

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## **DIPLOMOVÁ PRÁCE**



Michaela Káňová

## **Terestrické exoplanety a jejich vývoj**

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Geofyzika

Praha 2015



Na tomto místě bych ráda poděkovala všem, kteří svou radou, směřováním nebo vlídným slovem přispěli ke vzniku této práce. V první řadě děkuji své školitelce RNDr. Marii Běhounkové, Ph.D., jež mne během celého studia neúnavně provázela, za její přívětivý přístup, pečlivost a nesčetná doporučení týkající se jak samotného postupu v diplomové práci, tak i tohoto výsledného textu. Děkuji taktéž doc. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za odbornou i morální podporu a za pomoc s vyřizováním formálních náležitostí studia. Velice podnětnými připomínkami přispěli k výsledné podobě diplomové práce také dr. Gaël Choblet a dr. Gabriel Tobie z Univerzity v Nantes.

V neposlední řadě děkuji své rodině a přátelům za to, že mi byli během studia oporou, a také všem zaměstnancům a studentům Katedry geofyziky za vytvoření inspirativního, příjemného a přátelského prostředí.

Tato práce vznikla za podpory Grantové agentury Univerzity Karlovy (projekt číslo 338214) a Grantové agentury České republiky (projekt číslo 14-04145S).

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Terestrické exoplanety a jejich vývoj

Autor: Michaela Káňová

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Marie Běhouňková, Ph.D., Katedra geofyziky

**Abstrakt:** Terestrické exoplanety, tedy planety podobné Zemi nacházející se mimo sluneční soustavu, představují rozmanitý statistický soubor, umožňující lépe porozumět jejich formaci, historii a vnitřní i orbitální dynamice. Exoplanety nacházející se v těsné blízkosti své mateřské hvězdy jsou vystaveny silné slapové interakci, jež má za následek disipaci mechanické energie (slapové zahřívání), změnu rotační frekvence planety a také vývoj oběžné dráhy. Tradičně užívané teorie slapového vývoje dráhy předpovídají uchycení planet na výstředné dráze do stavu pseudo-synchronní rotace, kdy je jejich rotační frekvence vyšší než frekvence oběžná. Tento jev ovšem neodpovídá pozorování měsíců ve sluneční soustavě a jedná se spíše o důsledek zjednodušených reologických předpokladů. V předkládané práci se zaměřujeme na numerický výpočet slapového vývoje oběžné dráhy pro planetu popsanou viskoelastickou Maxwellovou reologií v jednoplanetárním systému. Nacházíme rovnovážné rotační stavy, mezi nimiž se objevují spin-orbitální resonance, a diskutujeme jejich souvislost s minimy slapového zahřívání. Uchycení ve spin-orbitální resonanci má za následek také nerovnoměrné ozáření povrchu, a tedy nerovnoměrné rozložení povrchových teplot, ovlivňující vnitřní dynamiku planety. Druhým tématem této práce je proto zpřesnění již existujícího numerického modelu pro řešení rovnice vedení tepla a studium parametrických závislostí povrchové teploty. Na závěr krátce diskutujeme otázku detekovatelnosti spin-orbitálních resonancí, sklonu rotační osy či termální setrvačnosti v infračervených fotometrických křivkách.

**Klíčová slova:** exoplanety, slapový vývoj dráhy, povrchová teplota

Title: Evolution of terrestrial exoplanets

Author: Michaela Káňová

Department: Department of Geophysics

Supervisor: RNDr. Marie Běhounková, Ph.D., Department of Geophysics

Abstract: Observations of terrestrial exoplanets provide a unique statistical set that may improve our knowledge of their formation, structure as well as internal and orbital evolution. Close-in extrasolar planets are subjected to strong stellar tides, resulting in an extensive dissipation of mechanical energy (tidal heating), long-term orbital evolution and evolution of the rotational frequency. For the exoplanets on eccentric orbits, the traditional tidal theories predict locking into pseudo-synchronous spin states, for which the rotational frequency is slightly higher than the orbital frequency. Such predictions are, however, in contradiction with the observations of moons in the Solar system, and are a consequence of simplified rheological assumptions. Here, we focus on a numerical approach to the tidal evolution of planetary orbit and rotation in a single-planet system, assuming a Maxwell viscoelastic rheology. We find equilibrium spin states, including the spin-orbit resonances, and discuss their connection with the minima of tidal heating. Locking into a spin-orbit resonance results in an irregular insolation pattern and an unequal surface temperature distribution, affecting the internal dynamics of the planet. The second part of the thesis therefore deals with the evaluation of the surface temperature and the extension of a numerical model solving the heat diffusion equation. Finally, we briefly discuss the detectability of spin-orbit resonances, obliquity and thermal inertia of terrestrial exoplanets in their infrared light curves.

Keywords: exoplanets, orbital evolution, surface temperature

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>1 Slapový vývoj oběžné dráhy</b>	<b>7</b>
1.1 Problém dvou těles a Keplerovy elementy . . . . .	7
1.2 Poruchový počet v nebeské mechanice . . . . .	9
1.2.1 Podmínky oskulace a oskulační elementy . . . . .	9
1.2.2 Lagrangeovy poruchové rovnice . . . . .	11
1.2.3 Gaussovy poruchové rovnice . . . . .	15
1.3 Tradiční slapové teorie . . . . .	17
1.3.1 Slapová deformace a její popis . . . . .	17
1.3.2 Darwinova-Kaulova expanze . . . . .	20
1.3.3 Konstantní slapový rozestup . . . . .	22
1.3.4 Deformace viskoelastického tělesa . . . . .	24
1.4 Numerický model . . . . .	25
1.4.1 Slapotvorný potenciál a síla . . . . .	25
1.4.2 Okamžitá poloha hvězdy . . . . .	26
1.4.3 Deformace planety . . . . .	28
1.4.4 Dodatečný potenciál a síla . . . . .	30
1.4.5 Evoluční rovnice pro oběžnou dráhu . . . . .	31
1.4.6 Rotace planety . . . . .	33
1.4.7 Výpočetní schéma . . . . .	35
1.5 Výsledky . . . . .	37
1.5.1 Spin-orbitální resonance . . . . .	37
1.5.2 Slapové zahřívání . . . . .	42
1.5.3 Konvergence Kaulových řad . . . . .	44
<b>2 Povrchová teplota</b>	<b>49</b>
2.1 Znění úlohy a přehled dosavadních výsledků . . . . .	49
2.2 Zpřesnění modelu . . . . .	52
2.2.1 Mateřská hvězda jako plošný zdroj . . . . .	52
2.2.2 Nenulová délka periastra . . . . .	56
2.2.3 Teplotně závislé parametry . . . . .	56
2.3 Komentář k průměrné teplotě a průměrné insolaci . . . . .	60
2.4 Možnosti detekce . . . . .	64
2.5 Výsledky . . . . .	66
2.5.1 Význam parametru $\tau$ . . . . .	66
2.5.2 Význam teplotní a hloubkové závislosti $\rho, c_p, k$ . . . . .	68
2.5.3 Význam spin-orbitálních resonancí . . . . .	70
2.5.4 Fotometrické křivky . . . . .	73
<b>Závěr</b>	<b>77</b>
<b>A Kaulův rozvoj slapového potenciálu</b>	<b>79</b>

<b>Seznam použité literatury</b>	<b>83</b>
<b>Přehled použitého značení</b>	<b>89</b>



# Úvod

Od objevu první extrasolární planety obíhající kolem hvězdy podobné Slunci uplynulo v čase vydání této práce právě dvacet let (Mayor a Queloz, 1995). Statistiky oběžnic nacházejících se mimo sluneční soustavu od té doby každým rokem narůstají a tento trend byl ještě zvýrazněn na počátku třetího tisíciletí díky zahájení vesmírných fotometrických misí, jako je například *Kepler* (viz Batalha a kol., 2013) nebo *CoRoT*. Databáze [exoplanets.org](http://exoplanets.org) uvádí k 30. 7. 2015 celkem 1569 planet s dobře určenými elementy oběžné dráhy, vedle toho bylo dalekohledem *Kepler* zaznamenáno 3751 planetárních kandidátů, kteří na své potvrzení souběžnými pozemskými pozorovacími misemi doposud čekají. Nepřímé detekční metody, kterých se při hledání exoplanet využívá, jsou citlivé převážně na velmi hmotná tělesa, tedy plynné obry podobné Jupiteru, obíhající na dráze s relativně krátkou hlavní poloosou kolem málo hmotných hvězd. Přesto však bylo objeveno již několik set planet o hmotnostech nižších než 10 Zemí, jejichž povrch by mohl být pevný, tak jako v případě terestrických planet sluneční soustavy (Kaltenegger a kol., 2012).

Velké rozpětí fyzikálních charakteristik (výstředností dráhy, hmotností, poloměrů), kterými se tyto „super-Země“ vyznačují, vede též k velkému množství otázek po jejich vnitřní struktuře, dějích probíhajících v jejich nitru i na povrchu a vývoji oběžné dráhy. Nedávné studie věnované terestrickým exoplanetám se zabývají jak dynamikou celých planetárních systémů (např. Mardling a Lin, 2002), či dvojic planety a měsíce (např. Heller a Barnes, 2013), tak i jednotlivým světům z hlediska jejich povrchových podmínek (např. Léger a kol., 2011; Dobrovolskis, 2013), geodynamiky (např. Gelman a kol., 2011; van Summeren a kol., 2011), atmosférické cirkulace (např. Leconte a kol., 2013; Kaspi a Showman, 2015), obyvatelnosti (např. Barnes a kol., 2009; Dressing a kol., 2010), slapového vývoje (např. Henning a kol., 2009; Correia a Laskar, 2010; Běhounková a kol., 2010), vztahu mezi hmotností a poloměrem (např. Seager a kol., 2007) a také detekovatelnosti rozličných parametrů (např. Wright a Gaudi, 2012; Selsis a kol., 2013).

Prvotním cílem této diplomové práce bylo zpřesnit již existující numerický model pro výpočet povrchové teploty na terestrických planetách (Káňová, 2013) a s jeho pomocí studovat dlouhodobý vývoj teploty probíhající při slapovém vývoji planetární soustavy. Pro vyjádření dlouhodobého vývoje oběžné dráhy bylo zamýšleno využít tradičních slapových teorií, které pro zjednodušení matematického popisu předpokládají konstantní časový, fázový či geometrický rozestup mezi průchodem slapotvorného tělesa nad zadaným místem planety a zdvižením slapové výdutě (např. Mignard, 1979; Kaula, 1964; MacDonald, 1964). Tyto teorie správně předvídají cirkularizaci dráhy osamocené exoplanety, tedy dlouhodobé zkracování hlavní poloosy a snižování excentricity, současně ovšem vedou k předpovědím tzv. pseudo-synchronních rotačních stavů. Podle tradičních teorií s konstantním slapovým rozestupem planeta na výstředné dráze nemůže dosáhnout například vázané rotace, kdy je její rotační frekvence rovna frekvenci oběžné, a dosahuje jí pouze na dráze kruhové. Tato předpověď se ovšem neshoduje s pozorováním Měsíce ani jiných velkých satelitů ve sluneční soustavě, které vázanou

rotaci přes nenulovou výstřednost své dráhy vykazují. Vázané rotace na eliptické dráze lze ve slapových modelech dosáhnout buď uvážením permanentní deformace na stupni a řádu 2, která moment sil působící na slapovou výdut' vyvažuje (Goldreich, 1966; Ferraz-Mello a kol., 2008), anebo přehodnocením klíčového předpokladu zmíněných teorií, tedy otázky konstantního slapového rozestupu.

Pro studium povrchové teploty je přitom znalost realistického vývoje rotační frekvence nezbytná. Jestliže dojde k uchycení planety do stavu vázané rotace, anebo do vyšší spin-orbitální resonance, kdy je poměr rotační a oběžné frekvence roven například 3:2, 2:1 nebo 5:2, dochází k velmi nerovnoměrnému zahřívání planetárního povrchu, jež má dále důsledky například pro charakter plášťové konvekce (van Summeren a kol., 2011; Gelman a kol., 2011) či stabilitu atmosféry. Stav pseudo-synchronní rotace by oproti tomu vedl k rovnoměrnému rozprostření zářivého toku (insolace) přicházejícího od mateřské hvězdy, a tedy i k rovnoměrnějšímu rozložení povrchových teplot.

Předpoklad konstantního slapového rozestupu a jeho důsledek v podobě pseudo-synchronní rotace v tradičních teoriích slapového vývoje kriticky hodnotí například Makarov a Efroimsky (2013). Poukazují na příliš zjednodušený reologický model, který se k tomuto předpokladu váže, a navrhují analytický přístup, který bere v úvahu modely realističtější, konkrétně Maxwellovu či Andradeovu viskoelasticitu. Případu odezvy maxwellovského tělesa na slapové zatěžování se ve své nedávné teoretické studii podrobně věnuje také Correia a kol. (2014). Zahrnutí viskoelasticity vede k časové proměnnosti slapového rozestupu a v závislosti na vzájemném poměru periody slapového buzení a Maxwellova času (daného úhrnou viskozitou a modulem torse planety) dává vzniknout spin-orbitálním resonancím, aniž by bylo nutné předpokládat dodatečnou permanentní deformaci.

Z výše uvedených důvodů proto v práci nevyužíváme tradiční slapové teorie. Namísto toho původní plán rozšiřujeme tím, že k výpočtu slapového vývoje přistupujeme numericky. V závislosti na tvaru oběžné dráhy a počátečním poměru rotační a oběžné frekvence (spin-orbitálním poměru) určujeme časový průběh budící, slapotvorné síly a potenciálu a odpovídající reakci viskoelastické planety, řídící se Maxwellovou reologií. Dodatkovou sílu, vzniklou deformací planety, poté dosazujeme jako zdroj do tradičních poruchových rovnic nebeské mechaniky a souběžně s nimi řešíme i rovnici popisující vývoj rotační frekvence. Vedle slapového vývoje se věnujeme také tématu povrchové teploty, zpřesňujeme model z bakalářské práce a provádíme některé další parametrické studie, které byly v bakalářské práci vynechány.

Text je rozdělen na dvě tématicky odlišné kapitoly. V první kapitole se seznámíme s některými základními pojmy z nebeské mechaniky, odvodíme si dvě klasické sady poruchových rovnic, které popisují časové změny hlavní poloosy, výstřednosti a dalších elementů oběžné dráhy, a přiblížíme si běžně užívané slapové teorie. Představíme také vlastní numerický model a některé jeho výsledky, především s přihlédnutím k roli spin-orbitálních resonancí. Ve druhé kapitole se navrátíme k tématu bakalářské práce, tedy k insolaci a povrchové teplotě, shrneme její výsledky a popíšeme zpřesnění, kterými byla v průběhu uplynulých dvou let obdařena. Krátce budeme diskutovat také vliv rozložení povrchové teploty na podobu infračervených fotometrických křivek, jež by v budoucnu mohly napomoci k určení některých dosud neznámých parametrů extrasolárních planet.

V práci se setkáme s velkým množstvím veličin, pro přehlednost je proto přiložen seznam použitého značení. Vektorové veličiny jsou v obou kapitolách obvykle značeny tučně ( $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$ ), pouze v případě vyjádření funkční závislosti se v první kapitole uchylujeme k alternativnímu označení  $\vec{f}$ ,  $\vec{g}$ . Tensorové veličiny vyjadřujeme zdvojenými písmeny ( $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{J}$ ). Jelikož ve výkladu povětšinou čerpáme z cizojazyčné literatury, uvádíme u některých pojmů pro doplnění a pro možnost porovnání s dalšími prameny také jejich anglické ekvivalenty.



# 1. Slapový vývoj oběžné dráhy

V následující kapitole se budeme zabývat vývojem oběžné dráhy slapově deformované planety. Nejprve přiblížíme poruchovou teorii a některé pojmy z nebeské mechaniky, poté se zaměříme na tradičně užívaný popis slapového vývoje a nakonec představíme současné analytické přístupy k tomuto tématu, v nichž je reakce planety počítána za předpokladu viskoelastické reologie. Druhá část kapitoly bude věnována vlastnímu numerickému modelu a přehledu některých jeho předpovědí.

## 1.1 Problém dvou těles a Keplerovy elementy

Uvažujme jednoduchou soustavu tvořenou jedinou planetou a její mateřskou hvězdou. Jestliže jsou obě tělesa sféricky symetrická, můžeme je pro účel matematického popisu nahradit hmotnými body umístěnými v jejich střezech a působícími na sebe navzájem gravitační silou. Zajímá nás, po jakých trajektoriích se budou oba hmotné body pohybovat. Tento úkol, kterému se obvykle říká problém dvou těles (*two-body problem*) nebo Keplerova úloha, je patrně nejjednodušší integrabilní úlohou nebeské mechaniky a jeho podrobnému popisu jsou věnovány první kapitoly učebnic, z nichž následující stručný výklad čerpá (Brouwer a Clemence, 1961; Kovalevsky, 1967; Andrlé, 1971; Murray a Dermott, 1999).

Jelikož je naše myšlená hvězda podstatně hmotnější než obíhající planeta, umístíme počátek souřadné soustavy do jejího středu a budeme ji nadále pokládat za nehybnou. V obecném případě dvou hmotných bodů bývá zvykem ztotožnit počátek souřadného systému s těžištěm soustavy a nahradit dvojici těles  $m_1, m_2$  jediným hmotným bodem o redukované hmotnosti  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . V naší úloze je ovšem těžiště soustavy téměř shodné se středem hvězdy o hmotnosti  $M_*$  a myšlené těleso popsané redukovanou hmotností je prakticky totožné s planetou o hmotnosti  $m \ll M_*$ . Označíme-li polohový vektor planety  $\mathbf{r}$ , jeho velikost  $|\mathbf{r}| = r$  a Newtonovu gravitační konstantu  $\mathcal{G}$ , můžeme psát pohybovou rovnici problému dvou těles jako

$$\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G} \frac{M_*}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (1.1)$$

Jedná se o soustavu tří obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) druhého řádu, kterou je možné vhodnou substitucí převést na šestici ODR prvního řádu:

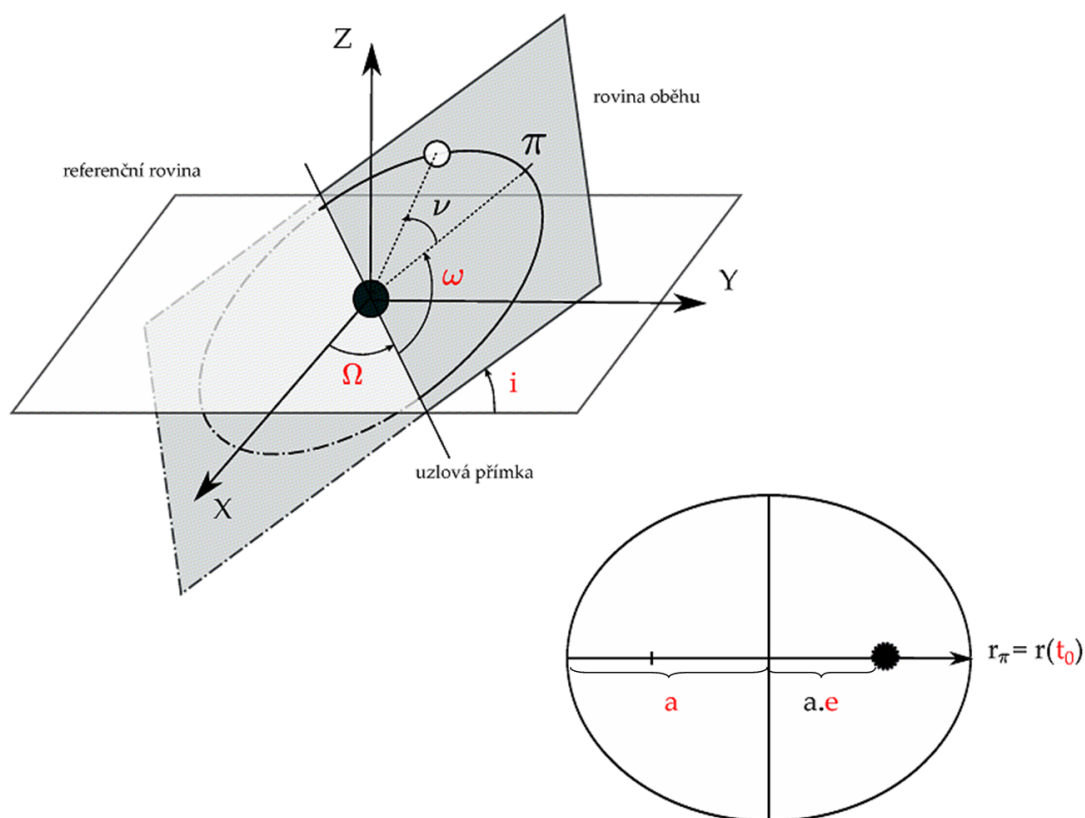
$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

$$\dot{\mathbf{v}} - \mathcal{G} \frac{M_*}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Veličina  $\mathbf{v}$  zde zjevně symbolizuje okamžitou rychlost planety. Řešení obou soustav závisí na šesti libovolných integračních konstantách  $c_1, \dots, c_6$ , jejichž číselné hodnoty jsou jednoznačně určeny počátečními podmínkami, tedy počáteční polohou a rychlostí

planety vůči hvězdě. Jaký fyzikální význam nyní přiřkneme této šestici parametrů, a tedy jakou konkrétní funkcí popíšeme řešení výše uvedených soustav rovnic, záleží čistě na typu úlohy, kterou se chceme zabývat. Trajektorie planety z problému dvou těles má tvar kuželosečky, v případě vázaného systému se jedná jmenovitě o elipsu, v jejímž jednom ohnisku leží mateřská hvězda (Murray a Dermott, 1999). Jestliže nás zajímá kinematika systému, tedy podoba této elipsy, její orientace v prostoru a poloha planety v libovolném okamžiku, je velice výhodné dosadit za integrační konstanty sadu Keplerových elementů, jimiž jsou: hlavní poloosa  $a$ , výstřednost dráhy  $e$ , sklon oběžné dráhy vůči referenční rovině  $i$ , délka výstupného uzlu  $\Omega$ , argument šířky periastra  $\omega$  a okamžik průchodu planety periastrum  $t_0$ . Geometrický význam těchto konstant je znázorněn na obrázku 1.1. Zatímco první dva elementy, hlavní poloosa a výstřednost dráhy, jednoznačně určují tvar výsledné elipsy, následující tři úhly (obdoba Eulerových úhlů) udávají její natočení vůči referenční inerciální soustavě  $XYZ$  a konečně poslední z elementů umožňuje nalézt okamžitou polohu planety ve dráze. Ta je zadána nelineárně rostoucí funkcí času  $\nu(t - t_0)$ , které se říká pravá anomálie (viz obrázek 1.1). K jejímu výpočtu se vrátíme později v popisu samotného numerického modelu.

Pokud nás více než tvar oběžné dráhy zajímá dynamika planetární soustavy, můžeme



**Obrázek 1.1:** Inerciální soustava  $XYZ$  a význam proměnných zavedených v textu. Úhlové Keplerovy elementy  $i$ ,  $\omega$ ,  $\Omega$  udávají orientaci dráhy v prostoru, zatímco hlavní poloosa  $a$  a výstřednost  $e$  popisují přesný tvar eliptické dráhy a  $t_0$  představuje okamžik průchodu obíhajícího tělesa pericentrem  $\pi$ . Úhel  $\nu$  je pravá anomálie. Referenční rovinou může být například rovina rovníku.

namísto Keplerových elementů použít kanonické proměnné, tedy takové zobecněné souřadnice a hybnosti, které splňují Hamiltonovy kanonické rovnice (např. Landau a Lifšic, 1976). Zobecněnými souřadnicemi myslíme v problému dvou těles celkovou energii soustavy, velikost celkového momentu hybnosti a velikost  $z$ -ové složky momentu hybnosti. K nim přidruženými zobecněnými hybnostmi jsou okamžik průchodu periastrum, záporně vzatá délka výstupného uzlu a záporně vzatý argument periastra (Kovalevsky, 1967). S pozměněnou sadou kanonických proměnných se krátce setkáme v následujícím oddíle, během odvození Lagrangeových poruchových rovnic. Poté se ovšem vrátíme zpět ke Keplerovým elementům a dlouhodobý vývoj oběžné dráhy budeme popisovat v pojmech hlavní poloosy a výstřednosti.

