

Posudek vedoucího diplomové práce

Název: Topological Support of Solutions to Stochastic Differential Equations
Autor: Bc. Prokop Šimon
Vedoucí: Mgr. Martin Ondreját, Ph.D.

Popis práce a výsledků

Posuzovaná práce se zabývá

- a) spojitou závislostí řešení stochastických diferenciálních rovnic na řídicích spojitých semimartingalech (tj. pokud k sobě konvergují řídicí procesy v pravděpodobnosti, pak k sobě konvergují v pravděpodobnosti i řešení),
- b) a jejím důsledkem (gró práce), který lze stručně popsat jako co nejpřesnější popis množiny funkcí, ve které leží trajektorie řešení abstraktních stochastických diferenciálních rovnic skoro jistě. Vzhledem k tomu, že řešením rovnice je náhodný proces, autor bere za tuto množinu nosič pravděpodobnostního rozdělení řešení na vhodném prostoru funkcí. Jde o dobrou volbu, neboť při tomto pojetí je nosič nejmenší uzavřenou množinou, ve které leží všechny trajektorie řešení skoro jistě.

Je známo, že jsou-li například koeficienty rovnice globálně lipschitzovské a hladké, pak řešení spojitě závisí na řídicích semimartingalech a nosič každého řešení lze popsat jako uzávěr množiny řešení jistých (nyní již) deterministických diferenciálních rovnic v prostoru spojitých funkcí. Je rovněž známo, že jinou metodou důkazu lze získat přesnější popis nosiče, pokud se uzávěr řešení těchto deterministických diferenciálních rovnic uvažuje v menším prostoru alfa-Hölderovských funkcí, kde alfa je striktně menší než jedna polovina.

Autor dokázal

- a) spojitou závislost řešení stochastických diferenciálních rovnic na řídicích spojitých semimartingalech v lepších prostorech funkcí, než bylo dosud známo (Theorem 3.7),
- b) a dále popsal množinu trajektorií řešení stochastických diferenciálních rovnic zatím nejpřesnějším známým (a podle mých vědomostí dosud nepublikovaným) způsobem (Theorem 3.10).

Zároveň se mu podařilo oproti stávajícím známým výsledkům rozšířit třídu stochastických diferenciálních rovnic, pro které spojitá závislost a popis nosiče platí (oslabil dosud uvažované předpoklady na koeficienty rovnice). Množina trajektorií řešení je opět

popsána jako uzávěr množiny řešení jistých deterministických diferenciálních rovnic, avšak nyní je tento uzávěr uvažován v menším prostoru funkcí, než jsou alfa-Hölderovské funkce s alfa striktně menším než jedna polovina. Spojitá závislost i popis množiny řešení jsou tedy přesnější. Zvolený prostor funkcí je nejpřesnější jak ve třídě Hölderovských prostorů funkcí, tak ve třídě Besovových prostorů.

Průběh zpracování diplomové práce

Autor byl před započítím diplomové práce seznámen se čtyřmi články [1,2,3,4], ve kterých se dokazuje popis topologického nosiče řešení stochastických diferenciálních rovnic v různých prostorech, za různých předpokladů a různými technikami, a zadání pro něj znělo, nechť se pokusí dokázat větu o popisu topologického nosiče řešení za slabších předpokladů a v co nejmenším prostoru funkcí – pokud možno tak, aby byly pokryty výsledky ve všech čtyřech pracích. Jinými slovy, nechť se pokusí oslabit předpoklady a zesílit výsledky. Jakožto vedoucí DP jsem neměl představu, zda takto ambiciózní výsledek bude vůbec možné dokázat, a počítal jsem s tím, že jakékoli zobecnění bude pro účely DP postačovat.

