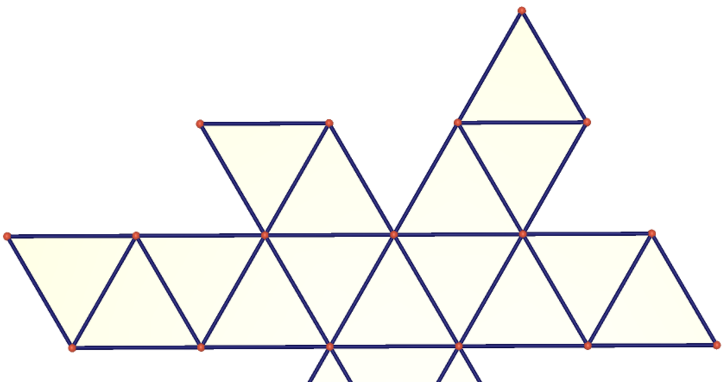
Povrch *S* tělesa tvoří dvacet shodných rovnostranných trojúhelníků se stranou délky *a,* obsah jedné stěny $S_3 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, tedy povrch celého dvacetistěnu:

$$S = 20S_3 = 20\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 5a^2\sqrt{3}.$$



Obr. 2.39: Povrch dvacetistěnu

Síť pravidelného dvacetistěnu:



Obr. 2.40: Síť dvanáctistěnu

2.6 Dualita pravidelných mnohostěnů

2.6.1. Definice. Ke každému pravidelnému mnohostěnu existuje *mnohostěn* jemu *duální*, jehož vrcholy leží ve středech stěn mnohostěnu původního.

Jestliže se tedy středy stěn daného pravidelného mnohostěnu stanou vrcholy, které spojíme úsečkami, pak tyto úsečky budou hranami mnohostěnu nového. Takto získaný mnohostěn se nazývá duální mnohostěn k mnohostěnu výchozímu.

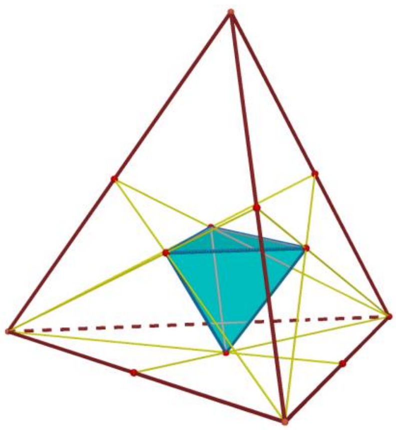
V následující tabulce jsou charakterizovány pravidelné mnohostěny podle počtu stěn, vrcholů a hran.

Název mnohostěnu	Počet			Počet hran	
	stěn s	vrcholů v	hran h	u jednoho vrcholu m	v jedné stěně n
čtyřstěn (tetraedr)	4	4	6	3	3
krychle (hexaedr)	6	8	12	3	4
osmistěn (oktaedr)	8	6	12	4	3
dvanáctistěn (dodekaedr)	12	20	30	3	5
dvacetistěn (ikosaedr)	20	12	30	5	3

Všimněme si, že výše uvedenou definici splňují i Platónova tělesa, zatímco krychle má šest stěn a osm vrcholů, u osmistěnu je tomu právě naopak. Proto říkáme, že krychle je k osmistěnu duální. Obdobně je tomu i u dvanáctistěnu (12 stěn, 20 vrcholů) a dvacetistěnu (20 stěn a 12 vrcholů), zbylý čtyřstěn (4 stěny, 4 vrcholy) je duální sám k sobě.

2.6.1 Dualita čtyřstěnu

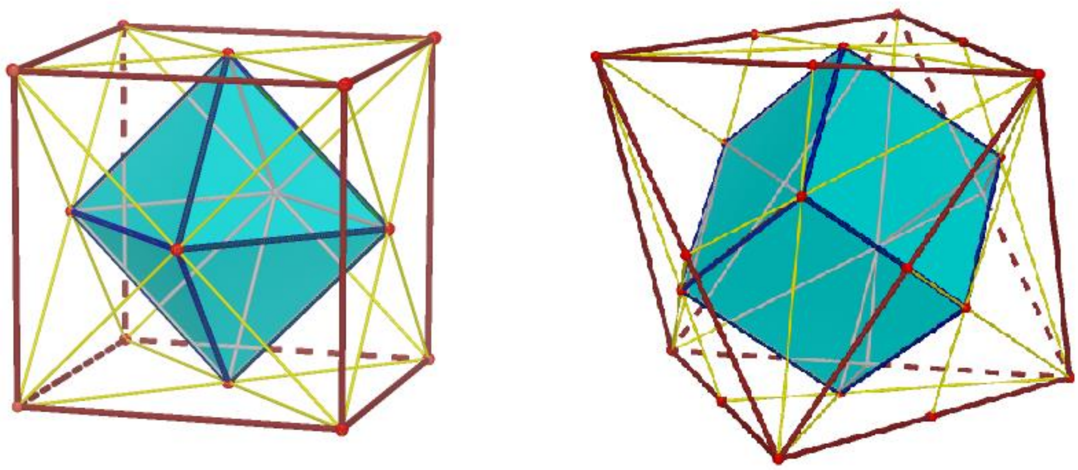
Duálním mnohostěnem k pravidelnému čtyřstěnu je opět pravidelný čtyřstěn.



Obr. 2.41: Dualita čtyřstěnu

2.6.2 Dualita krychle – osmistěn

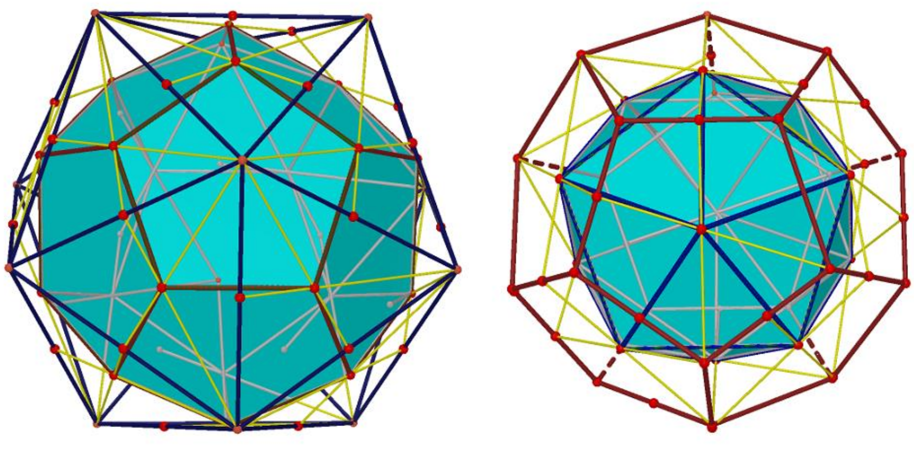
Krychle je duální s pravidelným osmistěnem a naopak.



Obr. 2.42: Dualita krychle – osmistěn

2.6.3 Dualita dvanáctistěn – dvacetistěn

Pravidelný dvanáctistěn s pravidelným dvacetistěnem jsou taktéž duální.



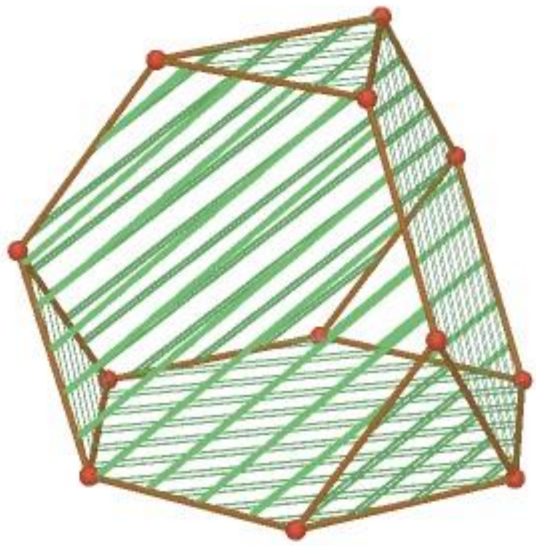
Obr. 2.43: Dualita dvanáctistěn – dvacetistěn

3. Klasifikace polopravidelných mnohostěnů

V následující kapitole klasifikujeme všechna Archimédova tělesa. Shrnutí vlastností je opět zaznamenáno v tabulkách. Délkou hrany polopravidelného mnohostěnu rozumíme délku vůči původnímu platónskému tělesu, ze kterého bylo konkrétní archimédovské těleso získáno. Uspořádáním ve vrcholu mnohostěnu rozumíme, v jakém pořadí se stěny ve vrcholu stýkají. Sítí mnohostěnu rozumíme zakreslení všech stěn mnohostěnu do jedné roviny tak, aby stěny tvořily souvislý celek. Klasifikace zahrnuje také stručný popis konstrukce polopravidelného mnohostěnu z mnohostěnu pravidelného, podrobnější popis konstrukce je uveden v [7]. Ke každému tělesu je uvedena právě jedna síť vygenerovaná grafickým programem Cabri3D, který pro každý mnohostěn vytváří stále stejnou síť.

3.1 Osekaný čtyřstěn

Osekaný čtyřstěn	
Stěny	*trojúhelníky*, *šestiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{a}{3}$
Počet vrcholů	*12*
Počet hran	*18*
Počet stěn	*8*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,6,6)$
Hranové úhly	*60°*, *120°*
Objem *V*	$\frac{23\sqrt{2}}{324}a^3$
Povrch *S*	$\frac{7\sqrt{3}}{9}a^2$

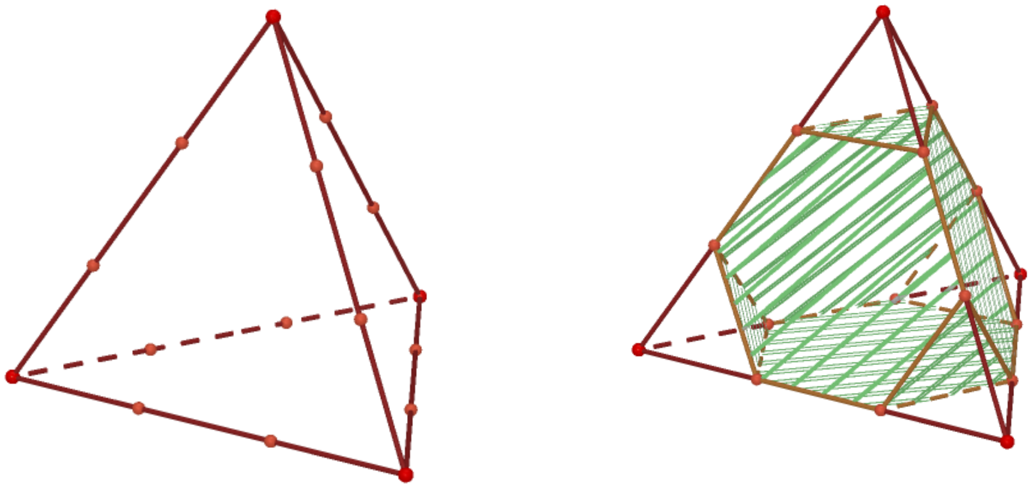


Obr. 3.1: Osekaný čtyřstěn

Osekaný čtyřstěn (angl. Truncated Tetrahedron) vznikl osekáním vrcholů pravidelného čtyřstěnu. Povrch se skládá ze čtyř shodných rovnostranných trojúhelníků a čtyř shodných pravidelných šestiúhelníků. V každém vrcholu osekaného čtyřstěnu se stýká jeden rovnostranný trojúhelník a dva shodné pravidelné šestiúhelníky, tj. uspořádání ve vrchlu lze zapsat jako (3,6,6).

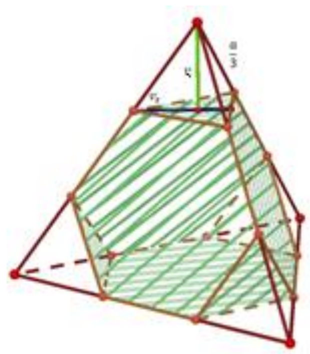
Konstrukce

Těleso získáme osekáním vrcholů pravidelného čtyřstěnu. Nejprve si každou hranu rozdělíme na třetiny (obr. 3.2). V dalším kroku povedeme řezy rovinou, která prochází třemi body na hranách a které jsou jsou od stejného vrcholu vzdáleny jednu třetinu délky hrany. Totéž opakujeme pro zbylé tři vrcholy původního čtyřstěnu. Každým takovým řezem je rovnostranný trojúhelník, který je zároveň stěnou nově vzniklého tělesa. Z původní stěny čtyřstěnu vznikne pravidelný šestiúhelník (obr. 3.2).



Obr. 3.2: Vznik osekaného čtyřstěnu

Pro výpočty objemu a povrchu osekaného čtyřstěnu předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného čtyřstěnu o hraně délky *a*.



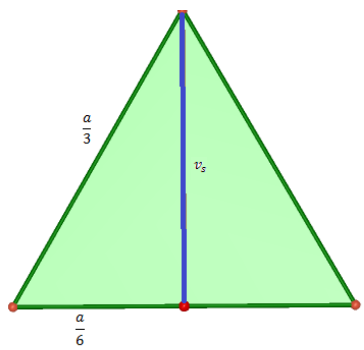
Obr. 3.3: Objem osekaného čtyřstěnu

Objem *V* osekaného čtyřstěnu spočítáme, odečteme-li od objemu pravidelného čtyřstěnu objemy V_3 čtyř shodných odseknutých pravidelných trojbokých jehlanů. Tedy

$$V = V_{čtyřstěnu} - 4V_3.$$

Objem $\boldsymbol{V_{čtyřstěnu}}$ je spočítán v kapitole 2.1:

$$V_{čtyřstěnu} = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$



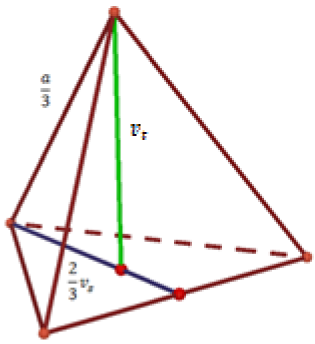
Obr. 3.4: Obsah podstavy odseklého jehlanu

Pro výpočet objemu V_3 jednoho odseklého jehlanu potřebujeme zjistit jeho stěnovou výšku v_s, abychom určili obsah jeho podstavy, a tělesovou výšku v_t odseklého jehlanu. Výšku stěny spočítáme pomocí Pythagorovy věty (obr. 3.4):

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{36}} = \sqrt{\frac{3a^2}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

Obsah podstavy je $\quad S_p = \frac{1}{2}\frac{a}{3}v_s = \frac{1}{2}\frac{a}{3}\frac{\sqrt{3}a}{6} = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2.$

Dále potřebujeme zjistit tělesovou výšku v_t odseklého jehlanu. Je zřejmé, že pata tělesové výšky jehlanu je v těžišti podstavy jehlanu, tedy ve dvou třetinách stěnové výšky od vrcholu. Výšku spočítáme opět užitím Pythagorovy věty (obr. 3.5):



Obr. 3.5: Objem jehlanu

$$v_t = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}v_s\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{3a^2}{81}} = \sqrt{\frac{6a^2}{81}} = \frac{\sqrt{6}}{9}a.$$

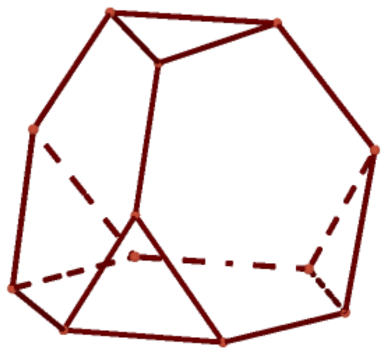
A tedy

$$V_3 = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{36}a^2\frac{\sqrt{6}}{9}a = \frac{\sqrt{3\cdot 6}}{3\cdot 36\cdot 9}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{324}a^3.$$

Objem *V* osekaného čtyřstěnu je

$$V = V_{čtyřstěnu} - 4V_3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3 - 4\frac{\sqrt{2}}{324}a^3 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12}\left(1 - \frac{4}{27}\right)a^3 = \frac{\sqrt{2}\cdot 23}{12\cdot 27}a^3 = \frac{23\sqrt{2}}{324}a^3.$$



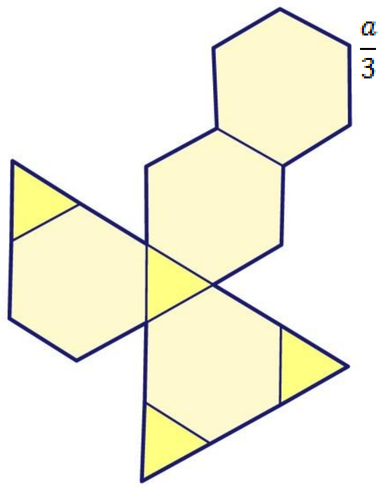
Obr. 3.6: Objem osekaného čtyřstěnu

Povrch *S* osekaného čtyřstěnu je součtem obsahů čtyř shodných pravidelných šestiúhelníků o obsazích S_6 a čtyř shodných rovnostranných trojúhelníků o obsazích S_3.

$$S = 4S_6 + 4S_3$$

Obsah S_3 je spočítán výše, je to obsah podstavy odseklého jehlanu S_p :

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2.$$

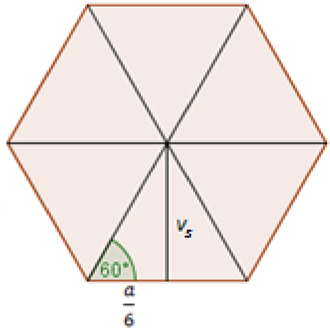


Obr. 3.7: Povrch osekaného čtyřstěnu

Obsah pravidelného šestiúhelníku spočítáme jako součet obsahů S_3 šesti rovnostranných trojúhelníků, viz obr. 3.8.

Obsah šestiúhelníku je tedy:

$$S_6 = 6 \cdot S_3 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{36} = \frac{\sqrt{3}}{6}a^2.$$

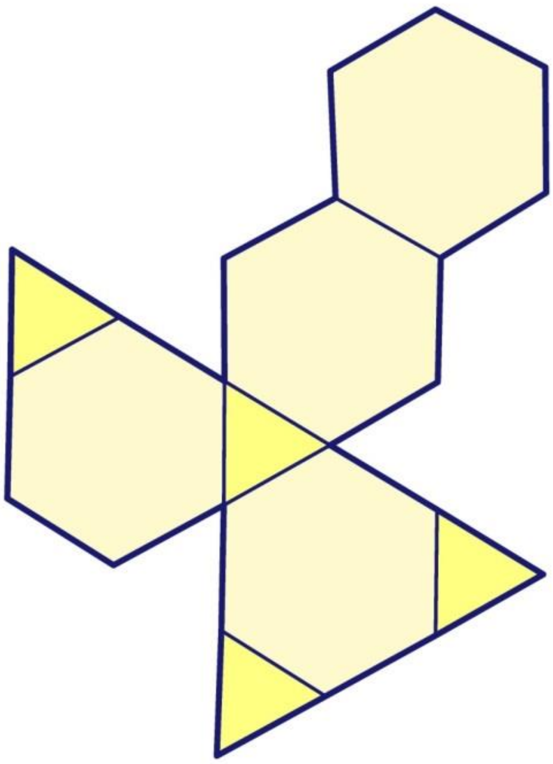


Obr. 3.8: Obsah pravidelného šestiúhelníku

Výsledný **povrch *S*** osekaného čtyřstěnu je tedy

$$S = 4S_6 + 4S_3 = 4\frac{\sqrt{3}}{6}a^2 + 4\frac{\sqrt{3}}{36}a^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{9}a^2 = \frac{7\sqrt{3}}{9}a^2.$$

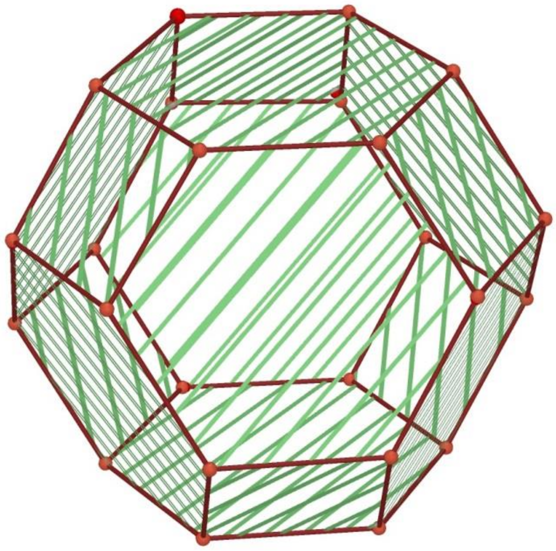
Síť osekaného čtyřstěnu:



Obr. 3.9: Síť osekaného čtyřstěnu

3.2 Osekaný osmistěn

Osekaný osmistěn	
Stěny	*čtverce, šestiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{a}{3}$
Počet vrcholů	*24*
Počet hran	*36*
Počet stěn	*14*
Uspořádání ve vrcholu	$(4,6,6)$
Hranové úhly	*90°, 120°*
Objem *V*	$\frac{8\sqrt{2}}{27}a^3$
Povrch *S*	$\frac{4\sqrt{3}+2}{3}a^2$

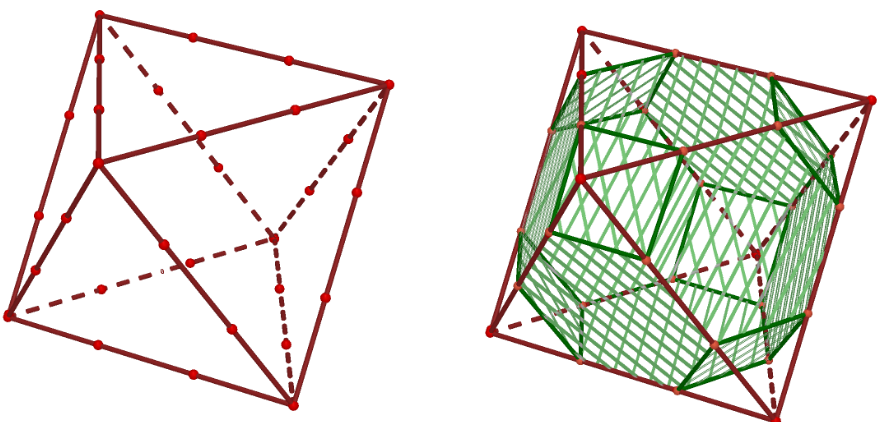


Obr. 3.10: Osekaný osmistěn

Osekaný osmistěn (angl. Truncated Octahedron) vznikl osekáním pravidelného osmistěnu. Jeho povrch je složen ze šesti shodných čtverců a osmi shodných pravidelných šestiúhelníků. V každém vrcholu osekaného osmistěnu se po řadě stýká jeden čtverec a dva pravidelné šestiúhelníky, tedy vrcholová posloupnost je (4,6,6).

Konstrukce

Těleso vznikne osekáním vrcholů pravidelného osmistěnu. Nejprve každou hranu rozdělíme na třetiny, následně vedeme řezy těmi body, které mají od stejného vrcholu vzdálenost právě jedné třetiny délky hrany. Odseknutím šesti jehlanů se čtvercovou podstavou z pravidelného osmistěnu získáme osekaný osmistěn. Z původní stěny osmistěnu obdržíme pravidelný šestiúhelník.



Obr. 3.11: Vznik osekaného osmistěnu

Pro výpočty objemu a povrchu osekaného osmistěnu předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného osmistěnu o hraně délky *a*.

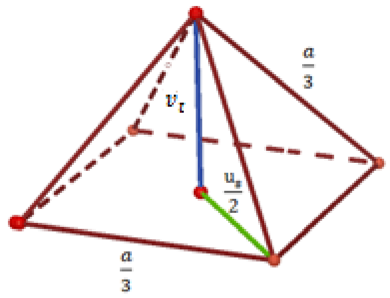
Objem *V* osekaného osmistěnu vypočítáme, odečteme-li od objemu pravidelného osmistěnu objemy V_4 šesti shodných odseknutých pravidelných čtyřbokých jehlanů. Tedy

$$V = V_{osmistěnu} - 6V_4.$$

Z předchozí kapitoly 2.3 víme, že objem osmistěnu je

$$V_{osmistěnu} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

K výpočtu objemu čtyřbokého jehlanu V_4 potřebujeme znát obsah podstavy S_p, tj. čtverce o straně délky $\frac{a}{3}$, a tělesovou výšku v_t čtyřbokého jehlanu (obr. 3.12).



Obr. 3.12: Objem jehlanu

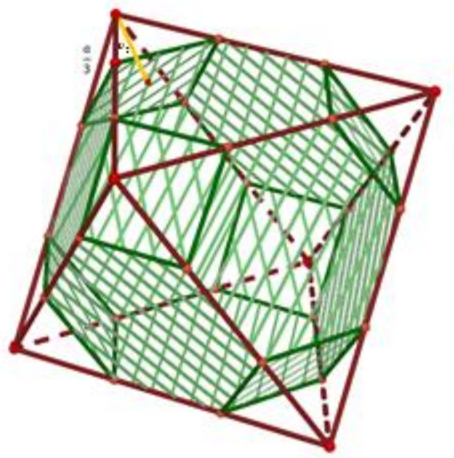
Obsah čtverce S_p je

$$S_p = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Výšku v_t pravidelného čtyřbokého jehlanu vypočítáme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku s přeponou délky $\frac{a}{3}$ a odvěsnami s délkami v_t a $\frac{u_s}{2}$, kde u_s je délka úhlopříčky čtverce:

$$v_t = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{u_s}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{2\cdot 3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{18}} = \frac{a}{\sqrt{18}} = \frac{a}{3\sqrt{2}}.$$



Obr. 3.13: Objem osekaného osmistěnu

Objem jehlanu V_4 je tedy

$$V_4 = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{9}\cdot\frac{a}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3}{81\sqrt{2}}.$$

A celkový **objem *V* osekaného osmistěnu** je

$$V = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 - 6\cdot\frac{a^3}{81\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3 - \frac{\sqrt{2}}{27}a^3 = \frac{8\sqrt{2}}{27}a^3.$$

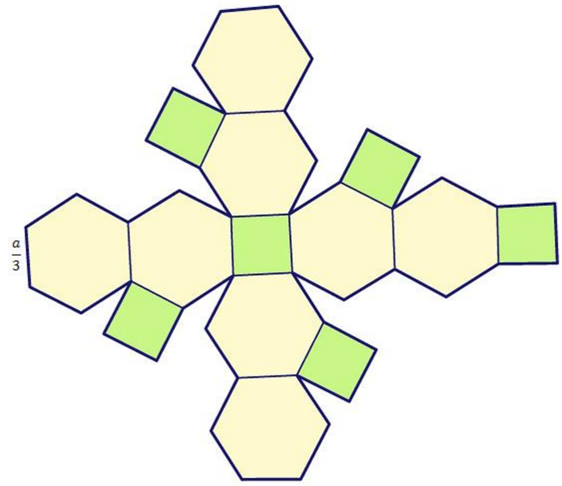
Povrch *S* osekaného osmistěnu je součtem obsahů S_4 šesti čtverců a obsahů S_6 osmi pravidelných šestiúhelníků se stranami délek $\frac{a}{3}$.

Obsah čtverce je

$$S_4 = S_p = \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{9}.$$

Obsah pravidelného šestiúhelníku je (viz 3.1):

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{a^2}{9}.$$

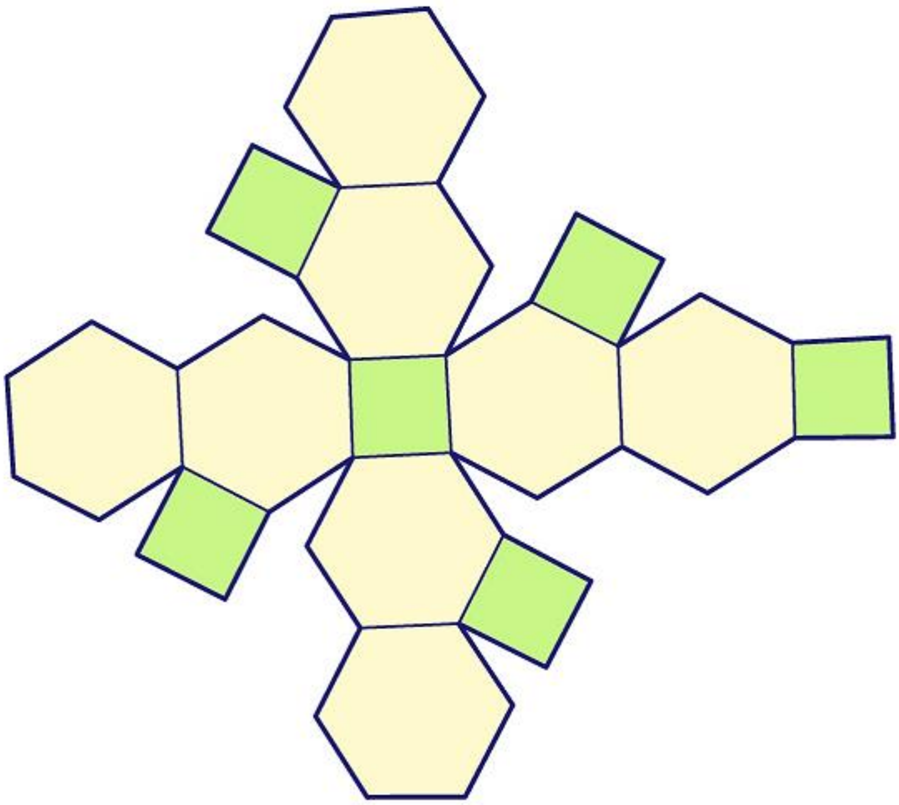


Obr. 3.14: Povrch osekaného osmistěnu

Výsledný **povrch *S*** je

$$S = 8S_6 + 6S_4 = 8\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a^2}{9} + 6\frac{a^2}{9} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 = \frac{4\sqrt{3}+2}{3}a^2.$$

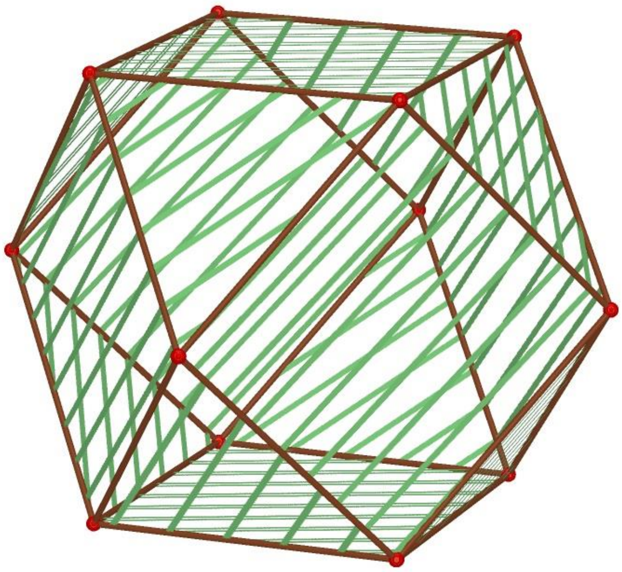
Síť osekaného osmistěnu:



Obr. 3.15: Síť osekaného osmistěnu

3.3 Kuboktaedr

Kuboktaedr	
Stěny	*trojúhelníky, čtverce*
Délka hrany	$\frac{\sqrt{2}a}{2}$
Počet vrcholů	*12*
Počet hran	*24*
Počet stěn	*14*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,4,3,4)$
Hranové úhly	*60°, 90°*
Objem *V*	$\frac{5}{6}a^3$
Povrch *S*	$\left(3+\sqrt{3}\right)a^2$



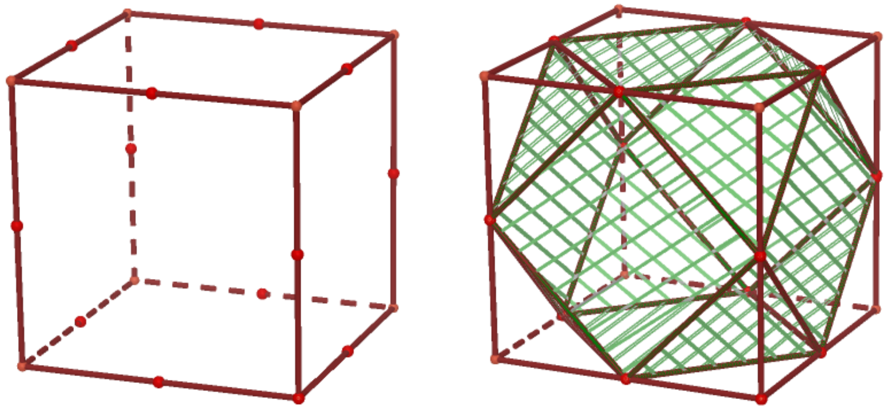
Obr. 3.16: Kuboktaedr

Kuboktaedr (angl. Cuboctahedron) může vzniknout vhodným ořezaním krychle i osmistěnu. Jeho povrch je složen ze šesti shodných čtverců a osmi shodných rovnostranných trojúhelníků. Ve vrcholu se střetávají dva rovnostranné trojúhelníky a dva čtverce, tedy vrcholová posloupnost je (3,4,3,4).