## 1.2 Poruchový počet v nebeské mechanice

### 1.2.1 Podmínky oskulace a oskulační elementy

Jak již bylo uvedeno, řešením problému dvou těles je oběžná dráha ve tvaru kuželosečky. Studovaná planeta obíhá kolem mateřské hvězdy po elipse popsané šesticí Keplerových elementů, které se v čase nemění. Zachovává se celková energie soustavy, celkový moment hybnosti, a také poloha periastra<sup>1</sup>. Problém dvou těles je ovšem silně idealizovanou úlohou. Ve skutečném planetárním systému bude pohyb studované planety ovlivňován například gravitačním působením ostatních oběžnic, přítomností hmotného prostředí, zploštěním mateřské hvězdy, a konečně také vlastní deformací planety, odchylující ji od sférické symetrie. Ačkoliv se v této práci zabýváme pouze slapovou deformací a ostatní zmíněné jevy neuvažujeme, přiblížíme si nyní poruchovou teorii, kterou je možno uplatnit na zcela obecné případy slabě rušeného problému dvou těles.

Předpokládejme, že planeta se nadále nachází v poli centrální síly, které je generováno hmotou mateřské hvězdy. Do tohoto pole však nyní vneseme malou poruchu, popsanou dodatečnou silou  $\varepsilon \mathbf{f}$ , již můžeme vyjádřit jako zdroj na pravé straně soustavy (1.1). Nová soustava obyčejných diferenciálních rovnic,

$$\ddot{\mathbf{r}} - \mathcal{G} \frac{M_*}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}, \quad (1.4)$$

případně

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \quad (1.5)$$

$$\dot{\mathbf{v}} - \mathcal{G} \frac{M_*}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}. \quad (1.6)$$

bývá obvykle řešena metodou variace konstant (Brouwer a Clemence, 1961): V každém časovém okamžiku  $t$  hledáme takovou šesticí konstant  $c_j$ , například Keplerových

<sup>1</sup>Zachování pozice periastra souvisí se zachováním Laplace-Runge-Lenzova vektoru, který je, stejně jako celková energie a moment hybnosti systému, jedním z integrálů pohybu.

elementů, pro něž jsou vektorové funkce

$$\mathbf{r} = \vec{f}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad (1.7)$$

$$\mathbf{v} = \vec{g}(t, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6), \quad (1.8)$$

odpovídající okamžité poloze a rychlosti v nerušeném problému dvou těles, řešením šestice rovnic (1.5) a (1.6). Po dosazení tohoto ansatzu získáváme soustavu rovnic pro „integrační konstanty“  $c_j$ :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \vec{f}}{\partial c_j} \dot{c}_j = \mathbf{v}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial t} + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial \vec{g}}{\partial c_j} \dot{c}_j - \mathcal{G} \frac{M_*}{r^3} \mathbf{r} = \varepsilon \mathbf{f}. \quad (1.10)$$

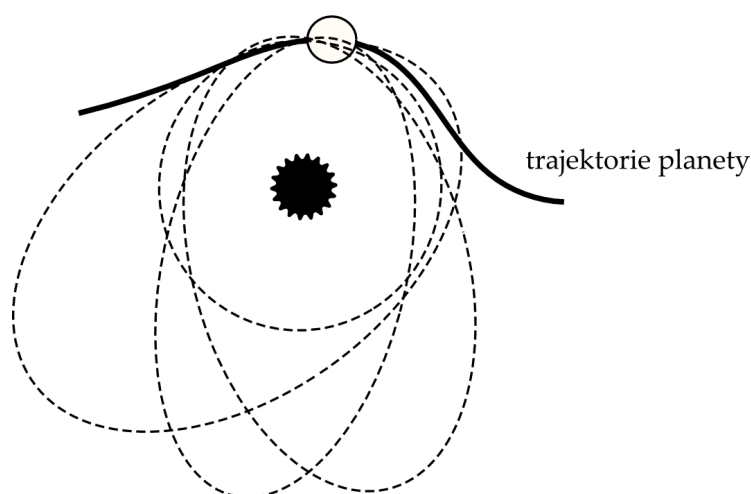
Z geometrického hlediska vypadá naše úloha následovně: Pro zadanou malou poruchu  $\varepsilon \mathbf{f}$  oproti problému dvou těles hledáme v každém okamžiku takovou elipsu, která prochází planetou a jejíž jedno ohnisko leží uvnitř mateřské hvězdy. Tato eliptická dráha zde již nemá žádný fyzikální význam a slouží pouze jako pomocné, známé řešení v matematické formulaci úlohy. Úloha ovšem není zadána jednoznačně (obrázek 1.2). Uvedená podmínka eliptické dráhy v každém časovém okamžiku  $t$  nevymezuje jedinou, nýbrž nekonečně mnoho přípustných trajektorií, po kterých by se mohla planeta v pomocné nerušené soustavě pohybovat. Už samotná oběžná rovina je tu určena pouze dvěma body, okamžitou pozicí hvězdy a okamžitou pozicí planety. Pro její „uchycení“ v prostoru, tedy pro jednoznačné zadání její prostorové orientace, je nutno předepsat trojici dodatečných vazeb, odpovídajících určení třetího bodu, kterým by měla rovina procházet. Máme-li jednoznačně určenu orientaci oběžné roviny, stále ještě existuje nekonečně mnoho eliptických oběžných drah, které v této rovině leží a současně jsou řešením rovnic (1.5) – (1.6) s ansatzem (1.7) – (1.8). Tyto elipsy se vzájemně liší svou hlavní poloosou, výstředností a pozicí periastra, tedy další trojicí parametrů.

Shrneme-li sdělení předcházejícího odstavce, jednoznačné řešení rovnic (1.9) a (1.10) vyžaduje zadání šestice dodatečných vazeb, které nejsou obsaženy ve fyzikální formulaci úlohy. Tyto vazby nemají žádný vliv na výslednou trajektorii planety a můžeme je zvolit zcela libovolně tak, aby pokud možno zjednodušily matematický popis úlohy. Tématu volnosti ve volbě dodatečných vazeb, neboli kalibrační symetrii rušené Keplerovy úlohy, se podrobněji věnoval například Efroimsky (2005). Výhodnou sadu vazeb, užívanou ve většině úloh týkajících se poruchového počtu v nebeské mechanice, tvoří šestice tzv. podmínek oskulace, někdy také nazývaných Lagrangeovy vazby (*Lagrange constraint*):

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial \vec{f}}{\partial c_j} \dot{c}_j = \mathbf{0}, \quad (1.11)$$

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\partial \vec{g}}{\partial c_j} \dot{c}_j = \varepsilon \mathbf{f}. \quad (1.12)$$





**Obrázek 1.2:** Nejednoznačnost řešení soustavy rovnic (1.9) – (1.10) pro integrační konstanty v rušeném problému dvou těles. V každém okamžiku můžeme pozici planety vyjádřit jako funkci elementů kterékoliv z nekonečně mnoha pomocných eliptických drah.

Jejich význam vyplyne po dosazení do soustavy rovnic (1.9) a (1.10): Předepsáním podmínek oskulace jsme si za pomocné, aproximativní řešení rušeného problému dvou těles v každém časovém okamžiku zvolili takovou eliptickou dráhu, po které by se planeta pohybovala, kdyby byla porucha v té chvíli náhle vypnuta (Kovalevsky, 1967). Parametrům  $c_j(t)$  této okamžité elipsy budeme říkat oskulační elementy. Na časový vývoj oskulačních elementů lze pak nahlížet jako na krátkodobé nebo dlouhodobé změny eliptické oběžné dráhy, které se obvykle popisují jednou ze dvou soustav poruchových rovnic. Obě soustavy budou odvozeny v následujících pododdílech.

## 1.2.2 Lagrangeovy poruchové rovnice

Soustava Lagrangeových rovnic popisuje vývoj oběžné dráhy pod působením poruchy, kterou je možno zapsat ve formě potenciálu. V literatuře se obvykle rozlišuje pojem poruchového potenciálu  $\mathcal{V}$  a poruchové funkce  $\mathcal{R}$ , které je na sebe možno převádět vztahem  $\mathcal{R} = -\frac{1}{\mu}\mathcal{V}$ , kde  $\mu$  je již dříve zmíněná redukovaná hmotnost, zastoupená v naší úloze hmotností planety  $m$ . Jelikož veškeré výrazy doposud uvedené v této práci, počínaje pohybovou rovnicí problému dvou těles (1.1), nenulovou hmotností  $m$  krátíme, bude v následujícím výkladu vhodnější vyjadřovat poruchu pomocí poruchové funkce. Toto vyjádření je konsistentní například s texty Kaula (1964) a Kovalevsky (1967). Definujme tedy poruchovou funkci  $\mathcal{R}$  pomocí vztahu

$$\varepsilon \mathbf{f} = \nabla \mathcal{R} = \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \right). \quad (1.13)$$

Dosazením této definice do podmínek oskulace a jejich rozvinutím do složek, kdy budeme psát  $\vec{f} = (x, y, z)$  a  $\vec{g} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , dospíváme k následující soustavě lineárních rovnic pro časovou derivaci oskulačních elementů  $\dot{c}_j$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial c_1} & \frac{\partial x}{\partial c_2} & \frac{\partial x}{\partial c_3} & \frac{\partial x}{\partial c_4} & \frac{\partial x}{\partial c_5} & \frac{\partial x}{\partial c_6} \\ \frac{\partial y}{\partial c_1} & \frac{\partial y}{\partial c_2} & \frac{\partial y}{\partial c_3} & \frac{\partial y}{\partial c_4} & \frac{\partial y}{\partial c_5} & \frac{\partial y}{\partial c_6} \\ \frac{\partial z}{\partial c_1} & \frac{\partial z}{\partial c_2} & \frac{\partial z}{\partial c_3} & \frac{\partial z}{\partial c_4} & \frac{\partial z}{\partial c_5} & \frac{\partial z}{\partial c_6} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_2} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_3} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_4} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_5} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_6} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_2} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_3} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_4} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_5} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_6} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_1} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_2} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_3} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_4} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_5} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \dot{c}_4 \\ \dot{c}_5 \\ \dot{c}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Matrice této soustavy obsahuje 36 různých koeficientů, jednoduchým postupem ji však lze převést do antisymetrického tvaru. První řádek matice (a první řádek pravé strany) vynásobíme faktorem  $-\frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j}$ , druhý pak  $-\frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j}$  a jednotlivé další řádky násobíme po řadě faktory  $-\frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j}$ ,  $+\frac{\partial x}{\partial c_j}$ ,  $+\frac{\partial y}{\partial c_j}$ ,  $+\frac{\partial z}{\partial c_j}$ , kde  $j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ . Všechny řádky poté sečteme, čímž získáme  $j$ -tý řádek nové matice soustavy a  $j$ -tý element nové pravé strany. Po zavedení Lagrangeových závorek (Brouwer a Clemence, 1961, odtud přejímáme i značení na druhém řádku),

$$\begin{aligned} [c_j, c_k] &:= \frac{\partial x}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_k} - \frac{\partial x}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{x}}{\partial c_j} + \frac{\partial y}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_k} - \frac{\partial y}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{y}}{\partial c_j} + \frac{\partial z}{\partial c_j} \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_k} - \frac{\partial z}{\partial c_k} \frac{\partial \dot{z}}{\partial c_j} = \\ &= \frac{(x, \dot{x})}{(c_j, c_k)} + \frac{(y, \dot{y})}{(c_j, c_k)} + \frac{(z, \dot{z})}{(c_j, c_k)}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

přechází soustava do tvaru

$$\begin{pmatrix} [c_1, c_1] & [c_1, c_2] & [c_1, c_3] & [c_1, c_4] & [c_1, c_5] & [c_1, c_6] \\ [c_2, c_1] & [c_2, c_2] & [c_2, c_3] & [c_2, c_4] & [c_2, c_5] & [c_2, c_6] \\ [c_3, c_1] & [c_3, c_2] & [c_3, c_3] & [c_3, c_4] & [c_3, c_5] & [c_3, c_6] \\ [c_4, c_1] & [c_4, c_2] & [c_4, c_3] & [c_4, c_4] & [c_4, c_5] & [c_4, c_6] \\ [c_5, c_1] & [c_5, c_2] & [c_5, c_3] & [c_5, c_4] & [c_5, c_5] & [c_5, c_6] \\ [c_6, c_1] & [c_6, c_2] & [c_6, c_3] & [c_6, c_4] & [c_6, c_5] & [c_6, c_6] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1 \\ \dot{c}_2 \\ \dot{c}_3 \\ \dot{c}_4 \\ \dot{c}_5 \\ \dot{c}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_1} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_2} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_3} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_4} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_5} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_6} \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

kde navíc platí  $[c_j, c_j] = 0$  a  $[c_j, c_k] = -[c_k, c_j]$ . Jedinečných koeficientů, jež vystupují v nové soustavě, je tedy již jen patnáct. Pro určení časového vývoje oskulačních elementů stačí uvedené závorky vyčíslit a matici soustavy poté invertovat. A právě v tomto

okamžiku, při vyčíslení Lagrangeových závorek, využijeme kanonických elementů, tedy té šestice integračních konstant v problému dvou těles, které výhodně popisují dynamiku soustavy.

Zmíněnými kanonickými elementy byly celková energie soustavy, celkový moment hybnosti,  $z$ -ová složka momentu hybnosti, okamžik průchodu periastrum a dva záporně vzaté úhly: délka výstupného uzlu a argument periastra. Namísto okamžiku průchodu periastrum je vhodnější zavést třetí úhel, kterému budeme říkat střední anomálie,

$$l(t) = n(t - t_0) = nt + \sigma. \quad (1.17)$$

Jedná se o úhel vytyčený periastrum, mateřskou hvězdou a hypotetickou planetou, která kolem hvězdy obíhá po kruhové dráze s poloměrem rovným hlavní poloose  $a$  za stejný čas  $T_{\text{orb}}$ , za který oběhne studovaná planeta po reálné eliptické dráze. Veličina  $n = \frac{2\pi}{T_{\text{orb}}}$  se nazývá střední pohyb (*mean motion*) a  $\sigma = -nt_0$  je konstanta udávající polohu pericentra vůči zvolenému referenčnímu směru.

Jestliže je v sadě kanonických proměnných nahrazen okamžik průchodu periastrum střední anomálií, přestávají platit dvě z Hamiltonových kanonických rovnic. Aby byla jejich platnost zachována, je nutné současně s náhradou  $t_0$  nahradit též tu zobecněnou souřadnici, která měla doposud význam celkové energie soustavy (celková energie a okamžik průchodu periastrum jsou totiž vzájemně kanonicky sdružené). Touto náhradou získáváme sadu Delaunayho kanonických proměnných (např. Šidlichovský). Energie soustavy zde přechází v novou zobecněnou souřadnici  $L$ , zatímco moment hybnosti a jeho složka kolmá na referenční rovinu  $XY$  z obrázku 1.1 zůstávají nezměněny a jsou značeny písmeny  $G$  a  $H$ . Přeznačením prošly též zobecněné hybnosti. Celá sada Delaunayho elementů, společně s jejich vztahem ke Keplerovým elementům, je uvedena na následujících řádcích.

Zobecněné souřadnice:

$$L = \sqrt{\mathcal{G}M_*a} \quad G = L\sqrt{1 - e^2} \quad H = G \cos i \quad (1.18)$$

Zobecněné hybnosti:

$$l = l \quad g = \omega \quad h = \Omega \quad (1.19)$$

Lagrangeovy závorky lze nyní s využitím Delaunayho kanonických proměnných a notace zavedené ve vztahu (1.15) vyjádřit jako

$$[c_j, c_k] = \frac{(\sigma, L)}{(c_j, c_k)} + \frac{(\omega, G)}{(c_j, c_k)} + \frac{(\Omega, H)}{(c_j, c_k)}. \quad (1.20)$$

Důkaz této rovnosti za pomoci rotací ve fázovém prostoru, neboli Whittakerovou metodou, je podán v knize (Brouwer a Clemence, 1961).

Za sadu oskulačních elementů  $c_j$  budeme dále dosazovat Keplerovy elementy. S využitím vztahů (1.18) – (1.19) můžeme Lagrangeovy závorky snadno vyčíslit a pokračovat

tak v úpravě soustavy (1.16). Z původních patnácti jedinečných koeficientů vystupujících v matici této soustavy zůstalo po vyčíslení pouze šest nenulových, jmenovitě

$$\begin{aligned} [a, \sigma] &= -\frac{1}{2}na & [e, \omega] &= \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} & [i, \Omega] &= na^2\sqrt{1-e^2}\sin i \\ [a, \omega] &= -\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2} & [e, \Omega] &= \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}}\cos i \\ [a, \Omega] &= -\frac{1}{2}na\sqrt{1-e^2}\cos i \end{aligned}$$

Soustava se tak rozpadá na dvě menší sady rovnic, z nichž jedna popisuje vývoj tvaru a sklonu oběžné dráhy a druhá popisuje změny úhlových proměnných, například stáčení uzlové přímky nebo periastra.

$$\begin{pmatrix} -[a, \sigma] & 0 & 0 \\ -[a, \omega] & -[e, \omega] & 0 \\ -[a, \Omega] & -[e, \Omega] & -[i, \Omega] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{e} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

$$\begin{pmatrix} [i, \Omega] & 0 & 0 \\ [e, \Omega] & [e, \omega] & 0 \\ [a, \Omega] & [a, \omega] & [a, \sigma] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\Omega} \\ \dot{\omega} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

Tyto soustavy je již možné vyřešit dopřednou substitucí. Tím konečně získáváme Lagrangeovy poruchové rovnice, které popisují časový vývoj Keplerových elementů pro planetu, jejíž oběh kolem výrazně hmotnější mateřské hvězdy je ovlivňován poruchou vyjádřitelnou ve formě potenciálu.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}\end{aligned}$$

### 1.2.3 Gaussovy poruchové rovnice

Existuje ovšem i významná třída poruch, které ve formě potenciálu zapsat nelze. Projevují se například v situaci, kdy rušené těleso, ať již planeta nebo třeba družice, prochází hmotným prostředím – atmosférou nebo prachoplynným diskem. V těchto případech klade prostředí pohybu studovaného tělesa odpor, jenž závisí na rychlosti. Poruchu je pak nutné vyjadřovat přímo poruchovou silou  $\varepsilon f$ . Na následujících řádcích si odvodíme sadu Gaussových poruchových rovnic, na jejichž pravé straně vystupují složky poruchové síly vyjádřené ve válcovém souřadném systému  $\tilde{r}\psi z$  s počátkem ve hvězdě a korotujícím společně s oběhem planety. První z těchto složek,  $R$ , leží v oběžné rovině a vyjadřuje sílu působící na planetu v radiálním směru, tedy ve směru průvodiče. Druhá složka,  $S$ , rovněž leží v oběžné rovině a míří kolmo k  $R$ , ve směru oběhu. Vyjadřuje tedy sílu, která způsobuje urychlení či zpomalení planety ve dráze. Třetí složka,  $W$ , je na oběžnou rovinu kolmá a její orientace je shodná s orientací momentu hybnosti spjatého s oběhem.

K odvození Gaussových rovnic využijeme již známé sady Lagrangeových poruchových rovnic. Vztah mezi jednotlivými složkami poruchové síly a poruchovou funkcí  $\mathcal{R}$  lze získat rozepsáním definice (1.13):

$$R = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \tilde{r}} \quad S = \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \psi} \quad W = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \quad (1.24)$$

Díky řetězovému pravidlu můžeme parciální derivaci poruchové funkce podle kteréhokoliv z Keplerových elementů  $c_j$  vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_j} = R \frac{\partial \tilde{r}}{\partial c_j} + \tilde{r} S \frac{\partial \psi}{\partial c_j} + W \frac{\partial z}{\partial c_j} \quad (1.25)$$

a po vyčíslení všech nenulových parciálních derivací vystupujících v tomto výrazu

dospějeme k následující šesti rovnostím (podle Brouwer a Clemence, 1961):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} &= \frac{r}{a} R \\
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} &= -a \cos(\nu) R + r \left( \frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2} \right) \sin(\nu) S \\
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i} &= r \sin(\omega + \nu) W \\
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} &= r S \\
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} &= \cos(i) r S - r \cos(\omega + \nu) \sin(i) W \\
\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma} &= \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}} \sin(\nu) R + \frac{a^2}{r} \sqrt{1-e^2} S
\end{aligned} \tag{1.26}$$

kde  $\nu$  značí pravou anomálii. Dosazením do Lagrangeových rovnic (1.23) tedy získáváme sadu Gaussových poruchových rovnic, které popisují vývoj Keplerových elementů pro těleso podléhající obecné malé poruše, vyjádřené poruchovou silou  $\varepsilon f = (R, S, W)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ eR \sin \nu + \frac{p}{r} S \right] \\
\frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ eR \sin \nu + \left( \frac{p}{r} - \frac{r}{a} \right) S \right] \\
\frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} W \cos(\omega + \nu) \\
\sin i \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} W \sin(\omega + \nu) \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ -R \cos \nu + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) S \sin \nu \right] - \cos i \frac{d\Omega}{dt} \\
\frac{d\sigma}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{r}{a} R - \sqrt{1-e^2} \left( \frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Veličina  $p = a(1-e^2)$  se nazývá parametr elipsy (*semi-latus rectum*) a souvisí s celkovým momentem hybnosti soustavy (viz definice Delaunayho elementu  $G$  v (1.18)), během vývoje dráhy se tedy zachovává.

Gaussův tvar poruchových rovnic je výhodný nejen proto, že umožňuje zadání poruchy ve tvaru obecné síly, ale také proto, že se v něm nevyskytují žádné parciální derivace tohoto „zdrojového“ členu. Ke Gaussovým rovnicím se proto vrátíme ve druhé části kapitoly, v oddíle, jenž bude věnován našemu numerickému modelu.

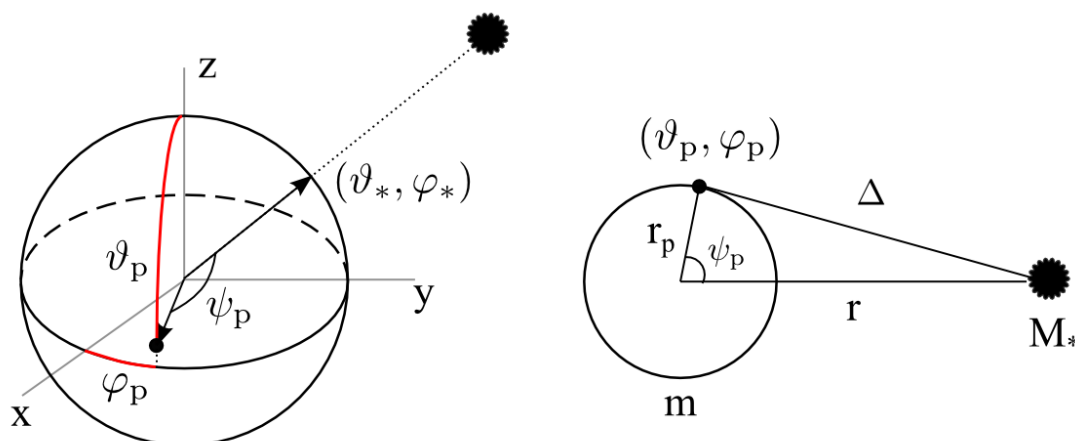
## 1.3 Tradiční slapové teorie

### 1.3.1 Slapová deformace a její popis

Doposud jsme se zabývali obecnou poruchovou teorií v nebeské mechanice. V následujícím oddíle se však již zaměříme na konkrétní zdroj poruchy v problému dvou těles, a to na slapovou deformaci planety, buzenou gravitačním působením mateřské hvězdy. Budeme-li planetu na počátku považovat za dokonale tuhou, lze potenciál v libovolném bodě  $(r_p, \vartheta_p, \varphi_p)$  na jejím povrchu psát jako

$$U_g(r_p, \vartheta_p, \varphi_p) = \frac{GM_*}{\Delta} = \frac{GM_*}{r} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r_p}{r}\right)^j \mathcal{P}_j(\cos \psi_p), \quad (1.28)$$

kde  $r_p$  značí poloměr planety, úhly  $\vartheta_p$  a  $\varphi_p$  jsou planetopisná košířka a délka pozorovatele, měřená v souřadné soustavě pevně spjaté s planetou a mající počátek v jejím středu,  $\psi_p$  je úhel mezi tímto pozorovatelem a místem na povrchu planety, nad kterým se právě nachází hvězda (substelární bod) a konečně  $\mathcal{P}_j$  značí Legendreovy polynomy (viz Novotný, 1998). Celé geometrické uspořádání je načrtnuto na obrázku 1.3.