Autor všechny čtyři práce prostudoval a sám se rozhodl vyjít z článku Gyöngy & Pröhle, tedy pracovat metodou spojitě závislosti řešení na řídicích semimartingalech a změnou pravděpodobnostní míry. V průběhu práce na DP se ukázalo, že oslabit předpoklady a dokázat požadovaný výsledek komplikace nepřinese, neboť Gyöngy & Pröhle některé předpoklady vůbec nepotřebují. Problém nastal u zesilování výsledku, tedy v důkazu aproximační věty 3.7 a lemmatu 3.9 v průniku prostorů Hölderovských funkcí. Zde se ukázalo, že pouhá úprava důkazu z článku Gyöngy & Pröhle nebude stačit. V tomto bodě jsem tedy autora instruoval, aby se pokusil využít interpolační techniku známou z teorie prostorů funkcí (která překračuje znalosti magisterského studia na KPMS, viz Lemma 2.7 a Lemma 2.8) a seznámil se s dalším článkem o spojitě závislosti stochastických diferenciálních rovnic [5]. Poté již autor mohl splnit zadání DP v celém rozsahu. Dlužno podotknout, že s notnou dávkou štěstí, že metoda spojitě závislosti řešení na řídicích semimartingalech a změny pravděpodobnostní míry se ukázala jako dostatečně silná. Na okraj je vhodné poznamenat, že autor došel až na hranici možností této metody. Pro důkaz hlavní věty 3.7 byla metoda vytěžena v maximální možné míře. Pokud by jen jeden z parciálních výsledků vyšel jen o něco slaběji, hlavní věty 3.7 a 3.10 by se nepodařilo dokázat. Z tohoto pohledu byla práce na DP celkem napínavá (z pohledu autora však možná také i stresující). Stálo to však za to.

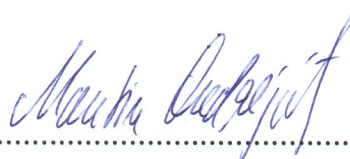
Závěr

V konečném důsledku se stala práce vcelku náročnou a téma, jak jej autor pojal, přesáhlo podle mého názoru přiměřenost obvyklou pro magisterské DP (kombinace stochastické analýzy s teorií interpolace a prostorů funkcí + nejistota, zda se hlavní větu vůbec podaří dokázat).

Autor pracoval po celou dobu velice svědomitě, pečlivě, samostatně a iniciativně, a své výsledky a problémy se mnou pravidelně konzultoval. Autor se rovněž během práce na DP seznámil s některými pokročilými partiemi teorie prostorů funkcí, stochastické analýzy a teorie stochastických diferenciálních rovnic.

Předložená práce je pečlivě zpracována, obsahuje nové výsledky a může být publikována v odborném vědeckém časopise zaměřeném na stochastickou analýzu. Autor splnil zadání a podle mého názoru jsou splněny i požadavky kladené na diplomovou práci. Proto doporučuji, aby práce byla jako práce diplomová uznána a připuštěna k obhajobě.

Dne 26. května 2016



Mgr. Martin Ondreját, Ph.D.

Ústav teorie informace a automatizace AV ČR, v.v.i.

- [1] A. Millet, M. Sanz-Solé, A simple proof of the support theorem for diffusion processes. Séminaire de Probabilités, XXVIII, 36–48, Lecture Notes in Math., 1583, Springer, Berlin, 1994.
- [2] I. Gyöngy and T. Pröhle, On the approximation of stochastic differential equations and on Stroock-Varadhan's support theorem, Computers Math. Applic, 19, 65–70 (1990).
- [3] G. Ben Arous, M. Gradinaru and M. Ledoux, Hölder norms and the support theorem for diffusions, Annales de l'I. H. P., section B, tome 30, no 3 (1994), p. 415-436.
- [4] V. Mackevičius, On the Support of the Solution of Stochastic Differential Equations, Lietuvos Matematikow Rinkings XXXVI (1), 91–98 (1986).
- [5] V. Mackevičius, Sp-Stability of solutions of symmetric stochastic differential equations. Litovskii Matematicheskii Sbornik, XXV (4), 72-84 (1985).