Konstrukce

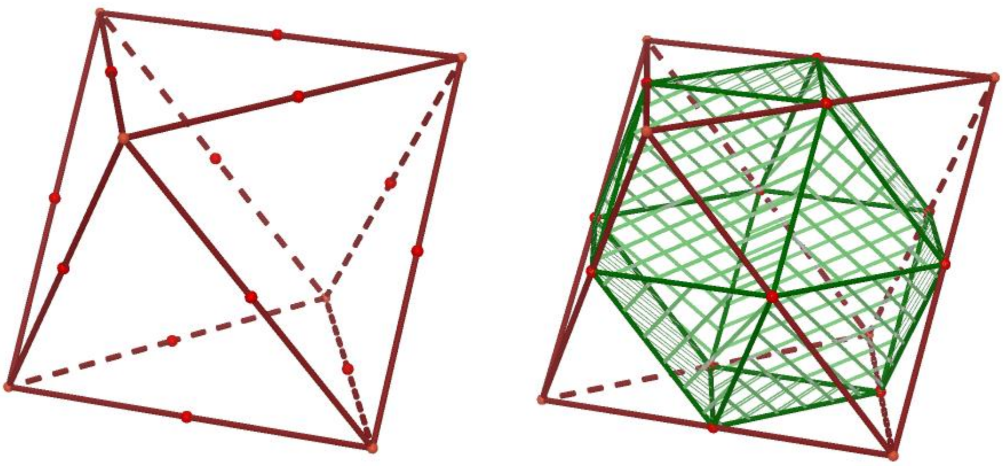
Jak již bylo zmíněno, těleso je možné získat ořezáním jak krychle, tak osmistěnu, my si v této práci ukážeme oba způsoby konstrukce.

1) **Vznik z krychle:**
   Kuboktaedr z krychle získáme, spojíme-li středy sousedních hran krychle, které incidují se stejným vrcholem, a kterými následně vedeme řezy. Těmito řezy obdržíme rovnostranné trojúhelníky, z každé původní čtvercové stěny vznikne čtverec menší (obr. 3.17).



Obr. 3.17: Vznik kuboktaedru z krychle

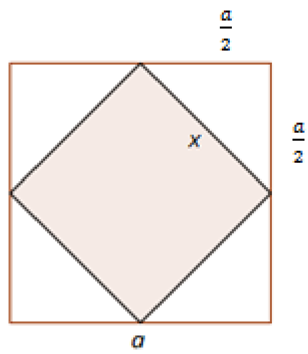
2) **Vznik z osmistěnu:**
   Kuboktaedr z osmistěnu získáme také nalezením středů hran osmistěnu a následnými řezy spojujícícmi vždy středy sousedních hran incidentních s jedním vrcholem. Každým řezem získáme čtverec a z původních stěn po odříznutí zůstanou rovnostranné trojúhelníky (obr. 3.18).



Obr. 3.18: Vznik kuboktaedru z osmistěnu

Délku hrany *x* kuboktaedru můžeme vypočítat Pythagorovou větou v pravoúhlém trojúhelníku s přeponou délky x a odvěsnami délek $\frac{a}{2}$:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}.$$



Obr. 3.19: Délka hrany x

Také lze dle obrázku 3.19 určit, že se jedná o polovinu délky uhlopříčky čtverce o straně délky a.

Pro výpočty objemu a povrchu osekané krychle předpokládejme, že toto těleso vzniklo z krychle o hraně délky *a*.

Objem *V* kuboktaedru vypočítáme jako rozdíl objemu krychle a objemů V_3 osmi shodných odseklých trojbokých jehlanů:

$$V = V_{krychle} - 8V_3.$$

Objem $\boldsymbol{V_{krychle}}$ máme spočítaný v kapitole 2.2:

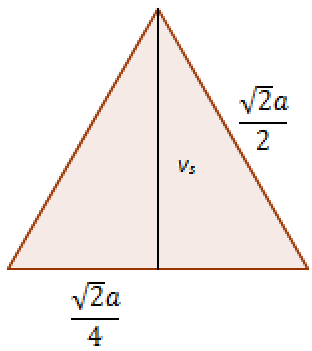
$$V_{krychle} = a^3.$$

Pro výpočet objemu jehlanu V_3 potřebujeme znát jeho stěnovou výšku v_s k určení obsahu podstavy jehlanu a jeho tělesovou výšku v_t.

Stěnová výška $\boldsymbol{v_s}$ je odvěsnou v pravoúhlém trojúhelníku (viz obr. 3.20).

Tedy:

$$v_s = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{a}{2}.$$



Obr. 3.20: Stěnová výška v_s

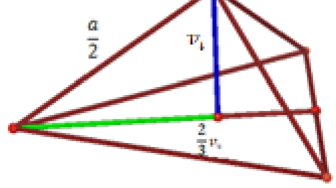
Obsah podstavy $\boldsymbol{S_p}$ trojbokého jehlanu je

$$S_p = \frac{xv_s}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\frac{a}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$$

Tělesovou výšku jehlanu $\boldsymbol{v_t}$ zjistíme opět pomocí Pythagorovy věty z obr. 3.21:

$$v_t = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{8}}a\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{6}} =$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2 - 2a^2}{12}} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$



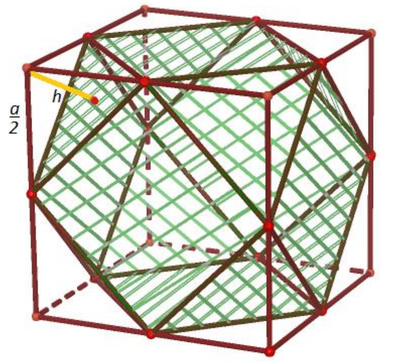
Obr. 3.21: Tělesová výška v_t

Teď jsme schopni vypočítat objem jehlanu V_3:

$$V_3 = \frac{1}{3} S_p v_t = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \frac{a^3}{16}.$$

Celkový **objem *V* kuboktaedru** je

$$V = a^3 - 8 \cdot \frac{1}{3} \frac{a^3}{16} = \frac{5}{6} a^3.$$



Obr. 3.22: Objem kuboktaedru

Povrch *S* kuboktaedru spočítáme jako součet obsahů S_4 šesti čtverců a obsahů S_3 osmi rovnostranných trojúhelníků:

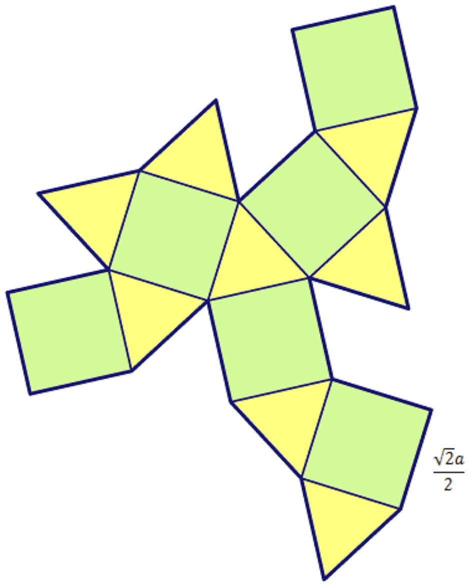
$$S = 6S_4 + 8S_3.$$

Obsah jednoho čtverce je

$$S_4 = x^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Obsah rovnostranného trojúhelníku *S₃* již vypočítaný máme, je to obsah podstavy odseknutého trojbokého jehlanu:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2.$$

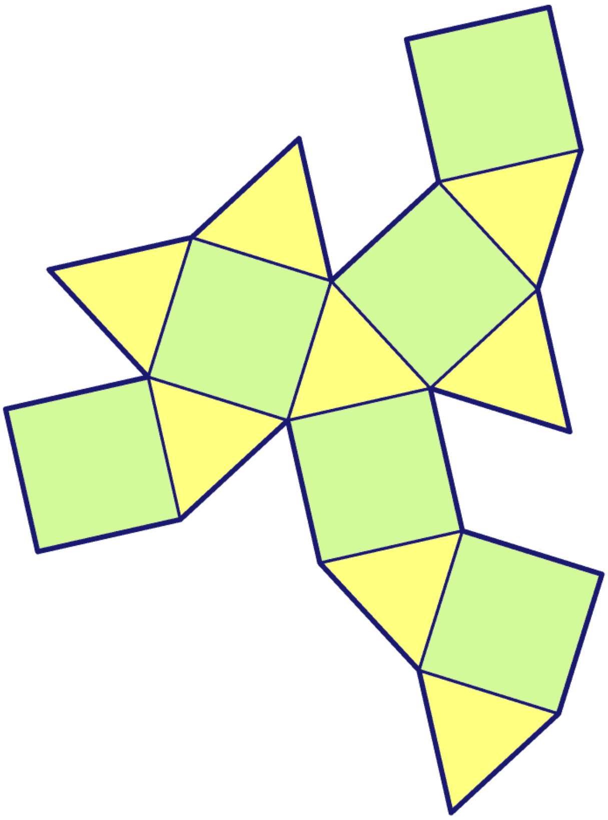


Obr. 3.23: Povrch kuboktaedru

Celkový povrch *S* kuboktaedru je tedy:

$$S = 6S_4 + 8S_3 = S = 6\frac{a^2}{2} + 8\frac{\sqrt{3}}{8} a^2 = \left(3 + \sqrt{3}\right) a^2.$$

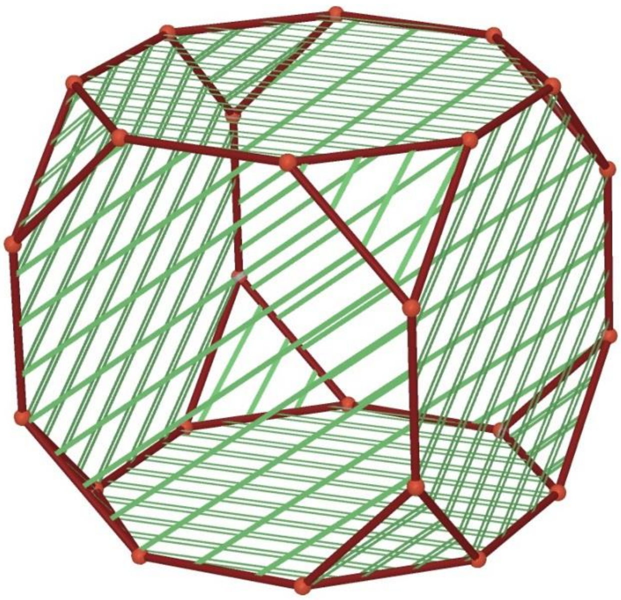
Síť kuboktaedru:



Obr. 3.24: Síť kuboktaedru

3.4 Osekaná krychle

Osekaná krychle	
Stěny	*trojúhelníky, osmiúhelníky*
Délka hrany	$a(\sqrt{2}-1)$
Počet vrcholů	*24*
Počet hran	*36*
Počet stěn	*14*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,8,8)$
Hranové úhly	*60°, 135°*
Objem *V*	$\frac{7}{3}(\sqrt{2}-1)a^3$
Povrch *S*	$2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{3}+6)a^2$

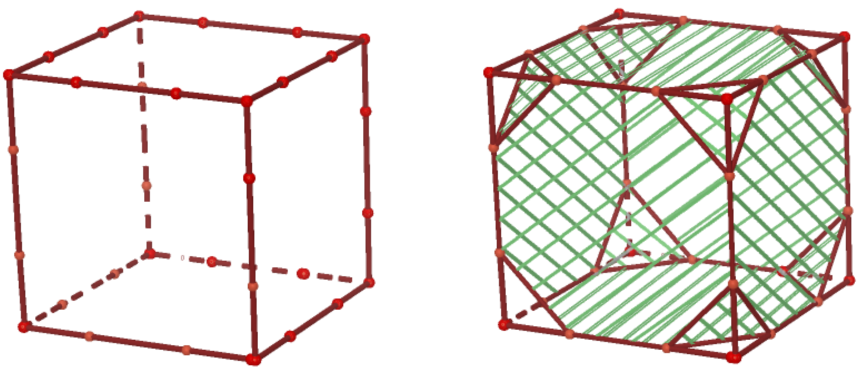


Obr. 3.25: Osekané krychle

Osekaná krychle (angl. Truncated Cube) vznikla vhodným osekáním krychle a to takovým, abychom do každé stěny mohli vepsat pravidelný osmiúhelník. Její povrch tvoří osm shodných rovnostranných trojúhelníků a šest shodných pravidelných osmiúhelníků. Ve vrcholu se ve stejném pořadí střetávají rovnostranný trojúhelník a dva pravidelné osmiúhelníky, tedy vrcholová posloupnost osekané krychle je (3,8,8).

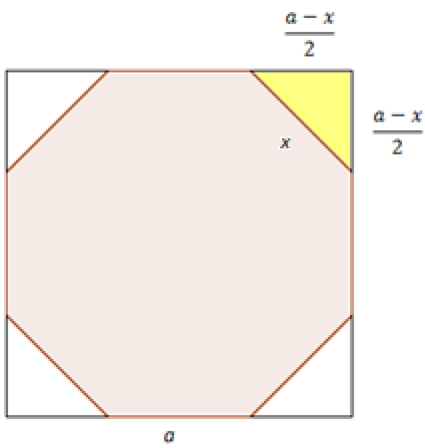
Konstrukce

Osekaná krychle vznikla useknutím vrcholů krychle. Vezměme jednu stěnu krychle, tedy čtverec o straně délky *a* a vepišme mu pravidelný osmiúhelník o straně délky *x.* Dále zvolíme vrchol krychle a najdeme nejbližsší vrcholy osmiúhelníků na hranách krychle, které se v tomto vrcholu sbíhají, a proložíme jimi rovinu. Tento postup zopakujeme pro každý vrchol krychle. Ze stěn krychle tedy získáme pravidelné osmiúhelníky a řezy nám vzniknou rovnostranné trojúhelníky. Možný postup je zaznamenán na obrázku 3.26.



Obr. 3.26: Vznik osekané krychle

Délku hrany *x* osekané krychle získáme z pravoúhlého trojúhelníku, jehož přeponou je námi hledaná délka *x* a odvěsny mají délky $\frac{a-x}{2}$ (obr. 3.27):



Obr. 3.27: Délka hrany x

$$x^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2}{4} + \frac{a^2 - 2ax + x^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2}{2}$$

Odtud získáme kvadratickou rovnici s neznámou *x*

$$x^2 + 2ax - a^2 = 0.$$

Tato rovnice má jeden kořen kladný, druhý záporný. Díky tomu, že hledáme délku, bereme v potaz jen kořen kladný, tedy

$$x = -a + \sqrt{2}a = a(\sqrt{2} - 1).$$

Pro výpočty objemu a povrchu osekané krychle předpokládejme, že toto těleso vzniklo z krychle o hraně délky *a*.

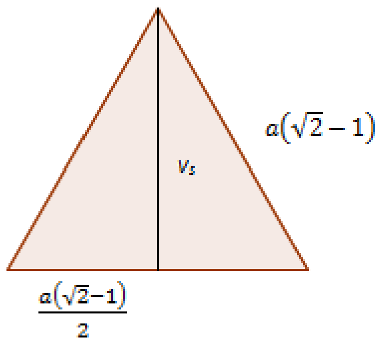
Objem *V* osekané krychle vypočítáme, odečteme-li od objemu krychle objemy V_3 osmi shodných trojbokých jehlanů, které byly odseknuty.

Pro výpočet objemu V_3 jednoho trojbokého jehlanu potřebujeme znát jeho stěnovou výšku v_s, s její pomocí určíme obsah podstavy S_p, dále musíme znát tělesovou výšku v_t tohoto jehlanu.

Stěnovou výšku v_s spočítáme pomocí Pythagorovy věty (obr. 3.28):

$$v_s = \sqrt{\left(a(\sqrt{2}-1)\right)^2 - \left(\frac{a(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2(\sqrt{2}-1)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{2}-1)a.$$



Obr. 3.28: Stěnová výška v_s

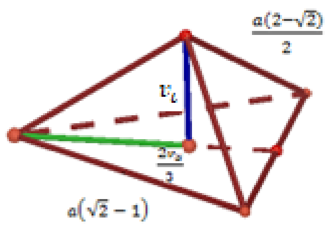
Dále potřebujeme znát délku v_h boční hrany jehlanu:

$$v_h = \frac{a-x}{2} = \frac{a - a(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{a(1-\sqrt{2}+1)}{2} = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Teď můžeme vypočítat obsah podstavy jehlanu:

$$S_p = \frac{x \cdot v_s}{2} = \frac{a(\sqrt{2}-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a(\sqrt{2}-1)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}-1)^2 a^2.$$

Výšku jehlanu v_t spočítáme opět užitím Pythagorovy věty s pomocí obr. 3.29:



Obr. 3.29: Tělesová výška v_t

$$v_t = \sqrt{{v_h}^2 - \left(\frac{2v_s}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^2\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4} - \frac{a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{3}} == \sqrt{\frac{3\left(4-4\sqrt{2}+2\right)-4\left(2-2\sqrt{2}+1\right)}{12}}\,a$$

$$= \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{12}}\,a = \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{6}} == \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{6}}\,a.$$

Potřebujeme zjistit objem jednoho odseknutého jehlanu *V₃*:

$$V_3 = \frac{1}{3}S_p v_t = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2 \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{6}}\,a = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^3 a^3}{12\sqrt{2}}.$$

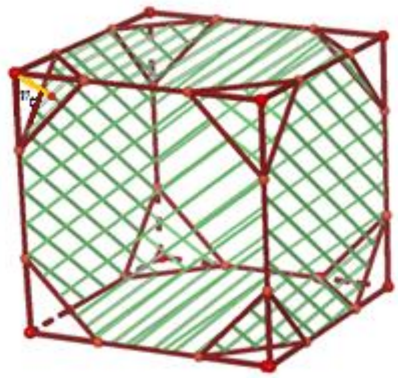
Objem *V* osekané krychle je

$$V = V_{krychle} - 8V_3 = a^3 - 8\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^3 a^3}{12\sqrt{2}} =$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-1\right)^3\right)a^3 =$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^3\right)a^3 =$$

$$= \left(\frac{3-\sqrt{2}\left(5\sqrt{2}-7\right)}{3}\right)a^3 = \frac{7}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)a^3.$$



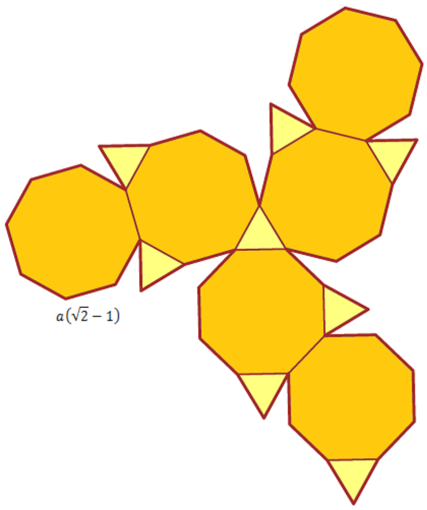
Obr. 3.30: Objem osekané krychle

Povrch *S* osekané krychle je součtem obsahů osmi rovnostranných trojúhelníků o obsazích S_3 a šesti pravidelných osmiúhelníků o obsazích S_8 (obr. 3.31):

$$S = 8S_3 + 6S_8.$$

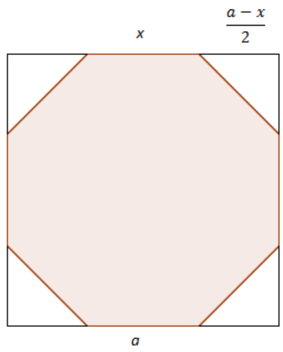
Obsah rovnostranného trojúhelníku (podstavy odseklého jehlanu) již spočítaný máme jako S_p, *je to*

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2.$$



Obr. 3.31: Povrch osekané krychle

Obsah osmiúhelníku spočítáme vepsáním osmiúhelníku do čtverce o straně délky *a* tak, že ze čtverce odřízneme čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky, viz obrázek 3.32:



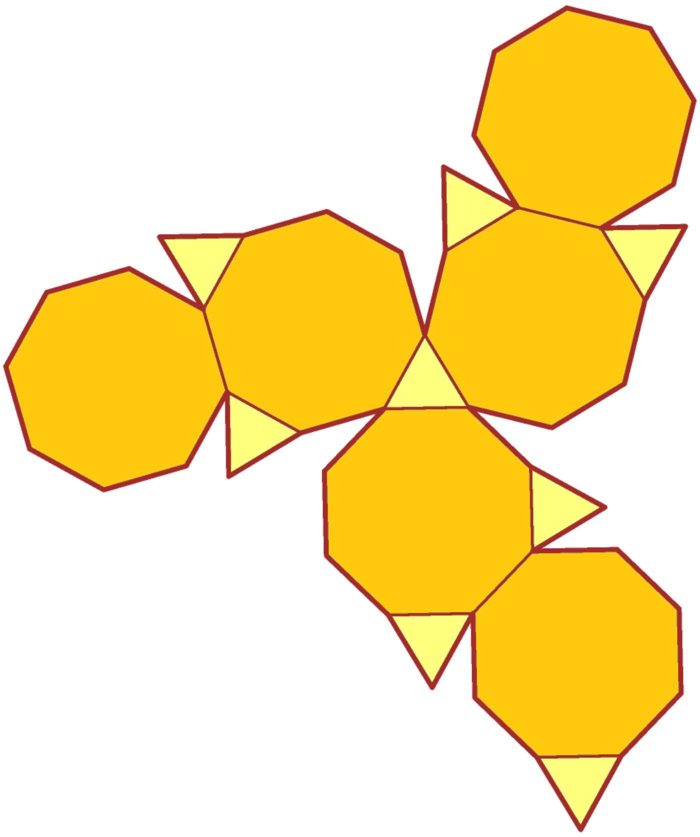
Obr. 3.32: Obsah osmiúhelníku

$$S_8 = a^2 - 2\left(\frac{a - a(\sqrt{2}-1)}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{\left(a(1-\sqrt{2}+1)\right)^2}{2}$$
$$= \frac{2a^2 - a^2(2-\sqrt{2})^2}{2} = \frac{2a^2 - a^2(4-4\sqrt{2}+2)}{2}$$
$$= a^2 - a^2(3-2\sqrt{2}) = a^2(2\sqrt{2}-2) = 2(\sqrt{2}-1)a^2.$$

Celkový **povrch *S* osekané krychle** je

$$S = 8S_3 + 6S_8 = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}-1)^2 a^2 + 6 \cdot 2(\sqrt{2}-1)a^2$$
$$= 2\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)^2 a^2 + 12(\sqrt{2}-1)a^2 = 2(\sqrt{2}-1)a^2\left(\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+6\right)$$
$$= 2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-\sqrt{3}+6)a^2.$$

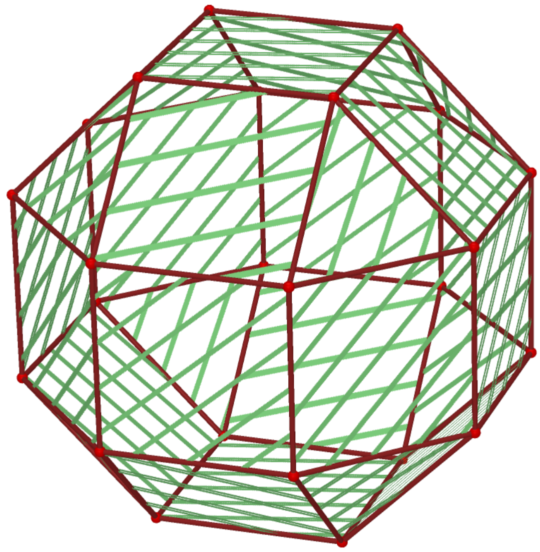
Síť osekané krychle:



Obr. 3.33: Síť osekané krychle

3.5 Rombokuboktaedr

Rombokuboktaedr	
Stěny	*trojúhelníky, čtverce*
Délka hrany	$(\sqrt{2}-1)a$
Počet vrcholů	*24*
Počet hran	*48*
Počet stěn	*26*
Uspořádání ve vrcholu	$(3{,}4{,}4{,}4)$
Hranové úhly	*60°, 90°*
Objem *V*	$\frac{2}{3}(8-5\sqrt{2})a^3$
Povrch *S*	$(18+2\sqrt{3})(3-2\sqrt{2})a^2$

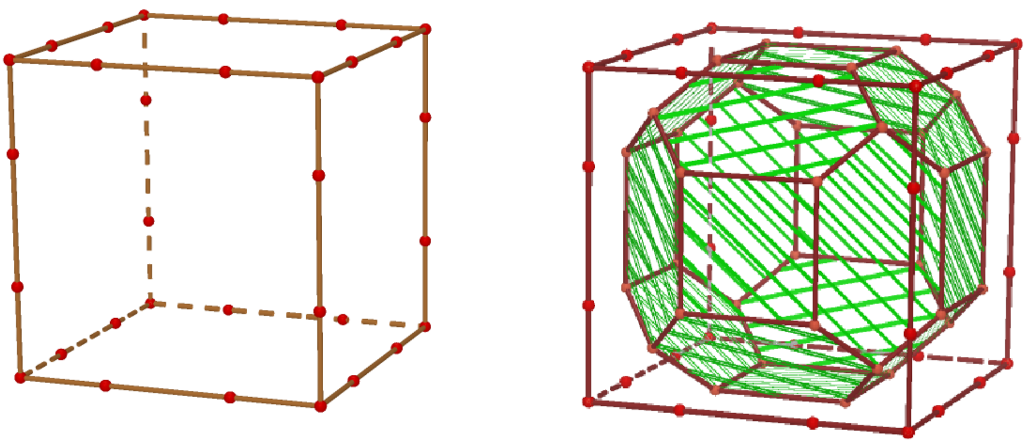


Obr. 3.34: Rombokuboktaedr

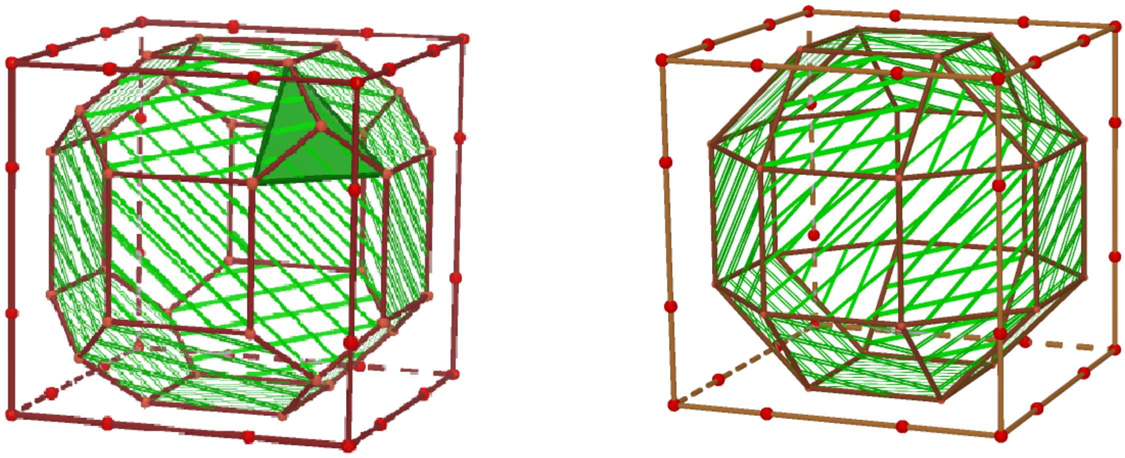
Rombokuboktaedr (angl. Rhombicuboctahedron) vznikl dvojím osekáním krychle a to takovým, aby ve středu každé stěny krychle vznikl menší čtverec požadovaných rozměrů. Povrch rombokuboktaedru je složen z osmi shodných rovnostranných trojúhelníků a osmnácti shodných čtverců. Ve vrcholu se ve stejném pořadí střetávají rovnostranný trojúhelník a tři čtverce, tedy vrcholová posloupnost je (3,4,4,4).

Konstrukce

Jak již bylo zmíněno, rombokuboktaedr vznikne tzv. dvojím osekáním vrcholů a hran krychle. První osekání je osekáním hran krychle, druhé vrcholů. Tato osekání jsou znázorněna na obr. 3.35 a obr. 3.36.