**Obrázek 1.3:** Planeta a slapotvorné těleso. Slapotvorné těleso má hmotnost  $M_*$  a nachází se ve vzdálenosti  $r$  od počátku planetocentrické souřadné soustavy  $xyz$ . Symboly  $\vartheta_p$  a  $\varphi_p$  značí planetopisnou košířku a délku libovolného bodu na povrchu tělesa o poloměru  $r_p$  a hmotnosti  $m$ , veličiny  $\vartheta_*$  a  $\varphi_*$  pak představují souřadnice substelárního (či sublunárního) bodu.

Jestliže studovaná planeta není ideálně tuhá, ale reaguje na slapové zatěžování elasticky, dochází pod působením potenciálu (1.28) k deformaci jejího povrchu<sup>2</sup> a ke vzbuzení dodatkového potenciálu  $\delta U$ . Než pokročíme k vyložení dalších pojmů vystupujících ve slapových teoriích, bude nutné se zaměřit na příslušné názvosloví, jmenovitě na pojem slapového potenciálu, jehož použití není v literatuře jednotné. Zatímco některé články zabývající se vývojem oběžné dráhy (Kaula, 1964; Néron de Surgy a Laskar, 1997; Correia a Laskar, 2010) nazývají slapovým potenciálem (*tidal*

<sup>2</sup>Za deformaci planetárního povrchu zodpovídají členy rozvoje potenciálu na stupních  $j \geq 2$ .

*potential*) právě dodatkový potenciál  $\delta\mathcal{U}$ , v dílech týkajících se fyzikální geodézie nebo tíhového pole Země (Burša a Pěč, 1988; Torge, 2001) je slapovým či slapotvorným potenciálem naopak část původního  $\mathcal{U}_g$  na stupních vyšších než 1, tedy

$$\mathcal{U}(r_p, \vartheta_p, \varphi_p) = \frac{\mathcal{G}M_*}{\Delta} = \frac{\mathcal{G}M_*}{r} \sum_{j=2}^{\infty} \left(\frac{r_p}{r}\right)^j \mathcal{P}_j(\cos \psi_p), \quad (1.29)$$

V této práci se podržíme názvosloví geodetického a veličině  $\mathcal{U}$  budeme nadále říkat slapotvorný potenciál, zatímco jeho přírůstek způsobenému deformací povrchu zachováme název dodatkový potenciál. Dodatkový potenciál by při vývoji oběžné dráhy popsaném Lagrangeovými poruchovými rovnicemi hrál roli poruchové funkce  $\mathcal{R}$ , zavedené v předcházejícím textu.

Slapová deformace sféricky symetrické, nerotující, elastické planety bývá tradičně popisována pomocí tří Loveových čísel,  $h$ ,  $k$ ,  $l$ , přičemž poslednímu z uvedených se říká také Shidovo číslo (Torge, 2001). Zatímco parametry  $h$  a  $l$  popisují radiální, respektive laterální složku deformace povrchu v poměru ke slapotvornému potenciálu, číslo  $k$  charakterizuje relativní velikost dodatkového potenciálu a je zavedeno vztahem

$$k = \frac{\delta\mathcal{U}}{\mathcal{U}}. \quad (1.30)$$

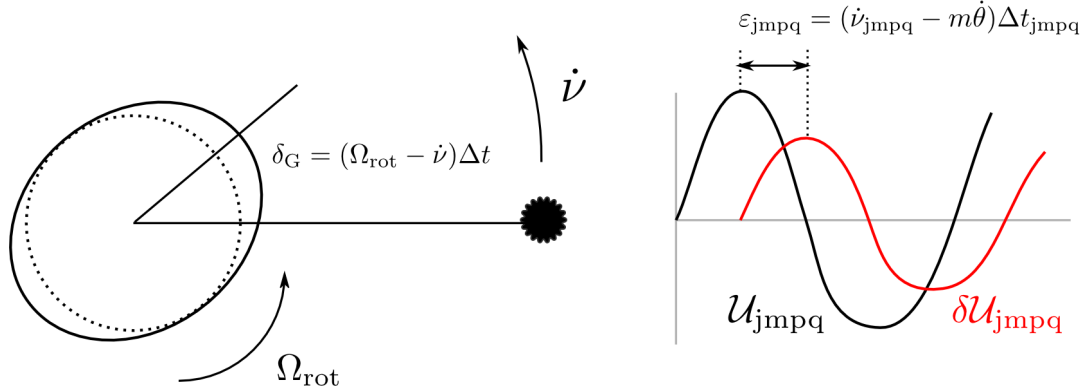
Loveova čísla je možné zavést také pro jednotlivé stupně rozvoje do Legendreových polynomů. Číslo  $k_j$ , popisující poměrný přírůstek potenciálu na stupni  $j$ , pak definujeme jako

$$k_j = \frac{\delta\mathcal{U}_j}{\mathcal{U}_j}. \quad (1.31)$$

Elastická planeta by na slapové zatížení reagovala okamžitě, největší radiální posunutí a největší přírůstek potenciálu by tedy byly pozorovány na spojnici středů hvězdy a planety. V reálném případě však vlivem tření uvnitř planetárního tělesa dochází k určitému časovému posuvu a v závislosti na poměru oběžné a rotační frekvence se dodatkový potenciál v daném místě na povrchu oproti slapotvornému více či méně zpožďuje. K popisu tohoto zpoždění lze přistoupit několika způsoby, za použití různě definovaných slapových rozestupů (viz obrázek 1.4).

Nejprve uvažme, že slapotvorné těleso, například měsíc, zdvihá na planetě jedinou dvojici výdutí, které s plynutím času po planetě postupují a v závislosti na okamžité vzdálenosti slapotvorného tělesa mění svou výšku. Geometrický rozestup  $\delta_G$  (Gerstenkorn, 1955; MacDonald, 1964) je pak zaveden jako úhel měsíc-střed planety-slapová výduť a je vždy menší než  $\pi$ . Obdobně bychom mohli definovat také časový rozestup  $\Delta t$  (Mignard, 1979; Hut, 1981; Néron de Surgy a Laskar, 1997), který představuje rozdíl mezi okamžikem, kdy nad zadaným místem na planetě prošlo slapotvorné těleso a okamžikem, kdy byla v tomtéž místě zdvižena slapová výduť. Oba tyto rozestupy jsou navzájem spjaty vztahem





**Obrázek 1.4:** Rozdílná zavedení slapového rozestupu. Popisujeme-li celkovou deformaci planety pomocí jediné dvojice slapových výdutí (vlevo), můžeme jejich odklon od průvodiče slapotvorného tělesa charakterizovat geometrickým rozestupem  $\delta_G$  nebo časovým rozestupem  $\Delta t$ . Obě veličiny jsou spolu spjaty prostřednictvím okamžité slapové frekvence  $\omega_t = \Omega_{\text{rot}} - \dot{\nu}$ . Rozvíjíme-li naopak slapotvorný i dodatkový potenciál do Fourierových řad (vpravo – schéma časového průběhu obou potenciálů), lze pro každý člen takového rozvoje zavést fázový rozestup  $\varepsilon_{\text{jmpq}}$ , případně i odpovídající časový rozestup  $\Delta t_{\text{jmpq}}$ . Úhlovou proměnnou  $\nu_{\text{jmpq}}$  definujeme v pododdíle 1.3.2.

$$\delta_G = \omega_t \Delta t, \quad (1.32)$$

kde  $\omega_t$  značí frekvenci slapového buzení. Jiný přístup k charakterizaci slapového rozestupu lze nalézt v pracích Darwina (1880), Kauly (1964) a jejich následovníků, kteří rozvíjejí slapotvorný i dodatkový potenciál v nekonečnou řadu a každému ze členů tohoto rozvoje přisuzují jiný fázový rozestup  $\varepsilon_{\text{jmpq}}$ , zamýšlený jako rozdíl fází dvou periodických funkcí (viz následující pododdíle). V případě rychle rotujících planet, kdy v rozvoji převládá „půldenní“ člen s  $(j, m, p, q) = (2, 2, 0, 0)$ , pak platí rovnost

$$\varepsilon_{2200} = 2\delta_G. \quad (1.33)$$

Pro takto zavedený fázový rozestup lze definovat jeho časový ekvivalent obdobně jako v případě geometrického rozestupu (1.32).

Veškeré uvedené veličiny jsou obecně frekvenčně závislé a předepsání vhodného tvaru této závislosti, daného uvažovanou reologií planety, se ukazuje být pro realistickou předpověď slapového vývoje rozhodujícím (viz Makarov a Efroimsky, 2013). K tématu se proto v následujícím textu ještě vrátíme.

Vlivem tření uvnitř slapově deformovaného tělesa dochází také k disipaci mechanické energie a její přeměně na teplo, tedy ke slapovému zahřívání. Efektivita této disipace, či přesněji její převrácená hodnota, se vyjadřuje faktorem kvality  $Q$  (Goldreich, 1963), jenž definujeme jako

$$Q = \frac{2\pi E_{\text{peak}}}{\Delta E}, \quad (1.34)$$

kde  $E_{\text{peak}}$  značí maximální energii spjatou s deformací planety během jednoho slapového cyklu a  $\Delta E$  představuje energii během téhož cyklu disipovanou. Faktor kvality terestrických planet nabývá zpravidla hodnot mezi 10 a 500, zatímco pro plynné obry dosahuje jeho hodnota až desítek či stovek tisíců (Goldreich a Soter, 1966). Známeli faktor kvality studované planety, můžeme fázový rozestup mezi slapotvorným a dodatkovým potenciálem určit ze vztahu (Kaula, 1964)

$$\sin \varepsilon_{2200} = \frac{1}{Q}. \quad (1.35)$$

### 1.3.2 Darwinova-Kaulova expanze

Matematické studii slapového vývoje oběžné dráhy se poprvé zevrubně věnoval britský matematik a astronom sir George Darwin. Ve svém obsáhlém článku (Darwin, 1880) uvažuje homogenní nestlačitelnou viskózní planetu, „zemi“, obíhanou dvěma satelity, „měsícem“ a Dianou. Jeden ze satelitů (Diana) v soustavě formálně vzbuzuje slapotvorný potenciál, zatímco druhý (měsíc) reaguje na poruchu, vzniklou slapovou deformací země. Oba satelity je ovšem možno na konci výpočtu ztotožnit a získat tak úlohu shodnou s naší.

Darwin rozvíjí slapotvorný potenciál do sférických harmonik na stupni 2, jeho časový vývoj pak vyjadřuje ve formě Fourierových řad s koeficienty závislými na úhlových proměnných. Tyto funkce úhlových proměnných následně rozvíjí do řad v excentricitě. Získává tak sérii půldenních, denních a měsíčních slapových vln o nejrůznějších frekvencích, jež jsou lineární kombinací rotační frekvence země a oběžné frekvence (tedy středního pohybu) slapotvorné oběžnice. Každý ze členů prostorového a časového harmonického rozvoje slapotvorného potenciálu vyvolává v zemi odezvu na tomtéž stupni  $i$  řádu a s totožnou frekvencí, odezva je oproti buzení pouze posunuta o fázový rozestup, způsobený neelasticitou země. Tento rozestup je v Darwinově článku zaveden jako zcela obecná funkce frekvence. Podrobněji se Darwin věnuje případu málo viskózní země, kdy fázový rozestup závisí na frekvenci slapového buzení lineárně.

Na Darwinovu práci navázal v šedesátých letech minulého století William M. Kaula, který rozvoj slapotvorného potenciálu do řad zobecnil (Kaula, 1961) a následně aplikoval na studium slapového vývoje soustavy Země-Měsíc (Kaula, 1964). Potenciál při povrchu planety zde nabývá tvaru

$$\mathcal{U}(r_p, \vartheta_p, \varphi_p) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=0}^j \sum_{p=0}^j \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_{jmq}, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{jmq} = \frac{\mathcal{G}M_*}{a^*} \left(\frac{r_p}{a^*}\right)^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} (2 - \delta_{0m}) \mathcal{P}_{jm}(\cos \vartheta_p) \mathcal{F}_{jmq}(i^*) \mathcal{G}_{jq}(e^*) \times \\ \times \begin{cases} \cos & j-m \text{ sudé} \\ -\sin & j-m \text{ liché} \end{cases} \{v_{jmq}^* - m(\varphi_p + \theta^*)\}, \quad (1.37) \end{aligned}$$

kde  $\nu_{jmq}^*$  představuje kombinaci úhlových proměnných,

$$\nu_{jmq}^* = (j - 2p)\omega^* + (j - 2p + q)l^* + m\Omega^*, \quad (1.38)$$

hvězdičky označují veličiny, které se vážou ke slapotvornému tělesu, a symbol  $\theta^*$  značí hvězdný čas, neboli úhel mezi osou  $X'$  v inerciální vztažné soustavě s počátkem v planetě a nultým poledníkem, jenž zavedeme později. Druhou veličinou, která vnáší do výrazu pro slapotvorný potenciál časovou proměnnost, je již známá střední anomálie  $l^*$ . Tvar oběžné dráhy a její orientace v prostoru se vyjadřuje za pomoci funkcí excentricity  $\mathcal{G}_{jmq}(e)$  a funkcí inklinace  $\mathcal{F}_{jmq}(i)$ , definovaných ve článku Kaula (1961)<sup>3</sup>.

Každý ze členů Kaulova rozvoje vyvolává v planetě odpovídající odezvu, a dodatkový potenciál ve vzdálenosti  $r > r_p$  tak můžeme vyjádřit jako součet členů ve tvaru

$$\delta\mathcal{U}_{jmq}(r) = \left(\frac{r_p}{r}\right)^{j+1} k_j [\mathcal{U}_{jmq}(r_p)]_{\text{lag}}, \quad (1.39)$$

přičemž slovem „lag“ naznačujeme, že do argumentu goniometrických funkcí vystupujících ve vyjádření pro slapotvorný potenciál (1.37) je nutno doplnit záporně vzatou veličinu  $\varepsilon_{jmq}$ , tedy fázový rozestup. Stejně jako v případě Darwinova harmonického rozvoje je i Kaulův fázový rozestup frekvenčně závislý a tvar této závislosti záleží čistě na reologii studované planety.

Vedle slapotvorné oběžnice zavádí Kaula (1964) po vzoru Darwina i druhý, rušený měsíc, jehož okamžitou vzdálenost od planety opět rozvíjí do řad funkcí excentricity a inklinace. Tvar členů rozvoje dodatkového potenciálu působícího v každém okamžiku na měsíc je

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U}_{jmq} &= k_j r_p^{2j+1} \mathcal{G} M_* \frac{(j-m)!}{(j+m)!} (2 - \delta_{0m}) \frac{1}{a^{*j+1}} \mathcal{F}_{jmq}(i^*) \mathcal{G}_{jmq}(e^*) \\ &\times \sum_{hs} \frac{1}{a^{j+1}} \mathcal{F}_{jmh}(i) \mathcal{G}_{jhs}(e) \cos\{\nu_{jmq}^* - \varepsilon_{jmq} - m\theta^* - (\nu_{jmh} - m\theta)\}, \quad (1.40) \end{aligned}$$

kde dráhové elementy rušeného tělesa značíme symboly bez hvězdiček. Po ztotožnění obou oběžnic získává Kaula výraz pro dodatkový potenciál, který se skládá z části, jež odpovídá oběhu měsíce kolem deformované planety, ale také z části, jež symetricky zastupuje oběh planety kolem deformovaného měsíce. Součet těchto dvou členů pak vstupuje do Lagrangeových poruchových rovnic (1.23) jako funkce  $\mathcal{R}$ .

Jak poukazují Efroimsky a Williams (2009), jsou poslední dva zmíněné vztahy platné pouze pro malé fázové rozestupy. Pro jejich zpřesnění a zobecnění je nutné vynásobit oba výrazy, (1.39) i (1.40), faktorem  $\cos \varepsilon_{jmq}$ . Tento faktor zavedl již Darwin

<sup>3</sup>Funkce inklinace a výstřednosti pro stupeň  $j = 2$  jsou vyčísleny v práci Kaula (1964), příslušný soupis se ovšem omezuje pouze na členy rozvoje s  $|q| \leq 2$ . Ostatní členy lze dohledat v podrobných tabulkách Cayley (1861) (viz též dodatek A), některé z nich pak v přehlednější podobě uvádí Efroimsky (2012).

(1880) jako charakterizaci snížení amplitudy slapové deformace neelastického tělesa oproti deformaci tělesa elastického. Ve většině navazujících prací je však jeho význam opomíjen.

### 1.3.3 Konstantní slapový rozestup

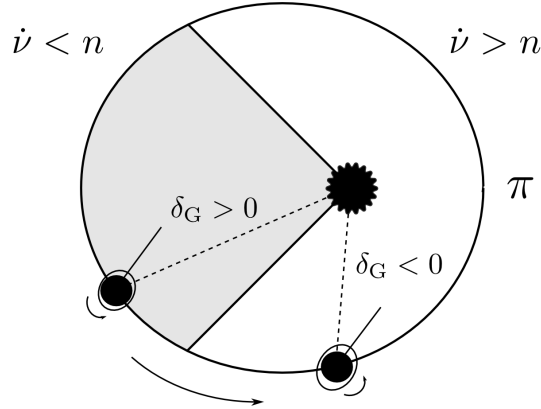
Jak bylo zmíněno v pododdíle (1.3.1), pro realistickou studii slapového vývoje soustavy planeta-měsíc či hvězda-planeta je nezbytné znát frekvenční závislost slapového rozestupu, případně faktoru kvality, který je s fázovým rozestupem spjat vztahem (1.35). Předepsání konkrétní závislosti odpovídá zadání reologie, kterou se bude deformace planety řídit. V literatuře týkající se slapového vývoje jsou velice rozšířeny dva nej-jednodušší modely, předpokládající buď konstantní fázový či geometrický rozestup (konstantní, frekvenčně nezávislé  $Q$ ), nebo konstantní časový rozestup ( $Q$  nepřímo úměrné frekvenci<sup>4</sup>). Oba modely si nyní přiblížíme a posoudíme jejich předpovědi. Podrobnější kritické zhodnocení obou přístupů provádějí Makarov a Efroimsky (2013).

Předpokladu konstantních a až na znaménka rovných fázových rozestupů užívá ve své studii slapového vývoje soustavy Země-Měsíc již Kaula (1964), ačkoliv si je vědom podoby jejich frekvenční závislosti pro málo viskózní tělesa. Každý z fázových rozestupů  $\varepsilon_{jmq}$  má znaménko shodné s  $(\dot{\nu}_{jmq} - m\dot{\theta})$ . Dále budeme předpokládat, že rychlost rotace planety se během jediného oběhu zásadně nemění a zavedeme veličinu  $\Omega_{\text{rot}} \equiv \dot{\theta}$ , které budeme říkat rotační frekvence.

Předpoklad konstantního geometrického rozestupu zavádí do slapové teorie MacDonald (1964), přičemž využívá skutečnosti, že seismický faktor kvality  $Q$  se ve velkém rozpětí frekvencí téměř nemění (Goldreich a Soter, 1966). Znaménko geometrického rozestupu je v tomto modelu opět shodné se znaménkem okamžité slapové frekvence  $(\Omega_{\text{rot}} - \dot{\nu})$ , kde  $\dot{\nu}$  značí rychlost změny pravé anomálie. Jestliže se planeta a měsíc nebo planeta a hvězda nachází ve stavu vázané rotace na kruhové dráze, geometrický i fázový rozestup vymizí. Pokud si ovšem představíme pomalu rotující planetu obíhající kolem své mateřské hvězdy po eliptické dráze, zjistíme, že předpoklad konstantního geometrického rozestupu s vhodným znaménkem vede k nefyzikálnímu chování: slapová výduť během jediného oběhu dvakrát skokově změní svou orientaci vůči spojnici obou těles (viz obrázek 1.5).

V následujících úvahách, shodných s učebnicovým výkladem vystavěným na MacDonalově teorii (Murray a Dermott, 1999), budeme předpokládat, že je planeta na počátku svého slapového vývoje uměle uchycena ve spin-orbitální resonanci 1:1. Její rotační frekvence  $\Omega_{\text{rot}}$  a střední pohyb  $n$  se tedy shodují. Nachází-li se planeta poblíž periastra, je v důsledku druhého Keplerova zákona rychlost změny její pravé anomálie vyšší než střední pohyb,  $\dot{\nu} > n$ , a geometrický rozestup tak nabývá záporné hodnoty. To znamená, že slapová výduť se oproti spojnici středů obou uvažovaných těles zpožďuje, moment slapových sil, který na ni působí, je orientován shodně s vektorem úhlové rychlosti, a rotace planety je tak urychlována. Jestliže se planeta naopak nachází poblíž apoastra, platí  $\dot{\nu} < n$ , slapová výduť spojnici hvězdy a planety předbíhá a dochází ke zpomalování rotace. V oblasti  $\dot{\nu} > n$  i v oblasti  $\dot{\nu} < n$  stráví planeta stejně dlouhou dobu. Jelikož je však velikost momentu sil úměrná  $(\frac{a}{r})^6$  (Goldreich, 1966), převáží

<sup>4</sup>S přihlédnutím ke vztahu (1.35) toto platí pouze pro dostatečně velká  $Q$ , kdy  $\sin \varepsilon \approx \varepsilon$ .



**Obrázek 1.5:** Slapová deformace planety s (nestabilní) vázanou rotací v modelu s konstantním geometrickým rozestupem. Blízko pericentra  $\pi$  (světlá oblast) je okamžitá úhlová rychlost oběhu  $\dot{\nu}$  vyšší než rotační frekvence planety  $\Omega_{\text{rot}} = n$ , geometrický rozestup  $\delta_G$  nabývá záporné hodnoty a slapová výdut' se oproti průvodiči zpožďuje. V okolí apocentra (tmavá oblast) se poměr frekvencí obrací, a na pomezí obou oblastí tak dochází k překmitu slapové výdutě.

v dlouhodobém vývoji její rotace účinek urychlování v periastru a planeta tak spin-orbitální resonanci opustí. Rovnovážným stavem, do kterého planeta spěje a v němž je moment sil vystředovaný přes oběžnou periodu nulový, se v případě eliptické oběžné dráhy stává „pseudo-synchronní rotace“, charakterizovaná spin-orbitálním poměrem (Murray a Dermott, 1999)

$$\frac{\Omega_{\text{rot}}}{n} = \left(1 + \frac{19}{2}e^2\right). \quad (1.41)$$

Tento vztah je platný pouze za předpokladu konstantního geometrického či fázového rozestupu a malých hodnot  $e$ .

Druhá třída modelů, jež využívá předpokladu konstantního časového rozestupu, se datuje již ke zmíněné Darwinově studii málo viskózní země se dvěma satelity (Darwin, 1880) a dále je rozvíjena v článcích Mignarda (1979), Nérona de Surgy a Laskara (1997) a dalších. Na studium slapového vývoje těsných dvojhvězd ji aplikuje například Hut (1981). Modely s konstantním časovým rozestupem jsou z fyzikálního hlediska mnohem přijatelnější, než výše zmíněná první třída modelů, neboť v nich nedochází k náhlým překmitům slapové výdutě. Její orientace vůči spojnici planety a hvězdy se mění spojitě, stejně jako výraz  $(\Omega_{\text{rot}} - \dot{\nu})$ . I při uvážení konstantního časového rozestupu však dochází k uchycení planety do stavu pseudo-synchronní rotace, který na výstředné dráze znemožňuje dosažení spin-orbitální resonance 1:1. Rovnovážný spin-orbitální poměr za předpokladu malé výstřednosti je tentokrát (např. Makarov a Efroimsky, 2013)

$$\frac{\Omega_{\text{rot}}}{n} = \left(1 + 6e^2\right). \quad (1.42)$$

Uvedené předpovědi rovnovážných stavů, poskytnuté modely s konstantním slapovým rozestupem, se ovšem neshodují s pozorováním Měsíce ani ostatních velkých oběžnic ve sluneční soustavě, které kolem své mateřské planety obíhají po eliptické dráze a současně vykazují vázanou rotaci. Tento nesoulad mezi předpovědí a skutečností můžeme nahlédnout, dosadíme-li výstřednost dráhy Měsíce,  $e = 0,0549$ , do vztahu (1.41) nebo (1.42). Namísto spin-orbitální synchronizace získáváme rotační frekvenci, jež je o 2,8%, respektive 1,8% vyšší nežli střední pohyb Měsíce. Řádově srovnatelná výstřednost, odporující podle obou modelů pozorované vázané rotaci, je známa také u oběžné dráhy velkých Saturnových měsíců, jako jsou Titan (0,0288), Iapetus (0,0286), Tethys (0,02) a Mimas (0,02).

Rozpor mezi teorií a pozorováním je možné vyřešit, vneseme-li do modelu s konstantním fázovým rozestupem požadavek permanentní výdutě, vyjádřené pomocí sférické harmonické funkce  $Y_{22}$  (např. Goldreich, 1966; Murray a Dermott, 1999; Ferraz-Mello a kol., 2008). Moment sil, který působí na slapovou výdut', se poté sčítá s momentem sil působícím na permanentní výdut', a jestliže je splněna podmínka (Goldreich, 1966)

$$\sqrt{\frac{3B - A}{2C}} > \frac{19\pi e^2}{4\sqrt{2}}, \quad (1.43)$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  značí hlavní momenty setrvačnosti planety, dojde i na výstředné dráze k záchytu do vázané rotace. Obdobnou podmínku lze nalézt také pro vyšší spin-orbitální resonance. I přes existenci tohoto vysvětlení záchytů do spin-orbitálních resonancí je ovšem nutné pamatovat, že modely předpokládající konstantní fázový nebo časový rozestup nevystihují odezvu terestrických planet na slapové zatěžování příliš realisticky a jsou jen teoriemi aproximativními, spoléhajícími na velmi zjednodušený reologický model.

### 1.3.4 Deformace viskoelastického tělesa

Ačkoliv jsou modely s konstantním slapovým rozestupem pro svou jednoduchost velice oblíbené, zabývali se někteří autoři také důsledky frekvenční závislosti příslušných veličin a možností zahrnout realističtější, viskoelastickou reologii. Použitelnost několika různých modelů pro studium odezvy na slapové zatěžování diskutuje například Henning a kol. (2009) a pro tři z nich, Maxwellův, Burgersův a SAS (*standard anelastic solid*) odvozuje vývoj slapového zahřívání. Obecné viskoelastické těleso je popsáno frekvenčně (i teplotně) závislým faktorem kvality a komplexním Loveovým číslem  $k_j^{\text{VE}}$ . Časově proměnný frekvenční rozestup  $\varepsilon$  pak vyjádříme jako (např. Henning a kol., 2009)

$$\sin \varepsilon = -\frac{\text{Im}\{k_j^{\text{VE}}\}}{k_j}, \quad (1.44)$$

kde  $k_j$  je (reálné) Loveovo číslo elastického tělesa.

Dlouhodobou evolucí oběžné dráhy viskoelastického tělesa se v návaznosti na kritiku modelů s konstantním slapovým rozestupem zabírají Makarov a Efroimsky

(2013). V závislosti na frekvenci slapového buzení považují planetu buď za těleso maxwellovské (pro nízké frekvence), nebo andradeovské (pro vysoké frekvence) a k výpočtu momentu slapových sil využívají Darwinovy-Kaulovy expanze. Vlastní analytický model spřaženého vývoje hlavní poloosy, výstřednosti, rotace a rotačního zploštění viskoelastické planety v nedávné době představil také Correia a kol. (2014).

Společným rysem posledních dvou jmenovaných modelů je předpověď přirozeného vzniku stabilních spin-orbitálních resonancí i v případě planet na velmi výstředných oběžných dráhách. Pro vysvětlení vázané rotace měsíců ve sluneční soustavě tedy při uvážení viskoelastické reologie není nutné předpokládat žádnou permanentní výdut'. Pseudo-synchronní rotace se pro krátkoperiodické terestrické planety ukazuje být dokonce nestabilní (Makarov a Efroimsky, 2013), v případě dlouhoperiodického slapového buzení ji ovšem nadále lze očekávat (Correia a kol., 2014). Ve viskózní limitě tak zůstávají v platnosti předpovědi modelů s konstantním časovým rozestupem.

## 1.4 Numerický model

### 1.4.1 Slapotvorný potenciál a síla

V oddíle věnovaném tradičnímu popisu slapové interakce byl představen slapotvorný potenciál, který je možno v libovolném bodě na povrchu planety vyjádřit vztahem (1.29). Potenciál zde byl rozvinut v řadu, jejíž jednotlivé členy jsou úměrné Legendreovým polynomům stupně  $j$  vynásobeným faktorem  $r^{-j-1}$ , kde  $r$  značí okamžitou vzdálenost planety od hvězdy. Budeme-li pokračovat cestou rozvoje do řad a zobecníme-li výraz pro potenciál tak, aby nehovořil pouze o povrchu planety, ale platil pro libovolný bod jejího nitra  $(r', \vartheta', \varphi')$ , kde  $r' \leq r_p$ , získáme po užití adičního teorému

$$\mathcal{P}_j(\cos \psi_p) = \frac{4\pi}{2j+1} \sum_{m=-j}^j Y_{jm}(\vartheta', \varphi') Y_{jm}^*(\vartheta_*, \varphi_*) \quad (1.45)$$

vztah

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{\mathcal{G}M_*}{r^{j+1}} \frac{4\pi}{2j+1} (r')^j Y_{jm}(\vartheta', \varphi') Y_{jm}^*(\vartheta_*, \varphi_*), \quad (1.46)$$

ve kterém již namísto Legendreových polynomů figurují sférické harmonické funkce  $Y_{jm}$  (viz Varšalovič a kol., 1988) a souřadnice  $\vartheta_*$  a  $\varphi_*$  představují planetopisnou košířku a délku substelárního bodu. Slapotvorný potenciál na povrchu a uvnitř planety budeme dále rozvíjet do řad ve tvaru

$$\mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') = \sum_{jm} v_{jm}(r') Y_{jm}(\vartheta', \varphi'), \quad (1.47)$$

kde koeficienty  $v_{jm}$  závisí na okamžité poloze hvězdy vůči rotující planetocentrické souřadné soustavě  $xyz$  (viz obrázek 1.3),

$$v_{jm}(r') = \frac{\mathcal{G}M_*}{r} \frac{4\pi}{2j+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^j Y_{jm}^*(\vartheta_*, \varphi_*). \quad (1.48)$$

Kromě slapotvorného potenciálu nás bude zajímat také síla, kterou rušící těleso, tedy hvězda, působí na celý objem studované planety. Do definičního vztahu

$$\mathbf{f}_t(r', \vartheta', \varphi') = \nabla \mathcal{U}(r', \vartheta', \varphi') \quad (1.49)$$

dosadíme za potenciál  $\mathcal{U}$  rozvoj (1.47) a využijeme rovnosti (viz Varšalovič a kol., 1988; nebo přehledný dodatek k diplomové práci dr. Jana Matase, 1995)

$$\nabla [f(r') Y_{jm}] = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \left[ \sqrt{j} \left( \frac{d}{dr'} + \frac{j+1}{r'} \right) f(r') \mathbf{Y}_{jm}^{j-1} - \sqrt{j+1} \left( \frac{d}{dr'} - \frac{j}{r'} \right) f(r') \mathbf{Y}_{jm}^{j+1} \right]. \quad (1.50)$$

kde  $\mathbf{Y}_{jm}^{j-1}$  a  $\mathbf{Y}_{jm}^{j+1}$  jsou vektorové sférické harmoniky (Varšalovič a kol., 1988). Odtud získáváme sférický harmonický rozvoj pro slapovou sílu

$$\mathbf{f}_t(r', \vartheta', \varphi') = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=-j}^j \frac{4\pi \mathcal{G}M_*}{r^{j+1}} \sqrt{\frac{j}{2j+1}} (r')^{j-1} Y_{jm}^*(\vartheta_*, \varphi_*) \mathbf{Y}_{jm}^{j-1}(\vartheta', \varphi'). \quad (1.51)$$

Obdobně jako v případě slapotvorného potenciálu tedy budící slapovou sílu rozvíjíme do řad ve tvaru

$$\mathbf{f}_t(r', \vartheta', \varphi') = \sum_{jm} f_{jm}^{j-1}(r') \mathbf{Y}_{jm}^{j-1}(\vartheta', \varphi') \quad (1.52)$$

s koeficienty

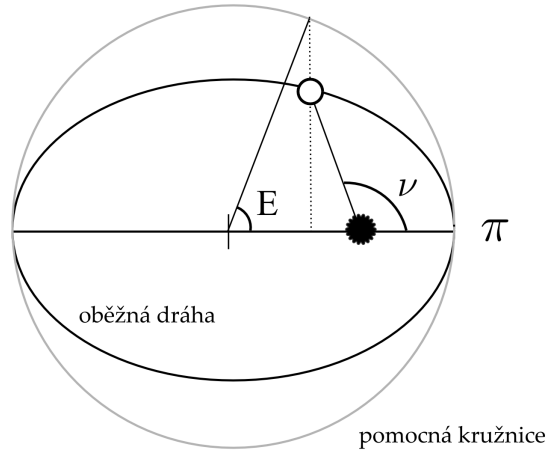
$$f_{jm}^{j-1}(r') = \frac{\mathcal{G}M_*}{r^2} 4\pi \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \left(\frac{r'}{r}\right)^{j-1} Y_{jm}^*(\vartheta_*, \varphi_*). \quad (1.53)$$

## 1.4.2 Okamžitá poloha hvězdy

Na geometrické uspořádání systému hvězda-planeta budeme po celou dobu nahlížet ze vztažné soustavy  $xyz$ , která má počátek ve středu planety a společně s ní rotuje. Namísto oběhu planety kolem mateřské hvězdy tedy budeme studovat zdánlivý pohyb hvězdy vůči nehybné planetě, který sestává ze dvou složek. První souvisí s rotací „nebeské sféry“ a druhá odpovídá samotnému oběhu.

Okamžitá vzdálenost středu hvězdy od počátku této vztažné soustavy je známa z problému dvou těles (např. Murray a Dermott, 1999) a můžeme ji při znalosti oskulační hlavní poloosy  $a$  a výstřednosti  $e$  vypočítat ze vztahu





**Obrázek 1.6:** Geometrický význam excentrické anomálie  $E(t)$  a pravé anomálie  $\nu(t)$ . Poloměr pomocné kružnice je shodný s hlavní poloosou  $a$ .

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (1.54)$$

kde  $E$  představuje excentrickou anomálii. Tento pomocný úhel, znázorněný na obrázku 1.6, je v každém okamžiku spjat se střední anomálií  $l$  (viz pododdíl 1.2.2) Keplerovou rovnicí

$$E(t) - e \sin E(t) = l(t). \quad (1.55)$$

Keplerova rovnice je transcendentní, nemá tedy analytické řešení, lze ji ovšem řešit buď numericky, anebo rozvojem do řad v excentricitě (viz Andrlé, 1971). Zde volíme iterativní řešení popsané jednoduchým schématem

$$\begin{aligned} E_0 &= l, \\ E_1 &= l + e \sin E_0, \\ E_2 &= l + e \sin E_1, \\ &\vdots \\ E_n &= l + e \sin E_{n-1}. \end{aligned}$$

Okamžitou polohu substelárního bodu  $(\vartheta_*, \varphi_*)$  bychom v případě obecného sklonu rotační osy vůči oběžné rovině mohli určit podobně jako Dobrovolskis (2009). V případě výpočtu slapového vývoje dráhy se ovšem pro jednoduchost omezíme pouze na planety, jejichž rotační osa je k rovině oběhu kolmá. Hledané souřadnice tedy jsou  $\vartheta_* = \frac{\pi}{2}$  a  $\varphi_* = \nu(t) - \Omega_{\text{rot}} t$ , kde  $\Omega_{\text{rot}}$  značí rotační frekvenci planety a čas  $t$  je počítán od okamžiku průchodu pericentrem. Tímto je zadán také nulový poledník planety, který se na počátku výpočtu, v pericentru, nachází přímo pod hvězdou. Pravou anomálii  $\nu(t)$  určíme jako (Murray a Dermott, 1999)

$$\nu = \begin{cases} \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} & \text{pro } E \in [0, \pi], \\ 2\pi - \arccos \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} & \text{pro } E \in [\pi, 2\pi]. \end{cases} \quad (1.56)$$

### 1.4.3 Deformace planety

Jakmile známe okamžitou pozici hvězdy, jsme schopni pro libovolný bod na planetě i v jejím nitru určit jak slapotvorný potenciál (1.47), tak odpovídající sílu (1.52). Nyní tedy přikročíme ke studiu slapové deformace planetárního pláště, který této rušivé síle podléhá. Pro příslušné výpočty byl použit program *Andy4*, napsaný doc. Ondřejem Čadkem a rozšířený dr. Marií Běhounkovou.

Program *Andy4* umožňuje určení deformace a vnitřního zahřívání kulové slupky s obecně trojrozměrnou viskozitní strukturou pod působením objemové síly a za předpokladu Maxwellovy anebo Andradeovy viskoelastické reologie. V případě Maxwellovy reologie je odezva hydrostaticky předpjatého pláště na budící sílu  $\mathbf{f}$  při uvážení malých deformací popsána řídicími rovnicemi (Tobie a kol., 2008)

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.57)$$

$$-\nabla \pi + \nabla \cdot \mathbb{D} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial \mathbb{D}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \right] = -\frac{\mu}{\eta} \mathbb{D}, \quad (1.59)$$

kde  $\mathbf{u}$  značí vektor posunutí,  $\pi$  značí přírůstek tlaku,  $\mathbb{D}$  je deviatorická část přírůstkového tenzoru napětí,  $\mu$  představuje efektivní modul torze a  $\eta$  je efektivní viskozita (Běhounková a kol., 2010). Ve vztazích (1.57) – (1.59) předpokládáme, že popisované prostředí je nestlačitelné a že lze zanedbat setrvačný člen v pohybové rovnici kontinua.

Objemová budící síla  $\mathbf{f}$  se skládá ze slapové síly  $\mathbf{f}_t$ , zavedené vztahem (1.52), dále ze síly odstředivé, kterou budeme značit  $\mathbf{f}_{cf}$ , a z přírůstku gravitační síly, odpovídající deformaci rozhraní  $\mathbf{f}_{self} = \nabla(\delta\mathcal{U})$ . Jelikož mají všechny tři posledně jmenované veličiny rozměr síly na jednotku hmotnosti, je nutné provést přeškálování

$$\mathbf{f} = \rho_M (\mathbf{f}_t + \mathbf{f}_{cf} + \mathbf{f}_{self}), \quad (1.60)$$

kde  $\rho_M$  představuje hustotu pláště, kterou budeme v této práci považovat za konstantní. Odstředivou sílu určíme jako gradient odstředivého potenciálu, pro nějž podle Murray a Dermott (1999) platí

$$\mathcal{U}_{cf} = \frac{1}{3} \Omega_{rot}^2 (r')^2 (\mathcal{P}_2(\cos \vartheta') - 1). \quad (1.61)$$

S využitím sférických harmonik lze tento výraz přepsat jako

$$\mathcal{U}_{\text{cf}} = -\sqrt{\frac{4\pi}{9}} \Omega_{\text{rot}}^2 (r')^2 Y_{00} + \sqrt{\frac{4\pi}{45}} \Omega_{\text{rot}}^2 (r')^2 Y_{20}, \quad (1.62)$$

a díky rovnosti (1.50) tak získáváme

$$\mathbf{f}_{\text{cf}} = \frac{\sqrt{16\pi}}{3} \Omega_{\text{rot}}^2 r' \mathbf{Y}_{00}^1 + \frac{\sqrt{8\pi}}{3} \Omega_{\text{rot}}^2 r' \mathbf{Y}_{20}^1. \quad (1.63)$$

Předpoklad malých deformací umožňuje linearizovat okrajové podmínky v okolí hranic nedeformovaného pláště. Linearizovaná horní okrajová podmínka, odpovídající volnému povrchu, je

$$(-\pi\mathbb{I} + \mathbb{D}) \cdot \mathbf{e}_r + u_r \rho_M g_{\text{surf}} \mathbf{e}_r = \mathbf{0}, \quad (1.64)$$

kde  $u_r$  značí radiální složku posunutí,  $g_{\text{surf}}$  znamená střední tíhové zrychlení na povrchu a  $\mathbf{e}_r$  označuje jednotkový vektor v radiálním směru. Spodní okrajová podmínka, předepsaná pro rozhraní (CMB) tuhého pláště a kapalného vnějšího jádra, vypadá obdobně,

$$(-\pi\mathbb{I} + \mathbb{D}) \cdot \mathbf{e}_r - u_r (\rho_{\text{OC}} - \rho_M) g_{\text{CMB}} \mathbf{e}_r = -\rho_{\text{OC}} (\mathcal{U} + \mathcal{U}_{\text{cf}} + \delta\mathcal{U}) \mathbf{e}_r. \quad (1.65)$$

Na pravé straně zde tentokrát vystupuje tlak z jádra, buzený slapotvorným, odstředivým i dodatkovým potenciálem. Veličina  $\rho_{\text{OC}}$  představuje hustotu vnějšího jádra a  $g_{\text{CMB}}$  je tíhové zrychlení na rozhraní jádra a pláště.

Rovnice (1.57) – (1.59) jsou programem *Andy4* řešeny v časové oblasti, za využití explicitního integračního schématu (Tobie a kol., 2008). Jejich diskretizace v prostoru je provedena jednak rozvinutím veličin  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbb{D}$  a  $\pi$  do sférických harmonik, čímž získáváme sadu řídicích rovnic pro každý stupeň  $j$  a řád  $m$  (Matas, 1995), a jednak metodou konečných diferencí s posunutou sítí. Pomocí metody konečných diferencí je soustava diskretizována v radiálním směru. Během výpočtu se kromě slapové deformace vyhodnocuje také průměrný objemový výkon slapového zahřívání  $h_t$ , který lze pro těleso řídicí se Maxwellovou reologií vyjádřit jako (Hanyk a kol., 2005; Běhounková a kol., 2010)

$$h_t = \frac{1}{T_t} \int_{\tau}^{\tau+T_t} \frac{\mathbb{D}(\sigma) : \mathbb{D}(\sigma)}{2\eta} d\sigma. \quad (1.66)$$

Celkový výkon spjatý se slapovou disipací získáme integrací  $h_t$  přes celý objem pláště,

$$P_t = \int_{V_M} h_t dV. \quad (1.67)$$

Maxwellova reologie dobře vystihuje reakci kontinua na buzení, jehož perioda je delší než Maxwellův čas

$$\tau_M = \frac{\eta}{\mu}, \quad (1.68)$$

avšak pro periody výrazně kratší se od reality odchyluje. Tehdy je odezvu prostředí vhodnější popisovat právě komplexnější Andradeho reologií. Vzhledem k výpočetní náročnosti modelů využívajících této reologie ji zde však zmiňujeme pouze slovně a nadále budeme ke studiu slapové deformace předpokládat, že se plášť planety chová jako maxwellovské těleso. Aby byla zachována vypovídací hodnota takového modelu i při vyšších frekvencích slapového buzení, předepisujeme namísto „dlouhoperiodické“ viskozity a modulu torze, které vystupují v modelech plášťového tečení, jejich výše zmíněné krátkoperiodické – efektivní – ekvivalenty.

#### 1.4.4 Dodatkový potenciál a síla

Deformaci planetárního povrchu i rozhraní jádra a pláště lze za předpokladu malých posunutí vyjádřit jako změnu plošné hustoty, definované vztahem

$$\sigma_{\text{surf}} = \rho_M u_r^{\text{surf}}, \quad (1.69)$$

respektive

$$\sigma_{\text{CMB}} = (\rho_{\text{OC}} - \rho_M) u_r^{\text{CMB}}, \quad (1.70)$$

kde radiální posunutí  $u_r$  uvažujeme vždy na příslušné hranici. Přírůstek anebo úbytek plošné hustoty pak v každém bodě  $(r', \vartheta', \varphi')$  ve vzdálenosti  $R$  od rozhraní generuje dodatkový potenciál  $\delta\mathcal{U}$ :

$$\delta\mathcal{U} = \mathcal{G} \int_{\text{rozhraní}} \frac{\sigma}{R} dS. \quad (1.71)$$

Jestliže se nacházíme nad deformovaným rozhraním – tedy pokud popisujeme například změny potenciálu uvnitř planetárního pláště vyvolané zvlněním CMB o středním poloměru  $r_{\text{CMB}}$  – vyjádříme tento dodatkový potenciál jako

$$\delta\mathcal{U}^{\text{int}}(r', \vartheta', \varphi') = \sum_{\text{jm}} \phi_{\text{jm}}^{\text{int}} \left( \frac{r_{\text{CMB}}}{r'} \right)^{j+1} Y_{\text{jm}}(\vartheta', \varphi') \quad (1.72)$$

s koeficienty

$$\phi_{\text{jm}}^{\text{int}} = \frac{4\pi}{2j+1} \mathcal{G} r_{\text{CMB}} (\rho_{\text{OC}} - \rho_M) (u_r^{\text{CMB}})_{\text{jm}}. \quad (1.73)$$

Pokud se naopak zabýváme dodatkovým potenciálem uvnitř planety vzniklým v důsledku deformace svrchního rozhraní, tedy povrchu o středním poloměru  $r_{\text{surf}}$ , užijeme výrazu

$$\delta\mathcal{U}^{\text{ext}}(r', \vartheta', \varphi') = \sum_{\text{jm}} \phi_{\text{jm}}^{\text{ext}} \left( \frac{r'}{r_{\text{surf}}} \right)^{j+1} Y_{\text{jm}}(\vartheta', \varphi') \quad (1.74)$$

s koeficienty

$$\phi_{\text{jm}}^{\text{ext}} = \frac{4\pi}{2j+1} \mathcal{G} r_{\text{surf}} \rho_{\text{M}} (u_{\text{r}}^{\text{CMB}})_{\text{jm}}. \quad (1.75)$$

Kombinace těchto dvou složek dodatkového potenciálu vystupuje ve spodní okrajové podmínce (1.65).

Přírůstek síly působící na jednotku hmotnosti nad libovolným deformovaným rozhraním o poloměru  $r_{\text{bdr}}$  a hustotním skoku  $\Delta\rho$  je

$$\mathbf{f}_{\text{self}}^{\text{int}} = \sum_{\text{jm}} \zeta_{\text{jm}}^{\text{int}} \left( \frac{r_{\text{bdr}}}{r'} \right)^{j+2} \mathbf{Y}_{\text{jm}}^{j+1}, \quad (1.76)$$

kde

$$\zeta_{\text{jm}}^{\text{int}} = 4\pi \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \mathcal{G} \Delta\rho (u_{\text{r}}^{\text{bdr}})_{\text{jm}}. \quad (1.77)$$

Naopak přírůstek síly pod deformovaným rozhraním určíme jako

$$\mathbf{f}_{\text{self}}^{\text{ext}} = \sum_{\text{jm}} \zeta_{\text{jm}}^{\text{ext}} \left( \frac{r'}{r_{\text{bdr}}} \right)^{j-1} \mathbf{Y}_{\text{jm}}^{j-1} \quad (1.78)$$

s koeficienty

$$\zeta_{\text{jm}}^{\text{ext}} = 4\pi \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \mathcal{G} \Delta\rho (u_{\text{r}}^{\text{bdr}})_{\text{jm}}. \quad (1.79)$$

Oba přírůstky dohromady vstupují do výpočtu planetární deformace prostřednictvím budící síly (1.60). První z výrazů, týkající se oblasti *nad* libovolnou hranicí (1.76), ovšem vystihuje i dodatkovou sílu působící mimo planetu, tedy také v bodě, kde se v daném okamžiku nalézá mateřská hvězda. Získali jsme tak výraz pro poruchovou sílu  $\varepsilon\mathbf{f}$  a můžeme přikročit k řešení Gaussových poruchových rovnic.