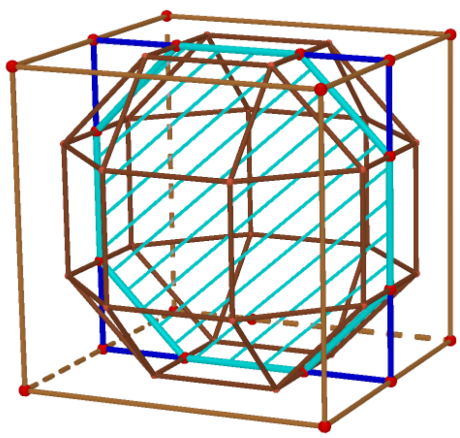


Obr. 3.35: Vznik rombokuboktaedru



Obr. 3.36: Vznik rombokuboktaedru

Délka hrany *x* rombokuboktaedru je stejná jako délka hrany osekané krychle (viz kapitola 3.4), která vznikla z krychle o hraně délky *a.* Řezem rombokuboktaedru v krychli, která má hranu délky *a*, znázorněného na obrázku 3.37, je pravidelný osmiúhelník o straně délky *x* stejně, jako je tomu u osekané krychle , tedy:

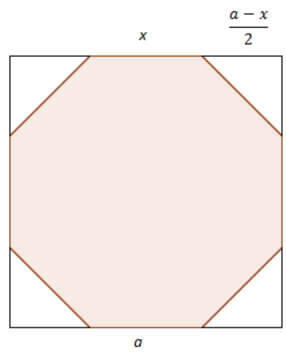


Obr. 3.37: Délka hrany x

$$x^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2.$$

Máme kvadratickou rovnici, jejíž kladné řešení je námi hledaná délka hrany *x* rombokuboktaedru:

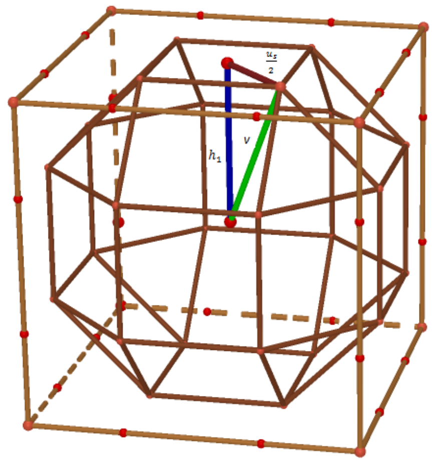
$$x = -a + \sqrt{2}a = a\left(\sqrt{2} - 1\right).$$



Obr. 3.38: Délka hrany x

Pro výpočty objemu a povrchu rombokuboktaedru předpokládejme, že toto těleso vzniklo z krychle o hraně délky *a.*

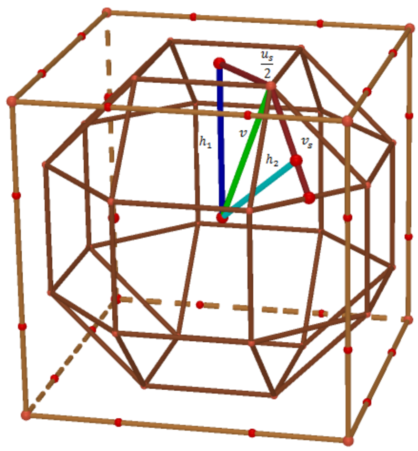
Objem *V* rombokuboktaedru spočítáme jako součet jednotlivých objemů V_3 osmi shodných jehlanů, jejichž podstavou je rovnostranný trojúhelník, a objemů V_4 osmnácti shodných jehlanů se čtvercovou podstavou.



Obr. 3.39: Výška h_1

1) **Objem V_4 jehlanu**:
   Podstavou tohoto jehlanu je čtverec o straně délky $(\sqrt{2}-1)a$ a tělesovou výškou h_1 je polovina délky hrany krychle, čili $\frac{a}{2}$:

$$V_4 = \frac{1}{3}S_p h_1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^3.$$



Obr. 3.40: Výška h_2

2) **Objem V_3 jehlanu**:
   Podstavou jehlanu je rovnostranný trojúhelník o straně $(\sqrt{2}-1)a$. Tělesovou výšku h_2 toho jehlanu budeme muset dopočítat. Nejprve si pomocí Pythagorovy věty zjistíme druhou mocninu *v* boční hrany jehlanu, kde u_s je úhlopříčka čtverce o straně délky $(\sqrt{2}-1)a$ (obr. 3.40):

$$v^2 = {h_1}^2 + \left(\frac{1}{2}u_s\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a\right)^2 =$$

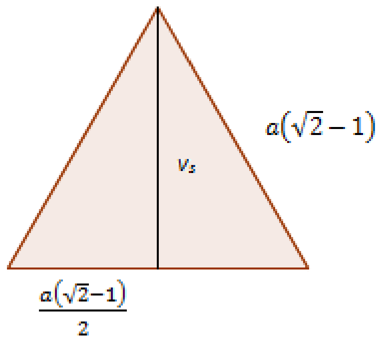
$$= \frac{a^2}{4} + \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{2}a^2 = \frac{a^2 + 2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2}{4} =$$

$$= \frac{\left(1+2\left(3-2\sqrt{2}\right)\right)a^2}{4} = \frac{\left(7-4\sqrt{2}\right)a^2}{4}.$$

   Po odmocnění dostaneme délku boční hrany *v* jehlanu:

$$v = \frac{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{2}a.$$

   Ještě potřebujeme znát stěnovou výšku v_s rovnostranného trojúhelníku podstavy, tu máme již spočítanou u osekané krychle (kap. 3.4):



Obr. 3.41: Výška v_s

$$v_s = \sqrt{\left(a\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 - \left(\frac{a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a.$$

Máme vše potřebné pro výpočet **tělesové výšky *h₂* jehlanu,** jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník. Využijeme opět Pythagorovu větu a obr. 3.40:

$$h_2{}^2 = v^2 - \frac{2}{3}v_s{}^2 = \frac{\sqrt{7-4\sqrt{2}}}{2}a - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)a = \frac{\left(7-4\sqrt{2}\right)a^2}{4} - \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2 =$$

$$= \frac{\left(21-12\sqrt{2}-12+8\sqrt{2}\right)a^2}{12} = \frac{\left(9-4\sqrt{2}\right)a^2}{12}.$$

Po odmocnění získáme **výšku *h₂* jehlanu:**

$$h_2 = \sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{12}}\,a.$$

Obsah *Sₚ* podstavy jehlanu máme také vypočítaný u osekané krychle (kap. 3.4), proto:

$$S_p = \frac{x \cdot v_s}{2} = \frac{a\left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\left(\sqrt{2}-1\right)}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2.$$

Objem *V₃* trojbokého jehlanu je tedy

$$V_3 = \frac{1}{3}S_p h_2 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2 \sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{12}}\,a = \frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{12}}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^3.$$

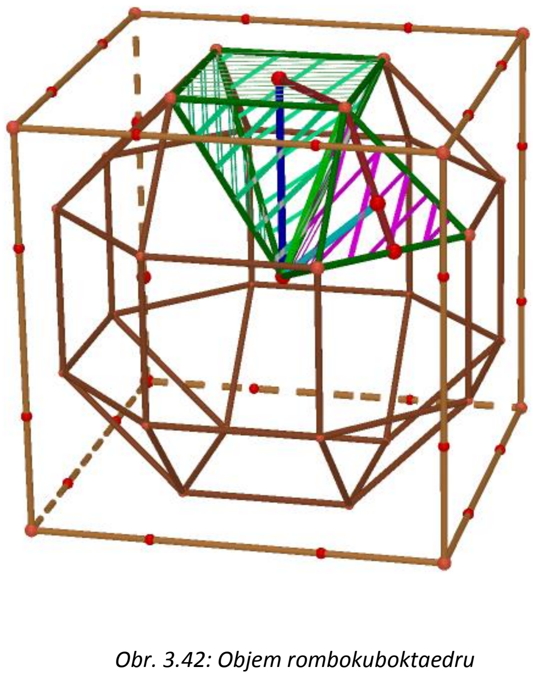
Celkový **objem *V* rombokuboktaedru** spočítáme jako součet osmi trojbokých jehlanů o objemech V_3 a osmnácti čtyřbokých jehlanů o objemech V_4:

$$V = 8V_3 + 18V_4 =$$

$$= 8\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{12}}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^3 + 18\frac{1}{6}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^3 =$$

$$= \left(3 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{9-4\sqrt{2}}{12}}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)a^3 =$$

$$= \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3 + \frac{1}{3}\sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)a^3 =$$



Obr. 3.42: Objem rombokuboktaedru

$$= \left(3-2\sqrt{2}\right)\left(\frac{9+\left(2\sqrt{2}-1\right)}{3}\right)a^3 = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(8+2\sqrt{2}\right)}{3}a^3 = \frac{2}{3}\left(8-5\sqrt{2}\right)a^3.$$

Povrch *S* rombokuboktaedru je součtem obsahů S_3 osmi rovnostranných trojúhelníků o stranách délky $a\left(\sqrt{2}-1\right)$ a obsahů S_4 osmnácti čtverců o téže délce stran:

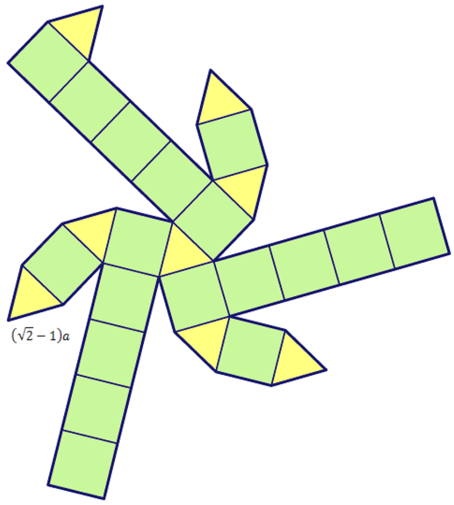
$$S = 8S_3 + 18S_4.$$

Obsah S_3 rovnostranného trojúhelníku spočítaný máme, je to obsah podstavy S_p trojbokého jehlanu:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2.$$

Obsah S_4 čtverce snadno určíme:

$$S_4 = \left(a\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2 = a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2.$$

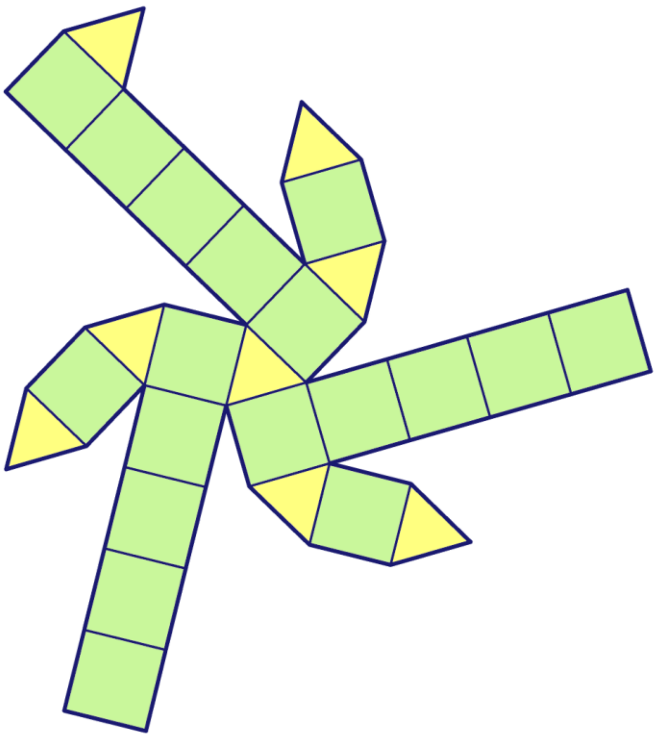


Obr. 3.43: Povrch rombokuboktaedru

A tedy celkový **povrch *S* rombokuboktaedru** je

$$S = 8S_3 + 18S_4 = 8\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2 + 18a^2\left(\sqrt{2}-1\right)^2 = \left(18+2\sqrt{3}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2.$$

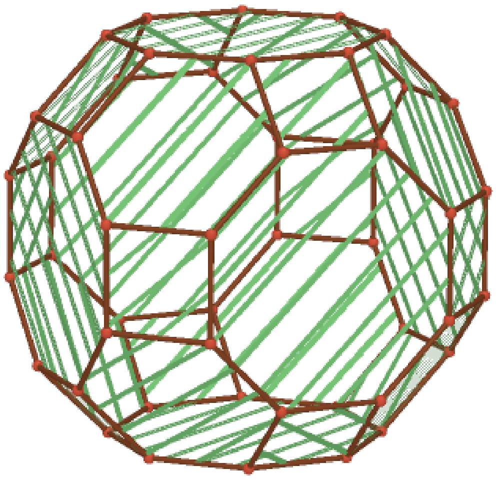
Síť rombokubooktaedru:



Obr. 3.44: Síť rombokuboktaedru

3.6 Velký rombokuboktaedr

Velký rombokuboktaedr	
Stěny	*čtverce, šestiúhelníky, osmiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{(2\sqrt{2}-1)}{7}a$
Počet vrcholů	*48*
Počet hran	*72*
Počet stěn	*26*
Uspořádání ve vrcholu	$(4,6,8)$
Hranové úhly	*90°, 120°, 135°*
Objem *V*	$\frac{66+134\sqrt{2}}{343}a^3$
Povrch *S*	$\frac{12}{49}(10+\sqrt{2}+9\sqrt{3}-4\sqrt{6})a^2$

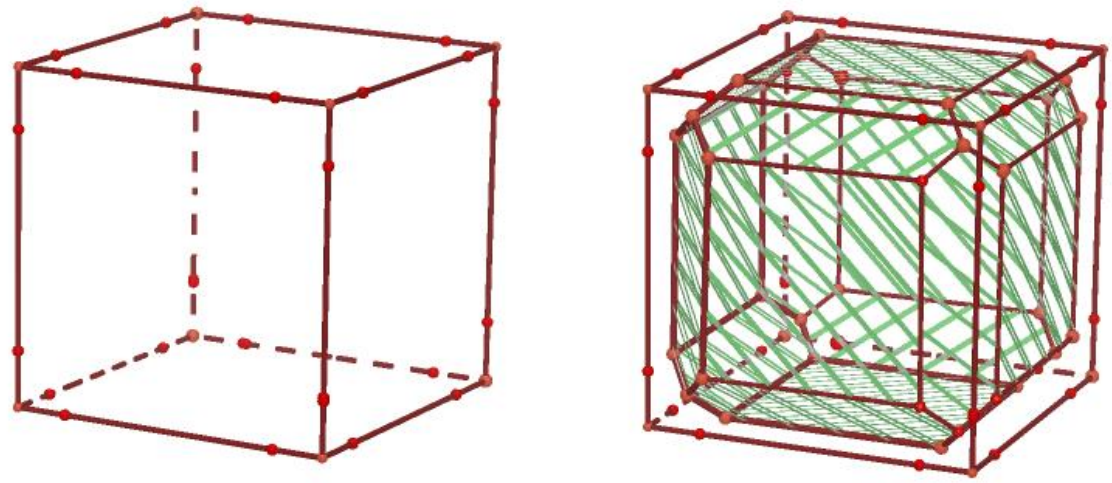


Obr. 3.45: Velký rombokuboktaedr

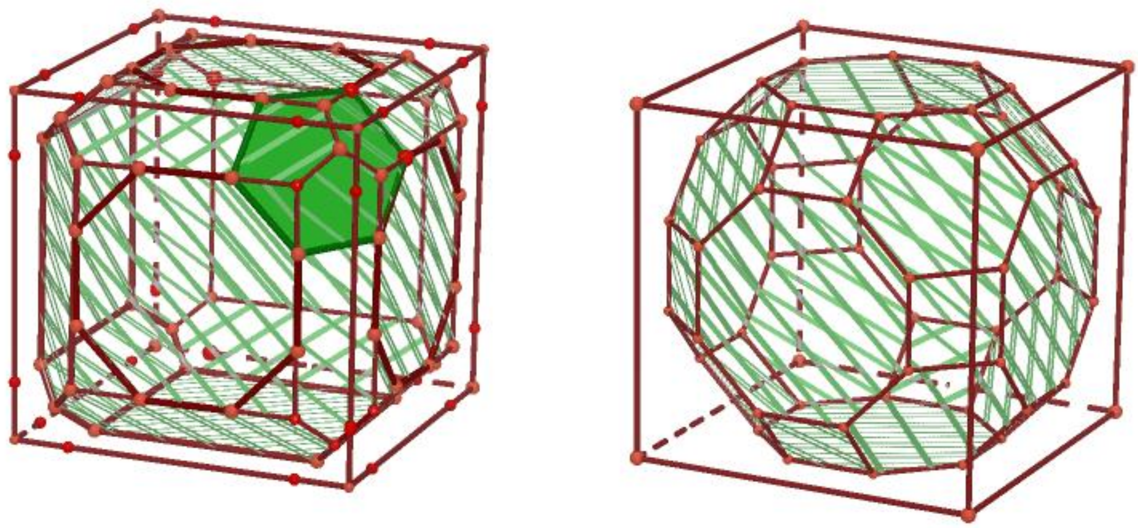
Velký rombokuboktaedr (angl. Great Rhombicuboctahedron) vznikne dvojím osekáním z krychle. Nejprve osekáme hrany původní krychle, poté její vrcholy. Jeho povrch tvoří dvanáct shodných čtverců, osm shodných pravidelných šestiúhelníků a šest shodných pravidelných osmiúhelníků. V každém vrcholu se po řadě stýkají čtyřúhelník, šestiúhelník a osmiúhelník vždy po jednom, vrcholová posloupnost se zapíše $(4,6,8)$.

Konstrukce

Těleso tedy vzniklo dvojím osekáním z krychle. V prvním osekání odsekáme hrany krychle. Z každé stěny původní krychle vznikne menší čtverec, do kterého vepíšeme pravidelný osmiúhelník. Dle vzniklých osmiúhelníků jakoby osekáme vrcholy původní krychle. Možný postup osekání je zakreslen na obr. 3. 46 a obr. 3.47.



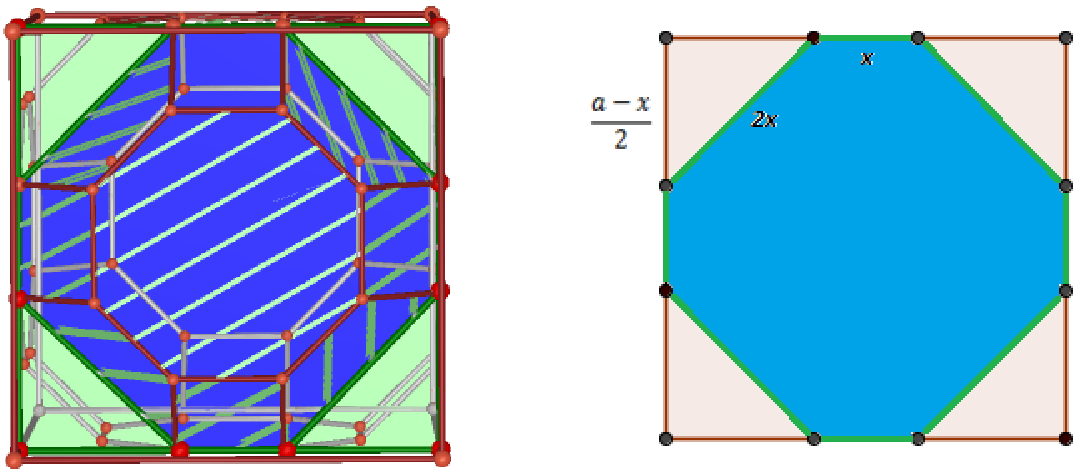
Obr. 3.47: Vznik velkého rombokuboktaedru



Obr. 3.46: Vznik velkého rombokuboktaedru

Pro výpočty objemu a povrchu velkého rombokuboktaedru předpokládejme, že toto těleso vzniklo z krychle o hraně délky *a*.

Délku hrany *x* velkého rombokuboktaedru spočítáme pomocí Pythagorovy věty. Pro lepší představu nám pomůže podívat se na velký rombokuboktaedr vepsaný do krychle shora. Využijeme průmět znázorněný na obrázku 3.48.



Obr. 3.48: Délka hrany x

Tímto průmětem je osmiúhelník, vepsaný do čtverce, se stranami délek *x* a *2x* , kde *x* je stranou malého čtverce, který je stěnou velkého rombokuboktaedru a *2x* je vzdáleností dvou protějších vrcholů pravidelného šestiúhelníku, který je též stěnou velkého rombokuboktaedru. S využitím pravoúhlého trojúhelníku (obr. 3.48 vpravo) s přeponou *2x* a odvěsnami $\frac{a-x}{2}$ dokážeme sestavit rovnici a zjistit délku *x:*

$$(2x)^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2$$

$$4x^2 = 2\left(\frac{a-x}{2}\right)^2$$

$$8x^2 = a^2 - 2ax + x^2$$

$$7x^2 + 2ax - a^2 = 0$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici:

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot 7 \cdot a^2}}{2 \cdot 7},$$

$$x = \frac{-2a \pm \sqrt{32a^2}}{14},$$

$$x_1 = \frac{-2 + 4\sqrt{2}}{14}a = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}a \;, \quad x_2 = \frac{-2 - 4\sqrt{2}}{14}a = \frac{-2\sqrt{2} - 1}{7}a.$$

Hledáme délku hrany *x* velkého rombokuboktaedru a druhý kořen rovnice je číslo záporné, proto je délkou hrany $x = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}a$.

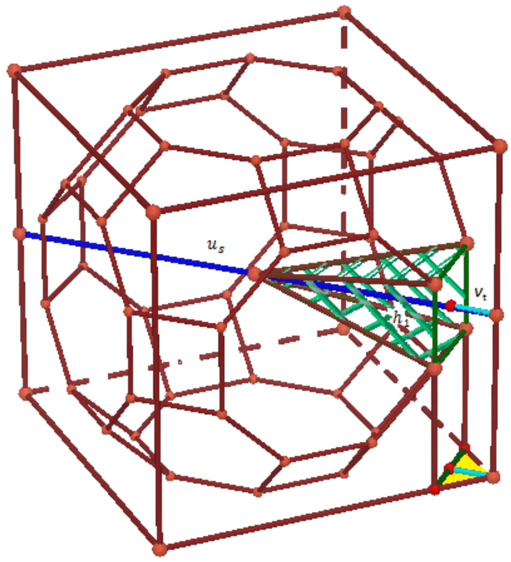
Objem *V* velkého rombokuboktaedru dostaneme, sečteme-li objemy V_4 dvanácti shodných jehlanů se čtvercovou podstavou, objemy V_6 osmi shodných šestibokých jehlanů a objemy V_8 šesti shodných osmibokých jehlanů, ze kterých se velký rombokuboktaedr skládá.

1) **Objem V_4 jehlanu:**

K výpočtu objemu tohoto jehlanu nám pomůže obr. 3.49.

Nejprve spočítáme vzdálenost v_t, tedy vzdálenost od hrany krychle ke středu podstavy čtyřbokého jehlanu.

Všimněme si na obrázku 3.49 vpravo dole, že vznikl rovnoramenný trojúhelník (žlutý). Tedy je zřejmé, že **délka v_t** vyznačená na obr 3.49 světle modře musí být polovinou délky strany čtverce, tedy $\frac{x}{2}$.



Obr. 3.49: Výška h_1

Výška jehlanu h_1 je rovna polovině délky stěnové úhlopříčky u_s původního pravidelného mnohostěnu (krychle), která je zmenšená právě o délku v_t:

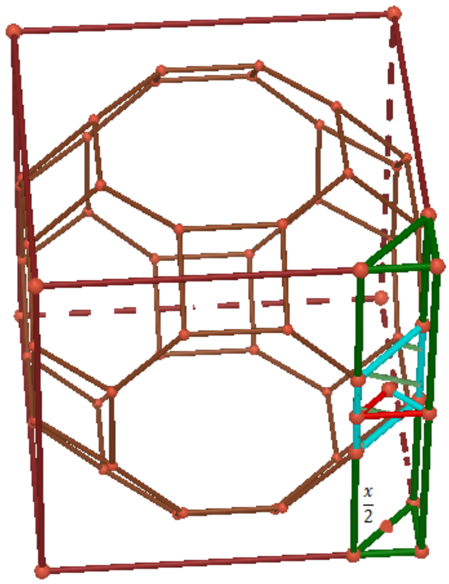
$$h_1 = \frac{u_s}{2} - v_t = \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a}{2} = $$

$$= \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)a}{2 \cdot 7} =$$

$$= \frac{\left(5\sqrt{2}+1\right)}{14}a.$$

Dále si spočítáme obsah S_p podstavy jehlanu, je to obsah čtverce se stranou délky *x*.

$$S_p = x^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\right)^2 = \frac{9-4\sqrt{2}}{49}a^2.$$



Obr. 3.50: Délka v_t

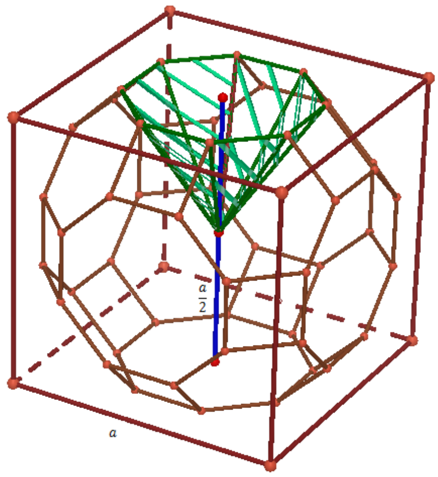
Objem V_4 čtyřbokého jehlanu je

$$V_4 = \frac{1}{3}S_p h_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{9-4\sqrt{2}}{49}a^2 \cdot \frac{\left(5\sqrt{2}+1\right)}{14}a = \frac{45\sqrt{2}+9-20 \cdot 2 - 4\sqrt{2}}{3 \cdot 49 \cdot 14}a^3 =$$

$$= \frac{41\sqrt{2}-31}{2\,058}a^3.$$

2) **Objem V_8 jehlanu**:

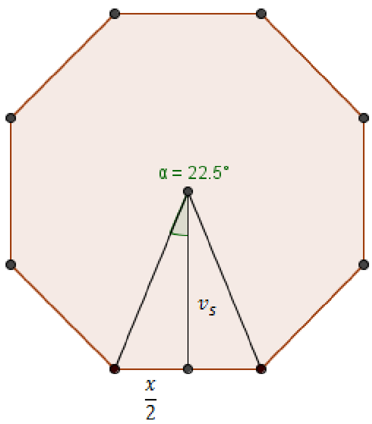
Výška jehlanu h_2 je rovna polovině délky hrany krychle, ze které byl velký rombokuboktaedr získán, tedy $\frac{a}{2}$ (obr. 3.51).



Obr. 3.51: Výška h_2

Obsah podstavy S_p je obsahem pravidelného osmiúhelníku o straně délky x. Nejprve vypočítáme výšku v_s trojúhelníku, který je dílčí částí pravidelného osmiúhelníku (obr. 3.52):

$$v_s = \frac{\frac{x}{2}}{\tan 22{,}5°} = \frac{\frac{2\sqrt{2}-1}{14}a}{\tan 22{,}5°} = \frac{2\sqrt{2}-1}{14\tan 22{,}5°}a.$$



Obr. 3.52: Obsah osmiúhelníku

Víme, že $\tan 22{,}5° = \sqrt{2}-1$ [13],

proto

$$v_s = \frac{2\sqrt{2}-1}{14\tan 22{,}5°}a = \frac{2\sqrt{2}-1}{14(\sqrt{2}-1)}a.$$

Obsah tohoto osmiúhelníku je součtem obsahů šestnácti shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami $\frac{x}{2}$ a v_s:

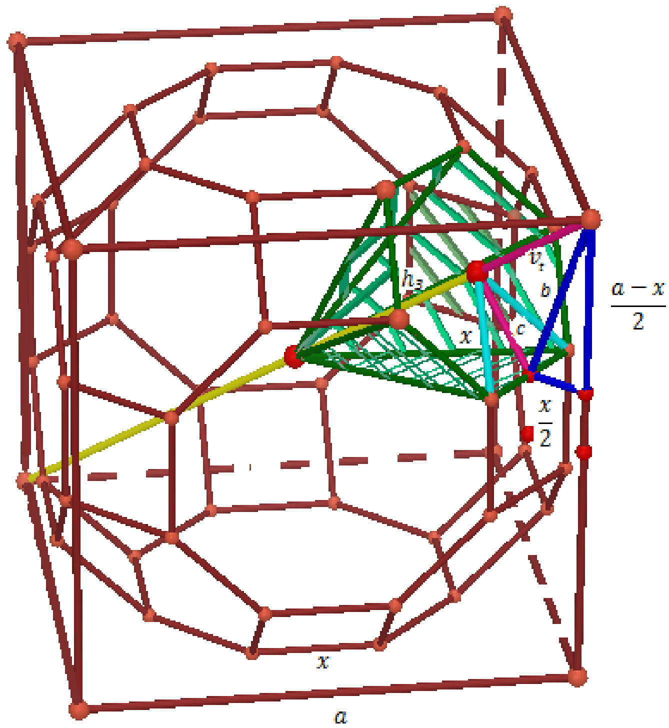
$$S_p = 16\cdot\frac{\frac{x}{2}\cdot v_s}{2} = 4\cdot x\cdot v_s = 4\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{14(\sqrt{2}-1)}a =$$
$$= 2\cdot\frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{49(\sqrt{2}-1)}a^2 = \frac{2(9-4\sqrt{2})}{49(\sqrt{2}-1)}a^2.$$

Teď jsme schopni vypočítat **objem V_8** tohoto jehlanu, je to

$$V_8 = \frac{1}{3}\cdot S_p\cdot h_2 = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{9-4\sqrt{2}}{49(\sqrt{2}-1)}a^2\cdot\frac{a}{2} = \frac{9-4\sqrt{2}}{3\cdot 49(\sqrt{2}-1)}a^3 = \frac{9-4\sqrt{2}}{147(\sqrt{2}-1)}a^3 =$$
$$= \frac{9-4\sqrt{2}}{147(\sqrt{2}-1)}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}a^3 = \frac{1+5\sqrt{2}}{147}a^3.$$

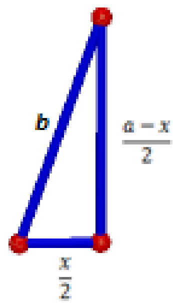
3) **Objem V_6 jehlanu**:

Pro výpočet objemu V_6 jehlanu, jehož podstavou je pravidelný šestiúhelník, musíme nejprve spočítat tělesovou výšku h_3 tohoto jehlanu. K jejímu výpočtu nám pomůže obr. 3.53. Abychom se propracovali k výšce h_3, musíme nejprve zjistit z tmavomodrého trojúhelníku délku b. Poté zjistíme délku c a následně délku v_t. Výška jehlanu h_3 je potom polovinou tělesové úhlopříčky krychle zmenšená právě o délku v_t. U všech trojúhelníků můžeme použít Pythagorovu větu, protože jsou pravoúhlé.