### 1.4.5 Evoluční rovnice pro oběžnou dráhu

Poruchovou sílu působící na hvězdu, která v našem vztažném systému zdánlivě obíhá kolem deformované planety, známe ve sférických souřadnicích s planetou pevně spojených,

$$\varepsilon\mathbf{f}(r, \vartheta_*, \varphi_*) = \sum_{\text{jm}} \left[ \zeta_{\text{jm}}^{\text{CMB}} \left( \frac{r_{\text{CMB}}}{r} \right)^{j+2} + \zeta_{\text{jm}}^{\text{surf}} \left( \frac{r_{\text{surf}}}{r} \right)^{j+2} \right] \mathbf{Y}_{\text{jm}}^{j+1}(\vartheta_*, \varphi_*), \quad (1.80)$$

kde symboly  $\zeta_{\text{jm}}^{\text{CMB}}$  a  $\zeta_{\text{jm}}^{\text{surf}}$  značí koeficienty (1.77) odpovídající příslušným rozhraním.

Abychom mohli tuto sílu dosadit do Gaussových poruchových rovnic, je třeba ji vyjádřit v kartézských souřadnicích a navíc provést transformaci souřadnic, konkrétně otočení o úhel  $\nu(t) - \Omega_{\text{rot}}t$  kolem normály k oběžné dráze<sup>5</sup>. Průvodič hvězdy  $\mathbf{r}$  je v nové soustavě  $x'y'z'$  shodný s osou  $x'$ .

Označíme-li poruchovou sílu vyjádřenou v těchto kartézských souřadnicích  $\varepsilon\mathbf{f}'$ , jsou její jednotlivé složky:

$$\begin{aligned} R &= \varepsilon\mathbf{f}' \cdot \mathbf{e}_{x'} , \\ S &= \varepsilon\mathbf{f}' \cdot \mathbf{e}_{y'} , \\ W &= \varepsilon\mathbf{f}' \cdot \mathbf{e}_{z'} , \end{aligned} \quad (1.81)$$

kde  $\mathbf{e}_i$  značí jednotkové vektory v příslušných směrech. Složka  $W$  se v naší úloze ukazuje být o mnoho řádů menší než složky  $R$  a  $S$ .

V dalším textu se budeme zabývat pouze změnami tvaru oběžné dráhy a pro jednoduchost zanedbáme jakékoliv pohyby rotační osy či sklápění oběžné dráhy vůči referenční rovině, již bude rovina rovníku. Inklinaci  $i$  zdánlivé dráhy hvězdy po celou dobu výpočtu držíme rovnu nule. Vzhledem k dlouhodobému charakteru studovaného vývoje rovněž neuvažujeme periodické změny okamžiku průchodu pericentrem a dvou zbývajících úhlových proměnných, tedy délky výstupného uzlu  $\Omega$  a argumentu pericentra  $\omega$  (pro uvedený případ  $i = 0$  je vhodnější mluvit o jejich kombinaci, tzv. délce periastra  $\varpi = \Omega + \omega$ ). Oba úhly budeme od počátku také pokládat za nulové.

Z šestice Gaussových poruchových rovnic (1.27) nás tudíž budou zajímat pouze první dvě, které s využitím rovnice elipsy v polárních souřadnicích,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu} , \quad (1.82)$$

přepíšeme jako

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \left[ e \sin \nu(t) R + \left( 1 + e \cos \nu(t) \right) S \right] \quad (1.83)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ e \sin \nu(t) R + \left( 1 + e \cos \nu(t) - \frac{r}{a} \right) S \right] \quad (1.84)$$

Pravou anomálii  $\nu(t)$  v každém okamžiku určíme ze vztahu (2.4) a pro střední pohyb  $n$ , zmíněný v pododdíle 1.2.2, platí

$$n = \frac{2\pi}{T_{\text{orb}}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_*}{a^3}} . \quad (1.85)$$

<sup>5</sup>Transformace souřadnic má takto jednoduchou podobu jen díky předpokladu nulového sklonu rotační osy.

### 1.4.6 Rotace planety

V soustavě hvězdy a slapově deformované planety dochází k disipaci mechanické energie. Celkový moment hybnosti soustavy  $\mathcal{M}$  ovšem zůstává nezměněn. Moment hybnosti sestává ze složky, která odpovídá vzájemnému oběhu obou těles,

$$\mathcal{M}_{\text{rev}} = \frac{M_* m}{M_* + m} a^2 n \sqrt{1 - e^2}, \quad (1.86)$$

a ze složky příslušející rotaci planety,

$$\mathcal{M}_{\text{rot}} = |\mathbb{J}\boldsymbol{\Omega}_{\text{rot}}|. \quad (1.87)$$

Rotaci hvězdy zde neuvažujeme. Symbol  $\mathbb{J}$  představuje tensor setrvačnosti, definovaný vztahem

$$\mathbb{J} = \int_m (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}' \mathbb{I} - \mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}') dm', \quad (1.88)$$

kde  $\mathbf{r}'$  značí polohový vektor,  $\mathbb{I}$  je jednotkový tenzor a integruje se přes celou hmotu tělesa. Jestliže uvažujeme planetu o homogenním vnitřním (IC) a vnějším (OC) jádře a homogenním plášti (M), jejíž povrch a CMB jsou deformovány, můžeme tenzor setrvačnosti rozepsat jako

$$\mathbb{J} = \mathbb{J}_{\text{IC}} + \mathbb{J}_{\text{OC}} + \mathbb{J}_{\text{M}} + \mathbb{J}_{\text{cmb}} + \mathbb{J}_{\text{surf}}. \quad (1.89)$$

První tři členy zodpovídají za setrvačnost objemů (koule, případně kulové slupky), zatímco zbylé dva členy charakterizují setrvačnost zvlněných rozhraní. Tu můžeme vypočítat přímo ze vztahu (1.88) s využitím plošné hustoty  $\sigma^{\text{bdr}}$ . Jelikož se zabýváme planetou, jejíž rotační osa po celou dobu výpočtu nemění svou orientaci, omezíme se pouze na složku  $J_{zz}^{\text{bdr}}$ , která vypadá následovně:

$$\begin{aligned} J_{zz}^{\text{bdr}} &= \int_{\text{rozhraní}} (x^2 + y^2) \sigma^{\text{bdr}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r_{\text{bdr}}^2 \sin^2 \vartheta \sigma^{\text{bdr}} d\vartheta r_{\text{bdr}}^2 \sin \vartheta d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r_{\text{bdr}}^4 \sin^3 \vartheta \sigma^{\text{bdr}} d\vartheta d\varphi = r_{\text{bdr}}^4 \sum_{jm} \sigma_{jm}^{\text{bdr}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta Y_{jm}(\vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

S uvážením identity

$$\sin^2 \vartheta = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \left( Y_{00} - \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{20} \right) = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \left( Y_{00}^* - \sqrt{\frac{1}{5}} Y_{20}^* \right) \quad (1.90)$$

a ortogonality sférických harmonik (Varšalovič a kol., 1988)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta Y_{jm} Y_{j'm'}^* d\vartheta d\varphi = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \quad (1.91)$$

dospíváme k vyjádření

$$J_{zz}^{\text{bdr}} = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} r_{\text{bdr}}^4 \sigma_{00}^{\text{bdr}} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} r_{\text{bdr}}^4 \sigma_{20}^{\text{bdr}}. \quad (1.92)$$

Odpovídající tvar ostatních složek tensoru setrvačnosti lze nalézt ve článku Eubanks (1993). Momenty setrvačnosti  $J_{zz}$  pro vnitřní a vnější jádro, planetární plášť a obě deformovaná rozhraní jsou tedy

$$J_{\text{IC}} = \frac{8\pi}{15} r_{\text{IC}}^5 \rho_{\text{IC}}, \quad (1.93)$$

$$J_{\text{OC}} = \frac{8\pi}{15} (r_{\text{OC}}^5 - r_{\text{IC}}^5) \rho_{\text{OC}}, \quad (1.94)$$

$$J_{\text{M}} = \frac{8\pi}{15} (r_{\text{M}}^5 - r_{\text{OC}}^5) \rho_{\text{M}}, \quad (1.95)$$

$$J_{\text{cmb}} = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} r_{\text{OC}}^4 (\rho_{\text{OC}} - \rho_{\text{M}}) (u_{\text{r}}^{\text{CMB}})_{00} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} r_{\text{OC}}^4 (\rho_{\text{OC}} - \rho_{\text{M}}) (u_{\text{r}}^{\text{CMB}})_{20}, \quad (1.96)$$

$$J_{\text{surf}} = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} r_{\text{M}}^4 \rho_{\text{M}} (u_{\text{r}}^{\text{surf}})_{00} - \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} r_{\text{M}}^4 \rho_{\text{M}} (u_{\text{r}}^{\text{surf}})_{20}. \quad (1.97)$$

Vývoj rotační frekvence planety, který probíhá souběžně s vývojem tvaru oběžné dráhy (1.83) – (1.84), je nyní snadno odvozen ze zmíněného zákona zachování celkového momentu hybnosti. Zderivováním vztahu

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{rev}} + \mathcal{M}_{\text{rot}} = \frac{M_* m}{M_* + m} a^2 n \sqrt{1 - e^2} + J_{zz} \Omega_{\text{rot}} = \text{konst.}, \quad (1.98)$$

s přihlédnutím k vyjádření středního pohybu (1.85), získáváme evoluční rovnici

$$\frac{dJ_{zz}}{dt} \Omega_{\text{rot}} + J_{zz} \frac{d\Omega_{\text{rot}}}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G} M_* m \sqrt{1 - e^2}}{na^2} \frac{da}{dt} + \frac{M_* m}{M_* + m} \frac{na^2 e}{\sqrt{1 - e^2}} \frac{de}{dt}. \quad (1.99)$$

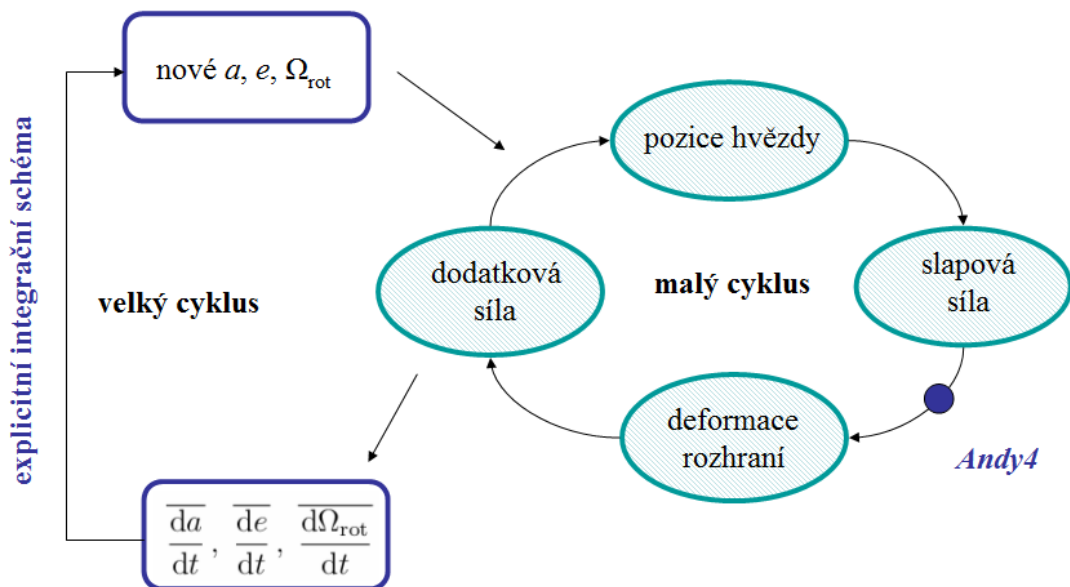
Na pravé straně této rovnice vystupují derivace hlavní poloosy a výstřednosti dráhy, za něž je možno dosadit z Gaussových poruchových rovnic (1.83) – (1.84). Na levé straně vystupuje jednak člen odpovídající změnám momentu setrvačnosti  $J_{zz}$  a jednak člen vyjadřující samotné změny rotační frekvence. Velikost obou členů je v případě Země řádově srovnatelná (např. Burša a Pěč, 1988). V této práci se ovšem v zájmu zjednodušení prvnímu z obou jevů nevěnujeme a moment setrvačnosti v každém integračním kroku pro tuto rovnici pokládáme za konstantní.



### 1.4.7 Výpočetní schéma

Při studiu slapového vývoje oběžné dráhy se potýkáme s jevy probíhajícími na dvou řádově odlišných časových škálách. Prvním z těchto fenoménů je slapová deformace planety, která nastává s periodou zhruba odpovídající oběžné periodě  $T_{\text{orb}}$ , druhým jevem jsou pak sekulární změny oskulačních elementů, výrazněji se projevující až po několika tisících či milionech oběhů. Aby byly ve výpočtu zohledněny obě časové škály, postupujeme při něm ve dvou různě dlouhých integračních cyklech (viz obrázek 1.7).

Malý, nebo krátkoperiodický cyklus zaznamenává děje, k nimž dochází v průběhu padesáti či sta oběhů. Používáme při něm rovnoměrný časový krok a pro zadanou hlavní poloosu, výstřednost dráhy, hmotnost mateřské hvězdy a rotační frekvenci v každém kroce určujeme okamžitou pozici hvězdy vůči vztažné soustavě spjaté s planetou ( $xyz$ ), odpovídající slapotvorný potenciál a slapovou sílu, a také odstředivý potenciál a odstředivou sílu. Elementy dráhy během tohoto cyklu považujeme za neměnné. Reakci planety na slapové i rotační zatížení, tedy její deformaci a související disipaci mechanické energie, vyčísluje již zmíněný program *Andy4*. Když známe deformaci rozhraní, můžeme s využitím definice plošné hustoty vyjádřit dodatkovou sílu, transformovat ji do kartézských souřadnic korotujících s oběhem hvězdy a dosadit ji do Gaussových poruchových rovnic.



Obrázek 1.7: Výpočetní schéma.

Poruchové rovnice (1.83) – (1.84) během malého cyklu přímo neřešíme, ale užíváme je k nalezení středních hodnot rychlostí změny dráhových elementů,

$$\frac{\overline{da}}{dt}, \frac{\overline{de}}{dt}, \frac{\overline{d\Omega_{\text{rot}}}}{dt},$$

kteřé následně vstupují do velkého (dlouhoperiodického) cyklu. V každém časovém kroku velkého cyklu přitom vycházíme z explicitního vyjádření

$$\frac{\overline{da}}{dt} = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} \left( \frac{da}{dt} \right) dt = \frac{2}{t_{\max} n \sqrt{1-e^2}} \int_0^{t_{\max}} \left[ e \sin \nu(t) R + \left( 1 + e \cos \nu(t) \right) S \right] dt,$$

$$\frac{\overline{de}}{dt} = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} \left( \frac{de}{dt} \right) dt = \frac{\sqrt{1-e^2}}{t_{\max} n a e} \int_0^{t_{\max}} \left[ e \sin \nu(t) R + \left( 1 + e \cos \nu(t) - \frac{r}{a} \right) S \right] dt,$$

kde za  $t_{\max}$  dosazujeme čas odpovídající počtu period malého cyklu a dráhové elementy  $a$ ,  $e$ ,  $n$  vystupující na pravé straně považujeme v daném kroku velkého cyklu za konstantní. Časově závislými veličinami jsou zde složky poruchové síly  $R$ ,  $S$ , pravá anomálie  $\nu$  a okamžitá vzdálenost planety od hvězdy  $r$ . Po numerickém vyčíslení obou integrálů dosazujeme střední hodnoty příslušných derivací do evoluční rovnice pro rotační frekvenci (1.99), přičemž moment setrvačnosti  $J_{zz}$  pokládáme v daném kroku velkého cyklu za neměnný. Moment setrvačnosti ovšem měníme na konci každého malého cyklu tak, aby odpovídal průměrné hodnotě rotační a slapové deformace na stupni 2 a řádu 0.

Pro výpočet nových elementů v průběhu velkého cyklu využíváme explicitní integrační schéma s proměnným časovým krokem  $\widetilde{\Delta t}$ . Elementy v časovém kroku  $\alpha$  určíme jako

$$\begin{aligned} a^\alpha &= a^{\alpha-1} + \left( \frac{\overline{da}}{dt} \right)^{\alpha-1} \widetilde{\Delta t} \\ e^\alpha &= e^{\alpha-1} + \left( \frac{\overline{de}}{dt} \right)^{\alpha-1} \widetilde{\Delta t} \\ \Omega_{\text{rot}}^\alpha &= \Omega_{\text{rot}}^{\alpha-1} + \left( \frac{\overline{d\Omega_{\text{rot}}}}{dt} \right)^{\alpha-1} \widetilde{\Delta t} \end{aligned}$$

a krok volíme vždy tak, aby se nejrychleji měnící element – v našem případě rotační frekvence – změnil nejvýše o 1%. Přitom však dbáme na to, aby délka časového kroku  $\widetilde{\Delta t}$  přesáhla dobu středování příslušných derivací (pokud tedy provádíme středování přes padesát oběhů, bude tento časový krok vždy větší než padesát oběhů). Nové oskulační elementy znova vstupují do malého integračního cyklu a celý výpočet se opakuje, dokud není dosaženo požadovaného maximálního času, po něž vývoj dráhy studujeme.

## 1.5 Výsledky

Představené numerické schéma slapového vývoje oběžné dráhy bylo použito ke studiu dvou modelových soustav hvězdy a exo-Země. První z těchto smyšlených soustav sestává z hvězdy podobné Slunci a z horké, krátkoperiodické planety obíhající po elipse s hlavní poloosou rovnou 0,055 AU. Druhý systém je tvořen málo hmotnou hvězdou spektrální třídy M a planetou na oběžné dráze s  $a = 0,1$  AU.

	<b>Model A</b>	<b>Model B</b>
$a$	0,055 AU	0,1 AU
$T_{\text{orb}}$	4,7 dnů	36,5 dnů
$e$	proměnné	0,2 nebo prom.
$M_*$	$1 M_{\text{S}}$	$0,1 M_{\text{S}}$

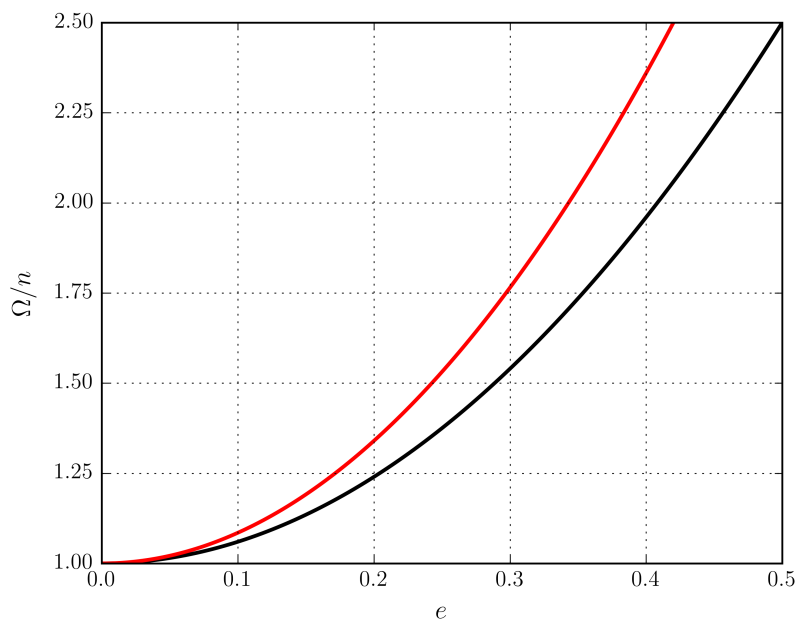
Důvodem pro zvolení dvou různých testovacích soustav byl zájem o širší rozpětí period slapového buzení, které nám při zachování realistických efektivních viskozit planety umožní dosáhnout jak viskózní, tak elastické limity ve studiu rovnovážného spin-orbitálního poměru. Planeta z modelu B, jejíž povrch na rozdíl od horké Země z modelu A zůstane pravděpodobně neroztaven, bude navíc vzpomenua i ve výsledcích následující kapitoly, a poskytne tak provázanost oběma částem této práce.

V obou modelových případech předpokládáme, že nitro planety je tvořeno pevným a kapalným jádrem a viskoelastickým pláštěm, přičemž poloměry i hustoty všech těchto oblastí odpovídají charakteristikám Země. Odezva na slapové zatížení, jakož i disipace mechanické energie, je počítána pouze v plášti za předpokladu maxwellovské reologie a výpočet začíná ze stavu nulové deformace. Slapové zahřívání v ostatních částech planety zanedbáváme. Efektivní modul torse  $\mu$  pokládáme rovný 200 GPa, efektivní viskozitu  $\eta$  v parametrických studiích měníme mezi hodnotami  $10^{16}$  Pa s a  $10^{18}$  Pa s. Pro jednoduchost také po celou dobu předpokládáme, že sklon rotační osy planety vůči normále k oběžné rovině je nulový a během výpočtu se nemění.

### 1.5.1 Spin-orbitální resonance

Teorie předpokládající konstantní slapový rozestup předpovídají zachycení slapově vyvinutých planet na výstředné dráze do stavů stabilní pseudo-synchronní (nebo super-synchronní) rotace, při níž je rotační frekvence mírně vyšší než frekvence oběžná (viz obrázek 1.8). Fyzikální opodstatnění této předpovědi bylo popsáno v pododdíle 1.3.3. Analytické modely zakládající se na předpokladu viskoelastické Maxwellovy či Andradeovy reologie (např. Correia a kol., 2014; Makarov a Efroimsky, 2013) však oproti tomu předvídatel zachyt planet do spin-orbitálních resonancí a pseudo-synchronní rotaci pro realistické krátkoperiodické kamenné planety označují za nestabilní. Otázka skutečných rotačních frekvencí terestrických exoplanet je na základě pozorování zatím nezodpověditelná (viz následující kapitolu), odpovědi se v současnosti opírají jen o teoretické modely a zasahují jak do oblasti geodynamiky, tak například do populárního

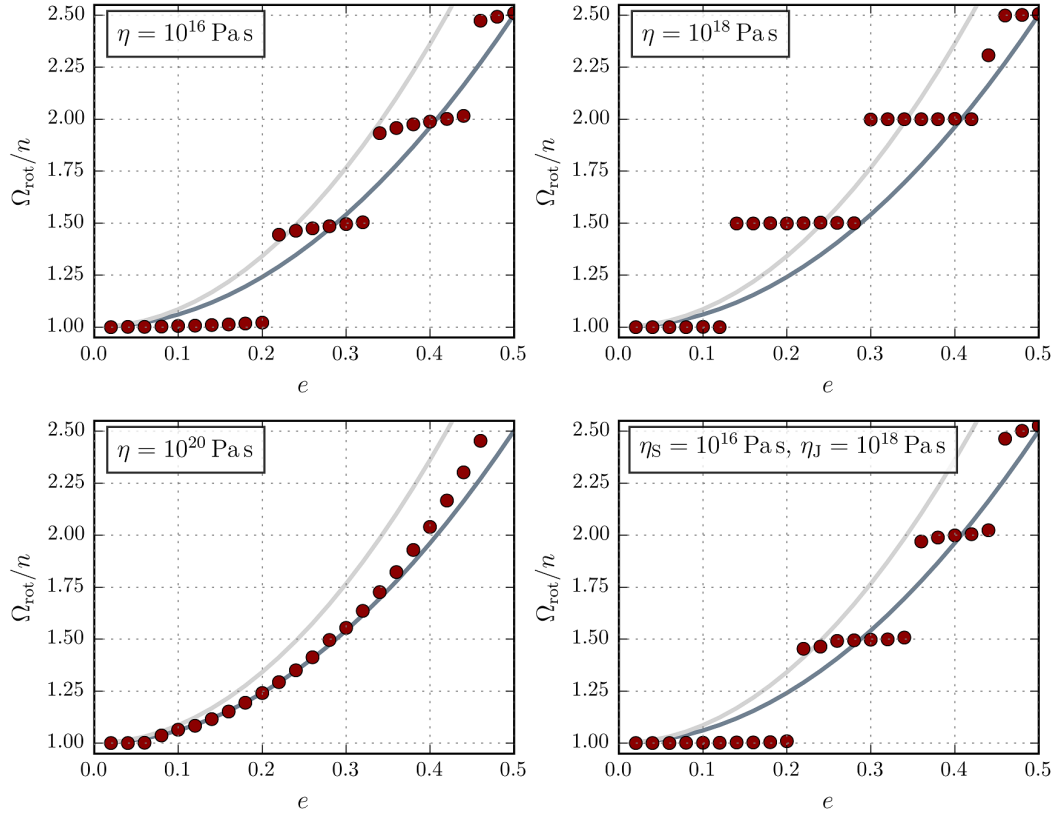
tématu obyvatelnosti extrasolárních planet: Stabilita pseudo-synchronní rotace by poskytovala naději na obyvatelnost planet, které si – například díky poruchám od jiných velkých oběžnic s eliptickou dráhou – udržely po čas svého slapového vývoje nenulovou excentricitu. Spin-orbitální resonance, zvláště vázaná rotace, naopak vedou i v případě planet v obyvatelné zóně k výrazně nerovnoměrnému rozložení povrchových teplot, a tedy k zásadním a životu krajně nepříznivým důsledkům pro případnou atmosféru.



**Obrázek 1.8:** Pseudo-synchronní rotace. Znáznorněna je závislost rovnovážných spin-orbitálních poměrů na výstřednosti dráhy v případě slapových teorií předpokládajících konstantní fázový rozestup (červeně) nebo konstantní časový rozestup (černě) mezi slapotvorným a dodatkovým potenciálem.

Rovnovážený stav, do kterého planeta během svého slapového vývoje dospěje, je určen mimo jiné jejími reologickými parametry, frekvencí slapového buzení a tvarem oběžné dráhy. Dalšími vlivy, kterými se v této práci nezabýváme, může být například přítomnost permanentní deformace, slapová odezva atmosféry nebo tření na rozhraní jádra a pláště. Závislost rovnovážných rotačních stavů na efektivní viskozitě a výstřednosti dráhy jsme studovali pro obě modelové soustavy a porovnávali ji s předpověďmi teorií s konstantním slapovým rozestupem (obrázky 1.9 a 1.10). Nejvyšší uvažovanou výstředností bylo  $e = 0,5$ . Rotační frekvence byla vyvíjena podle rovnice (1.99) ze zvolené hodnoty  $\Omega_{rot} = 2, 3n$  až do chvíle, kdy začala oscilovat kolem hodnoty konečné – uváděné rovnovážné stavy tedy v našem případě představují průměr z těchto oscilací. Střední hodnoty časových derivací  $a$  a  $e$  počítáme z poruchové síly známé z padesáti oběžných period. Kontrolní výpočty využívající středování přes sto oběžných period nevedly ke kvalitativně odlišným závěrům.

V případě planety z modelu A, jejíž oběžná perioda je rovna 4,7 dnům, se setkáváme se spin-orbitálními resonancemi zvláště patrnými v případě efektivní viskozity  $\eta = 10^{18}$  Pa s (odpovídající Maxwellův čas je roven 58 dnům). Vázaná rotace je zde

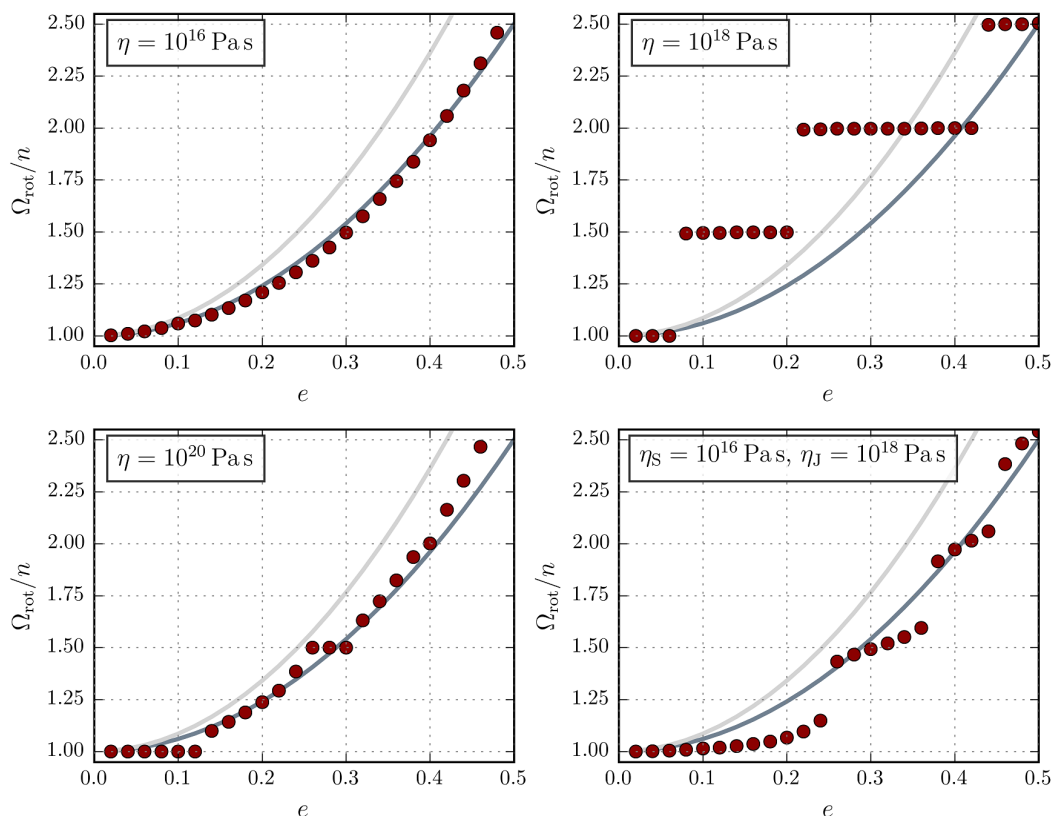


**Obrázek 1.9:** Rovnovážné spin-orbitální poměry pro planetu z modelu A. Oběžná perioda je v tomto případě 4, 7 dne a vývoj rotační frekvence byl počítán z počátečního stavu  $\Omega_{\text{rot}}/n = 2, 3$ . Světle šedá křivka odpovídá rovnovážným stavům (pseudo-synchronní rotaci) v modelu s konstantním fázovým rozestupem, tmavě šedá křivka představuje pseudo-synchronní rotaci v modelu s konstantním časovým rozestupem.

Vlevo nahoře:  $\eta = 10^{16}$  Pa.s,  $\tau_M = 0, 58$  dne; vpravo nahoře:  $\eta = 10^{18}$  Pa.s,  $\tau_M = 58$  dnů; vlevo dole:  $\eta = 10^{20}$  Pa.s,  $\tau_M = 5800$  dnů; vpravo dole: severo-jížní rozložení efektivní viskozity,  $\eta_S = 10^{16}$  Pa.s,  $\eta_J = 10^{18}$  Pa.s

stabilní pro výstřednosti dosahující až hodnoty 0, 12. Spin-orbitální resonanci 3:2 nacházíme v rozmezí  $e \in (0, 14; 0, 28)$ , resonanci 2:1 v rozmezí  $e \in (0, 3; 0, 42)$  a resonanci 5:2 pro excentricitu vyšší než 0, 46. Pozoruhodný je neresonantní rotační stav odpovídající výstřednosti  $e = 0, 44$ . Modely s konstantním slapovým rozestupem v tomto příkladě vedou ke správným předpovědím spin-orbitálního poměru pouze pro několik specifických výstředností, obecně ovšem představují příliš velké zjednodušení.

Předpoklad konstantního časového rozestupu je však pro malé až střední excentricity opodstatněný v případě elastické limity, tedy efektivní viskozity  $\eta = 10^{20}$  Pa.s, které odpovídá Maxwellův čas  $\tau_M = 5800$  dnů. Výsledný průběh stabilních rotačních stavů se zde při výstřednostech  $e \lesssim 0, 3$  přimyká k teoretické křivce představující obvykle užívané vyjádření pseudo-synchronní rotace (1.42). Planeta s efektivní viskozitou  $\eta = 10^{16}$  Pa.s (Maxwellův čas  $\tau_M = 0, 58$  dne) v soustavě z modelu A nepředstavuje viskózní limitu a neodpovídá tak předpovědi teorií s konstantním časovým rozestupem,



**Obrázek 1.10:** Rovnovážné spin-orbitální poměry pro planetu z modelu B. Oběžná perioda je 36,5 dne a vývoj rotační frekvence byl počítán z počátečního stavu  $\Omega_{\text{rot}}/n = 2, 3$ . Světle šedá křivka odpovídá rovnovážným stavům (pseudo-synchronní rotaci) v modelu s konstantním fázovým rozestupem, tmavě šedá křivka představuje pseudo-synchronní rotaci v modelu s konstantním časovým rozestupem.  
*Vlevo nahoře:*  $\eta = 10^{16}$  Pa.s,  $\tau_M = 0, 58$  dne; *vpravo nahoře:*  $\eta = 10^{18}$  Pa.s,  $\tau_M = 58$  dnů; *vlevo dole:*  $\eta = 10^{20}$  Pa.s,  $\tau_M = 5800$  dnů; *vpravo dole:* severo-j jižní rozložení efektivní viskozity,  $\eta_S = 10^{16}$  Pa.s,  $\eta_J = 10^{18}$  Pa.s

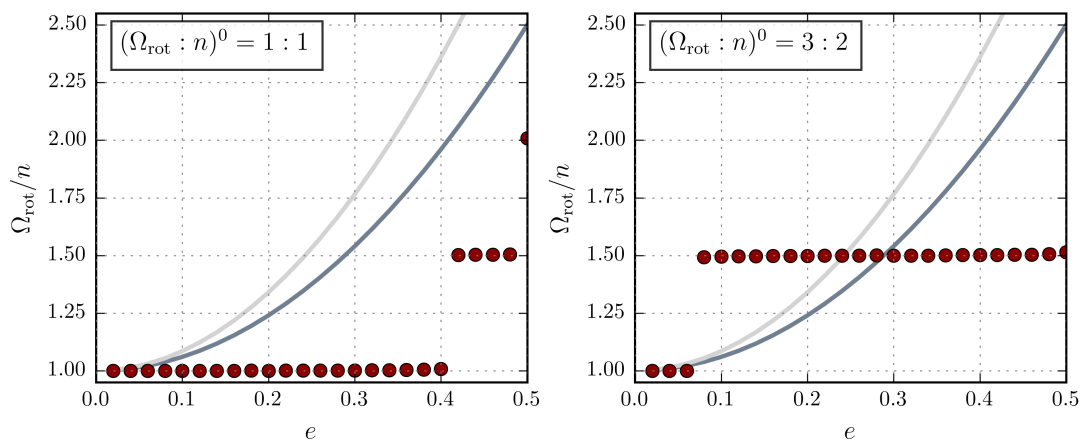
současně u ní však nezaznamenáváme natolik ostré přechody mezi spin-orbitálními resonancemi, jako při efektivní viskozitě  $10^{18}$  Pa.s. Během zpomalování rotace byla planeta při některých excentricitách uchycena dokonce do „pseudo-resonantního“ stavu, kdy se její spin-orbitální poměr od některé z resonancí málo odlišoval. Stav vázané rotace je stabilní pro výstřednosti  $e \lesssim 0, 2$ , rotační frekvence je blízká resonanci 3:2 při výstřednostech  $e \in (0, 22; 0, 32)$ , resonanci 2:1 při  $e \in (0, 34; 0, 44)$  a konečně resonanci 5:2 pro  $e \in (0, 46; 0, 5)$ .

Pro planetu z modelu B, která se nachází od své málo hmotné mateřské hvězdy dále a obíhá ji s periodou 36,5 dnů, jsou spin-orbitální resonance rovněž nejstabilnější v případě efektivní viskozity  $\eta = 10^{18}$  Pa.s, odlišné je pouze rozmezí výstředností, při nichž se konkrétní rotační stavy vyskytují. Vázaná rotace je stabilní v rozmezí  $e \in (0; 0, 06)$ , resonance 3:2 v rozmezí  $e \in (0, 08; 0, 2)$ , resonanci 2:1 pozorujeme v širokém rozmezí  $e \in (0, 22; 0, 42)$  a při vyšších výstřednostech ze studovaného intervalu je stabilní resonance 5:2. Vyšší efektivní viskozita,  $\eta = 10^{20}$  Pa.s, zde sice

nepředstavuje elastickou limitu, odpovídající Maxwellův čas je však stále o dva řády vyšší než oběžná frekvence planety (a srovnatelná frekvence slapového buzení), proto se elastické limitě zvláště v rozmezí výstředností  $e \in (0, 14; 0, 22)$  blíží. Při malých excentricitách,  $e \lesssim 0, 12$  je rovnovážným stavem vázaná rotace a pro excentricity v rozmezí  $e \in (0, 26; 0, 3)$  dochází k záchytu planety do spin-orbitální resonance 3:2. Nižší efektivní viskozita,  $\eta = 10^{16}$  Pa s, v modelu B vede ke spin-orbitálním poměrům dobře vystiženým slapovou teorií s konstantním časovým rozestupem, neboť nyní odpovídá viskózní limitě.

V obou modelových soustavách bylo studováno též zpomalování rotace a záchyt do rovnovážného rotačního stavu pro planetu s heterogenním, severo-j jižním rozložením viskozity (graf vpravo dole na obrázcích 1.9 a 1.10). Výsledný průběh spin-orbitálních poměrů je zde kombinací průběhů odpovídajících případům s  $\eta = 10^{16}$  Pa s a  $10^{18}$  Pa s. Zřetelnější je tento jev v modelu B, kde planeta s nejnižší uvažovanou viskozitou představuje viskózní limitu. Uvážení heterogenního rozložení zde vede ke vzniku pseudo-synchronní (či spíše pseudo-resonantní) rotace nepředvídané v celém rozsahu žádnou z obou tradičních teorií, lépe však samozřejmě aproximovanou předpokladem konstantního časového rozestupu.

Planeta z modelu B s efektivní viskozitou  $\eta = 10^{18}$  Pa s byla zvolena také k testování vlivu počátečního spin-orbitálního poměru na dosažené závěrečné stavy. Vývoj rotační frekvence jsme tentokrát spouštěli ze stavů spin-orbitální resonance 1:1 a 3:2 a sledovali tedy jejich stabilitu při změně výstřednosti. V reálném případě může být výstřednost dráhy periodicky měněna například v důsledku poruch působených jinými tělesy v planetární soustavě, a tyto poruchy by tak mohly vést i ke změnám spin-orbitálního poměru. Výsledky příslušných výpočtů znázorňuje obrázek 1.11. Planeta uchycená na počátku studovaného vývoje ve stavu vázané rotace v tomto stavu setrvává pro velké rozpětí uvažovaných výstředností,  $e \in (0; 0, 4)$ . Při excentricitách vyšších, z intervalu  $(0, 42; 0, 48)$ , naopak počáteční vázanou rotaci opouští a uchytí se ve spin-



**Obrázek 1.11:** Rovnovážné spin-orbitální poměry pro planetu z modelu B, vliv počáteční rotační frekvence. Oběžná perioda je 36, 5 dne, efektivní viskozita  $\eta = 10^{18}$  Pa s a Maxwellův čas  $\tau_M = 58$  dnů. *Vlevo:* rovnovážné spin-orbitální poměry pro výpočet začínající ze stavu vázané rotace; *vpravo:* rovnovážné spin-orbitální poměry pro výpočet začínající ze spin-orbitální resonance 3:2.

orbitální resonanci 3:2. Největší uvažovaná excentricita,  $e = 0,5$ , vede k záchyty do resonance 2:1. Stav spin-orbitální resonance 3:2 se v naší modelové soustavě ukazuje být ještě stabilnějším, studovaná planeta, která se v tomto stavu nacházela na počátku svého studovaného vývoje, jej opouštěla pouze při velmi málo výstředné oběžné dráze,  $e \in (0; 0,06)$ .

### 1.5.2 Slapové zahřívání

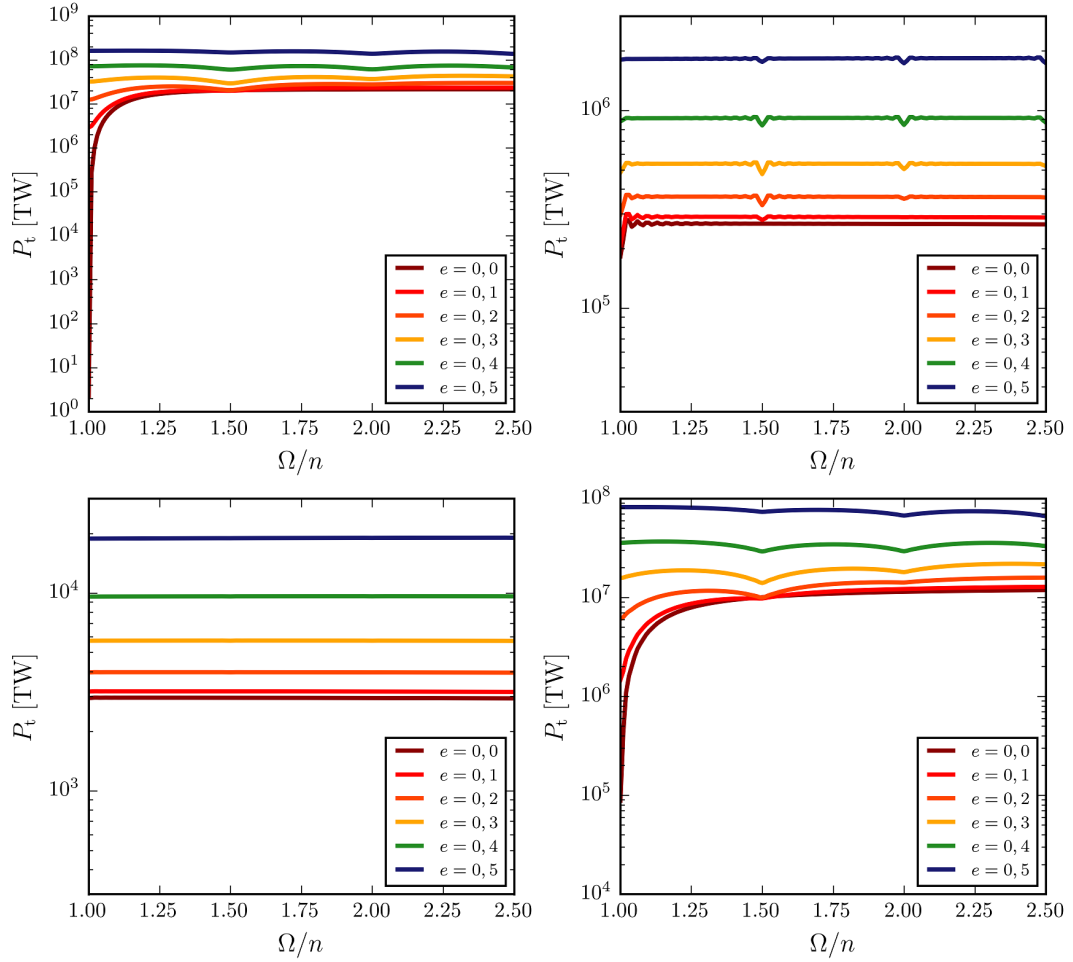
Disipace mechanické energie, k níž uvnitř planety v průběhu slapového působení dochází, je se samotným vývojem rotační frekvence a oběžné dráhy velmi úzce spjata. V předcházejícím pododdíle jsme se seznámili s význačností spin-orbitálních resonancí, které – v závislosti na efektivní viskozitě planety a frekvenci slapového buzení – představují jeden z rovnovážných rotačních stavů. Ve stabilních rotačních stavech nabývá disipace v tělese zřejmě svého lokálního minima, až na speciální případ v podobě vázané rotace málo viskózního tělesa na kruhové dráze je však stále přítomna a v případě vysoké efektivní viskozity planetárního pláště může dosahovat značných hodnot.

Slapové zahřívání a jeho závislost na efektivní viskozitě, výstřednosti dráhy a spin-orbitálním poměru byly opět studovány pro obě modelové soustavy. Efektivní viskozitu jsme volili buď v celém plášti homogenní, s hodnotami  $10^{16}$  Pa s,  $10^{18}$  Pa s nebo  $10^{20}$  Pa s, pro porovnání však byl zvolen i model planety s viskozitou heterogenní na stupni 1, se severo-jihním či východo-západním rozložením. Východo-západní rozložení viskozity by v případě vázané rotace planety mohlo odpovídat situaci, kdy je polokoule přivracená k mateřské hvězdě trvale natavena. Veličiny vystupující v příslušných rovnicích z pododdílu 1.4.3 byly rozvíjeny do stupně 5 a průměrný výkon odpovídající slapovému zahřívání byl hledán ve dvacáté oběžné periodě. Časové rozlišení každé periody je 100 kroků, v případě heterogenního rozložení viskozity 1000 kroků. Výsledky výpočtů vykreslujeme na obrázcích 1.12 a 1.13.

V obou modelových soustavách se vliv spin-orbitálních resonancí na průběh křivek slapového zahřívání opět nejvýrazněji projevuje v případě efektivní viskozity  $\eta = 10^{18}$  Pa s. V závislosti na výstřednosti dráhy mají lokální minima asociovaná s různými resonancemi rozdílnou hloubku. Nejvýstřednější studované dráhy ( $e = 0,4$  a  $e = 0,5$ ) v modelu A vedou k nejvýraznějšímu snížení výkonu  $P_t$  při dosažení spin-orbitálního poměru 2:1, pro dráhu se střední excentricitou ( $e = 0,3$ ) je globálního minima dosaženo v resonanci 3:2 a při nižších výstřednostech se výkon slapového zahřívání minimalizuje teprve ve stavu vázané rotace. Rozložení hloubek lokálních minim v modelu B je obdobné, pouze pro nejvýstřednější dráhu ( $e = 0,5$ ) představuje nejhlubší minimum resonance 5:2.