Obr. 3.53: Výška h_3

Začneme tedy od vyjádření b (obr. 3.54):



Obr. 3.54: Délka b

$$b^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\right)^2}{4} + \left(\frac{a - \frac{2\sqrt{2}-1}{7}a}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\right)^2}{4} + \left(\frac{\frac{7\mathrm{a} - 2\sqrt{2}a + a}{7}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(2\sqrt{2}-1\right)^2 a^2}{49 \cdot 4} + \frac{\left(4-\sqrt{2}\right)^2 a^2}{49} =$$

$$= \frac{(9-4\sqrt{2})a^2}{49 \cdot 4} + \frac{4 \cdot (18-8\sqrt{2})a^2}{49 \cdot 4} =$$

$$= \frac{(81-36\sqrt{2})a^2}{49 \cdot 4} = \frac{9 \cdot (9-4\sqrt{2})a^2}{49 \cdot 4}.$$

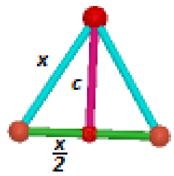
Odmocněním získáme b:

$$b = \frac{3}{14}\sqrt{9-4\sqrt{2}a}.$$

Obdobným způsobem vyjádříme délku *c* (obr. 3.55):

$$c^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}x^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\right)^2$$

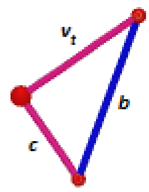
$$c = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a.$$



Obr. 3.55: Délka c

Z toho, co jsme již spočítali, jsme schopni vyjádřit délku v_t (obr. 3.56)*:*

$$\begin{aligned}{v_t}^2 = b^2 - c^2 &= \left(\frac{3}{14}\sqrt{9-4\sqrt{2}}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\right)^2 = \\ &= \frac{9\cdot\left(9-4\sqrt{2}\right)a^2}{14^2} - \frac{3\cdot\left(9-4\sqrt{2}\right)a^2}{14^2} = \\ &= \frac{81-36\sqrt{2}-27+12\sqrt{2}}{14^2}a^2 = \frac{54-24\sqrt{2}}{14^2}a^2.\end{aligned}$$



Obr. 3.56: Délka v_t

Pak

$$v_t = \sqrt{\frac{54-24\sqrt{2}}{14^2}}a = \frac{\sqrt{54-24\sqrt{2}}}{14}a = \frac{\sqrt{6\left(9-4\sqrt{2}\right)}}{14}a = \frac{\sqrt{6\left(2\sqrt{2}-1\right)^2}}{14}a = \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{14}a.$$

Výšku *h₃* šestibokého jehlanu získáme, když od poloviny tělesové úhlopříčky krychle, ze které jsme velký rombokuboktaedr získali, odečteme délku v_t*:*

$$h_3 = \frac{u_t}{2} - v_t = \frac{\sqrt{3}a}{2} - \frac{4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{14}a = \frac{7\sqrt{3}-4\sqrt{3}+\sqrt{6}}{14}a = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{14}a = \frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{2}\right)}{14}a.$$

Zbývá spočítat **obsah podstavy S_p**. Tím je obsah pravidelného šestiúhelníku o straně délky x:

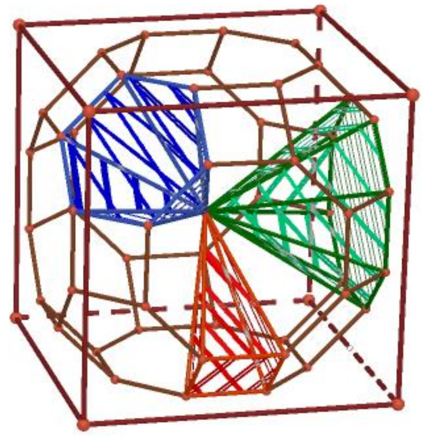
$$S_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}\left(9-4\sqrt{2}\right)}{2\cdot 49}a^2.$$

Nyní jsme schopni spočítat **objem V_6** šestibokého jehlanu.

$$\begin{aligned}V_6 = \frac{1}{3}\cdot S_p\cdot h_3 &= \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}\left(9-4\sqrt{2}\right)}{2\cdot 49}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{2}\right)}{14}a = \frac{3\left(9-4\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}{1\,372}a^3 = \\ &= \frac{3\left(19-3\sqrt{2}\right)}{1\,372}a^3.\end{aligned}$$

Celkový **objem *V* velkého rombokuboktaedru** je součtem objemů dílčích jehlanů, tedy dvanácti shodných jehlanů se čtvercovou podstavou o objemech V_4, osmi jehlanů, jejichž podstavou je pravidelný šestiúhelník o objemech V_6, a šesti jehlanů s podstavou pravidelného osmiúhelníku o objemech V_8.

$$V = 12V_4 + 8V_6 + 6V_8$$



Obr. 3.57: Objem velkého rombokuboktaedru

$$V = 12\frac{41\sqrt{2}-31}{2\,058}a^3 + 8\frac{3(19-3\sqrt{2})}{1\,372}a^3 + 6\frac{1+5\sqrt{2}}{147}a^3 =$$

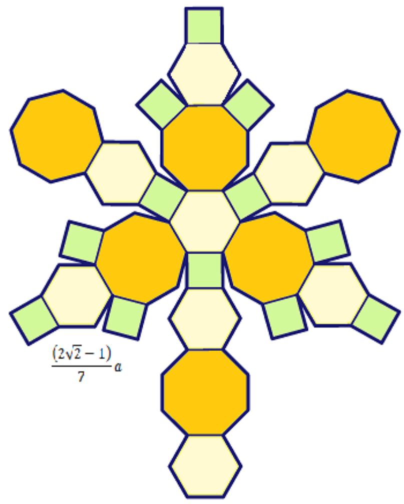
$$= \left(12\cdot\frac{41\sqrt{2}-31}{2\,058} + 8\cdot\frac{3(19-3\sqrt{2})}{1\,372} + 6\cdot\frac{1+5\sqrt{2}}{147}\right)a^3 =$$

$$= \left(\frac{2(41\sqrt{2}-31)}{343} + \frac{2\cdot 3(19-3\sqrt{2})}{343} + \frac{2\cdot(1+5\sqrt{2})}{49}\right)a^3 =$$

$$= \left(\frac{2(41\sqrt{2}-31) + 2\cdot 3(19-3\sqrt{2}) + 7\cdot 2(1+5\sqrt{2})}{343}\right)a^3 =$$

$$= \frac{82\sqrt{2}-62+114-18\sqrt{2}+14+70\sqrt{2}}{343}a^3 = \frac{66+134\sqrt{2}}{343}a^3.$$

Povrch *S* velkého rombokuboktaedru je součtem obsahů dvanácti čtverců, osmi pravidelných šestiúhelníků a šesti pravidelných osmiúhelníků o stranách délky $\frac{2\sqrt{2}-1}{7}a$. Ty máme již vypočítány u objemu velkého rombokuboktaedru jako obsahy podstav jednotlivých jehlanů, ze kterých se toto těleso skládá.



Obr. 3.58: Povrch velkého rombokuboktaedru

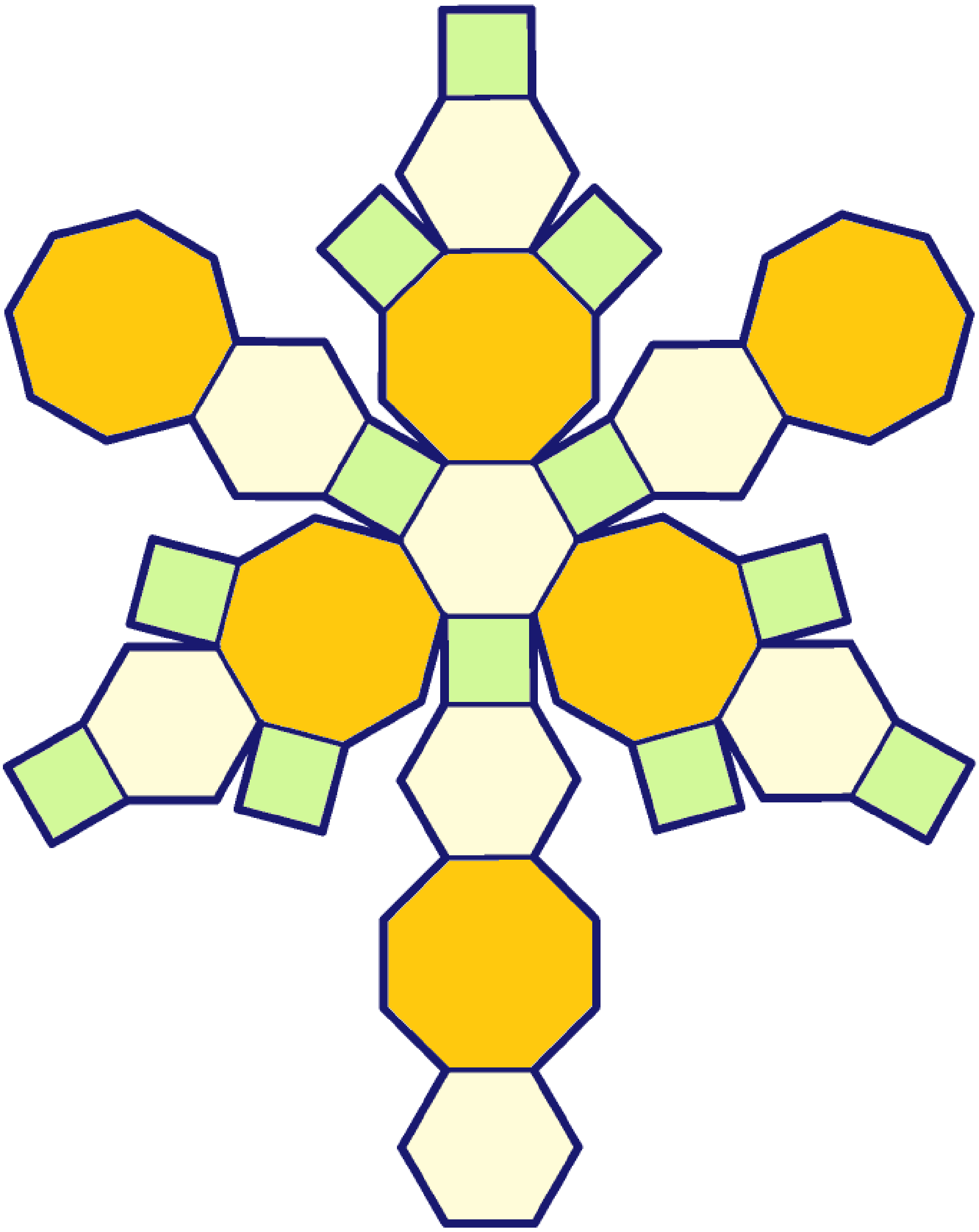
$$S = 12S_4 + 8S_6 + 6S_8 =$$

$$= 12\frac{9-4\sqrt{2}}{49}a^2 + 8\frac{3\sqrt{3}(9-4\sqrt{2})}{2\cdot 49}a^2 + 6\frac{2(9-4\sqrt{2})}{49(\sqrt{2}-1)}a^2 =$$

$$= \frac{12(9-4\sqrt{2})}{49}\left(1+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)a^2 = \frac{12(9-4\sqrt{2})}{49}(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)a^2 =$$

$$= \frac{12}{49}\left(10 + \sqrt{2} + 9\sqrt{3} - 4\sqrt{6}\right)a^2.$$

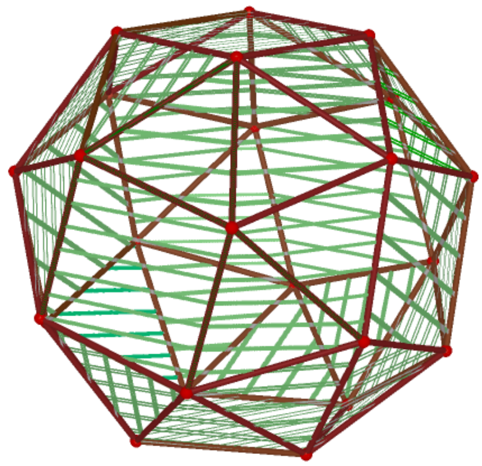
Síť velkého rombokuboktaedru:



Obr. 3.59: Síť velkého rombokuboktaedru

3.7 Otupená krychle

Otupená krychle	
Stěny	*trojúhelníky, čtyřúhelníky*
Délka hrany	$\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}$
Počet vrcholů	*24*
Počet hran	*60*
Počet stěn	*38*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,3,3,3,4)$
Hranové úhly	*60°, 90°*
Objem *V*	$\frac{3\sqrt{2(2C^2-1)}+8\sqrt{3C^2-1}}{3}\frac{a^3}{\left(\sqrt{2(2C^2-1)}\right)^3}$
Povrch *S*	$\left(6+8\sqrt{3}\right)\frac{a^2}{2(2C^2-1)}$

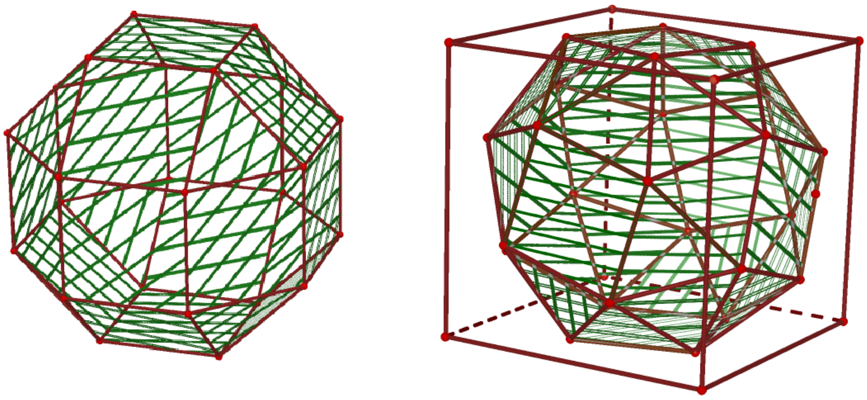


Obr. 3.60: Otupená krychle

Otupená krychle (angl. Snub Cube) je společně s otupeným dvanáctistěnem jedním ze dvou archimédovských těles, která nejdou zkonstruovat eukleidovskou konstrukcí [8], vzhledem k tomu byl model tělesa v práci zkonstruován s využitím přibližné hodnoty délky jeho hrany. Otupená krychle vznikla z krychle nejprve osekáním hran a vrcholů a následným otočením čtvercových stěn tak, aby mezi těmito stěnami vznikly shodné rovnostranné trojúhelníky a shodné čverce o straně stejné délky. Povrch je složen ze šesti čtverců a třiceti dvou rovnostranných trojúhelníků. V každém vrcholu se po řadě stýkají čtyři rovnostranné trojúhelníky a jeden čtverec, tedy vrcholová posloupnost je (3,3,3,3,4).

Konstrukce

Jak již bylo zmíněno, otupená krychle vznikne dvojím osekáním vrcholů a hran, které je totožné se vznikem rombokuboktaedru. A následným pootočením všech čtverců ve stěnách původní krychle tak, aby se ze čtverců, které ve stěnách původní krychle nebyly, staly vždy dva rovnostranné trojúhelníky. Dále je nutné upravit vrcholy osekané krychle tak, aby všechny měly stejnou vzdálenost od středu původní krychle. Postup, jak získat otupenou krychli z rombokuboktaedru, je podrobněji popsán v [7].



Obr. 3.61: Rombokuboktaedr a otupená krychle

Pro výpočty objemu a povrchu otupené krychle předpokládejme, že toto těleso vzniklo z krychle o hraně délky *a*.

Nejprve určíme **délka hrany *x* otupené krychle**. Dle [14] je vzdálenost h_1 od středu otupené krychle k průsečíku úhlopříček čtvercové stěny otupené krychle (tj. výška jehlanu se čtvercovou podstavou, viz obr. 3.63) rovna:

$$h_1 = \frac{\sqrt{2C^2 - 1}}{\sqrt{2}} x,$$

kde *C* je konstanta, která souvisí s metrickými vlastnostmi otupené krychle [15] a její přibližná hodnota je

$$C \doteq 1{,}343\ 713\ 374.$$

Otupená krychle vzniká z krychle, do jejíž každé stěny je umístěn čtverec, tedy je vzdálenost h_1 rovna také poloměru ρ kulové sféry vepsané do krychle, která je dle kap. 2.2:

$$\rho = \frac{a}{2}.$$

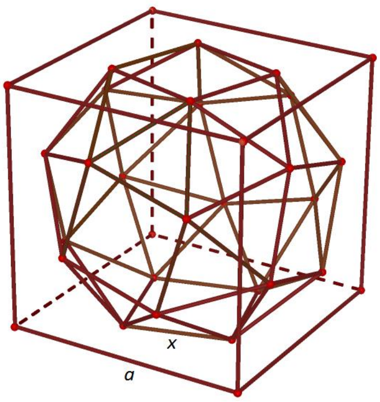
A tedy **délku hrany *x*** otupené krychle vyjádříme jako:

$$\frac{\sqrt{2C^2 - 1}}{\sqrt{2}} x = \frac{a}{2}.$$

Po úpravě získáme vztah pro **délku hrany *x***:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2(2C^2 - 1)}},$$

kde *C* je výše uvedená konstanta.



Obr. 3.62: Délka hrany x

Objem ***V*** otupené krychle je součtem objemů V_4 šesti shodných čtyřbokých jehlanů a dvaatřiceti shodných trojbokých jehlanů o objemech V_3, na které jde otupená krychle rozložit.

$$V = 6V_4 + 32V_3$$

1) **Objem V_4 jehlanu**:

K výpočtu **objemu V_4** čtyřbokého **jehlanu** potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku h_1.

Obsahem podstavy S_p je obsah čtverce o straně délky x, tedy

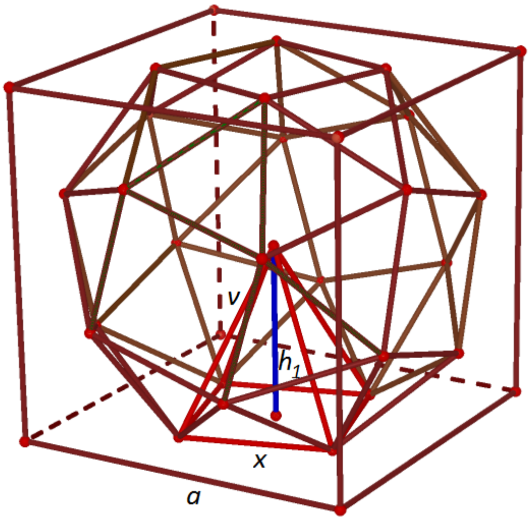
$$S_p = x^2 = \frac{a^2}{2(2C^2 - 1)}.$$

Výškou h_1 je polovina délky hrany krychle, ze které těleso vzniklo, proto:

$$h_1 = \frac{a}{2}.$$

Objem V_4 čtyřbokého **jehlanu** je

$$V_4 = \frac{1}{3}S_p h_1 = \frac{1}{3}\frac{a^2}{2(2C^2 - 1)}\frac{a}{2} = \frac{a^3}{12(2C^2 - 1)}.$$



Obr. 3.63: Výška h_1

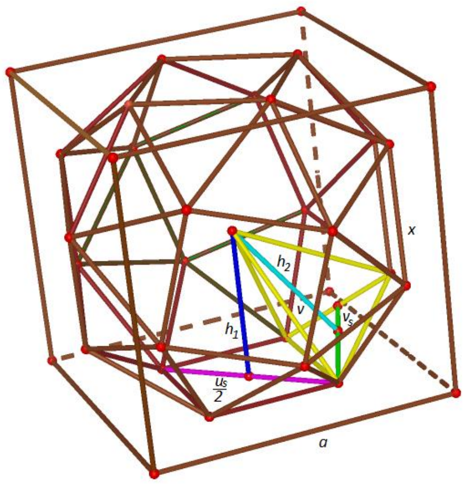
2) **Objem V_3 jehlanu**:

K výpočtu **objemu V_3 trojbokého jehlanu** nejprve spočítáme obsah jeho podstavy S_p a výšku jehlanu h_2.

Obsah podstavy S_p je obsahem rovnostranného trojúhelníku o straně délky x, tedy

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{2(2C^2 - 1)}.$$

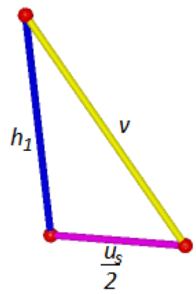
Cesta k nalezení výšky h_2 jehlanu bude delší. Nejprve z pravoúhlého trojúhelníku o délkách odvěsen $\frac{u_s}{2}$, kde u_s je úhlopříčka ve čtvercové stěně otupené krychle, a h_1 spočítáme délku v (obr. 3.65).



Obr. 3.64: Výška h_2

$$v=\sqrt{{h_1}^2+\left(\frac{u_s}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4(2C^2-1)}}=\sqrt{\frac{2C^2-1+1}{4(2C^2-1)}}a=\frac{C}{\sqrt{2(2C^2-1)}}a.$$



Obr. 3.65: Stěnová výška v

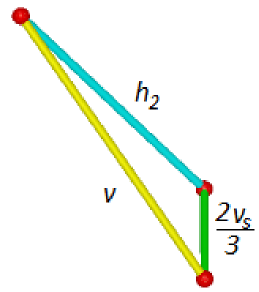
Dále vyjádříme stěnovou výšku v_s rovnostranného trojúhelníku o straně délky x, který je podstavou našeho jehlanu (obr. 3.64):

$$v_s=\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}.$$

Máme vše připravené pro výpočet výšky jehlanu h_2, kterou spočítáme z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky v a s odvěsnami délek h_2 a $\frac{2}{3}v_s$ (obr. 3.66). Výška je

$$h_2=\sqrt{v^2-\left(\frac{2}{3}v_s\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{C}{\sqrt{2(2C^2-1)}}a\right)^2-\left(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{3C^2-1}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}\right)^2}=\sqrt{\frac{3C^2-1}{3}}\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}.$$



Obr. 3.66: Výška h_2

Můžeme vypočítat objem V_3 jehlanu:

$$V_3=\frac{1}{3}S_ph_2=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{2(2C^2-1)}\sqrt{\frac{3C^2-1}{3}}\frac{a}{\sqrt{2(2C^2-1)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3C^2-1}}{12}\frac{a^3}{\left(\sqrt{2(2C^2-1)}\right)^3}.$$

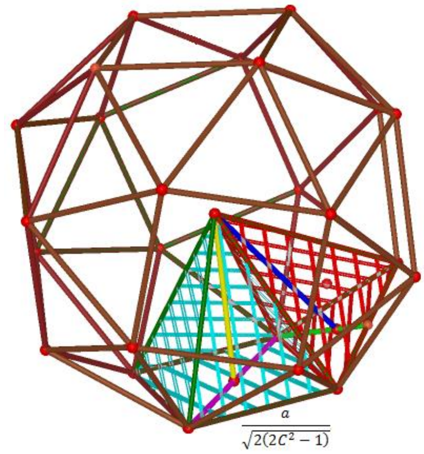
Objem *V* otupené krychle je

$$V = 6V_4 + 32V_3 =$$

$$= 6\frac{a^3}{12(2C^2-1)} + 32\frac{\sqrt{3C^2-1}}{12}\frac{a^3}{\left(\sqrt{2(2C^2-1)}\right)^3} =$$

$$= \left(\sqrt{2(2C^2-1)} + \frac{8\sqrt{3C^2-1}}{3}\right)\frac{a^3}{\left(\sqrt{2(2C^2-1)}\right)^3} =$$

$$= \frac{3\sqrt{2(2C^2-1)} + 8\sqrt{3C^2-1}}{3}\frac{a^3}{\left(\sqrt{2(2C^2-1)}\right)^3}.$$



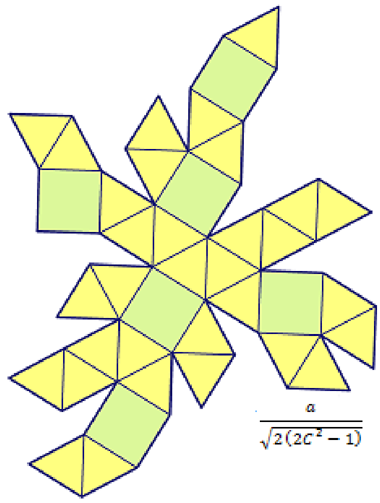
Obr. 3.67: Objem otupené krychle

Povrch *S* otupené krychle je součtem obsahů mnohoúhelníků, které tvoří její hranici, tedy šesti čtverců s obsahy S_4 a třiceti dvou rovnostranných trojúhelníků o straně stejné délky x s obsahy S_3:

$$S = 6S_4 + 32S_3$$

Obsah S_4 čtverce je obsahem podstavy čtyřbokého jehlanu:

$$S_4 = S_p = \frac{a^2}{2(2C^2-1)}.$$



Obr. 3.68: Povrch otupené krychle

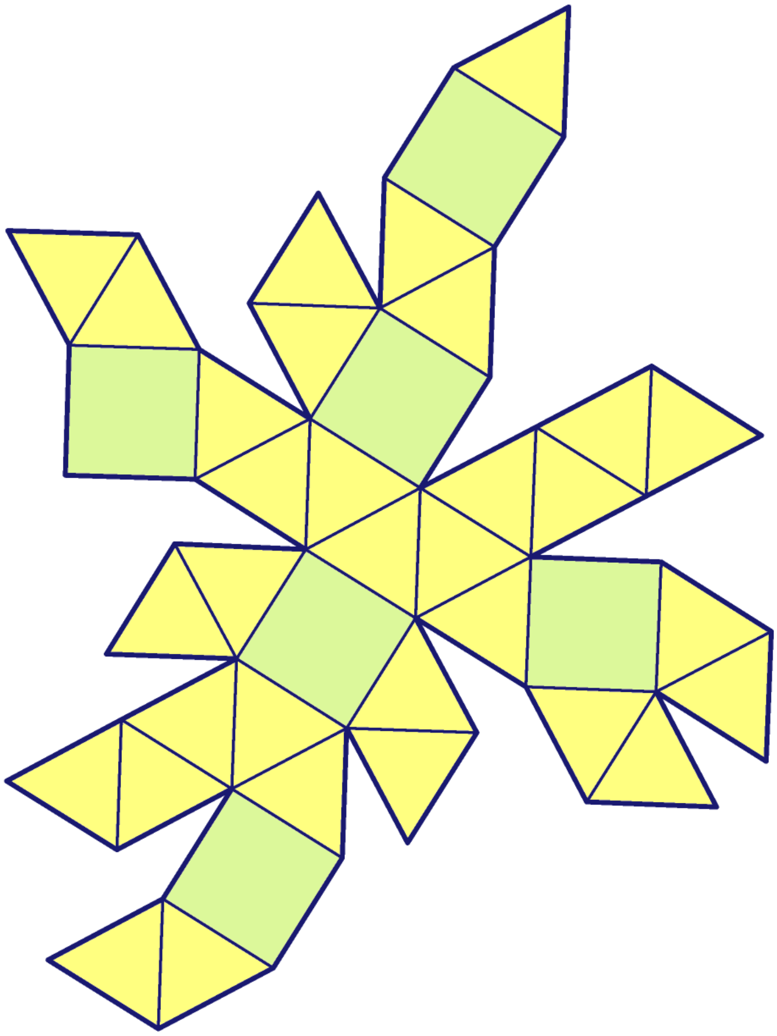
Obsah S_3 rovnostranného trojúhelníku máme již také spočítaný, je to obsah podstavy trojbokého jehlanu:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{2(2C^2-1)}.$$

Povrch *S* otupené krychle proto je

$$S = 6S_4 + 32S_3 = 6\frac{a^2}{2(2C^2-1)} + 32\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{a^2}{2(2C^2-1)} = \left(6+8\sqrt{3}\right)\frac{a^2}{2(2C^2-1)}.$$

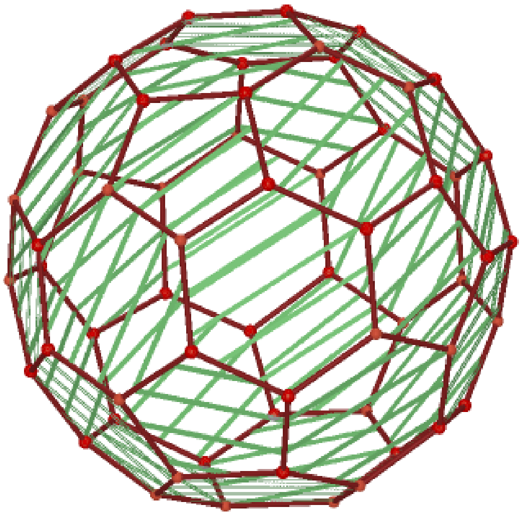
Síť otupené krychle:



Obr. 3.69: Síť otupené krychle

3.8 Osekaný dvacetistěn

Osekaný dvacetistěn	
Stěny	*pětiúhelníky*, *šestiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{a}{3}$
Počet vrcholů	*60*
Počet hran	*90*
Počet stěn	*32*
Uspořádání ve vrcholu	$(5{,}6{,}6)$
Hranové úhly	*72°*, *120°*
Objem *V*	$\frac{125+43\sqrt{5}}{108}a^3$
Povrch *S*	$\frac{10\sqrt{3}+\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{3}a^2$

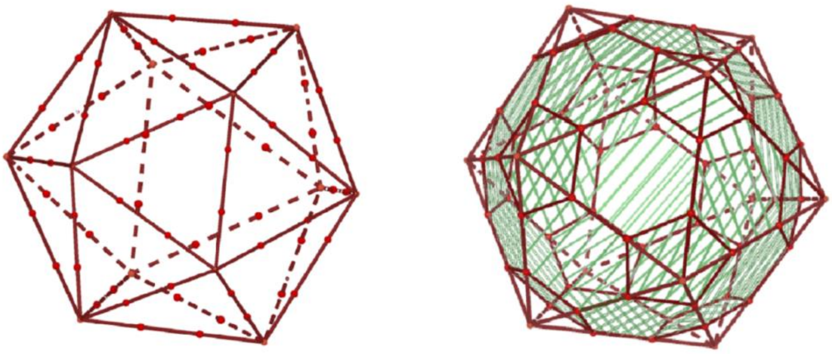


Obr. 3.70: Osekaný dvacetistěn

Osekaný dvacetistěn (angl. Truncated Icosahedron) vznikl osekáním vrcholů pravidelného dvacetistěnu a to takovým, aby z každé trojúhelníkové stěny pravidelného dvacetistěnu vznikl pravidelný šestiúhelník jí vepsaný. Povrch je složen z dvanácti shodných pravidelných pětiúhelníků a dvaceti shodných pravidelných šestiúhelníků. V každém vrcholu se po řadě stýkají jeden pravidelný pětiúhelník a dva pravidelné šestiúhelníky, tedy vrcholová posloupnost je (5,6,6).

Konstrukce

Osekaný dvacetistěn vznikl, jak plyne z názvu, osekáním dvacetistěnu. Nejprve se všechny délky hran původního dvacetistěnu rozdělí na třetiny, následné řezy povedeme vždy těmi body na hranách, které mají od stejného vrcholu vzdálenost právě jedné třetiny délky hrany. Každým takovým řezem je pravidelný pětiúhelník, který se stává stěnou osekaného dvacetistěnu.