Slapové zahřívání planety s nejnižší studovanou viskozitou ( $\eta = 10^{16}$  Pa s) na kruhové oběžné při vázané rotaci vymizí. Pro vázanou rotaci na výstředných drahách však nabývá v případě modelu A extrémních hodnot v řádu  $10^6$  až  $10^8$  TW. Globální minimum disipace při excentricitě  $e = 0,1$  nastává při resonanci 1:1, při excentricitě  $e = 0,2$  je situace stejná, avšak v parametrické závislosti slapového zahřívání lze nalézt i další dvě velice mělká lokální minima odpovídající resonancím 3:2 a 2:1. Výstřednosti  $e = 0,3$  a  $e = 0,4$  vedou k minimálnímu zahřívání při spin-orbitální resonanci

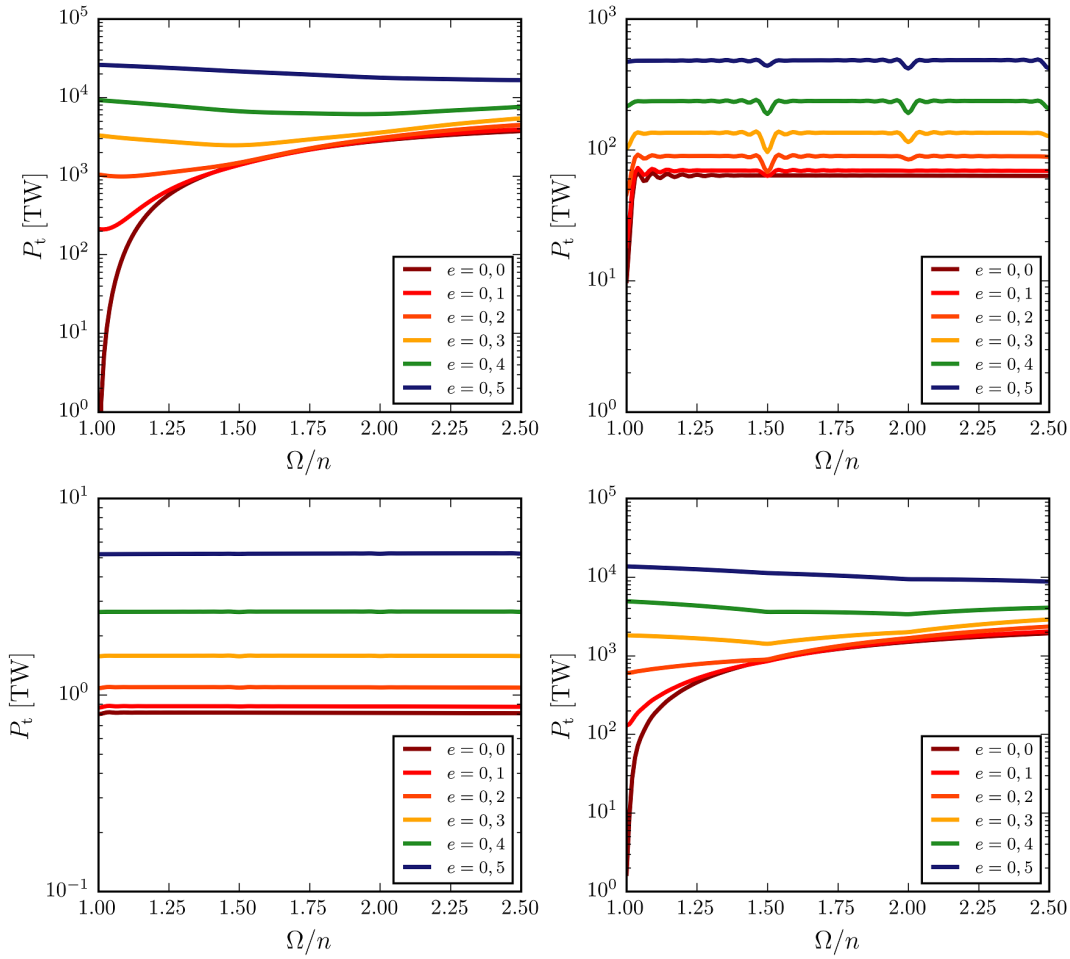




**Obrázek 1.12:** Závislost slapového zahřívání na spin-orbitálním poměru pro různé výstřednosti dráhy a efektivní viskozity (model A). Oběžná frekvence je rovna 4,7 dnům. *Vlevo nahoře:*  $\eta = 10^{16}$  Pa s,  $\tau_M = 0,58$  dne; *vpravo nahoře:*  $\eta = 10^{18}$  Pa s,  $\tau_M = 58$  dnů; *vlevo dole:*  $\eta = 10^{20}$  Pa s,  $\tau_M = 5800$  dnů; *vpravo dole:* severo-jížní rozložení efektivní viskozity,  $\eta_S = 10^{16}$  Pa s,  $\eta_J = 10^{18}$  Pa s

3:2 a výstřednost  $e = 0,5$  při resonanci 5:2, pozice lokálních minim však v tomto rozmezí excentricit odpovídají všem spin-orbitálním resonancím. Pro model B, tedy viskózní limitu, nacházíme v celém rozmezí výstředností vždy pouze jedno minimum, které není vázáno na žádnou spin-orbitální resonanci; toto minimum odpovídá pseudo-synchronizaci. Planeta o nejvyšší viskozitě ( $\eta = 10^{20}$  Pa s) vykazuje dle očekávání nejnižší výkon slapového zahřívání, který je v případě modelu B vždy nižší než 5 TW. I v tomto případě jsou na příslušné závislosti přítomna minima, avšak velice mělká.

Předepsání heterogenní viskozity na stupni 1, kdy je jedna polokoule planety popsána efektivní viskozitou  $\eta = 10^{16}$  Pa s a druhá polokoule viskozitou  $\eta = 10^{18}$  Pa s, má za následek průběhy slapového zahřívání, které jsou kombinací průběhů pro obě viskozity zvlášť. Velikost výkonu je v heterogenním modelu řízena spíše nižší viskozitou, zatímco vyšší viskozita přispívá k prohloubení lokálních minim přidružených ke spin-orbitálním resonancím. Pro heterogenní viskozitní model jsme předepisovali



**Obrázek 1.13:** Závislost slapového zahřívání na spin-orbitálním poměru pro různé výstřednosti dráhy a efektivní viskozity (model B). Oběžná frekvence je rovna 36,5 dnům. *Vlevo nahoře:*  $\eta = 10^{16}$  Pa s,  $\tau_M = 0,58$  dne; *vpravo nahoře:*  $\eta = 10^{18}$  Pa s,  $\tau_M = 58$  dnů; *vlevo dole:*  $\eta = 10^{20}$  Pa s,  $\tau_M = 5800$  dnů; *vpravo dole:* severo-jížní rozložení efektivní viskozity,  $\eta_S = 10^{16}$  Pa s,  $\eta_J = 10^{18}$  Pa s

obě možná rozložení, tedy severo-jížní i západo-východní. Hodnoty, kterých slapové zahřívání při různých spin-orbitálních poměrech dosahuje, se řádově shodují. Vzhledem k horší konvergenci západo-východního modelu však na přiložených obrázcích znázorňujeme jen případ severo-jížního rozložení viskozity.

### 1.5.3 Konvergence Kaulových řad

Kaula (1964) vyjadřuje slapotvorný potenciál ve formě nekonečné Fourierovy řady (1.36) v níž vystupují funkce inklinace  $\mathcal{F}_{jmp}$ , funkce výstřednosti  $\mathcal{G}_{jpq}$  a přidružené Legendreovy polynomy  $\mathcal{P}_{jm}$ . Při praktickém použití tohoto rozvoje je ovšem nutné zvolit konečný počet členů, kterými budou skutečný potenciál a odpovídající síla aproximovány. Častou volbou je rozvoj slapotvorného potenciálu do prvního řádu ve výstřednosti, který má své opodstatnění ve studiích týkajících se těles s téměř kruhovou dráhou, jako je například Měsíc (viz Kaula, 1964), avšak bývá využíván

i pro popis vývoje exoplanet na velmi výstředných oběžných dráhách (např. Barnes a kol., 2008). Abychom ilustrovali, jaká nepřesnost tuto volbu v případě eliptické dráhy může provázet, zaměříme se v tomto pododdíle na konvergenci Kaulových řad ke koeficientům slapové síly na stupni 2 určeným numerickým výpočtem podle vztahu (1.53).

Ke srovnání Kaulova vyjádření a výsledku numerického výpočtu volíme planetu z modelu B, uchycenou ve spin-orbitální resonanci 1:1 anebo 3:2 a obíhající po dráze s výstředností  $e = 0, 2$ . Jelikož v celé této kapitole pokládáme rotační osu za kolmou k rovině oběhu, je většina funkcí inklinace na stupni 2 nulová (viz vyjádření  $\mathcal{F}_{jmp}$  v článku Kaula, 1964) a v rozvoji potenciálu i síly tak zbydou pouze členy s indexy  $(j, m, p) = (2, 0, 1)$  nebo  $(j, m, p) = (2, 2, 0)$  a libovolným indexem  $q$ , vystupujícím ve vyjádření funkcí výstřednosti. Obecné vyjádření slapové síly na stupni 2 můžeme s využitím sférických harmonik zapsat jako

$$\mathbf{f}_t(r', \vartheta', \varphi') = A_{20} \mathbf{Y}_{20}^1 + \operatorname{Re}\{A_{22}\} \operatorname{Re}\{\mathbf{Y}_{22}^1 + \mathbf{Y}_{2-2}^1\} + \operatorname{Im}\{A_{22}\} \operatorname{Im}\{\mathbf{Y}_{22}^1 - \mathbf{Y}_{2-2}^1\},$$

kde v případě spin-orbitální resonance 1:1 a omezení se na rozvoj do čtvrtého řádu v excentricitě dosazujeme koeficienty (viz dodatek A)

$$A_{20} = -\sqrt{2\pi}n^2r' \left[ 1 + 3e \cos nt + \frac{1}{2}e^2 \left( 3 + 9 \cos 2nt \right) + \frac{1}{8}e^3 \left( 27 \cos nt + 53 \cos 3nt \right) + \frac{1}{2}e^4 \left( \frac{15}{4} + 7 \cos 2nt + \frac{77}{4} \cos 4nt \right) \right]$$

$$\operatorname{Re}\{A_{22}\} = \sqrt{3\pi}n^2r' \left[ 1 + 3e \cos nt + \frac{1}{2}e^2 \left( 17 \cos 2nt - 5 \right) + \frac{1}{8}e^3 \left( 141 \cos 3nt - 61 \cos nt \right) + \frac{1}{2}e^4 \left( \frac{1601}{24} \cos 4nt - \frac{115}{3} \cos 2nt - \frac{13}{8} \right) \right]$$

$$\operatorname{Im}\{A_{22}\} = -\sqrt{3\pi}n^2r' \left[ 4e \sin nt + \frac{17}{2}e^2 \sin 2nt + \frac{1}{4}e^3 \left( \frac{141}{2} \sin 3nt - 31 \sin nt \right) + \frac{1}{6}e^4 \left( \frac{1601}{8} \sin 4nt - 115 \sin 2nt \right) \right]$$

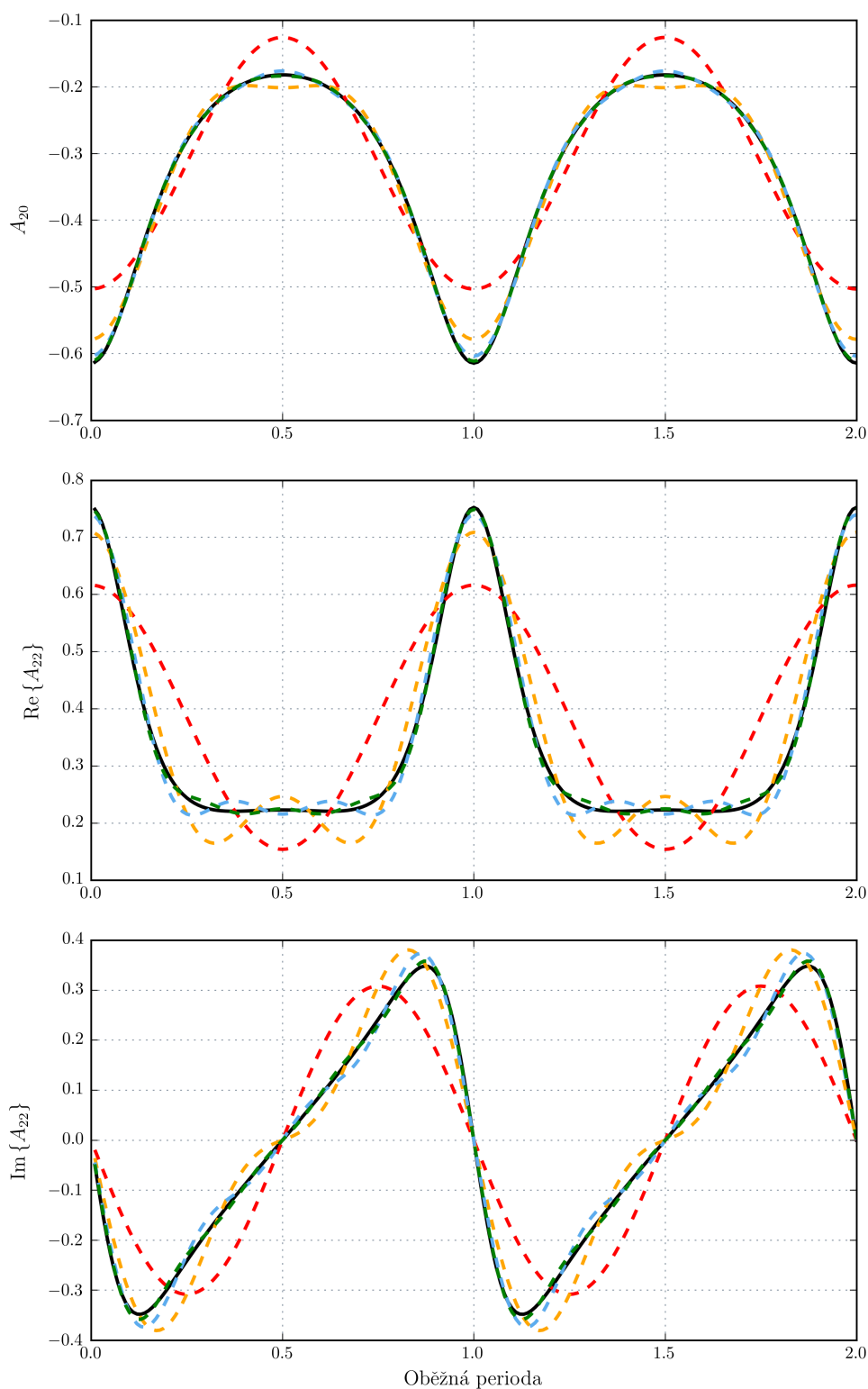
a v případě spin-orbitální resonance 3:2 jsou našimi koeficienty

$$A_{20} = -\sqrt{2\pi n^2 r'} \left[ 1 + 3e \cos nt + \frac{1}{2}e^2 \left( 3 + 9 \cos 2nt \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{8}e^3 \left( 27 \cos nt + 53 \cos 3nt \right) + \frac{1}{2}e^4 \left( \frac{15}{4} + 7 \cos 2nt + \frac{77}{4} \cos 4nt \right) \right]$$

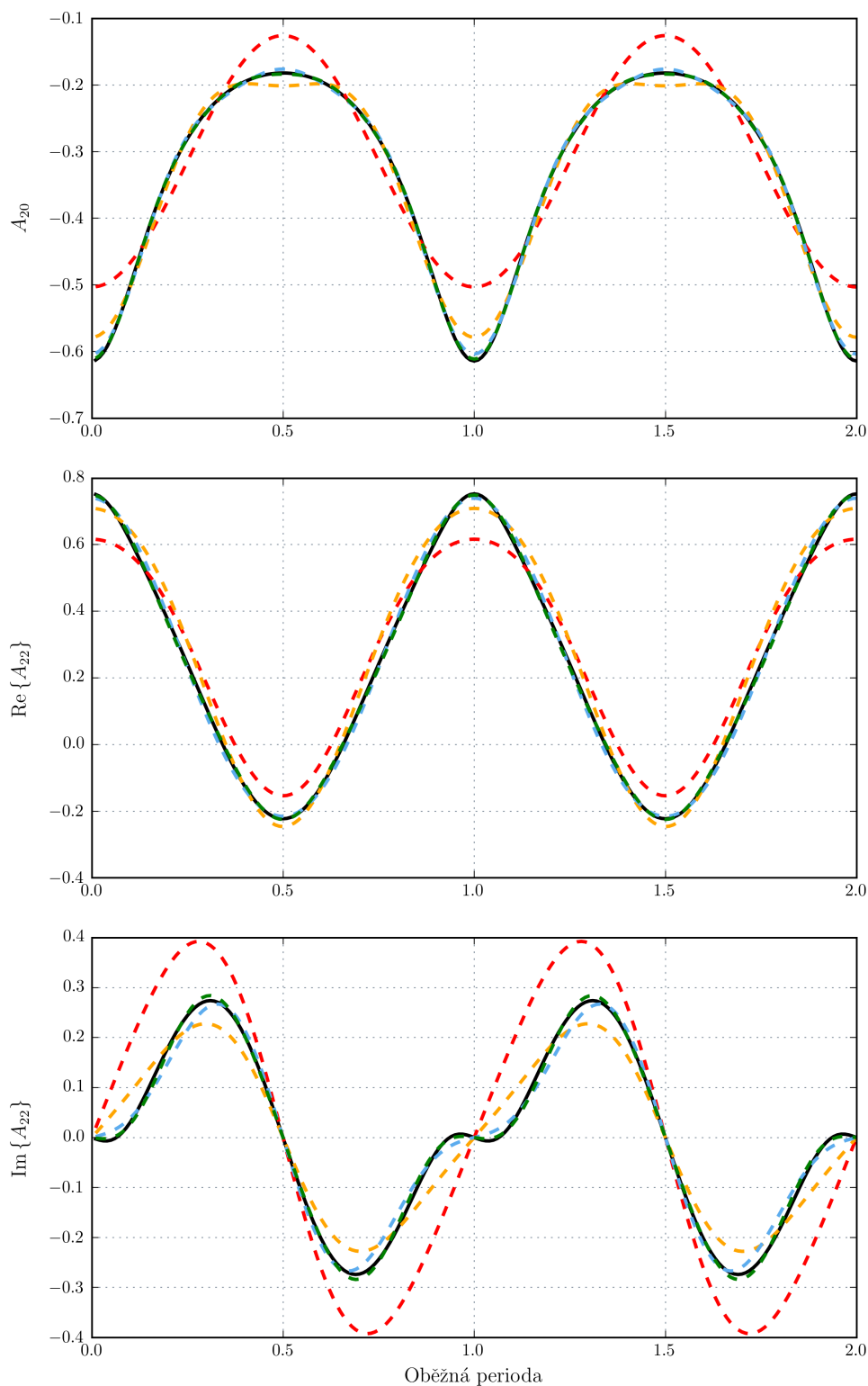
$$\operatorname{Re}\{A_{22}\} = \sqrt{3\pi n^2 r'} \left[ \cos nt + \frac{1}{2}e \left( 7 - \cos 2nt \right) + 6e^2 \cos nt + \right. \\ \left. + \frac{1}{16}e^3 \left( \frac{1}{3} \cos 4nt + \frac{848}{3} \cos 2nt - 123 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}e^4 \left( \frac{1}{12} \cos 5nt + \frac{533}{8} \cos 3nt - \frac{881}{24} \cos nt \right) \right]$$

$$\operatorname{Im}\{A_{22}\} = -\sqrt{3\pi n^2 r'} \left[ -\sin nt + \frac{1}{2}e \sin 2nt + 11e^2 \sin nt + \right. \\ \left. + \frac{1}{16}e^3 \left( \frac{1}{3} \sin 4nt + \frac{842}{3} \sin 2nt \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}e^4 \left( \frac{1}{12} \sin 5nt + \frac{533}{8} \sin 3nt - \frac{959}{24} \sin nt \right) \right]$$

Vývoj těchto veličin, rozvinutých do prvního až čtvrtého řádu ve výstřednosti, znázorňují obrázky 1.14 a 1.15, na nichž je rovněž vynesena průběh odpovídajících koeficientů určených numericky. V případě obou uvažovaných spin-orbitálních resonancí a při dané výstřednosti dráhy rozvoj do prvního ani druhého řádu v excentricitě k vy-stižení časového průběhu slapové síly zjevně nepostačuje, přičemž rozdíly jsou patrné především u koeficientu  $A_{22}$  pro vázanou rotaci. Rozvoj do čtvrtého řádu v excentricitě je zde až na drobné odchylky velice dobrým přiblížením numericky vypočteného průběhu. Při studiu slapového vývoje exoplanet na extrémně výstředných drahách by ovšem bylo nutné buď uvážit další členy Kaulova rozvoje, anebo se uchýlit k numerickému výpočtu, jak je činěno v této práci.



**Obrázek 1.14:** Konvergence členů Kaulova rozvoje slapové síly, spin-orbitální resonance 1:1. Plná černá čára znázorňuje časový průběh koeficientů slapové síly určených ze vztahu (1.53), čárkované čáry představují průběh těchtých koeficientů, vyjádřených ve formě mocninné řady pro výstřednost rozvinuté do  $e^1$  (červeně),  $e^2$  (žlutě),  $e^3$  (modře) a  $e^4$  (zeleně).



**Obrázek 1.15:** Konvergence členů Kaulova rozvoje slapové síly, spin-orbitální resonance 3:2. Plná černá čára znázorňuje časový průběh koeficientů slapové síly určených numericky, čárkované čáry představují průběh těchto koeficientů, vyjádřených ve formě mocninné řady pro výstřednost rozvinuté do  $e^1$  (červeně),  $e^2$  (žlutě),  $e^3$  (modře) a  $e^4$  (zeleně).

## 2. Povrchová teplota

Dlouhodobý vývoj oběžné dráhy s sebou přirozeně přináší také změny teploty a teplotního kontrastu na planetárním povrchu. Jelikož laterální průběh insolace  $S(\vartheta_p, \varphi_p)$  a podpovrchové teploty  $T(\vartheta_p, \varphi_p)$  ovlivňuje horní okrajovou podmínku modelů plášťové konvekce, bude příhodné se na tuto veličinu nyní zaměřit a diskutovat její parametrické závislosti. Následující kapitola je zamýšlena jako zpřesnění a doplnění modelu představeného v bakalářské práci (Káňová, 2013), který k výpočtu teploty v mělké podpovrchové vrstvě využívá metodu konečných diferencí v jednom či třech rozměrech. Po uvedení základních vztahů a přehledu prozatímních výsledků se postupně seznámíme s několika jevy, které byly v bakalářské práci zanedbány, a posoudíme jejich význam. Diskutovat budeme také otázku vazby mezi průměrnou insolací a průměrnou teplotou a vliv spin-orbitálních resonancí na maximální povrchové teploty. Nakonec se zmíníme o možnostech určení některých vlastností skutečných exoplanet za pomoci infračervené fotometrie.

### 2.1 Znění úlohy a přehled dosavadních výsledků

Uvažujme planetu obíhající kolem své mateřské hvězdy po eliptické dráze o hlavní poloose  $a$  a výstřednosti  $e$ . Planeta rotuje kolem své osy s úhlovou frekvencí  $\Omega_{\text{rot}}$  a sklon této osy vůči normále k oběžné dráze je  $\beta$ . V kterémkoliv místě planetárního povrchu musí být v každém okamžiku v rovnováze množství energie přijaté od mateřské hvězdy s množstvím energie vyzářené do okolního prostoru či odvedené do hlubších vrstev planety, což vyjádříme vztahem

$$S(1 - A) = \epsilon \sigma_{\text{SB}} T^4 - k \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2.1)$$

kde  $S(t, \vartheta_p, \varphi_p)$ , veličina zvaná insolace, představuje zářivý tok dopadající na planetu,  $\sigma_{\text{SB}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  je Stefanova-Boltzmannova konstanta,  $k$  značí tepelnou vodivost povrchu,  $T$  teplotu a dvojice bezrozměrných veličin  $A$  a  $\epsilon$ , po řadě albedo a emisivita, charakterizuje schopnost povrchové vrstvy odrážet, respektive vydávat záření. Uvedený zákon zachování energie nám na celém povrchu planety určuje horní okrajovou podmínku pro rovnici vedení tepla,

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + H_{\text{int}}, \quad (2.2)$$

v níž kromě již definovaných veličin popisujících vlastnosti povrchové vrstvy vystupuje hustota  $\rho$ , měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku  $c_p$  a objemové zahřívání  $H_{\text{int}}$ , které může mít původ například v rozpadu radioaktivních prvků. Schopnost materiálu uchovávat tepelnou energii lze souhrnně popsat tepelnou setrvačností  $I = \sqrt{k \rho c_p}$ .