Obr. 3.71: Vznik osekaného dvacetistěnu

Pro výpočty objemu a povrchu osekaného dvacetistěnu předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného dvacetistěnu o hraně délky *a*.

Délkou hrany *x* osekaného dvacetistěnu je třetina délky hrany původního platónského tělesa.

Tedy $$x = \frac{a}{3}.$$

Objem *V* osekaného dvacetistěnu vypočítáme pomocí objemu pravidelného dvacetistěnu $V_{dvacetistěnu}$, od kterého odečteme objemy dvanácti shodných pětibokých jehlanů V_5, které byly od pravidelného dvacetistěnu odděleny řezy.

K výpočtu objemu V_5 pětibokého jehlanu potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho tělesovou výšku v_t. Podstavou je pravidelný pětiúhelník, jeho obsah je spočítán v kapitole 2.4:

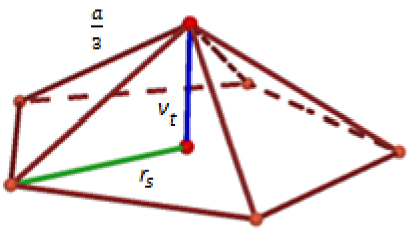
$$S_p = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}x^2,$$

kde

$$x = \frac{a}{3}.$$

Po dosazení získáme

$$S_p = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{36}a^2.$$



Obr. 3.72: Výška v_t

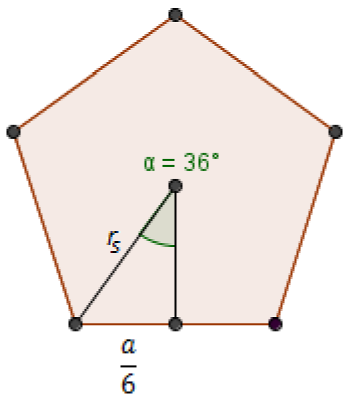
Ještě potřebujeme vypočítat výšku v_t tohoto jehlanu. Tu zjistíme pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníku na obr. 3.72.

Délku r_s vypočítáme pomocí goniometrické funkce sinus (viz obr. 3.73).

$$r_s = \frac{a}{6 \cdot \sin 36°}$$

Víme, že pro sinus 36° platí [2]:

$$\sin 36° = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$$



Obr. 3.73: Délka r_s

tedy

$$r_s = \frac{4a}{6 \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \frac{2a}{3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}.$$

Teď máme všechno potřebné pro výpočet tělesové **výšky v_t pětibokého jehlanu**:

$$v_t{}^2 = x^2 - r_s{}^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a}{3\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}\right)^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{4a^2}{9\left(10 - 2\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(10 - 2\sqrt{5}\right)a^2 - 4a^2}{9\left(10 - 2\sqrt{5}\right)}$$
$$= \frac{\left(6 - 2\sqrt{5}\right)a^2}{9\left(10 - 2\sqrt{5}\right)} = \frac{\left(3 - \sqrt{5}\right)a^2}{9\left(5 - \sqrt{5}\right)}.$$

Výška v_t je dána vztahem

$$v_t = \sqrt{\frac{\left(3 - \sqrt{5}\right)a^2}{9\left(5 - \sqrt{5}\right)}} = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{3\sqrt{5 - \sqrt{5}}}\,a.$$

Pro výpočet **objemu V_5 jehlanu** platí:

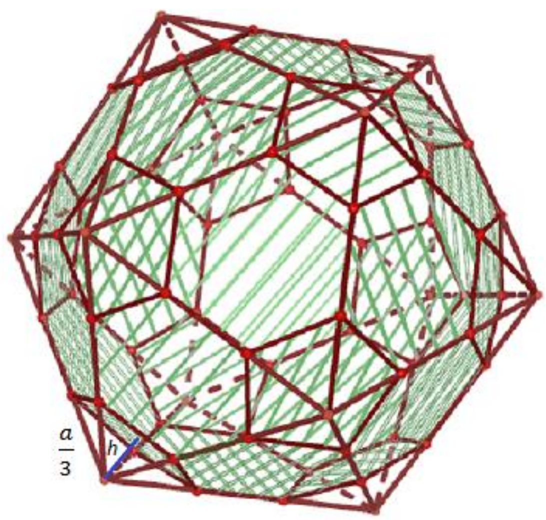
$$V_5 = \frac{1}{3} S_p v_t = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{36}a^2 \frac{\sqrt{3 - \sqrt{5}}}{3\sqrt{5 - \sqrt{5}}}a = \frac{\sqrt{\left(25 + 10\sqrt{5}\right)\left(3 - \sqrt{5}\right)}}{9 \cdot 36\sqrt{5 - \sqrt{5}}}a^3 =$$
$$= \frac{\sqrt{75 - 25\sqrt{5} + 30\sqrt{5} - 50}}{9 \cdot 36\sqrt{5 - \sqrt{5}}}a^3 = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{9 \cdot 36\sqrt{5 - \sqrt{5}}}\frac{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}a^3 =$$
$$= \frac{\sqrt{5}\left(5 + \sqrt{5}\right)}{9 \cdot 36 \cdot 2\sqrt{5}}a^3 = \frac{5 + \sqrt{5}}{648}a^3.$$

Celkový **objem V osekaného dvacetistěnu**:

$$V = V_{dvacetistěnu} - 12V_5,$$

kde $V_{dvacetistěnu}$ je, viz kapitola 2.5:

$$V_{dvacetistěnu} = \frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right)a^3.$$



Obr. 3.74: Objem osekaného dvacetistěnu

Objem V osekaného dvacetistěnu je:

$$V = \frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right)a^3 - 12\frac{5 + \sqrt{5}}{648}a^3 =$$
$$= \left(\frac{5\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12} - \frac{5 + \sqrt{5}}{54}\right)a^3 =$$
$$= \frac{45\left(3 + \sqrt{5}\right) - 2\left(5 + \sqrt{5}\right)}{108}a^3 = \frac{125 + 43\sqrt{5}}{108}a^3.$$

Povrch *S* osekaného dvacetistěnu je součtem obsahů dvanácti shodných pravidelných pětiúhelníků, každý o obsahu S_5, a dvaceti pravidelných šestiúhelníků s obsahy S_6 a se stranami délek $\frac{a}{3}$.

Tedy

$$S = 12S_5 + 20S_6.$$

Obsah S_5 pravidelného pětiúhelníku o straně délky *x* jsme již použili výše:

$$S_5 = S_p = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{36} a^2.$$

Obsah S_6 pravidelného šestiúhelníku o straně délky $\frac{a}{3}$ máme také vypočítaný u osekaného osmistěnu:

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{6} a^2.$$

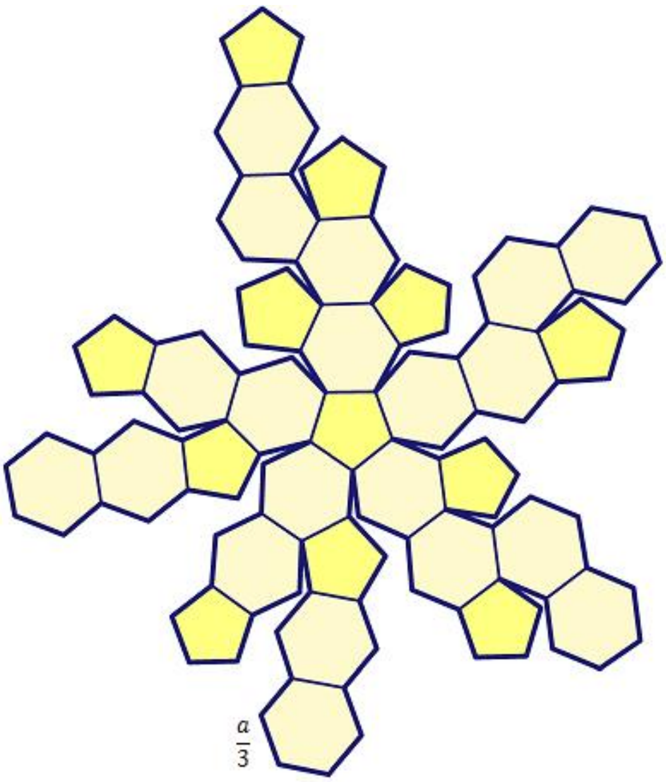
Výsledný **povrch *S* osekaného dvacetistěnu** je:

$$S = 12S_5 + 20S_6 =$$

$$= 12\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{36} a^2 + 20\frac{\sqrt{3}}{6} a^2 =$$

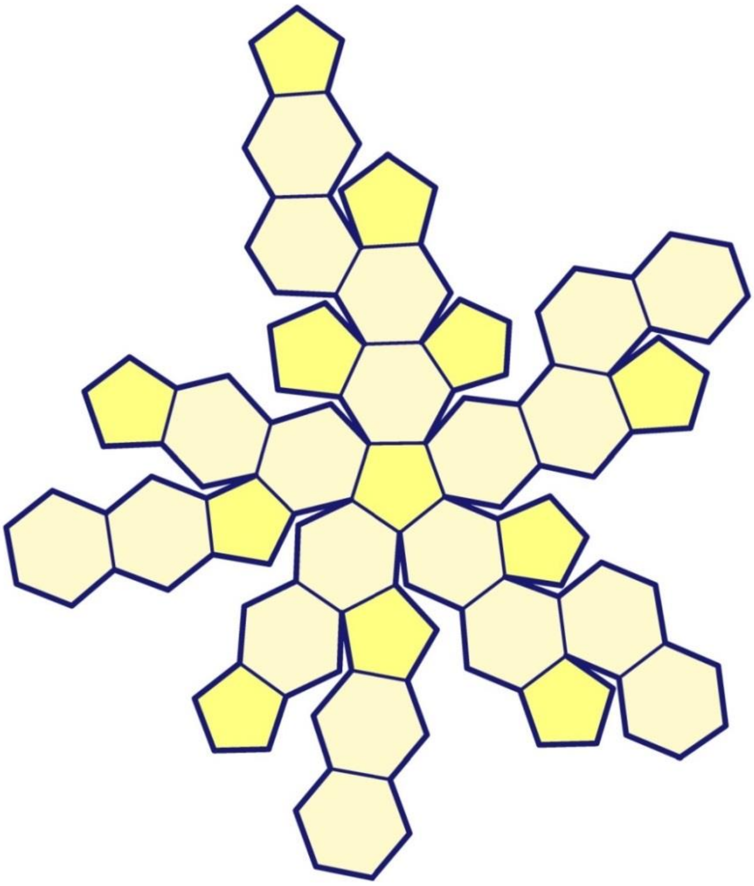
$$= \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{3} a^2 + \frac{10\sqrt{3}}{3} a^2 =$$

$$= \frac{10\sqrt{3} + \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{3} a^2.$$



Obr. 3.75: Povrch osekaného dvacetistěnu

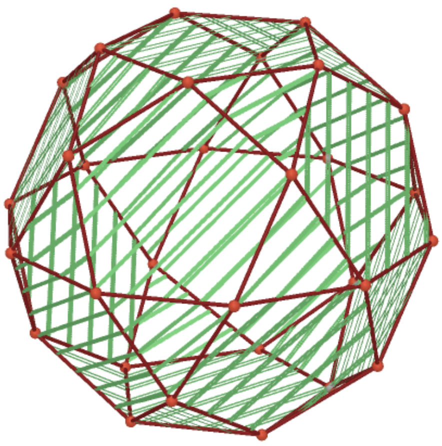
Síť osekaného dvacetistěnu:



Obr. 3.76: Síť osekaného dvacetistěnu

3.9 Ikosododekaedr

Ikosododekaedr	
Stěny	*trojúhelníky, pětiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}a$
Počet vrcholů	*30*
Počet hran	*60*
Počet stěn	*32*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,5,3,5)$
Hranové úhly	*60°, 108°*
Objem *V*	$\frac{175+79\sqrt{5}}{48}a^3$
Povrch *S*	$\frac{(3+\sqrt{5})}{8}\left(5\sqrt{3}+3\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}\right)a^2$



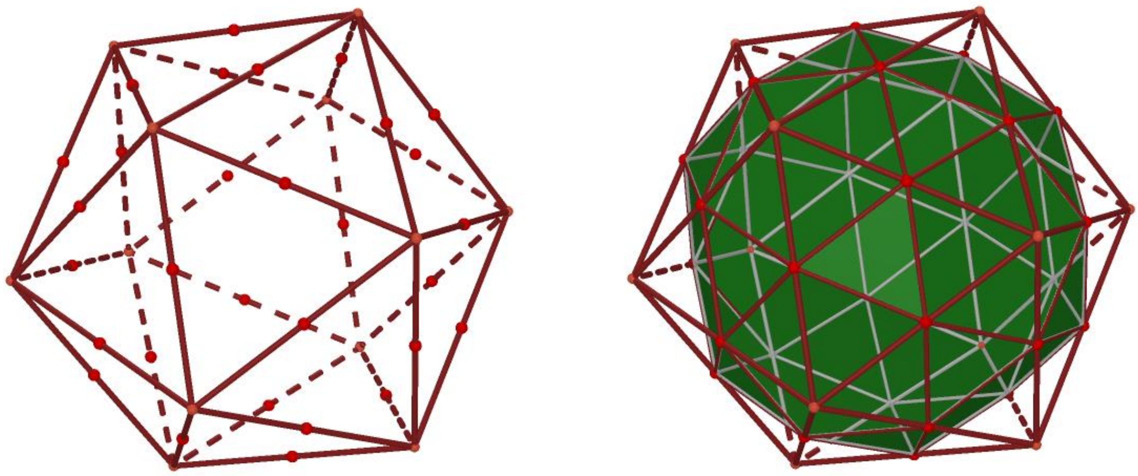
Obr. 3.77: Ikosododekaedr

Ikosododekaedr (angl. Icosidodecahedron) vznikl osekáním dvacetistěnu, nebo dvanáctistěnu. Má třicet vrcholů, šedesát hran a třicet dva stěn. Povrch ikosododekaedru tvoří dvacet shodných rovnostranných trojúhelníků a dvanáct shodných pravidelných pětiúhelníků. V každém vrcholu ikosododekaedru se po řadě stýká rovnostranný trojúhelník, pětiúhelník, dále opět rovnostranný trojúhelník, poslední je pětiúhelník o stranách stejné délky, tedy vrcholová posloupnost je (3,5,3,5).

Konstrukce

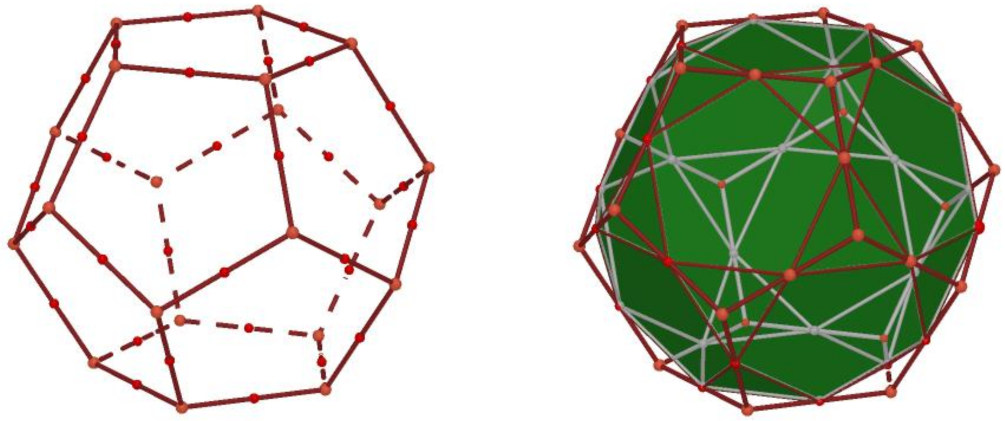
Jak již bylo zmíněno, ikosododekaedr můžeme získat vhodným osekáním buď z dvacetistěnu, nebo z dvanáctistěnu. My si zde uvedeme oba způsoby konstrukce.

1) **Vznik z dvacetistěnu:**
   Stačí, když najdeme všechny středy hran pravidelného dvacetistěnu a sousední středy spojíme. Ze stěny původní, tedy z rovnostranného trojúhelníku, získáme znovu rovnostranný trojúhelník. Odříznutím pětibokého jehlanu z každého vrcholu pravidelného dvacetistěnu získáme nové stěny ve tvaru pravidelných pětiúhelníků (obr. 3.78).



Obr. 3.78: Vznik ikosododekaedru z dvacetistěnu

2) **Vznik z dvanáctistěnu:**
   Opět najdeme středy hran pravidelného dvanáctistěnu a sousední středy spojíme. Tentokrát spojením středů sousedních hran dostaneme pravidelný pětiúhelník, který je menší než pětiúhelník výchozí. Ořezáním vrcholů pravidelného dvanáctistěnu získáme nové stěny ve tvaru rovnostranných trojúhelníků (obr. 3.79).



Obr. 3.79: Vznik ikosododekaedru z dvanáctistěnu

Pro výpočty objemu a povrchu ikosododekaedru předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného dvanáctistěnu o hraně délky *a.*

Délku hrany *x* ikosododekaedru spočítáme s pomocí obrázku 3.80.

Nejprve spočítáme délku *b*:

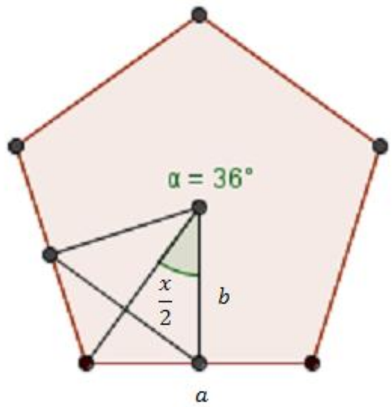
$$\operatorname{tg} 36° = \frac{\frac{a}{2}}{b},$$

$$b = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 36°}.$$

Pomocí funkce sinus a délky *b* dokážeme vyjádřit délku $\frac{x}{2}$ (obr. 3.80):

$$\sin 36° = \frac{\frac{x}{2}}{b} = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2 \operatorname{tg} 36°}} = \frac{x \operatorname{tg} 36°}{a},$$

$$x = \frac{a \sin 36°}{\operatorname{tg} 36°} = \frac{a \sin 36°}{\frac{\sin 36°}{\cos 36°}} = a \cos 36°.$$



Obr. 3.80: Délka hrany x

Víme, že pro kosinus 36 stupňů platí [2]:

$$\cos 36° = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}.$$

Tedy **délka hrany *x*** ikosododekaedru je

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{4} a\,.$$

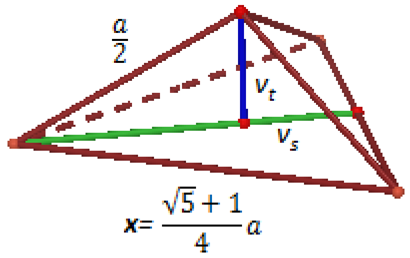
Objem *V* ikosododekaedru spočítáme jako objem $V_{dvanáctistěnu}$, od kterého odečteme objemy V_3 dvaceti shodných trojbokých jehlanů, které byly při vzniku odseknuty.

$$V = V_{dvanáctistěnu} - 20V_3$$

Objem V_3 odskelého jehlanu spočítáme za pomocí obrázku. Nejprve spočítáme stěnovou **výšku v_s** podstavy, poté budeme schopni spočítat tělesovou výšku v_t jehlanu (obr. 3.81):

$$\begin{aligned} {v_s}^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{8}a\right)^2 = \\ &= \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{16}a^2 - \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{64}a^2 = \\ &= \frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{64}a^2, \end{aligned}$$

$$v_s = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}a.$$



Obr. 3.81: Výška v_t

Pro **výšku v_t** trojbokého jehlanu:

$$\begin{aligned} {v_t}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}v_s\right)^2 &= \frac{a^2}{4} - \frac{4}{9}\cdot\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{64}a^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{48}a^2 = \\ &= \frac{12-5-2\sqrt{5}-1}{48}a^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{24}a^2, \end{aligned}$$

$$v_t = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{24}}a.$$

Ještě potřebujeme znát obsah S_p podstavy daného trojbokého jehlanu, ten spočítáme takto:

$$S_p = \frac{1}{2}v_s \cdot x = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)}{8}a\frac{\sqrt{5}+1}{4}a = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{64}a^2.$$

Objem V_3 je

$$\begin{aligned} V_3 = \frac{1}{3}S_p v_t &= \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{64}a^2\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{24}}a = \frac{\sqrt{3}\cdot 2\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{3-\sqrt{5}}}{3\cdot 64\cdot 2\cdot\sqrt{3\cdot 2}}a^3 \\ &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{384}a^3 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{192}a^3. \end{aligned}$$

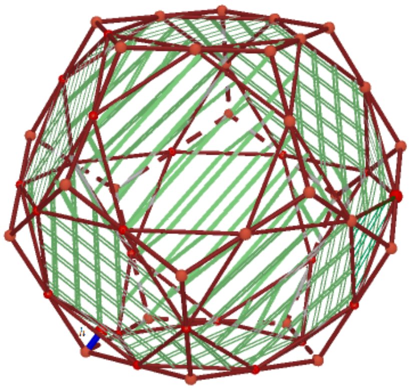
Celkový **objem *V* ikosododekaedru**, je dán vztahem

$$V = V_{dvanáctistěnu} - 20V_3,$$

kde $V_{dvanáctistěnu}$ je dle kapitoly 2.4:

$$V_{dvanáctistěnu} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3,$$

a V_3 je objem jednoho trojbokého jehlanu, který byl odseknut.



Obr. 3.82: Objem ikosododekaedru

Tedy:

$$\begin{aligned} V &= V_{dvanáctistěnu} - 20V_3 = \\ &= \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3 - 20 \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{192} a^3 = \\ &= \frac{12(15 + 7\sqrt{5}) - 5\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{48} a^3 = \\ &= \frac{12(15 + 7\sqrt{5}) - 5\sqrt{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}}{48} a^3 = \\ &= \frac{175 + 79\sqrt{5}}{48} a^3. \end{aligned}$$

Povrch *S* ikosododekaedru je součtem obsahů dvaceti rovnostranných trojúhelníků, každého o obsahu S_3, a dvanácti pravidelných pětiúhelníků, každého o obsahu S_5:

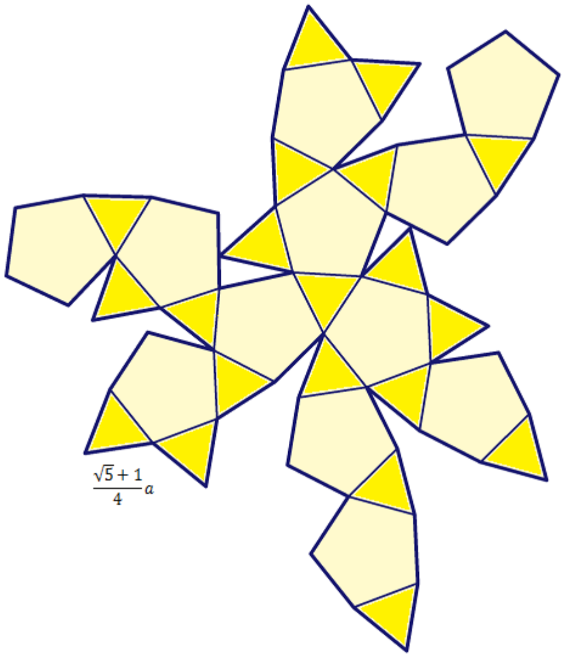
$$S = 20S_3 + 12S_5.$$

Obsah S_3 rovnostranného trojúhelníku máme spočítaný jako obsah podstavy S_p trojbokého jehlanu:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}(3 + \sqrt{5})}{32} a^2.$$

Obsah S_5 pravidelného pětiúhelníku je obsahem podstavy pětibokého jehlanu:

$$S_5 = S_p = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}(3 + \sqrt{5})}{32} a^2.$$



Obr. 3.83: Povrch ikosododekaedru

Povrch *S* ikosododekaedru je tedy

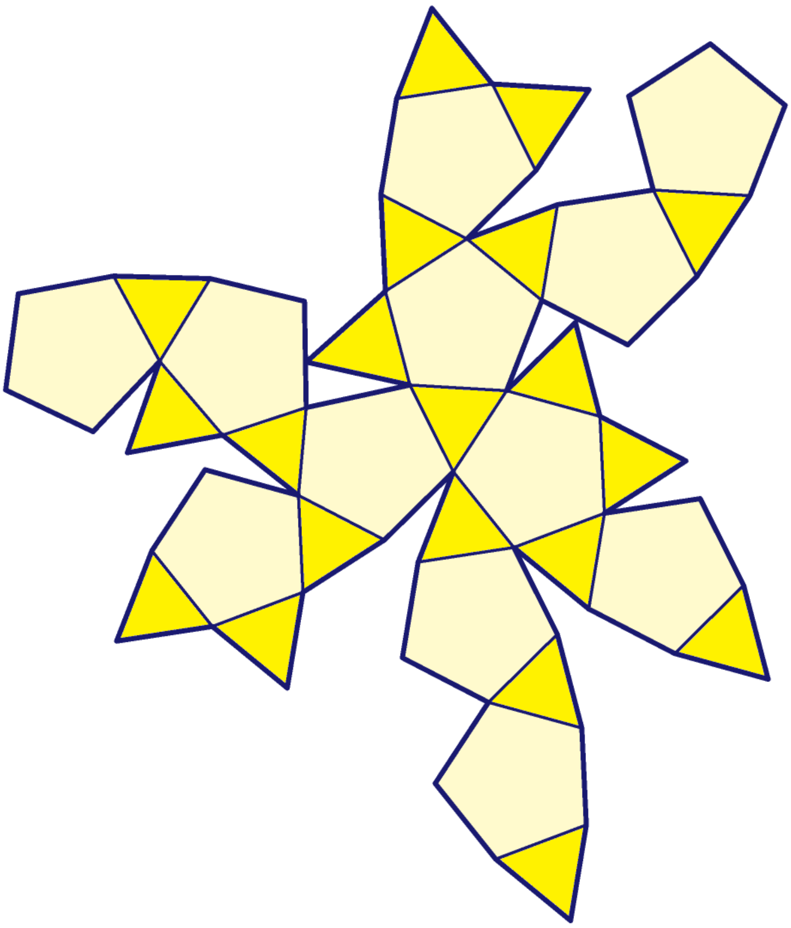
$$S = 20S_3 + 12S_5 = 20\frac{\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right)}{32}a^2 + 12\cdot\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)}{32}a^2 =$$

$$= \frac{20\cdot\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right) + 12\cdot\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)}{32}a^2 =$$

$$= \frac{5\cdot\sqrt{3}\left(3+\sqrt{5}\right) + 3\cdot\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)}{8}a^2 =$$

$$= \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)}{8}\left(5\sqrt{3} + 3\sqrt{5\left(5+2\sqrt{5}\right)}\right)a^2.$$

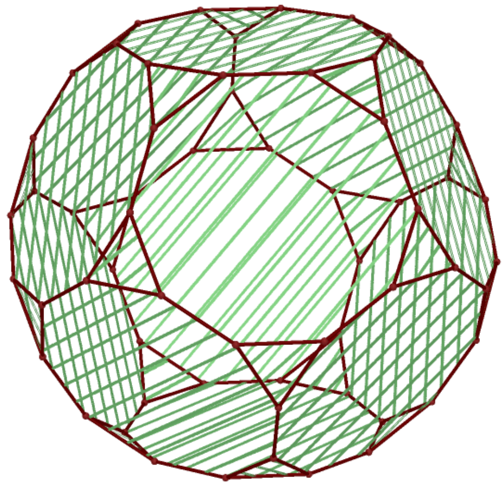
Síť ikosododekaedru:



Obr. 3.84: Síť ikosododekaedru

3.10 Osekaný dvanáctistěn

Osekaný dvanáctistěn	
Stěny	*trojúhelníky, desetiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{\sqrt{5}}{5}a$
Počet vrcholů	*60*
Počet hran	*90*
Počet stěn	*32*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,10,10)$
Hranové úhly	*60°, 144°*
Objem *V*	$\frac{235+99\sqrt{5}}{60}a^3$
Povrch *S*	$\left(\sqrt{3}+6\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)a^2$

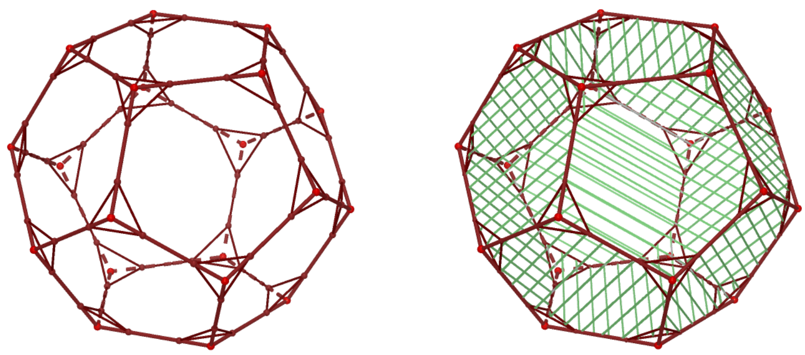


Obr. 3.85: Osekaný dvanástistěn

Osekaný dvanáctistěn (angl. Truncated dodecahedron) vznikl osekáním vrcholů pravidelného dvanástistěnu. Má šedesát vrcholů, devadesát hran a třicet dva stěn. Povrch tvoří dvacet shodných rovnostranných trojúhelníků a dvanáct shodných pravidelných destiúhelníků. V každém vrcholu se po řadě stýkají jeden rovnostranný trojúhelník a dva shodné pravidelné desetiúhelníky, vrcholová posloupnost osekaného dvanáctistěnu je $(3,10,10)$.

Konstrukce

Těleso vznikne osekáním pravidelného dvanáctistěnu a to takovým, aby z každého původního pravidelného pětiúhelníku vznikl pravidelný desetiúhelník jemu vepsaný (tj. aby každá jeho druhá strana ležela na straně pravidelného pětiúhelníku. Odsekneme tedy dvacet shodných trojbokých jehlanů (obr. 3.86).



Obr. 3.86: Vznik osekaného dvanáctistěnu

Pro výpočty objemu a povrchu osekaného dvanáctistěnu předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného dvanáctistěnu o hraně délky *a*.

Délku hrany *x* osekaného dvanáctistěnu spočítáme podle obrázku 3.87 z malého pravoúhlého trojúhelníku s přeponou $\frac{a-x}{2}$, odvěsnou $\frac{x}{2}$, přičemž velikost úhlu, který tyto strany svírají, je 36°.

$$\cos 36° = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{a-x}{2}} = \frac{x}{a-x}$$

Již víme, že

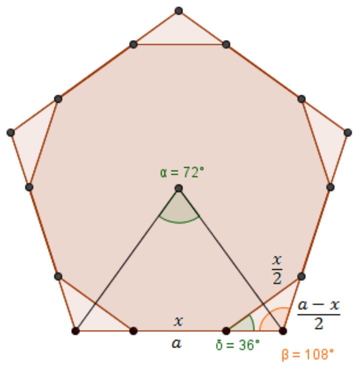
$$\cos 36° = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Teď tedy vyjádříme délku *x*:

$$x = \cos 36° \, (a-x) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}(a-x),$$

$$x\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{(1+\sqrt{5})a}{4},$$

$$x = \frac{(1+\sqrt{5})a}{4\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)} = \frac{(1+\sqrt{5})a}{5+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}a.$$



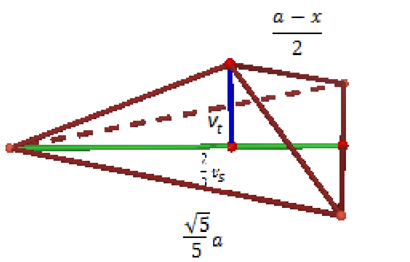
Obr. 3.87: Délka hrany x

Délka hrany *x* osekaného dvanáctistěnu je

$$x = \frac{\sqrt{5}}{5}a.$$

Objem *V* osekaného dvanáctistěnu získáme, když od objemu pravidelného dvanáctistěnu odečteme objemy dvaceti shodných trojbokých jehlanů, každého o objemu V_3.

K výpočtu **objemu** odseknutého **jehlanu V_3** potřebujeme nejprve vyjádřit délku boční hrany odseknutého jehlanu $\frac{a-x}{2}$, dále potřebujeme znát stěnovou výšku v_s podstavy odseknutého jehlanu, tedy výšku v rovnostranném trojúhelníku o straně délky *x*. Poté jsme již schopni určit tělesovou výšku v_t tohoto jehlanu. Poslední, co budeme k výpočtu objemu jehlanu V_3 potřebovat, je obsah jeho podstavy.



Obr. 3.88: Výška v_t

Vyjádříme délku boční hrany $\frac{a-x}{2}$ odseknutého jehlanu:

$$\frac{a-x}{2}=\frac{a-\frac{\sqrt{5}}{5}a}{2}=\frac{5a-\sqrt{5}a}{10}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}a.$$

Nyní spočítáme pomocí Pythagorovy stěnovou věty **stěnovou výšku *v_s*** podstavy odseknutého jehlanu (obr. 3.88):

$$v_s=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}a\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{10}a\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{5}-\frac{a^2}{20}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

Teď jsme schopni spočítat **tělesovou výšku v_t** jehlanu:

$$v_t=\sqrt{\left(\frac{a-x}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}v_s\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}a\right)^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a\right)^2}=\sqrt{\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^2a^2}{100}-\frac{a^2}{15}}=$$

$$=\sqrt{\frac{3\left(30-10\sqrt{5}\right)a^2-20a^2}{300}}=\sqrt{\frac{\left(70-30\sqrt{5}\right)a^2}{300}}=\sqrt{\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)}{30}}a.$$

Obsah podstavy S_p trojbokého jehlanu je obsahem rovnostranného trojúhelníku o straně délky x:

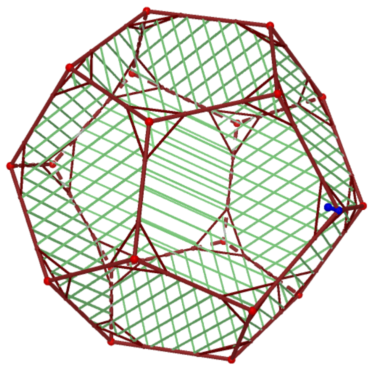
$$S_p=\frac{1}{2}xv_s=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}a=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{5}a^2=\frac{\sqrt{3}}{20}a^2.$$

Objem V_3 odseklého jehlanu je:

$$V_3=\frac{1}{3}S_pv_t=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{20}a^2\sqrt{\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)}{30}}a=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{20}\sqrt{\frac{\left(7-3\sqrt{5}\right)}{3\cdot 10}\cdot\frac{10}{10}}a^3=$$

$$=\frac{1}{3\cdot 20}\sqrt{\frac{\left(70-30\sqrt{5}\right)}{100}}a^3=\frac{1}{600}\sqrt{\left(3\sqrt{5}-5\right)^2}a^3=\frac{3\sqrt{5}-5}{600}a^3.$$

Celkový objem *V* osekaného dvanáctistěnu dostaneme, když od objemu $V_{dvanáctistěnu}$, který je spočítán v kapitole 2.4,



Obr. 3.89: Objem osekaného dvanáctistěnu

$$V_{dvanáctistěnu} = \frac{(15+7\sqrt{5})a^3}{4},$$

odečteme objem dvaceti shodných jehlanů o objemech V_3:

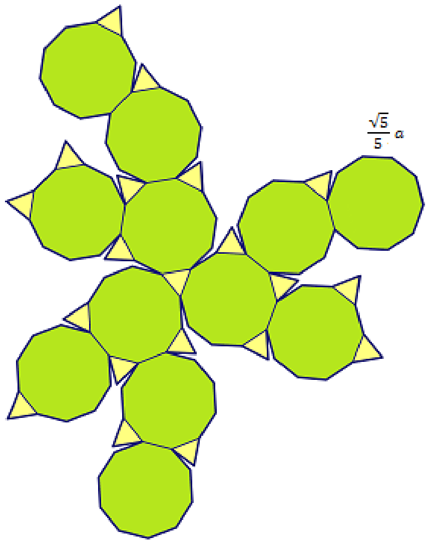
$$V = V_{dvanáctistěnu} - 20V_j = \frac{(15+7\sqrt{5})a^3}{4} - 20 \cdot \frac{3\sqrt{5}-5}{600} a^3 =$$

$$= \frac{15(15+7\sqrt{5}) - 2(3\sqrt{5}-5)}{60} a^3 =$$

$$= \frac{225 + 105\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 10}{60} a^3 =$$

$$= \frac{235 + 99\sqrt{5}}{60} a^3.$$

Povrch *S* osekaného dvanáctistěnu dostaneme, sečteme-li obsahy S_3 dvaceti rovnostranných trojúhelníků a obsahy S_{10} dvanácti pravidelných desetiúhelníku o straně délky $\frac{\sqrt{5}}{5}a$, které tvoří síť osekaného dvanáctistěnu.



Obr. 3.90: Povrch osekaného dvanáctistěnu

$$S = 20S_3 + 12S_{10}$$

Obsah *S₃* rovnostranného **trojúhelníku** je obsahem podstavy odseklého jehlanu a máme ho již vypočítaný:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{20} a^2.$$

Obsah S_{10} pravidelného **desetiúhelníku** si postupně spočítáme s pomocí obrázku 3.91:

$$\tan 72° = \frac{v}{\frac{x}{2}} = \frac{v}{\frac{\sqrt{5}}{2\cdot 5}a}.$$

Vyjádříme *v*:

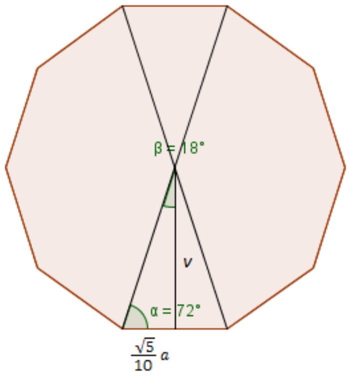
$$v = \tan 72° \frac{\sqrt{5}}{10}a.$$

Dále víme, že dle [2] je:

$$\tan 72° = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

proto

$$v = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5}}{10}a.$$



Obr. 3.91: Obsah desetiúhelníku

Obsah S_{10} pravidelného **desetiúhelníku** je součtem obsahů **S_t** deseti shodných rovnoramenných trojúhelníků:

$$S_t = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot v = \frac{\sqrt{5}}{10}a\cdot\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,\frac{\sqrt{5}}{10}a = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{20}\,a^2.$$

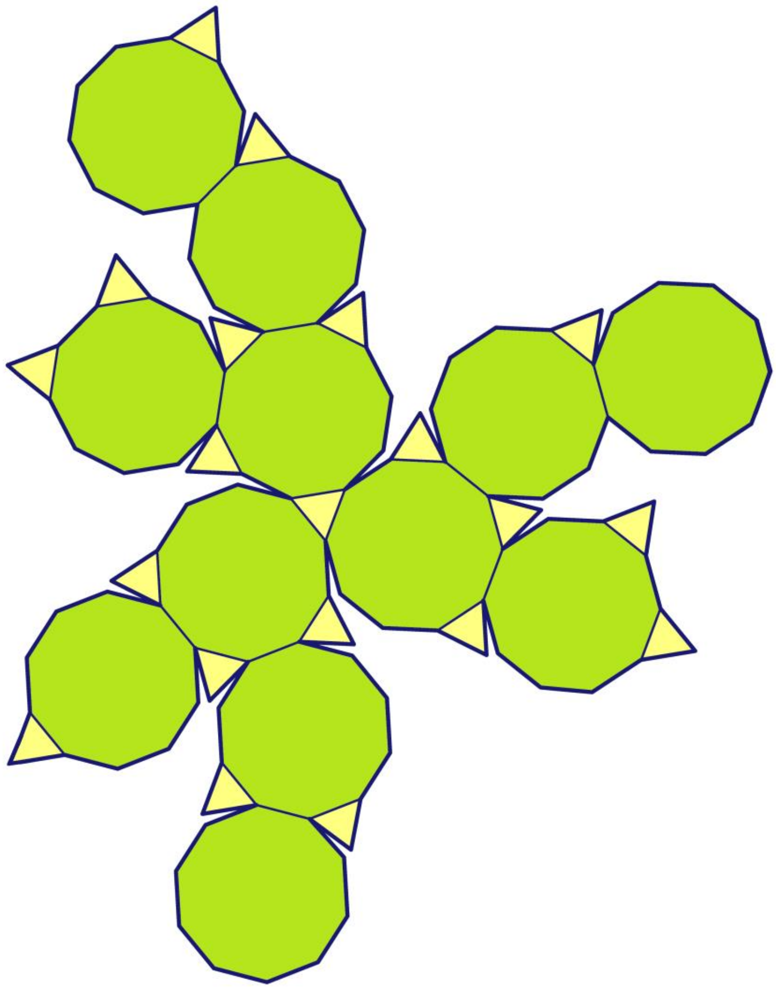
Obsah S_{10} pravidelného **desetiúhelníku**:

$$S_{10} = 10S_t = 10\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{20}a^2 = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}a^2.$$

Celkový **povrch *S* osekaného dvanáctistěnu** je

$$S = 20S_3 + 12S_{10} = 20\frac{\sqrt{3}}{20}\,a^2 + 12\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2}a^2 = \left(\sqrt{3} + 6\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\right)a^2.$$

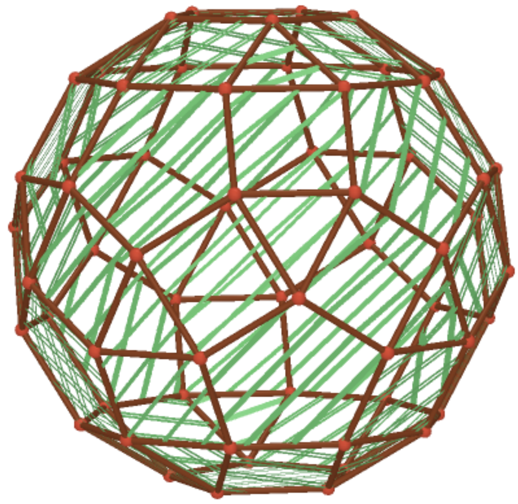
Síť osekaného dvanáctistěnu:



Obr. 3.92: Síť osekaného dvanáctistěnu

3.11 Romboikosododekaedr

Romboikosododekaedr	
Stěny	*trojúhelníky, čtverce, pětiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{1+3\sqrt{5}}{22}a$
Počet vrcholů	*60*
Počet hran	*120*
Počet stěn	*62*
Uspořádání ve vrcholu	$(3,4,5,4)$
Hranové úhly	*60°, 90°, 108°*
Objem *V*	$\frac{30+13\sqrt{5}}{33}a^3$
Povrch *S*	$\left(5\sqrt{3}+30+3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\frac{23+3\sqrt{5}}{242}a^2$

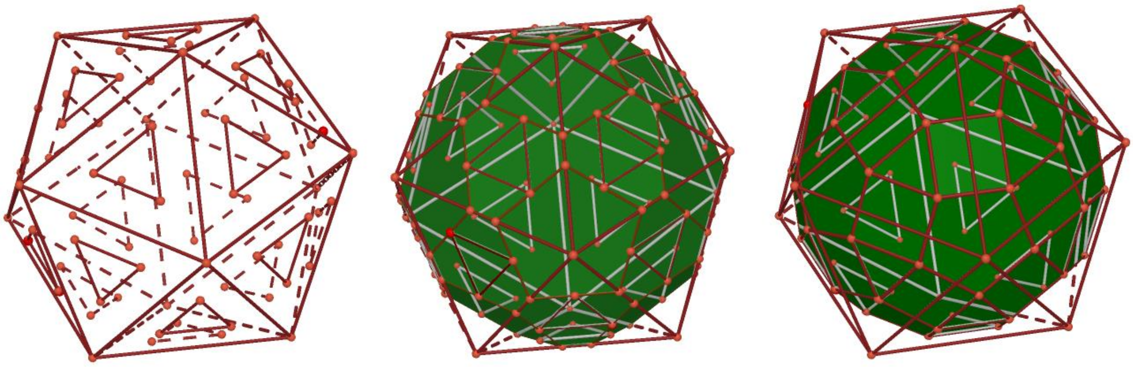


Obr. 3.93: Romboikosododekaedr

Romboikosododekaedr (angl. Rhombicosidodecahedron) vznikl osekáním hran a vrcholů pravidelného dvacetistěnu. Má šedesát vrcholů, sto dvacet hran a šedesát dva stěn. Povrch tvoří dvacet shodných rovnostranných trojúhelníků, třicet shodných čtverců a dvanáct shodných pravidelných pětiúhelníků. V každém vrcholu se po řadě stýká rovnostranný trojúhelník, čtverec, pravidelný pětiúhelník a čtverec, vrcholová posloupnost je (3,4,5,4).

Konstrukce

Jak již bylo zmíněno, romboikosododekaedr může vzniknout osekáním vrcholů a hran pravidelného dvacetistěnu. V prvním osekání osekáme vrcholy, z vrcholů tím získáme pravidelné pětiúhelníky. V osekání druhém osekáme hrany a získáme čtverce. Možný postup je uveden na obrázku 3.94.



Obr. 3.94: Vznik romboikosododekaedru

Pro výpočty objemu a povrchu romboikosododekaedu předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného dvacetistěnu o hraně délky *a*.

Nejdříve určíme **délku hrany *x* romboikosododekaedru**.

S využitím [16] víme, že tělesová výška h_1 trojbokého jehlanu, která je vzdáleností středu romboikosododekaedru a středu trojúhelníkové stěny romboikosododekaedru, je

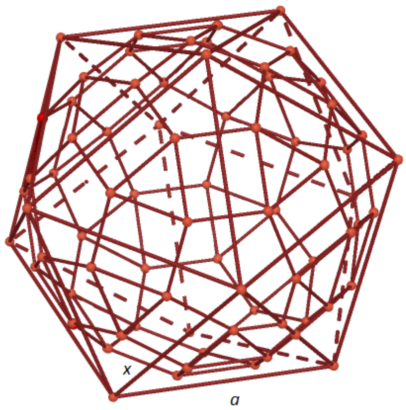
$$h_1 = \frac{(3+2\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}x.$$

Tato výška je rovna také vzdálenosti ρ (poloměru kulové sféry vepsané) dvacetistěnu, neboť střed trojúhelníkové stěny pravidelného dvacetistěnu je totožný se středem trojúhelníkové stěny romboikosododekaedru, která je dle kapitoly 2.5:

$$\rho = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}a.$$

A tedy **délku hrany *x*** romboikosododekaedru vyjádříme ze vztahů:

$$\frac{(3+2\sqrt{5})}{2\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}a.$$



Obr. 3.95: Délka hrany x

Úpravou získáme **délku hrany *x***:

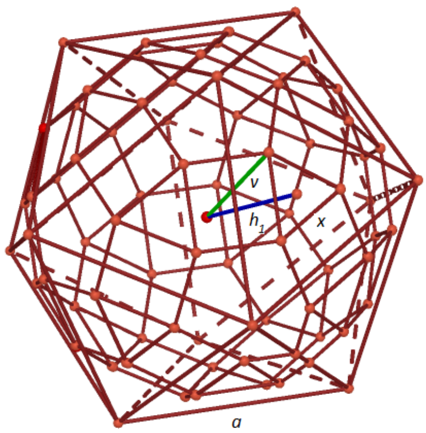
$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2(3+2\sqrt{5})}a = \frac{3+\sqrt{5}}{2(3+2\sqrt{5})}\frac{2\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}-3}a = \frac{1+3\sqrt{5}}{22}a.$$

Objem *V* romboikosododekaedru je součtem objemů dílčích jehlanů, které romboikosododekaedr tvoří. Tedy objemů dvaceti trojbokých jehlanů o objemech V_3, třiceti jehlanů, jejichž podstavou je čtverec, o objemech V_4 a dvanácti pětibokých jehlanů o objemech V_5.

1) **Objem V_3 jehlanu**:

Pro výpočet objemu trojbokého jehlanu spočítáme obsah jeho podstavy S_p, tedy obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky x.

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2(3+2\sqrt{5})}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{22}\right)^2 a^2.$$



Obr. 3.96: Výška h_1

Výška h_1 trojbokého jehlanu je tedy:

$$h_1 = \frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{3}} x = \frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{3}} \frac{1+3\sqrt{5}}{22} a.$$

A tedy objem V_3 jehlanu, jehož podstavou je rovnostranný trojúhelník, je

$$V_3 = \frac{1}{3} S_p h_1 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{22}\right)^2 a^2 \frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{3}} \frac{1+3\sqrt{5}}{22} a =$$

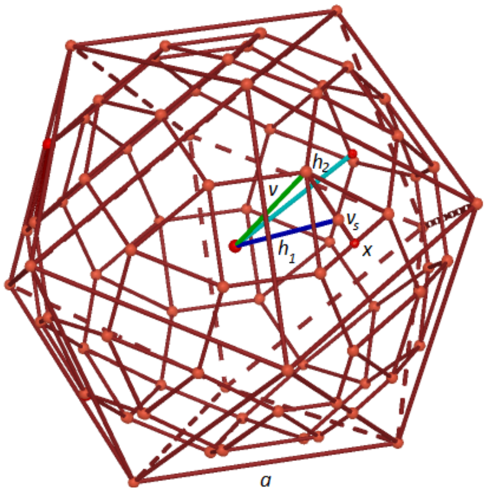
$$= \frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{24} \frac{\left(1+3\sqrt{5}\right)^3}{22^3} a^3.$$

2) **Objem V_4 jehlanu**:

Opět nejprve spočítáme obsah podstavy S_p, tedy obsah čtverce o straně délky x:

$$S_p = x^2 = \frac{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}{22^2} a^2.$$

K výpočtu výšky jehlanu h_2 nejprve spočítáme s pomocí Pythagorovy věty délku v z trojúhelníku o stranách h_1, $\frac{2}{3} v_s$ a v (obr. 3.97), kde



Obr. 3.97: Výška h_2

$$v_s = \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1+3\sqrt{5}}{22} a = \frac{\sqrt{3}\left(1+3\sqrt{5}\right)}{44} a.$$

Tedy

$$v^2 = {h_1}^2 + \left(\frac{2}{3} v_s\right)^2 = \left(\frac{\left(3+2\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{3}} \frac{1+3\sqrt{5}}{22} a\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}\left(1+3\sqrt{5}\right)}{44} a\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{11\left(3+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{3} \cdot 22}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1+3\sqrt{5}}{22\sqrt{3}}\right)^2 a^2 = \left(\frac{14+6\sqrt{5}}{16 \cdot 3} + \frac{46+6\sqrt{5}}{484 \cdot 3}\right) a^2 =$$

$$= \left(\frac{2\left(7+3\sqrt{5}\right)}{16 \cdot 3} + \frac{2\left(23+3\sqrt{5}\right)}{484 \cdot 3}\right) a^2 = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{24} + \frac{23+3\sqrt{5}}{726}\right) a^2 =$$

$$= \frac{121\left(7+3\sqrt{5}\right) + 4\left(23+3\sqrt{5}\right)}{2\,904} a^2 = \frac{847+363\sqrt{5}+92+12\sqrt{5}}{2\,904} a^2 =$$

$$= \frac{939+375\sqrt{5}}{2\,904} a^2 = \frac{313+125\sqrt{5}}{968} a^2,$$

po odmocnění

$$v = \sqrt{\frac{313 + 125\sqrt{5}}{968}}\,a\,.$$

Výšku *h₂* čtyřbokého jehlanu spočítáme opět užitím Pythagorovy věty z trojúhelníku s přeponou *v* a odvěsnami h_2 a $\frac{u_s}{2}$ (obr. 3.97). Tedy

$${h_2}^2 = v^2 - \left(\frac{u_s}{2}\right)^2,$$

kde $\frac{u_s}{2}$ je polovina uhlopříčky čtverce o straně délky *x*:

$$\frac{u_s}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1 + 3\sqrt{5}}{22}a = \frac{\sqrt{2}\left(1 + 3\sqrt{5}\right)}{44}a.$$

Proto

$${h_2}^2 = \left(\sqrt{\frac{313 + 125\sqrt{5}}{968}}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}\left(1 + 3\sqrt{5}\right)}{44}a\right)^2 = \frac{313 + 125\sqrt{5}}{968}a^2 - \frac{23 + 3\sqrt{5}}{484}a^2 =$$

$$= \frac{313 + 125\sqrt{5} - 46 - 6\sqrt{5}}{968}a^2 = \frac{267 + 119\sqrt{5}}{968}a^2.$$

Po odmocnění:

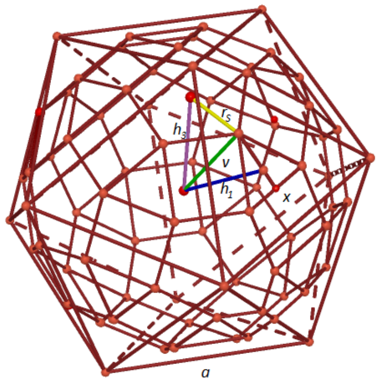
$$h_2 = \sqrt{\frac{267 + 119\sqrt{5}}{968}a^2} = \frac{\sqrt{\frac{\left(17 + 7\sqrt{5}\right)^2}{2}}}{\sqrt{968}}a = \frac{17 + 7\sqrt{5}}{44}a.$$

Objem V_4 jehlanu, jehož podstavou je čtverec, je

$$V_4 = \frac{1}{3}S_p h_2 = \frac{1}{3}\frac{\left(1 + 3\sqrt{5}\right)^2}{22^2}a^2\frac{17 + 7\sqrt{5}}{44}a = \frac{2\left(23 + 3\sqrt{5}\right)\left(17 + 7\sqrt{5}\right)}{63\,888}a^3 =$$

$$= \frac{2 \cdot 4\left(124 + 53\sqrt{5}\right)}{63\,888}a^3 = \frac{124 + 53\sqrt{5}}{7\,986}a^3.$$

3) **Objem V_5 jehlanu**:



Obr. 3.98: Výška h_3

Dle kapitoly 2.4 je obsah pravidelného pětiúhelníku, který je podstavou pětibokého jehlanu:

$$S_p = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{22}a\right)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{23+3\sqrt{5}}{242}a^2.$$

K výpočtu **výšky h_3** jehlanu musíme nejprve určit délku r_s, která je poloměrem kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku. Ta je z kapitoly 2.4:

$$r_s = \frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}x =$$

$$= \frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\cdot\frac{1+3\sqrt{5}}{22}a.$$

Výšku h_3 určíme pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou v a odvěsnami r_s a h_3 (obr. 3.98), proto:

$$h_3{}^2 = v^2 - r_s{}^2 =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{313+125\sqrt{5}}{968}}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{10\left(5+\sqrt{5}\right)}}{10}\cdot\frac{1+3\sqrt{5}}{22}a\right)^2 =$$

$$= \frac{313+125\sqrt{5}}{968}a^2 - \frac{\left(5+\sqrt{5}\right)}{10}\cdot\frac{23+3\sqrt{5}}{242}a^2 =$$

$$= \frac{5\left(313+125\sqrt{5}\right)-2\left(130+38\sqrt{5}\right)}{4\,840}a^2 = \frac{1\,305+549\sqrt{5}}{4\,840}a^2.$$

Výška h_3 je tedy:

$$h_3 = \sqrt{\frac{1\,305+549\sqrt{5}}{4\,840}}a.$$

Nyní můžeme spočítat objem V_5 pětibokého jehlanu:

$$V_5 = \frac{1}{3}S_p h_3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\cdot\frac{23+3\sqrt{5}}{242}a^2\sqrt{\frac{1\,305+549\sqrt{5}}{4\,840}}a =$$

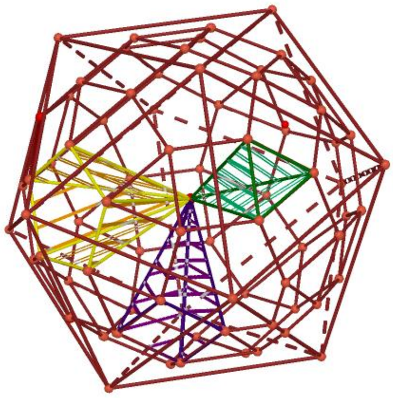
$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{23+3\sqrt{5}}{242}\sqrt{\frac{\left(25+10\sqrt{5}\right)\left(1\,305+549\sqrt{5}\right)}{4\,840}}a^3 =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{23 + 3\sqrt{5}}{242} \sqrt{\frac{225\left(267 + 119\sqrt{5}\right)}{4\,840}}\, a^3 = \frac{1}{12} \cdot \frac{23 + 3\sqrt{5}}{242} \sqrt{\frac{45\left(2670 + 1190\sqrt{5}\right)}{968 \cdot 10}}\, a^3 =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{23 + 3\sqrt{5}}{242} \sqrt{\frac{9\left(35 + 17\sqrt{5}\right)^2}{968 \cdot 2}}\, a^3 = \frac{3}{12} \cdot \frac{23 + 3\sqrt{5}}{242} \cdot \frac{35 + 17\sqrt{5}}{\sqrt{968 \cdot 2}}\, a^3 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{23 + 3\sqrt{5}}{242} \cdot \frac{35 + 17\sqrt{5}}{44}\, a^3 = \frac{1060 + 496\sqrt{5}}{42\,592}\, a^3 = \frac{265 + 124\sqrt{5}}{10\,648}\, a^3.$$

Máme spočítány objemy všech dílčích jehlanů, můžeme vypočítat **objem *V* romboikososdodekaedru**:



Obr. 3.99: Objem romboikosododekaedru

$$V = 20V_3 + 30V_4 + 12V_5 =$$

$$= 20\,\frac{\left(3 + 2\sqrt{5}\right)}{24} \frac{\left(1 + 3\sqrt{5}\right)^3}{22^3}\, a^3 + 30\,\frac{124 + 53\sqrt{5}}{7\,986}\, a^3 + 12\,\frac{265 + 124\sqrt{5}}{10\,648}\, a^3 =$$

$$= 5\,\frac{\left(3 + 2\sqrt{5}\right)}{6} \frac{8\left(17 + 18\sqrt{5}\right)}{22^3}\, a^3 + 5\,\frac{124 + 53\sqrt{5}}{1\,331}\, a^3 + 3\,\frac{265 + 124\sqrt{5}}{2\,662}\, a^3 =$$

$$= \left(5\,\frac{21 + 8\sqrt{5}}{726} + 5\,\frac{124 + 53\sqrt{5}}{1\,331} + 3\,\frac{265 + 124\sqrt{5}}{2\,662}\right) a^3 =$$

$$= \frac{1\,155 + 440\sqrt{5} + 3\,720 + 1\,590\sqrt{5} + 2\,385 + 1\,116\sqrt{5}}{7\,986}\, a^3 =$$

$$= \frac{30 + 13\sqrt{5}}{33}\, a^3.$$

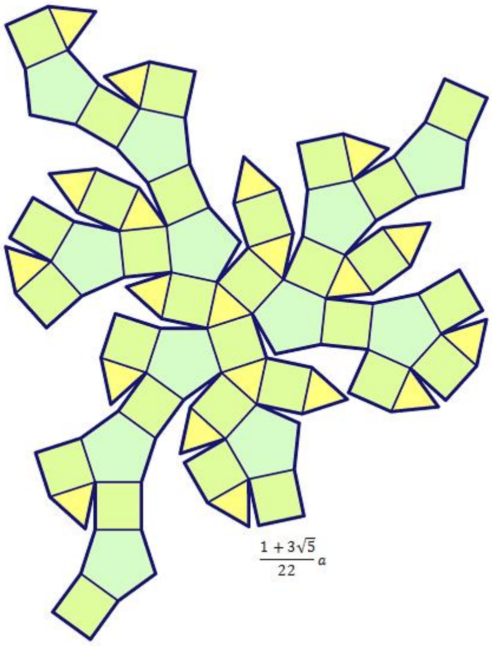
Povrch *S* romboikosododekaedru je součtem obsahů dvaceti rovnostranných trojúhelníků, z nichž má každý obsah S_3, třiceti čtverců, každý má obsah S_4, a dvanácti pětiúhelníků o obsazích S_5.

Obsah S_3 rovnostranného trojúhelníku je spočítán výše, je to obsah podstavy S_p trojbokého jehlanu:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{22}\right)^2 a^2.$$

Obsah S_4 čtverce je obsahem podstavy čtyřbokého jehlanu spočítaného výše:

$$S_4 = S_p = \frac{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}{22^2} a^2.$$



Obr. 3.100: Povrch romboikosododdekaedru

Obsah S_5 pětiúhelníku je také spočítaný výše. Je to obsah podstavy pětibokého jehlanu:

$$S_5 = S_p = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{23+3\sqrt{5}}{242} a^2.$$

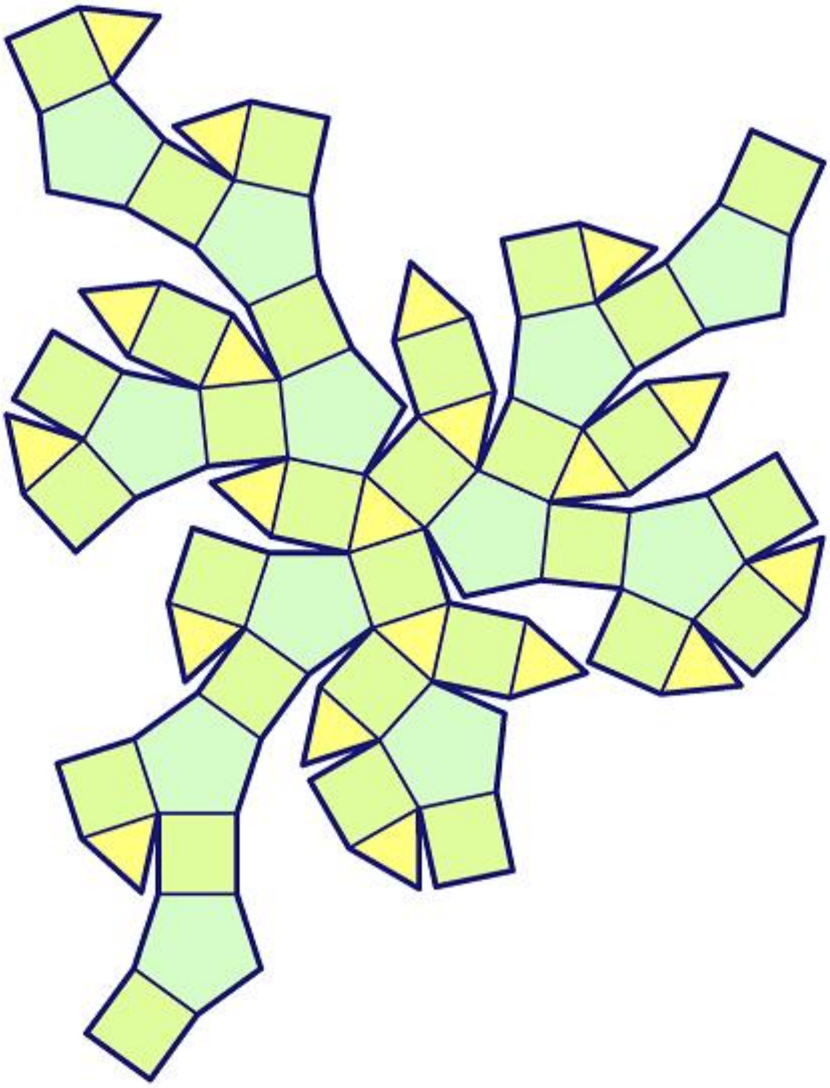
Povrch S romboikosododekaedru je:

$$S = 20S_3 + 30S_4 + 12S_5 =$$

$$= 20\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{22}\right)^2 a^2 + 30\frac{\left(1+3\sqrt{5}\right)^2}{22^2} a^2 + 12\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{23+3\sqrt{5}}{242} a^2 =$$

$$= \left(5\sqrt{3} + 30 + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\frac{23+3\sqrt{5}}{242} a^2.$$

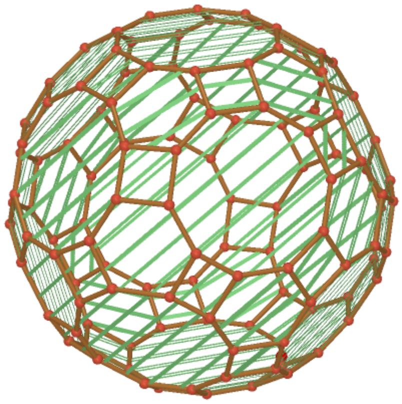
Síť romboikosododekaedru:



Obr. 3.101: Síť romboikosododekaedru

3.12 Velký romboikosododekaedr

Velký romboikosododekaedr	
Stěny	*čtverce, šestiúhelníky, desetiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{1+\sqrt{5}}{10}a$
Počet vrcholů	*120*
Počet hran	*180*
Počet stěn	*62*
Uspořádání ve vrcholu	$(4,6,10)$
Hranové úhly	*90°, 120°, 144°*
Objem *V*	$\frac{88+39\sqrt{5}}{25}a^3$
Povrch *S*	$\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+1+\sqrt{3}\right)\frac{9+3\sqrt{5}}{5}a^2$

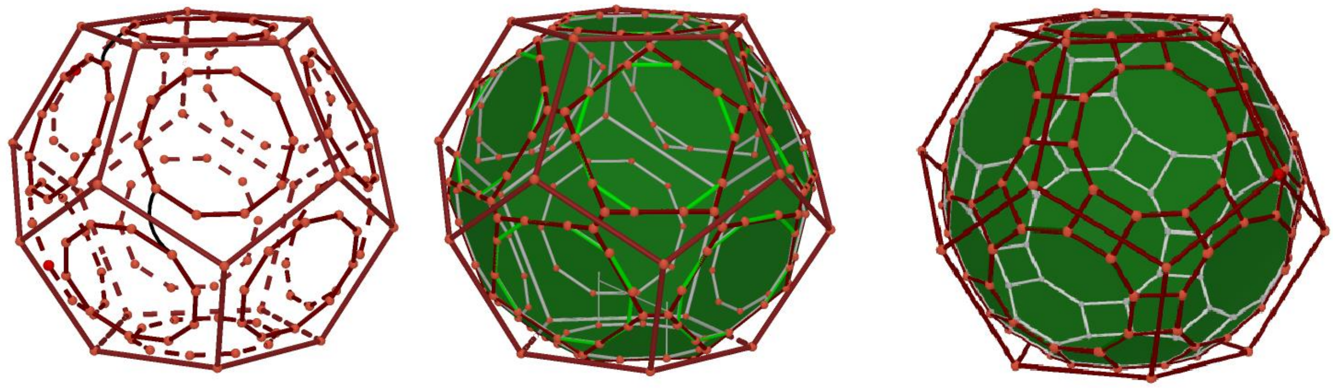


Obr. 3.102: Velký rombokuboktaedr

Velký romboikosododekaedr (angl. Great Rhombicosidodecahedron) vznikl dvojím osekáním pravidelného dvanáctistěnu tak, aby z pětiúhelníkové stěny dvanáctistěnu vznikl desetiúhelník. Nejdříve se osekají vrcholy, poté hrany. Povrch velkého romboikosododekaedru tvoří třicet shodných čtverců, dvacet shodných pravidelných šestiúhelníků a dvanáct shodných pravidelných desetiúhelníků. V každém vrcholu se po řadě stýká čtverec, pravidelný šestiúhelník a pravidelný desetiúhelník, tedy vrcholová posloupnost je $(4,6,10)$.

Konstrukce

Těleso získáme dvojím osekáním dvanáctistěnu. Do každé stěny pravidelného dvanáctistěnu vepíšeme pravidelný desetiúhelník. Nejprve osekáme vrcholy, tím získáme pravidelné šestiúhelníky, poté osekáme hrany a získáme čtverce. Možný postup je uveden na obrázku 3.103.



Obr. 3.103: Vznik velkého romboikosododekaedru

Pro výpočty objemu a povrchu velkého romboikosododekaedru předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného dvanáctistěnu o hraně délky *a.*

Nejdříve obdobně jako u romboikosododekaedru určíme **délku hrany *x* velkého romboikosododekaedru**.

Dle [17] je vzdálenost h_1 středu romboikosododekaedru a středu jeho stěny ve tvaru pravidelného desetiúhelníku (tj. výška jehlanu h_1 desetibokého jehlanu, viz obr. 3.108).

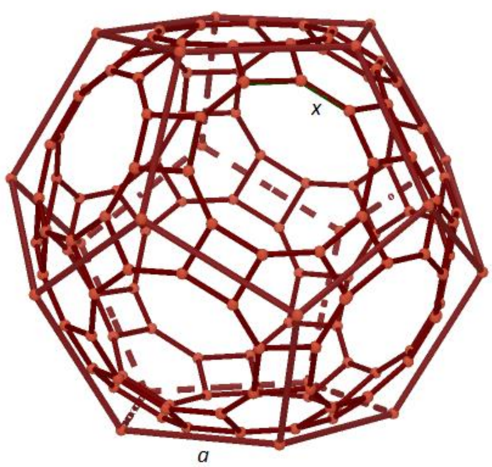
$$h_1 = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2} x.$$

A protože těleso vzniklo z pravidelného dvanáctistěnu, do jehož každé stěny byl vepsán pravidelný desetiúhelník, je tato výška rovna poloměru ρ kulové sféry vepsané pravidelnému dvanáctistěnu, která je dle kapitoly 2.4:

$$\rho = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20} a.$$

A tedy **délku hrany *x*** velkého romboikosododekaedru vyjádříme jako:

$$\frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2} x = \frac{\sqrt{10(25 + 11\sqrt{5})}}{20} a.$$



Obr. 3.104: Délka hrany x

Po úpravě získáme **délku hrany *x***:

$$x = \frac{\sqrt{25 + 11\sqrt{5}}}{\sqrt{10(25 + 10\sqrt{5})}} a = \frac{\sqrt{25 + 11\sqrt{5}}}{\sqrt{10(25 + 10\sqrt{5})}} \frac{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}}{\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}} a =$$

$$= \sqrt{\frac{75 + 25\sqrt{5}}{1250}} a = \sqrt{\frac{25\left(6 + 2\sqrt{5}\right)}{1250 \cdot 2}} a = \sqrt{\frac{\left(1 + \sqrt{5}\right)^2}{100}} a = \frac{1 + \sqrt{5}}{10} a.$$

Objem *V* velkého romboikosododekaedru je součtem objemů V_{10} dvanácti pravidelných desetibokých jehlanů, objemů V_4 třiceti čtyřbokých jehlanů a objemů V_6 dvaceti šestibokých jehlanů.

1) **Objem V_{10} jehlanu**:

Pro výpočet objemu $\mathbf{V_{10}}$ desetibokého jehlanu spočítáme nejprve obsah jeho podstavy S_p, tedy obsah pravidelného desetiúhelníku:

Nejprve určíme délku *u* (obr 3.105):

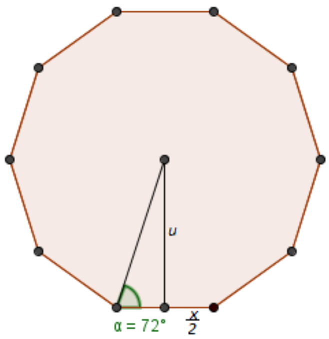
$$u = \frac{x}{2} \tan 72°$$

Již víme [2], že

$$\tan 72° = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

tedy

$$u = \frac{x}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$



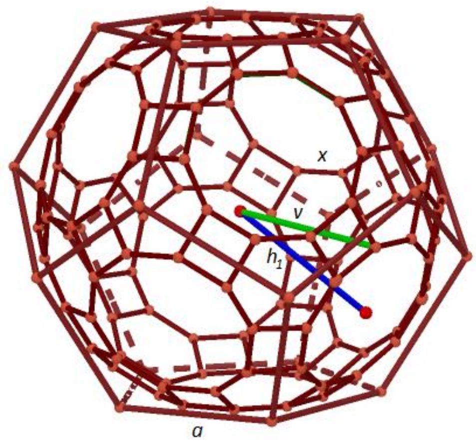
Obr. 3.105: Délka u

Z obrázku 3.105 jde vidět, že obsah desetiúhelníku S_p je součtem dvaceti pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách délek $\frac{x}{2}$ a *u*. Proto:

$$S_p = \frac{20}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot u = 10 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} x^2 =$$
$$= \frac{5}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2.$$

Výška h_1 je tedy:

$$h_1 = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2} x = \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{10} a.$$



Obr. 3.106: Výška h_1

A tedy objem V_{10} desetibokého jehlanu je

$$V_{10} = \frac{1}{3} S_p h_1 = \frac{1}{3}\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2 \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{10} a =$$

$$= \frac{5}{12}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\sqrt{25+10\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \frac{5}{12}\sqrt{125+50\sqrt{5}+50\sqrt{5}+100}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{5}{12}\sqrt{225+100\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \frac{5}{12}\sqrt{25(9+4\sqrt{5})}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{25}{12}(2+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3.$$

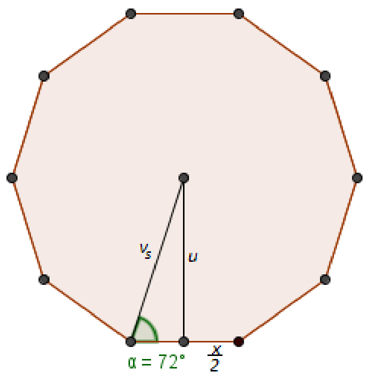
2) **Objem *V₄* jehlanu**:

Opět nejprve zjistíme obsah podstavy S_p, tedy obsah čtverce o straně délky x.

$$S_p = x^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2.$$

K výpočtu výšky jehlanu h_2 potřebujeme nejprve zjistit délku v_s (obr. 3.107), která je poloměrem kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku, a délku v.

$$v_s = \frac{x}{2\cos 72°} = \frac{x}{2\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{2x}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(\sqrt{5}-1)10} a$$



Obr. 3.107: Délka v_s

Pomocí Pythagorovy věty umíme dopočítat délku v (obr. 3.108) :

$$v^2 = {h_1}^2 + {v_s}^2 = \left(\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{2x}{\sqrt{5}-1}\right)^2 = \frac{25+10\sqrt{5}}{4}x^2 + \frac{4}{6-2\sqrt{5}}x^2 =$$

$$= \frac{(3-\sqrt{5})(25+10\sqrt{5})+8}{4(3-\sqrt{5})}x^2 = \frac{(3-\sqrt{5})(25+10\sqrt{5})+8}{4(3-\sqrt{5})}x^2 =$$

$$= \frac{75+30\sqrt{5}-25\sqrt{5}-50+8}{4(3-\sqrt{5})}x^2 = \frac{33+5\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}x^2$$

Po odmocnění získáme délku *v*:

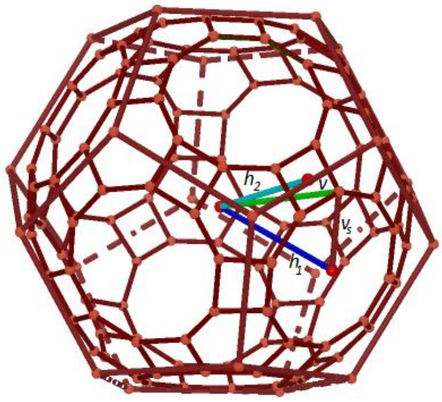
$$v = \sqrt{\frac{33 + 5\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}}\,x = \sqrt{\frac{33 + 5\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}}\,\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\,a.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou *v* a odvěsnami h_2 a $\frac{u_s}{2}$, což je polovina úhlopříčky čverce,

$$\frac{u_s}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

můžeme vypočítat výšku h_2:

$$\begin{aligned} {h_2}^2 = v^2 - \left(\frac{u_s}{2}\right)^2 &= \frac{33 + 5\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}x^2 - \frac{1}{2}x^2 = \\ &= \frac{33 + 5\sqrt{5} - 2\left(3 - \sqrt{5}\right)}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}x^2 = \\ &= \frac{27 + 7\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}x^2. \end{aligned}$$



Obr. 3.108: Výška h_2

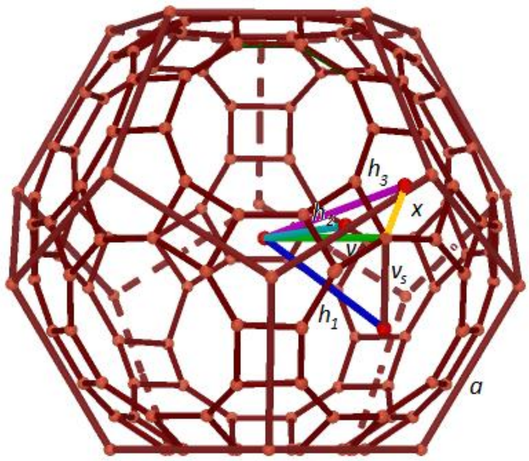
Výška h_2 je tedy:

$$h_2 = \sqrt{\frac{27 + 7\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}x^2} = \sqrt{\frac{27 + 7\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}}\,\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\,a.$$

Objem V_4 jehlanu, jehož podstavou je čtverec, je

$$\begin{aligned} V_4 = \frac{1}{3}S_p h_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2 \sqrt{\frac{27 + 7\sqrt{5}}{4\left(3 - \sqrt{5}\right)}}\,\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\,a = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{27 + 7\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \\ = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\frac{54 + 14\sqrt{5}}{2}}{\frac{6 - 2\sqrt{5}}{2}}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \\ = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{\left(7 + \sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{5} - 1\right)^2}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{1}{6}\cdot\frac{7 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}\cdot\frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \\ = \frac{1}{6}\cdot\frac{4\left(3 + 2\sqrt{5}\right)}{4}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{3 + 2\sqrt{5}}{6}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3. \end{aligned}$$

3) **Objem V_6 jehlanu**:



Obr. 3.109: Výška h_3

Dle kapitoly 3.1 je obsah S_p pravidelného šestiúhelníku, který je podstavou šestibokého jehlanu:

$$S_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2.$$

Výšku h_3 šestibokého jehlanu můžeme vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou v a odvěsnami h_3 a x. Je zřejmé, že se pravidelný šestiúhelník dá rozložit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků, a proto je vzdálenost od každého jeho vrcholu ke středu právě x. Výšku h_3 tedy získáme:

$$\begin{aligned} {h_3}^2 = v^2 - x^2 &= \frac{33+5\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}x^2 - x^2 = \\ &= \frac{33+5\sqrt{5}-12+4\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}x^2 = \\ &= \frac{21+9\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}x^2. \end{aligned}$$

Výška *h₃* je

$$h_3 = \sqrt{\frac{21+9\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}x^2} = \sqrt{\frac{21+9\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{10}a.$$

Teď spočítáme objem V_6 šestibokého jehlanu:

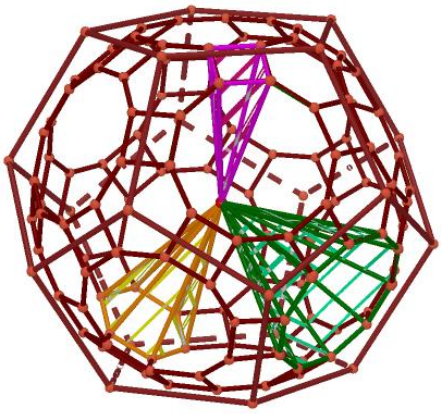
$$V_6 = \frac{1}{3}S_p h_3 = \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2 \sqrt{\frac{21+9\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{10}a = \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{21+9\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\frac{14+6\sqrt{5}}{2}}{\frac{6-2\sqrt{5}}{2}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{(\sqrt{5}-1)^2}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{4(2+\sqrt{5})}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \frac{3(2+\sqrt{5})}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3.$$

Máme spočítány objemy všech dílčích jehlanů **velkého romboikosododekaedru**, můžeme vypočítat jeho **objem *V***.



Obr. 3.110: Objem velkého romboikosododekaedru

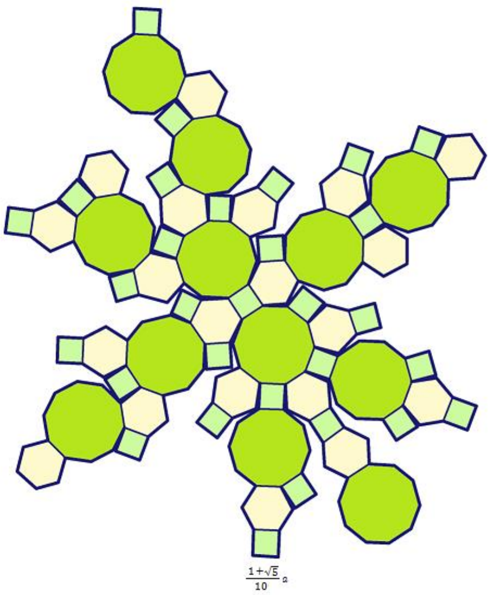
$$
\begin{aligned}
V &= 12V_{10} + 30V_4 + 20V_6 = \\
&= 12\frac{25}{12}(2+\sqrt{5})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 + \\
&+30\frac{3+2\sqrt{5}}{6}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 + \\
&+20\frac{3(2+\sqrt{5})}{4}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =
\end{aligned}
$$

$$= \left(50 + 25\sqrt{5} + 5\left(3+2\sqrt{5}\right) + 15\left(2+\sqrt{5}\right)\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \left(50 + 25\sqrt{5} + 15 + 10\sqrt{5} + 30 + 15\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 =$$

$$= \left(95 + 50\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^3 a^3 = \left(95 + 50\sqrt{5}\right)\frac{2+\sqrt{5}}{125}a^3 = \frac{88+39\sqrt{5}}{25}a^3.$$

Povrch *S* velkého romboikosododekaedru je součtem obsahů S_{10} dvanácti pravidelných desetiúhelníků, třiceti čtverců s obsahy S_4 a dvaceti pravidelných šestiúhelníků s obsahy S_6. Všechny tyto obsahy již máme zjištěny, jsou to obsahy podstav jednotlivých jehlanů.



Obr. 3.111: Povrch velkého romboikosododekaedru

Obsah desetiúhelníku je

$$S_{10} = S_p = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2.$$

Obsahem čtverce je

$$S_4 = S_p = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2$$

a obsahem šestiúhelníku je

$$S_6 = S_p = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2.$$

Povrch *S* velkého rombokukboktaedru určíme:

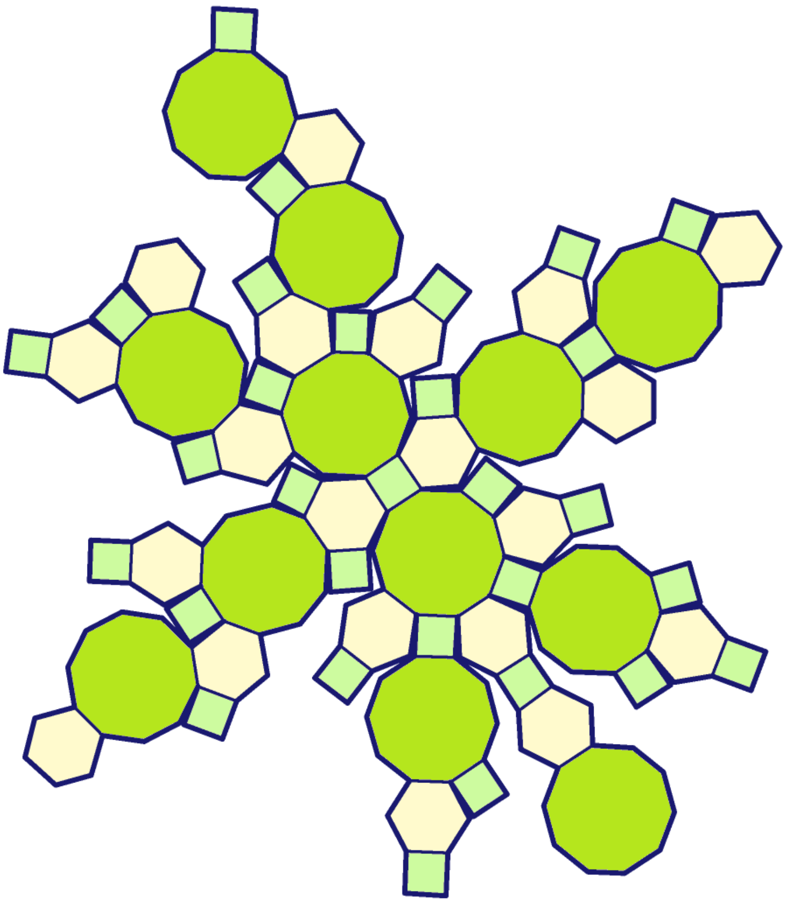
$$S = 12S_{10} + 30S_4 + 20S_6 =$$

$$= 12\frac{5}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 + 30\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2 + 20\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2 =$$

$$= \left(30\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 30 + 30\sqrt{3}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{10}\right)^2 a^2 =$$

$$= \left(30\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 30 + 30\sqrt{3}\right)\frac{6+2\sqrt{5}}{100}a^2 = \left(\sqrt{5+2\sqrt{5}} + 1 + \sqrt{3}\right)\frac{9+3\sqrt{5}}{5}a^2.$$

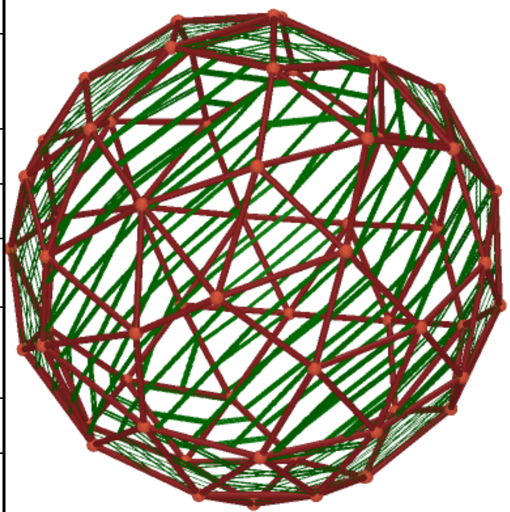
Síť velkého romboikosododekaedru:



Obr. 3.112: Síť velkého romboikosododekaedru

3.13 Otupený dvanáctistěn

Otupený dvanáctistěn	
Stěny	*trojúhelníky, pětiúhelníky*
Délka hrany	$\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a$
Počet vrcholů	*60*
Počet hran	*150*
Počet stěn	*92*
Uspořádání ve vrcholu	(3,3,3,3,5)
Hranové úhly	*60°, 108°*
Objem *V*	$\left(\frac{20\sqrt{3K^2-1}}{3}+\frac{\sqrt{(5+2\sqrt{5})\left(10K^2-(5+\sqrt{5})\right)}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^3 a^3$
Povrch *S*	$\left(20\sqrt{3}+3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^2 a^2$

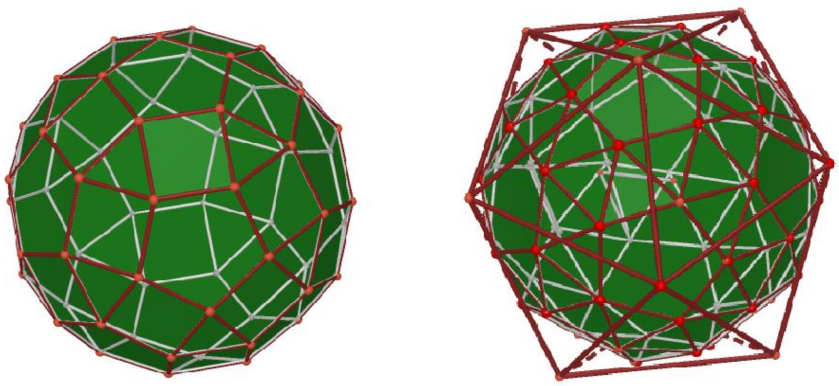


Obr. 3.113: Otupený dvanáctistěn

Otupený dvanáctistěn (angl. Snub dodecahedron) je druhým archimédovským tělesem, které nejde zkonstruovat eukleidovskou konstrukcí, vzhledem k tomu byl model tělesa v práci zkonstruován s využitím přibližné hodnoty délky jeho hrany. Vznikne z romboikosododekaedru pootočením stěn rovnostranných trojúhelníků a další úpravou tak, aby ze čtvercových stěn romboikosododeaedru vznikly vždy dva rovnostranné trojúhelníky. Povrch otupeného dvanáctistěnu tvoří osmdesát shodných rovnostranných trojúhelníků a dvanáct shodných pravidelných pětiúhelníků. Má šedesát vrcholů, devadesát dva stěn a sto padesát hran. V každém vrcholu se po řadě stýkají vždy čtyři shodné rovnostranné trojúhelníky a jeden pravidelný pětiúhelník, tedy vrcholová posloupnost je (3,3,3,3,4).

Konstrukce

Těleso tedy vznikne z romboikosododekaedru pootočením jeho stěn - rovnostranných trojúhelníků tak, aby z každé čtvercové stěny vznikly dva rovnostranné trojúhelníky, a následnou úpravou, aby měly všechny vrcholy stejnou vzdálenost od středu, tj. ležely na sféře opsané. Možný postup je znázorněn na obrázku 3.114.



Obr. 3.114: Vznik otupeného dvanástistěnu

Pro výpočty objemu a povrchu otupeného dvanáctistěnu předpokládejme, že toto těleso vzniklo z pravidelného dvacetistěnu o hraně délky *a*.

Nejprve určíme **délku hrany *x* otupeného dvanáctistěnu**. Dle [18] je vzdálenost h_1 od středu otupeného dvanáctistěnu ke středu trojúhelníkové stěny (tj. výška h_1 trojbokého jehlanu, který je dílčí částí otupeného dvanáctistěnu, viz obr. 3.115) rovna:

$$h_1 = \frac{\sqrt{3K^2 - 1}}{\sqrt{3}} x,$$

kde K je konstanta, která stejně jako u otupené krychle souvisí s metrickými vlastnostmi otupeného dvanáctistěnu, a její přibližná hodnota je

$$K \doteq 2{,}155\,837\,375.$$

Výška h_1 také musí být rovna délce ρ, tj. poloměru kulové sféry vepsané pravidelnému dvacetistěnu, která je dle kapitoly 2.5:

$$\rho = \frac{a\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12}.$$

A tedy **délku hrany *x*** otupeného dvanáctistěnu vyjádříme:

$$\frac{\sqrt{3K^2 - 1}}{\sqrt{3}} x = \frac{a\sqrt{3}\left(3 + \sqrt{5}\right)}{12},$$

po úpravě získáme vztah pro **délku hrany *x***:

$$x = \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2 - 1}} a\,.$$

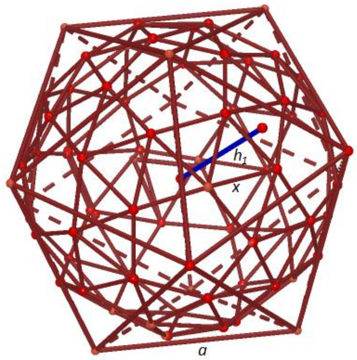
Objem *V* otupeného dvanáctistěnu je součtem osmdesáti trojbokých jehlanů, každý o objemu V_3, a dvanácti pětibokých jehlanů o objemech V_5.

$$V = 80V_3 + 12V_5$$

1) **Objem V_3 jehlanu**:

K výpočtu objemu trojbokého jehlanu V_3 potřebujeme znát obsah podstavy S_p a jeho výšku h_1. Nejprve určíme obsah podstavy S_p, tou je obsah rovnostranného trojúhelníku o straně délky *x:*

$$S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2.$$



Obr. 3.115: Výška h_1

Výšku h_1 máme vyjádřenou u výpočtu délky hrany *x*, je to

$$h_1 = \frac{\sqrt{3K^2-1}}{\sqrt{3}}x = \frac{\sqrt{3K^2-1}}{\sqrt{3}}\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a$$

A tedy **objem** trojbokého **jehlanu V_3** je:

$$V_3 = \frac{1}{3}S_p h_1 = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2\frac{\sqrt{3K^2-1}}{\sqrt{3}}\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a =$$

$$= \frac{\sqrt{3K^2-1}}{12}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^3 a^3$$

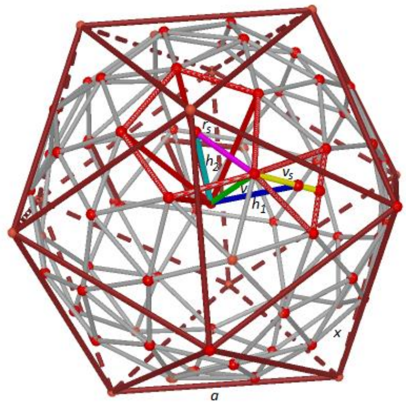
2) **Objem V_5 jehlanu**:

Pro určení objemu pětibokého jehlanu V_5 potřebujeme spočítat obsah podstavy S_p a jeho výšku h_2. Podstavou jehlanu je pravidelný pětiúhelník, jeho obsah je spočítán v kapitole 2.4:

$$S_p = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}x^2 = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2.$$

K nalezení výšky jehlanu h_2 musíme nejprve spočítat délku *v* z pravoúhlého trojúhelníku, jehož je *v* přeponou a který má odvěsny h_1 a $\frac{2}{3}v_s$ (obr. 3.116), kde v_s je výška rovnostranného trojúhelníku, která je dle 2.1:

$$v_s = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$



Obr. 3.116: Výška h_2

Dopočítáme délku *v*:

$$v^2 = {h_1}^2 + \left(\frac{2}{3} v_s\right)^2 = \frac{3K^2 - 1}{3} x^2 + \frac{x^2}{3} = \frac{3K^2 - 1 + 1}{3} x^2 = K^2 x^2,$$

$$v = Kx = K \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2 - 1}} a.$$

Dle obrázku 3.116 spočítáme výšku h_2 z pravoúhlého trojúhelníku s přeponou v a odvěsnami h_2 a r_S, což je poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku. Tento poloměr je dle kapitoly 2.4:

$$r_S = \frac{\sqrt{10\left(5 + \sqrt{5}\right)}}{10} x.$$

Výška h_2 pětibokého jehlanu tedy je:

$${h_2}^2 = v^2 - {r_S}^2 = K^2 x^2 - \frac{\left(5 + \sqrt{5}\right)}{10} x^2 = \frac{10K^2 - \left(5 + \sqrt{5}\right)}{10} x^2$$

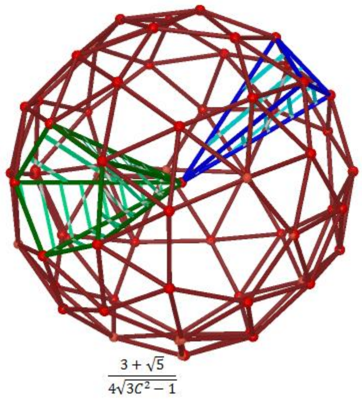
$$h_2 = \sqrt{\frac{10K^2 - \left(5 + \sqrt{5}\right)}{10}} x = \sqrt{\frac{10K^2 - \left(5 + \sqrt{5}\right)}{10}} \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2 - 1}} a.$$

Můžeme vypočítat objem jehlanu V_5:

$$V_5 = \frac{1}{3} S_p h_2 = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}}{4} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2 - 1}} a\right)^2 \sqrt{\frac{10K^2 - \left(5 + \sqrt{5}\right)}{10}} \frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2 - 1}} a =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(25 + 10\sqrt{5}\right)\left(10K^2 - \left(5 + \sqrt{5}\right)\right)}}{12\sqrt{10}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2 - 1}}\right)^3 a^3.$$

A tedy celkový **objem *V* otupeného dvanáctistěnu** je



Obr. 3.117: Objem otupeného dvanáctistěnu

$$V = 80V_3 + 12V_5 =$$

$$= 80\frac{\sqrt{3K^2-1}}{12}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^3 a^3 + 12\frac{\sqrt{\left(25+10\sqrt{5}\right)\left(10K^2-\left(5+\sqrt{5}\right)\right)}}{12\sqrt{10}}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^3 a^3 =$$

$$= \left(80\frac{\sqrt{3K^2-1}}{12} + 12\frac{\sqrt{\left(25+10\sqrt{5}\right)\left(10K^2-\left(5+\sqrt{5}\right)\right)}}{12\sqrt{10}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^3 a^3 =$$

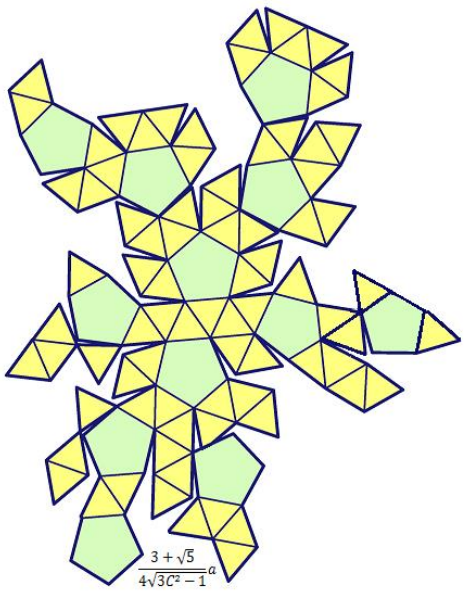
$$= \left(\frac{20\sqrt{3K^2-1}}{3} + \frac{\sqrt{\left(5+2\sqrt{5}\right)\left(10K^2-\left(5+\sqrt{5}\right)\right)}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^3 a^3.$$

Povrch *S* otupeného dvanáctistěnu je součtem obsahů osmdesáti rovnostranných trojúhelníků, z nichž každý má obsah *S_3*, a dvanácti pravidelných pětiúhelníků s obsahy *S_5*. Obsahy *S_3* a *S_5* již máme také vypočítán, jsou to obsahy podstav jednotlivých jehlanů. A tedy:

$$S_3 = S_p = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2$$

a

$$S_5 = S_p = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2.$$



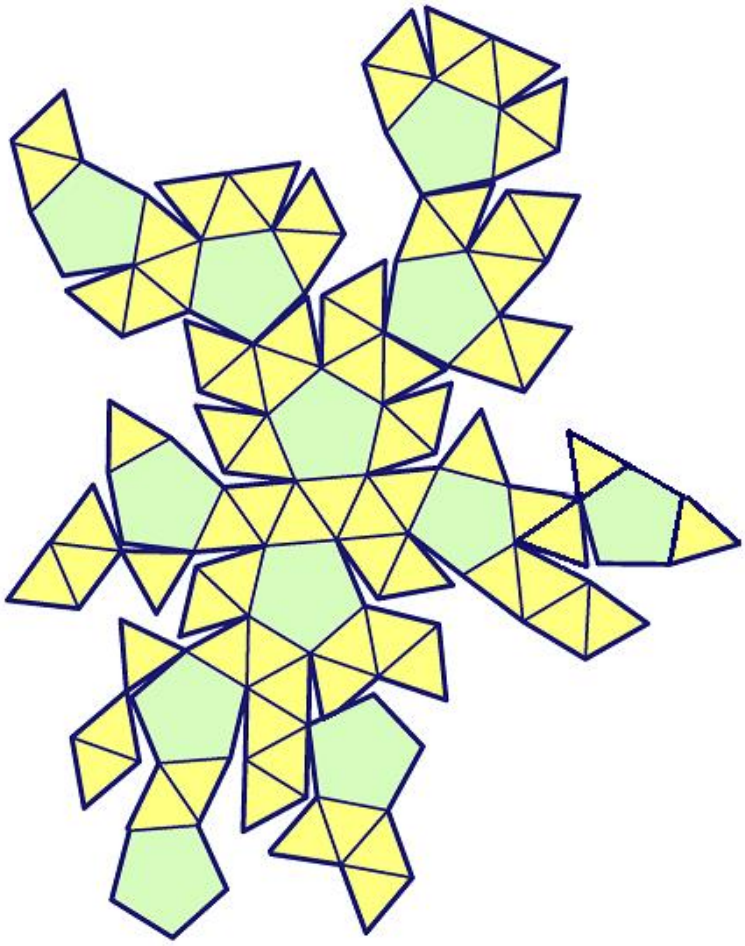
Obr. 3.118: Povrch otupeného dvanáctistěnu

Celkový **povrch *S* otupeného dvanáctistěnu** je:

$$S = 80S_3 + 12S_5 = 80\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2 + 12\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}a\right)^2 =$$

$$= \left(20\sqrt{3} + 3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\right)\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3K^2-1}}\right)^2 a^2.$$

Síť otupeného dvanáctistěnu:



Obr. 3.119: Síť otupeného dvanáctistěnu

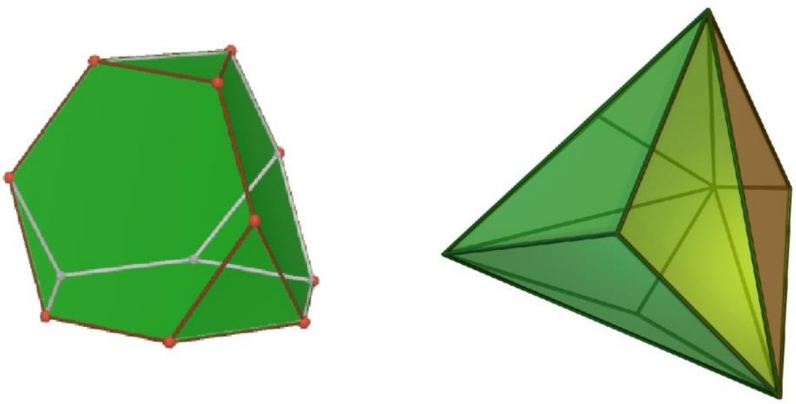
3.14 Dualita polopravidelných mnohostěnů

Pravidelný mnohostěn je mnohostěnem, který je duální s jiným pravidelným mnohostěnem, kromě čtyřstěnu, který je duální sám se sebou. Žádné archimédovské těleso ale k jinému polopravidelnému mnohostěnu duální není. Duální mnohostěny k archimédovským tělesům byly objeveny a popsány relativně nedávno. Jako jeden z prvních je popsal v roce 1865 belgický matematik *Eugene Charles Catalan* (1814-1894) a podle něj jsou tyto archimédovské duály někdy nazývány *Catalanova tělesa*. Všechny tyto mnohostěny jsou konvexní, jejich stěny jsou jednoho typu, ale oproti archimédovským tělesům, stěnami nejsou pravidelné mnohoúhelníky.

V následující tabulce je uveden polopravidelný mnohostěn a k němu mnohostěn duální (tzv. Catalanovo těleso), jehož název ponecháme anglicky [19].

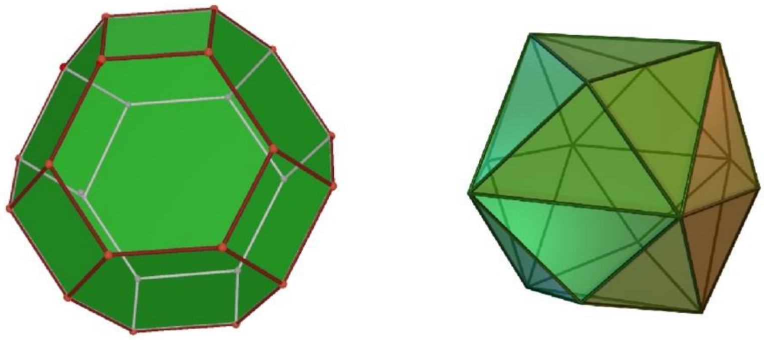
Archimédovské těleso	**Duální mnohostěn**
Osekaný čtyřstěn	Triakis Tetrahedron
Osekaný osmistěn	Tetrakis Hexahedron
Kuboktaedr	Rhombic Dodecahedron
Osekaná krychle	Small Triakis Octahedron
Rombokuboktaedr	Deltoidal Icositetrahedron
Velký rombokuboktaedr	Disdyakis Dodecahedron
Otupená krychle	Pentagonal Icositetrahedron
Osekaný dvacetistěn	Pentakis Dodecahedron
Ikosododekaedr	Rhombic triacontahedron
Osekaný dvanáctistěn	Triakis Icosahedron
Romboikosododekaedr	Deltoidal Hexecontahedron
Velký romboikosododekaedr	Disdyakis Triacotahedron
Otupený dvanáctistěn	Pentagonal Hexecontahedron

Osekaný čtyřstěn je polopravidelným mnohostěnem, který má dvanáct vrcholů a osm stěn, Triakis Tetrahedron má naopak osm vrcholů a dvanáct stěn (obr. 3.120).



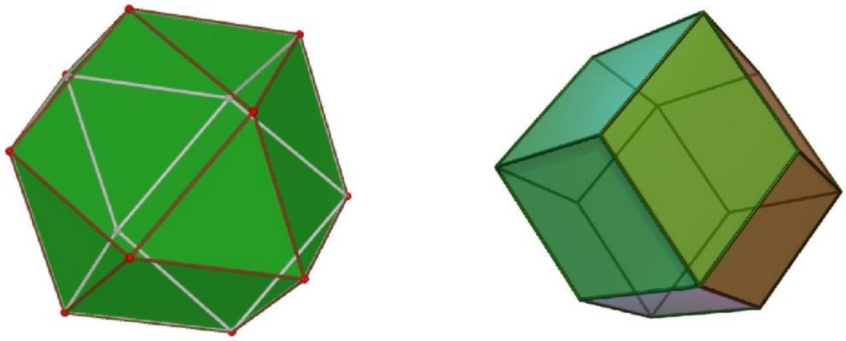
Obr. 3.120: Osekaný čtyřstěn a Triakis Tetrahedron

Osekaný osmistěn má dvacet čtyři vrcholů a čtrnáct stěn, Tetrakis Hexahedron má zase čtrnáct vrcholů a dvacet čtyři stěn (obr. 3.121).



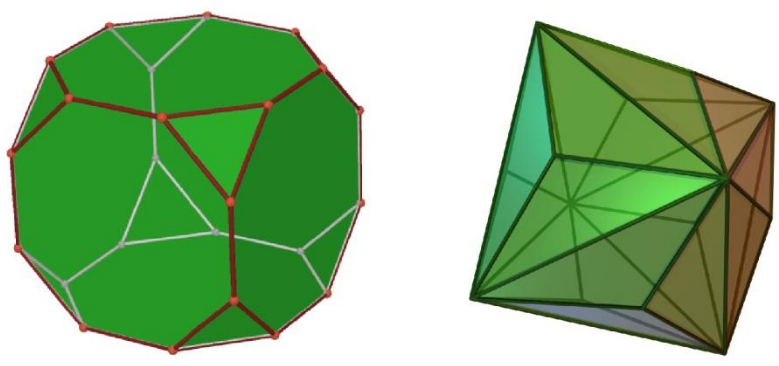
Obr. 3.121: Osekaný osmistěn a Tetrakis Hexahedron

Kuboktaedr má dvanáct vrcholů a čtrnáct stěn, jemu duální je Rhombic Dodecahedron, který má opačný počet vrcholů a stěn (obr. 3.122).



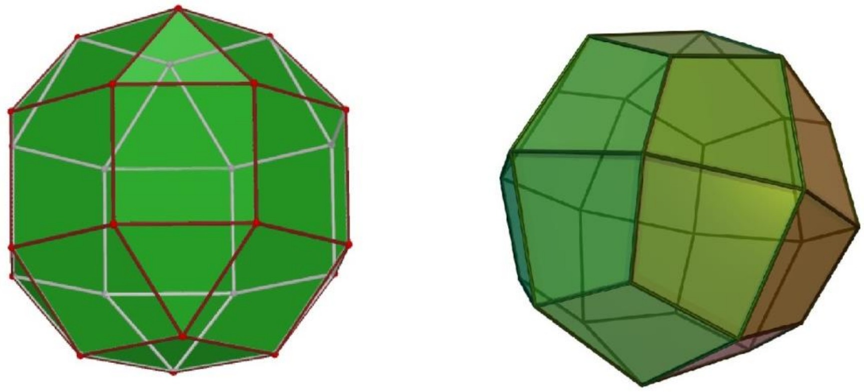
Obr. 3.122: Kuboktaedr a Rhombic Dodecahedron

Osekaná krychle má dvacet čtyři vrcholů a dvanáct stěn, jí duálním mnohostěnem je Small Triakis Octahedron se dvanácti vrcholy a dvaceti čtyřmi stěnami (obr. 3.123).



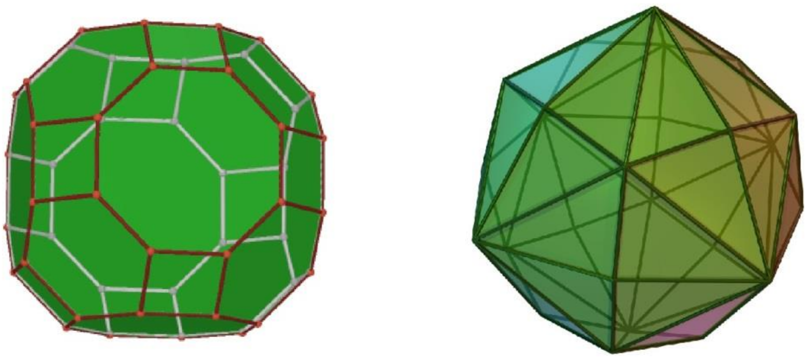
Obr. 3.123: Osekaná krychle a Small Triakis Octahedron

Rombokuboktaedr je polopravidelným mnohostěnem se dvaceti čtyřmi vrcholy a dvaceti šesti stěnami, Deltoidal Icositetrahedron má opačný počet stěn a vrcholů a je jeho tělesem duálním (obr. 3.124).



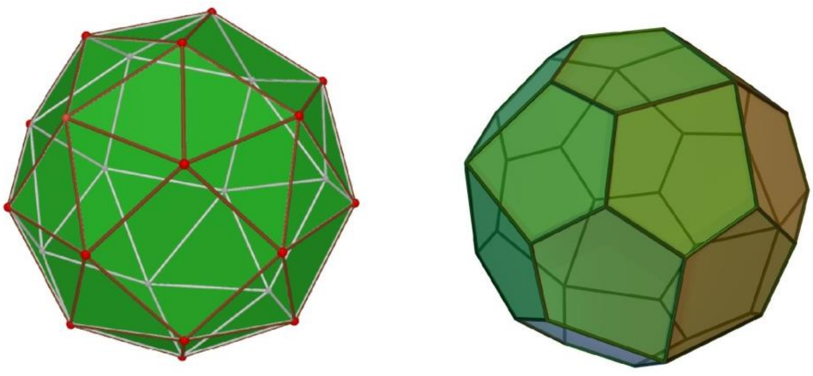
Obr. 3.124: Rombokuboktaedr a Deltoidal Icositetrahedron

Velký rombokuboktaedr má čtyřicet osm vrcholů a dvacet šest stěn, tělesem jemu duálním je tzv. Disdyakis Dodecahedron (obr. 3.125).



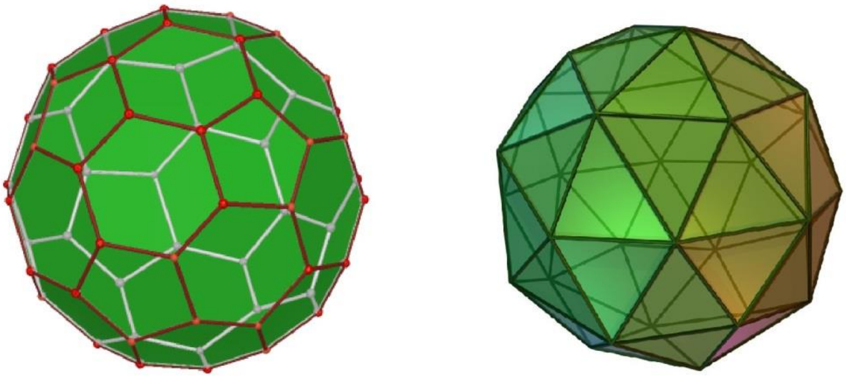
Obr. 3.125: Velký rombokuboktaedr a Disdyakis Dodecahedron

Otupená krychle má dvacet čtyři vrcholů a třicet osm stěn, Pentagonal Icositetrahedron má naopak třicet osm vrcholů a dvacet čtyři stěn a je jí tělesem duálním (obr. 3.126).



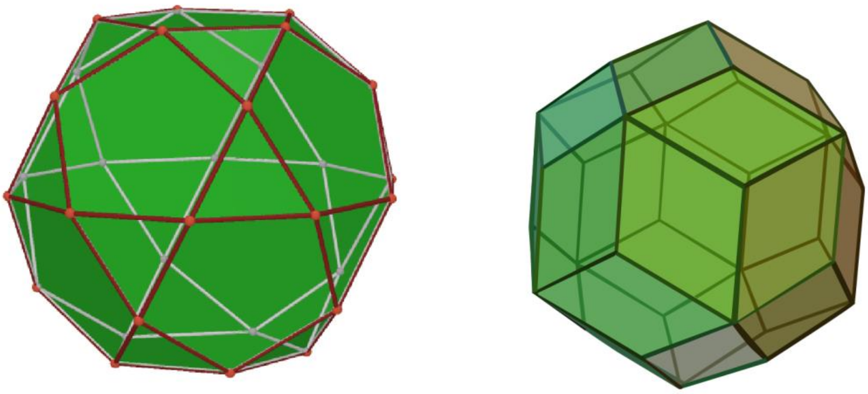
Obr. 3.126: Otupená krychle a Pentagonal Icositetrahedron

Osekaný dvacetistěn je tělesem se šedesáti vrcholy a dvaatřiceti stěnami, jemu duálním tělesem je Pentakis Dodecahedron (obr. 3.127).



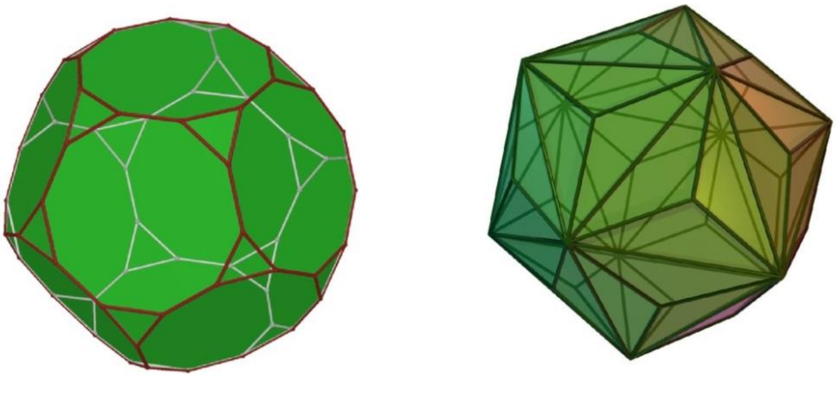
Obr. 3.127: Osekaný dvacetistěn a Pentakis Dodecahedron

Ikosododekaedr má třicet vrcholů a třicet dva stěn, jemu duální je Rhombic triacontahedron (obr. 3.128).



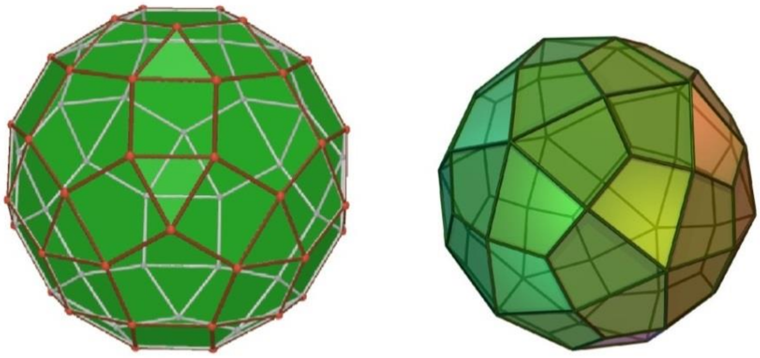
Obr. 3.128: Ikosododekaedr a Rhombic Triacontahedron

Osekaný dvanáctistěn je polopravidelným mnohostěnem se šedesáti vrcholy a dvaatřiceti stěnami, tělesem jemu duálním je Triakis Icosahedron (obr. 3.129).



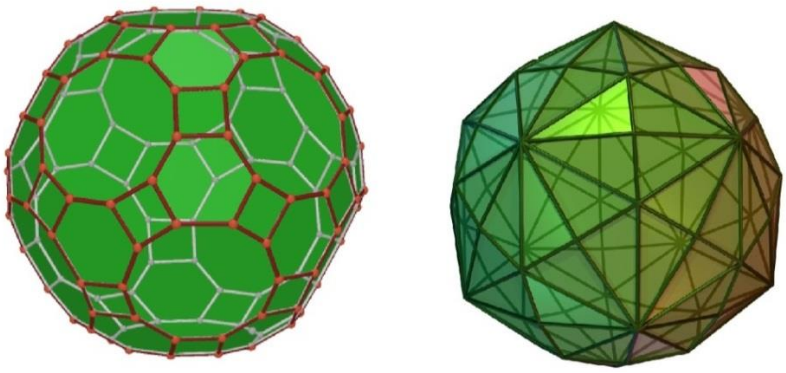
Obr. 3.129: Osekaný dvanáctistěn a Triakis Icosahedron

Romboikosododekaedr má šedesát vrcholů a šedesát dva stěn, tělesem, které má šedesát dva vrcholů a šedesát stěn je Deltoidal Hexecontahedron a je k romobikosododekaedru duální (obr. 3.130).



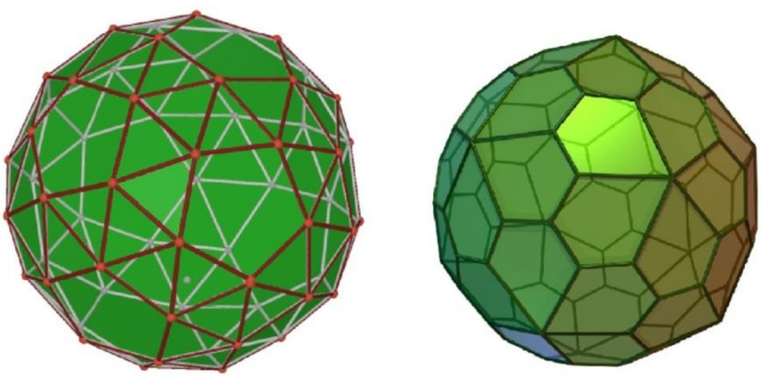
Obr. 3.130: Romboikosododekaedr a Deltoidal Hexecontahedron

Velký romboikosododekaedr má sto dvacet vrcholů a šedesát dva stěn, jemu duální je Disdyakis Triacotahedron se šedesáti dvěma vrcholy a sto dvaceti stěnami (obr. 3.131).



Obr. 3.131: Velký romboikosododekaedr a Disdyakis Triacotahedron

Otupený dvanáctistěn je posledním polopravidelným mnohostěnem, který jsme v rámci duality ještě nezmínili. Má šedesát vrcholů a devadesát dva stěn, jemu duální je Pentagonal Hexecontahedron (obr. 3.132).



Obr. 3.132: Otupený dvanáctistěn a Pentagonal Hexecontahedron

Závěr

Práce vznikla za účelem seznámit širší okruh čtenářů s pravidelnými a polopravidelnými mnohostěny, jejich vlastnostmi, konstrukcemi, objemy a povrchy a také s různými názvy pro tyto mnohostěny. Pravidelným mnohostěnům se někdy říká Platónova či platónská tělesa, polopravidelným zase tělesa Archimédova či archimédovská.

Je velikou škodou, že jsou tyto mnohostěny ve výuce matematiky na středních školách především z časových důvodů v pozadí a učitelé je do hodin matematiky většinou nezařazují.

I po sepsání takto rozsáhlé práce ve mně tyto mnohostěny stále vzbuzují řadu otázek a věřím, že si v budoucnu najdu cestu ještě hlouběji je poznat.

Díky této práci jsem se zdokonalila v používání matematických softwarů GeoGebra a Cabri3D, protože modelování některých polopravidelných mnohostěnů bylo časově i technicky opravdu náročné.

Použitá literatura

[1] Moravec, L., Chmelíková, V.: *Pravidelné mnohostěny.* Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, 2007

[2] Chmelíková, V.: *Zlatý řez.* Univerzita Karlova v Praze, Matfyzpress,2006

[3] Svobodová, V.: *Historie pravidelných mnohostěnů.* In: Sborník *Matematika v proměnách věků IV.* Akademické nakladatelství Cerm, 2007

[4] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia: Stereometrie.* Prométheus, 2002

[5] Ruland, J.,Ferenz, G.: *Posvátná geometrie platónských těles.* ANAG, 2010

[6] Sutton, D.: *Platónská a archimédovská tělesa*. Dokořán, 2011

[7] Moravcová, V.: *Polopravidelná tělesa.* In. Z. Halas et al. Archimédés, Praha: Matfyzpress, 2012. pp. 69-88.

[8] Pavlíková, I.: *Polopravidelné mnohostěny*. Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2011

[9] Horák, S.: *Mnohostěny.* Škola mladých matematiků, Mladá fronta, 1970

Internetové zdroje

[10] Konrádová, M., Archimedovské mnohosteny veselo i vážne. Dostupné online na *http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2004/052_konradova.pdf*

[11] Pět Platónových těle*s*, <http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka4.html>

[12] Icosahedron**,** <http://en.wikipedia.org/wiki/Icosahedron>

[13] Tan 22,5°,< https://answers.yahoo.com/question/index?qid=20080704182209AA17JOY>

[14] Otupená krychle**,**
https://www.academia.edu/10335798/Optimum_Solution_of_Snub_Cube_Application_of_HCRs_Theory_of_Polygon_and_Newton-Raphson_Method_

[15] Otupená krychle**,** http://mathworld.wolfram.com/SnubCube.html

[16] Rombikosidodekahedron,
https://www.academia.edu/10156449/Mathematical_Analysis_of_Small_Rhombicosidodecahedron_Archimedean_solid_Applications_of_HCRs_Formula_for_platonic_solids_

[17] Velký romboikosidodekaedr,

https://www.academia.edu/11536438/Mathematical_analysis_of_great_rhombicosidodecahedron_the_largest_Archimedean_solid_having_30_square_faces_20_regular_hexagonal_faces_and_12_regular_decagonal_faces_Application_of_HCRs_Theory_of_Polygon_

[18] Otupený dvanáctistěn, https://www.academia.edu/10336099/Optimum_Solution_of_Snub_Dodecahedron_Application_of_HCRs_Theory_of_Polygon_and_Newton-Raphson_Method_

[19] Catalánova tělesa, http://mathworld.wolfram.com/CatalanSolid.html

[20] Catalánova tělesa, https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_solid

Seznam symbolů

a: délka hrany pravidelného mnohostěnu

x: délka hrany polopravidelného mnohostěnu

u_s: stěnová úhlopříčka mnohostěnu

u_t: tělesová úhlopříčka tělesa

v_s: stěnová výška mnohostěnu

v_t: tělesová výška odseklého jehlanu

v: délka boční hrany jehlanu

h_n: tělesová výška jehlanu, který je dílčí části polopravidelného mnohostěnu

ω: odchylka sousedních stěn mnohostěnu

r: poloměr kulové plochy (sféry) opsané mnohostěnu

ρ: poloměr kulové plochy (sféry) vepsané mnohostěnu

S_n: obsah n-úhelníka, $n \geq 3$

S: povrch mnohostěnu

S_p: obsah podstavy jehlanu

V_n: objem n-bokého jehlanu, který je dílčí částí mnohostěnu, nebo byl z pravidelného mnohostěnu odseknut, $n \geq 3$

V: objem mnohostěnu

Seznam obrázků