Laterální i časový průběh insolace je funkcí elementů oběžné dráhy, zářivosti mateřské hvězdy, sklonu rotační osy (*obliquity*) a také spin-orbitálního poměru, tedy poměru

rotační a oběžné frekvence studované planety. Jestliže budeme nejprve uvažovat jen planety uchycené ve stavu vázané rotace, můžeme si vliv výstřednosti a sklonu osy snadno představit: Planeta nacházející se na kruhové dráze a rotující kolem osy rovnoběžné s normálou k oběžné rovině je striktně rozdělena na denní a noční polokouli, mateřská hvězda se po její obloze v průběhu oběžné periody nepohybuje a substelární bod setrvává na průsečíku rovníku s nultým poledníkem. Pokud dráha není kruhová, ale má nenulovou výstřednost  $e > 0$ , dochází k libraci v planetopisné délce a substelární bod se pohybuje po rovníku planety mezi dvěma krajními pozicemi, které lze přibližně určit jako  $\varphi_p \approx \pm 2 \arcsin e$  (Dobrovolskis, 2007). Kromě oblastí věčného dne a věčné noci tak na planetě vznikají i místa osvětlená pouze po část místního roku, na nichž se noci a dny periodicky střídají.

Nenulový sklon rotační osy vede na kruhové i eliptické dráze k libracím v planetopisné šířce i délce<sup>1</sup>, jak je znázorněno na obrázku 2.1. Ve výpočtu trajektorie substelárního bodu jsme v tomto případě předpokládali, že rotační osa je vůči normále k oběžné rovině skloněna v takovém směru, že se během průchodu planety periastrum substelární bod nachází právě na rovníku. Okamžik průchodu periastrum tedy splývá s „jarní rovnodenností“. Tento předpoklad je poměrně omezující a v oddíle věnovaném zpřesnění modelu od něj proto upustíme.

Na povrchu planety, která se nenachází ve stavu vázané rotace, ale je uchycena v jiné spin-orbitální resonanci, opisuje substelární bod uzavřenou křivku, jejíž symetrie jsou dány poměrem rotační a oběžné frekvence, výstředností dráhy, sklonem rotační osy i rozstupem mezi průchodem planety periastrum a jarní rovnodenností (Dobrovolskis, 2013). Příklad trajektorie substelárního bodu pro planetu ve spin-orbitální resonanci 3:2 a obíhající po kruhové či eliptické dráze vyobrazují spodní dva grafy na obrázku 2.1.

Množství energie, které libovolné místo na planetě přijímá, je v každé chvíli dáno jeho úhlovou vzdáleností  $\psi_p$  od substelárního bodu. Označíme-li písmenem  $S_*$  insolaci v substelárním bodě na planetě s kruhovou oběžnou dráhou o poloměru  $a$ , pak pro kterýkoliv bod na povrchu tělesa s obecně eliptickou dráhou o hlavní poloose  $a$  platí

$$S = S_* \left(\frac{a}{r}\right)^2 \underline{\cos \psi_p}, \quad (2.3)$$

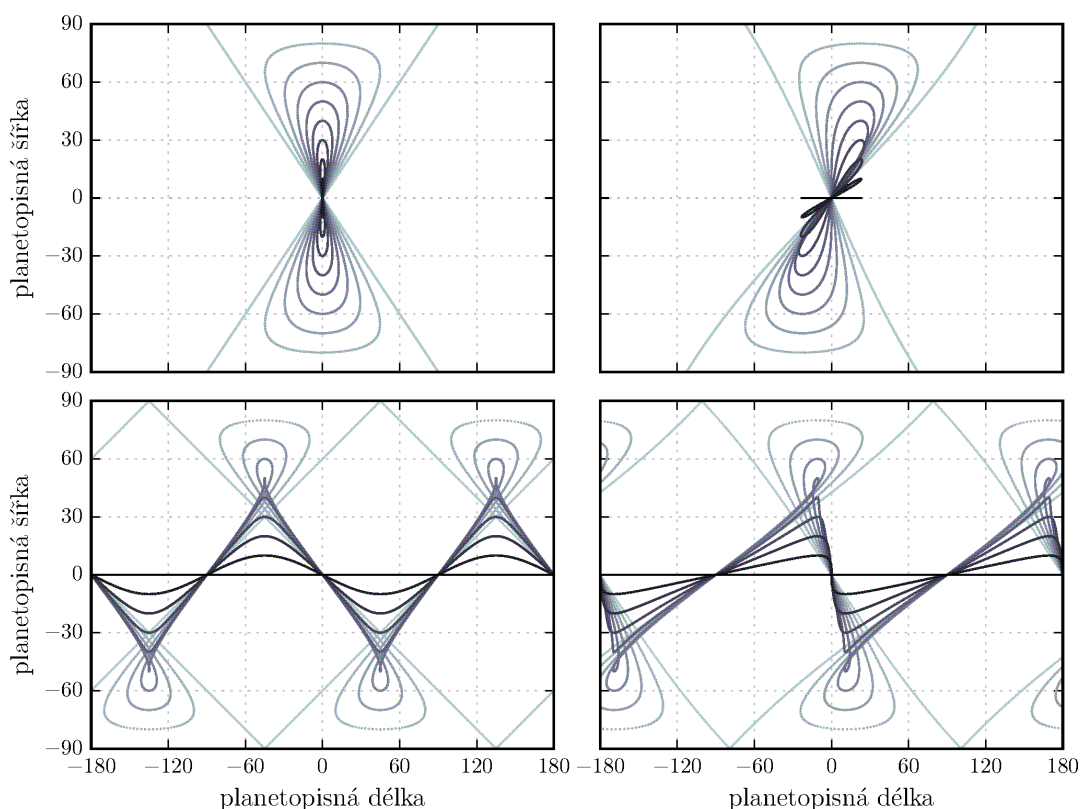
kde  $r$  představuje okamžitou vzájemnou vzdálenost hvězdy a planety a funkce  $\underline{\cos x}$  je kosinus nabývající na neosvětlené polokouli nulových hodnot, tedy

$$\underline{\cos x} = \begin{cases} \cos x & , \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Veličině  $S_*$  budeme také říkat „extrasolární konstanta“, neboť se jedná o obdobu sluneční konstanty, jež charakterizuje zářivý tok přicházející ze Slunce na Zemi. Maximální a

<sup>1</sup>Ilustrační obrázky týkající se trajektorie substelárního bodu a rozložení insolace pro přehlednost vykresluje v souřadnicích s rozsahem  $(-180^\circ, 180^\circ)$  pro planetopisnou délku a  $(-90^\circ, 90^\circ)$  pro planetopisnou šířku. Při výpočtu teploty však užíváme tytéž souřadnice  $\vartheta_p \in (0, \pi)$  a  $\varphi_p \in (0, 2\pi)$  jako v předcházející kapitole a v oddíle věnovaném výsledkům se k nim i v ilustracích navrátíme.

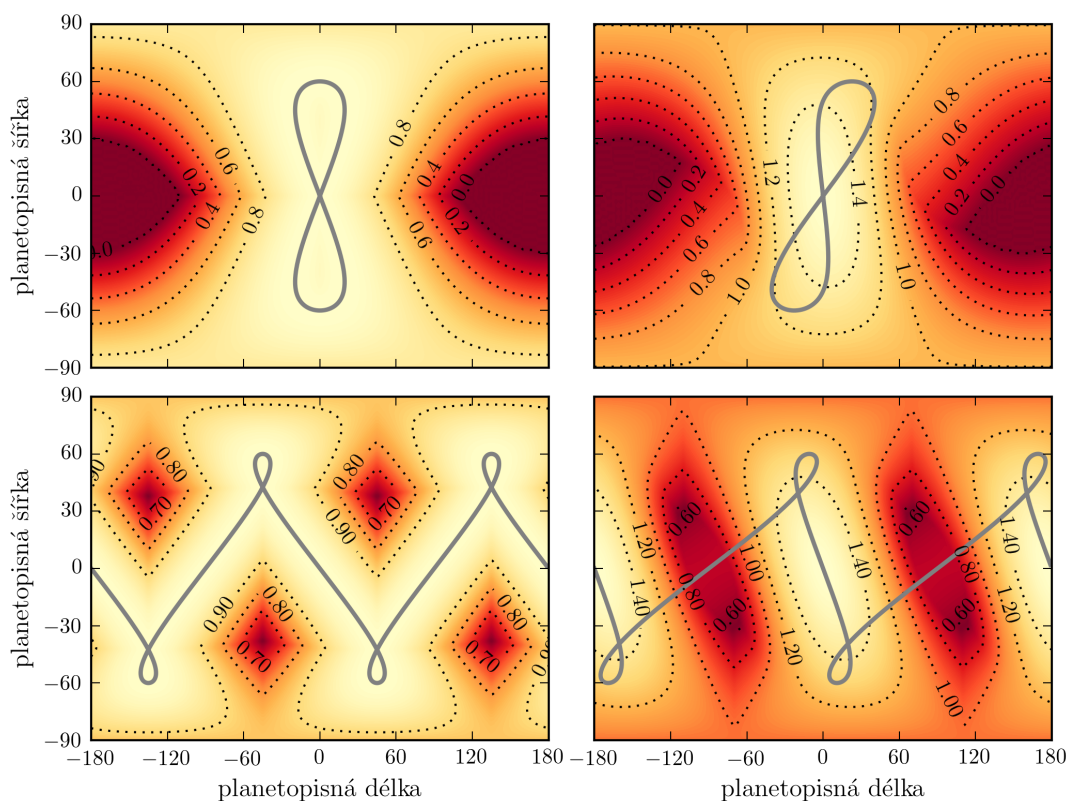




**Obrázek 2.1:** Trajektorie substelárního bodu na povrchu planety jako funkce sklonu rotační osy pro dvě různé spin-orbitální resonance a výstřednosti dráhy. Nulovému sklonu rotační osy odpovídá na každém obrázku černá křivka (substelární bod putující po rovníku), větší sklony jsou vykresleny s krokem  $10^\circ$  ve stále světlejších stupních šedé. Nejvyšší znázorněný sklon je  $90^\circ$ . *Vlevo nahoře:* vázaná rotace,  $e = 0$ ; *vpravo nahoře:* vázaná rotace,  $e = 0, 2$ ; *vlevo dole:* resonance 3:2,  $e = 0$ ; *vpravo dole:* resonance 3:2,  $e = 0, 2$ .

střední hodnoty relativní insolace  $S/S_*$  během jedné insolační periody, která se v případě vázané rotace shoduje s oběžnou periodou a v případě spin-orbitální resonance 3:2 (nebo jiného „poločíslného“ poměru, například 5:2 či 7:2) je rovna jejímu dvojnásobku, vynásíme pro zvolené parametry na obrázcích 2.2, respektive 2.3. Podrobnější studii průběhů insolace pak lze nalézt v pracích Dobrovolskise (2007, 2009, 2013).

Rovnice vedení tepla ve tvaru (2.2), již v této studii řešíme, je platná pouze pro nepohyblivá prostředí. Zabýváme se proto teplotou na planetě bez atmosféry a s pevným, neroztaveným povrchem. V průběhu dne je okamžitá povrchová teplota v takovém případě téměř plně řízena insolací a zahřívání povrchu tepelným tokem z hlubších vrstev či tepelná setrvačnost povrchového materiálu nabývá významu teprve na neosvětlené polokouli. V bakalářské práci jsme zjistili, že průměrná teplota v bodě s nejvyšší průměrnou insolací na modelové planetě s vázanou rotací, obíhající po dráze o zadané hlavní poloose  $a$  kolem hvězdy se zadaným zářivým výkonem  $L_*$ , klesá v důsledku rovnoměrnějšího rozložení insolace se vzrůstající výstředností i sklonem rotační osy a nepatrně roste se zvyšováním tepelné setrvačnosti povrchu. Průměrné teploty i rozložení insolace na planetách uchycených ve vyšších spin-orbitálních resonancích závisí na všech těchto



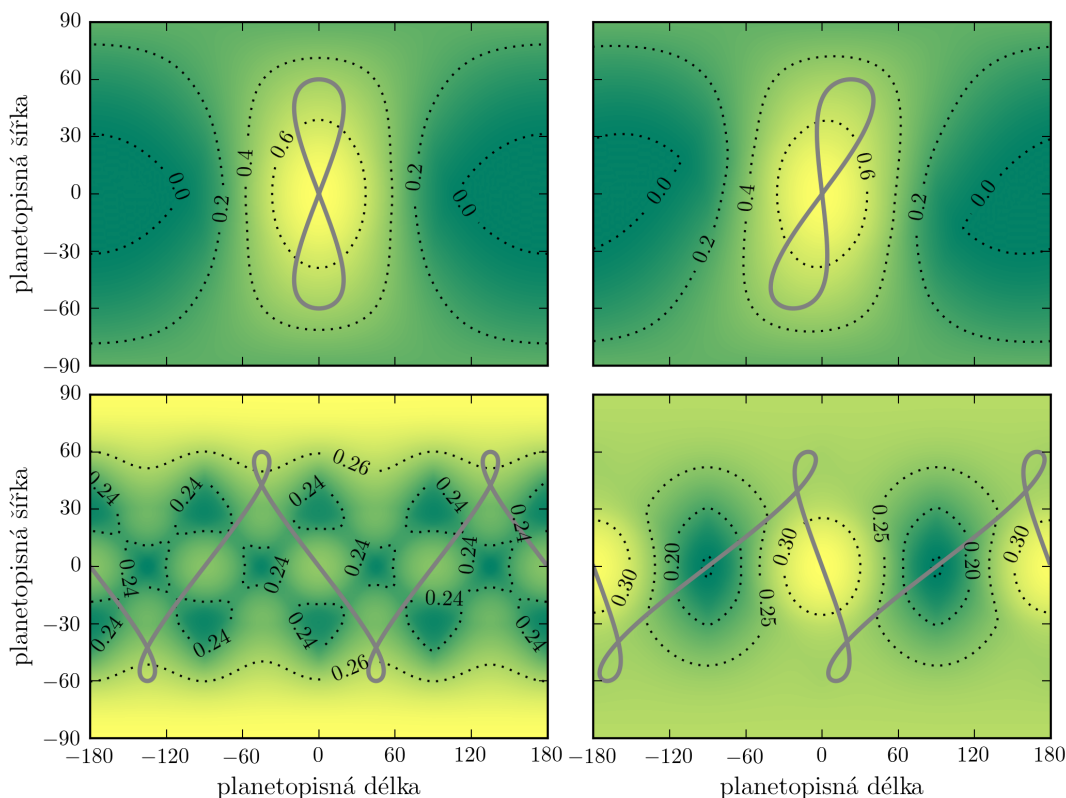
**Obrázek 2.2:** Mapa nejvyšších hodnot relativní insolace pro planetu se sklonem rotační osy  $\beta = 60^\circ$ . Šedivá křivka znázorňuje trajektorii substelárního bodu. *Vlevo nahoře:* vázaná rotace,  $e = 0$ ; *vpravo nahoře:* vázaná rotace,  $e = 0, 2$ ; *vlevo dole:* resonance 3:2,  $e = 0$ ; *vpravo dole:* resonance 3:2,  $e = 0, 2$ .

parametrech velice komplexním způsobem, který by bylo nesnadné popsat analyticky, stejně jako je nesnadné odhadnout pozici místa s nejvyšší průměrnou insolací. Této skutečnosti si lze všimnout například na spodních dvou insolačních mapách obrázku 2.3, kde se oblasti s nejvyšší průměrnou insolací nacházejí jednou v okolí pólů (při  $e = 0$ ,  $\beta = 60^\circ$ ) a podruhé naopak na rovníku (při  $e = 0, 2$ ,  $\beta = 60^\circ$ ).

## 2.2 Zpřesnění modelu

### 2.2.1 Mateřská hvězda jako plošný zdroj

První zpřesnění, kterým se budeme v tomto oddíle zabývat, se týká konečného rozměru mateřské hvězdy. V modelu vývoje povrchové teploty představeném v bakalářské práci jsme předpokládali, že mateřská hvězda se na obloze studované planety jeví jako bodový zdroj. Tento předpoklad, ačkoliv opodstatnitelný v okolí substelárního bodu, ovšem vede k chybným hodnotám insolace na souřadnicích, z nichž je hvězda pozorovatelná na obzoru. Jak podotýká například Landau (1982), vede chybné určení insolace v těchto mezních polohách nejen k nesprávným předpovědím okamžité povrchové teploty, ale také k numerickým chybám, způsobeným skokovým poklesem



**Obrázek 2.3:** Mapa průměrných hodnot relativní insolace na povrchu planety se sklonem rotační osy  $\beta = 60^\circ$ . Šedivá křivka znázorňuje trajektorii substelárního bodu. *Vlevo nahoře:* vázaná rotace,  $e = 0$ ; *vpravo nahoře:* vázaná rotace,  $e = 0, 2$ ; *vlevo dole:* resonance 3:2,  $e = 0$ ; *vpravo dole:* resonance 3:2,  $e = 0, 2$ .

insolace k nule v okamžiku západu či naopak skokovým vzrůstem insolace v okamžiku východu hvězdy nad obzor (ve shodě se vztahem (2.3)).

Pokud tedy mateřské hvězdě přiřkneme konečný úhlový poloměr  $R_{\text{ang}}$ , budeme muset vztah (2.3) upravit tak, aby zahrnoval příspěvek k insolaci od celé části hvězdného disku, která se právě nachází nad obzorem. Je-li  $dA_w$  infinitesimální ploška hvězdného disku, pak celkovou insolaci můžeme schématicky vyjádřit jako

$$S = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \int_{A_{\text{disk}}} S'_*(w) \cos \psi'_p(w) dA_w, \quad (2.5)$$

kde integrace probíhá přes plochu disku, jež je viditelná nad obzorem, a čárkované symboly označují veličiny příslušející k dané plošce  $dA_w$ . V dalším výpočtu budeme předpokládat, že je celý hvězdný disk stejně jasný a platí

$$S'_*(w) \equiv S'_* = \frac{S_*}{\pi R_{\text{ang}}^2}.$$

Tento předpoklad je zjednodušující, neboť jasnost skutečného hvězdného disku se mění

se vzdáleností bodu  $w$  od středu v důsledku tzv. okrajového ztemnění hvězdy. Pokles jasnosti závisí na vlnové délce a lze jej aproximovat empirickými vztahy (viz Cox, 2000) nebo vypočítat s využitím modelu hvězdné atmosféry (např. Hayek a kol., 2012). V podrobnějších studiích zahrnujících výpočet povrchové a podpovrchové teploty (např. Vasavada a kol., 1999) je okrajové ztemnění hvězdy bráno v potaz, zde však tento jev prozatím zanedbáváme.

Označíme-li písmenem  $h = \frac{\pi}{2} - \psi_p$  úhlovou výšku středu hvězdného disku nad horizontem, lze s výše uvedeným předpokladem integrál (2.5) přepsat jako (srov. též Landau, 1982)

$$S = S_* \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{2}{\pi R_{\text{ang}}^2} \int_0^{h+R_{\text{ang}}} \sqrt{R_{\text{ang}}^2 - (h-x)^2} \sin x \, dx, \quad (2.6)$$

pokud se hvězda nachází na obzoru, případně jako

$$S = S_* \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{2}{\pi R_{\text{ang}}^2} \int_{h-R_{\text{ang}}}^{h+R_{\text{ang}}} \sqrt{R_{\text{ang}}^2 - (h-x)^2} \sin x \, dx, \quad (2.7)$$

pokud je nad obzorem viditelný celý její disk. Úhlový průměr mateřské hvězdy zřejmě závisí jednak na jejím skutečném, fyzickém průměru  $R_*$ , jednak na její okamžité vzdálenosti  $r$  vztahem

$$R_{\text{ang}} = \arctan \frac{R_*}{r}.$$

Do modelu povrchové teploty od počátku vstupuje také zářivý výkon hvězdy  $L_*$ , který je zahrnut v „extrasolární konstantě“  $S_* = \frac{L_*}{4\pi a^2}$ . Aby byl model vnitřně konsistentní, definujeme mateřskou hvězdu pouze její hmotností  $M_*$  a zbývající dva parametry, tedy zářivý výkon a poloměr, počítáme s využitím empiricky určených závislostí. Pro hvězdy hlavní posloupnosti o hmotnostech mezi 0,1 a 1 hmotností Slunce ( $M_S$ ) jsou hmotnost a zářivý výkon spjaty empirickým vztahem (Scalo a kol., 2007)

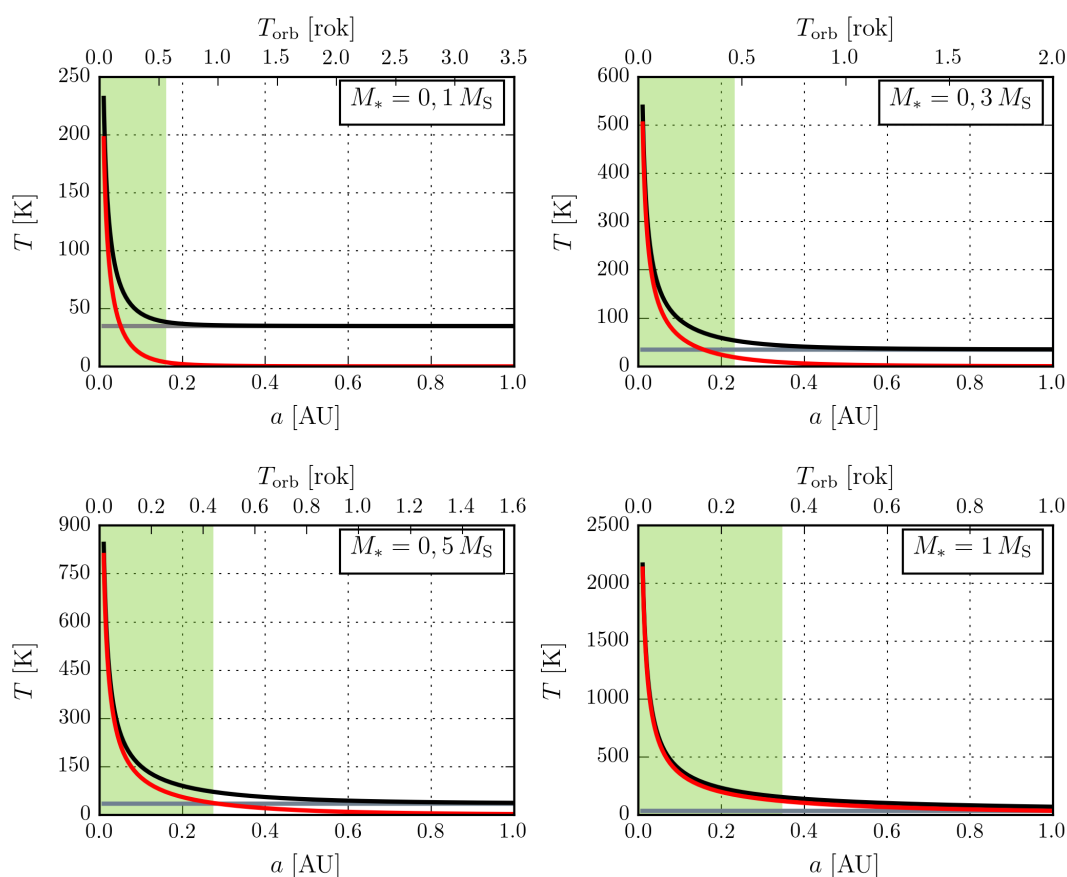
$$\log_{10} \frac{L_*}{L_S} = 4,101 \left(\log_{10} \frac{M_*}{M_S}\right)^3 + 8,162 \left(\log_{10} \frac{M_*}{M_S}\right)^2 + 7,108 \left(\log_{10} \frac{M_*}{M_S}\right) + 0,065. \quad (2.8)$$

Poloměr těchto hvězd pak lze přibližně určit jako (Gorda a Svechnikov, 1999)

$$\log_{10} \frac{R_*}{R_S} = 1,03 \log_{10} \frac{M_*}{M_S} + 0,1. \quad (2.9)$$

Jak již bylo řečeno, uvážení konečného rozměru mateřské hvězdy nejvíce ovlivňuje výsledné teploty v těch místech na povrchu planety, z nichž se hvězda jeví být právě

na obzoru. Jestliže má planeta nulový sklon rotační osy, avšak obíhá po obecně výstředné dráze a rotuje libovolnou úhlovou rychlostí, pak je takovým mezním místem blízké okolí jejích pólů. Rozdíly průměrné teploty na pólech určené z modelu s plošnou hvězdou oproti výsledkům modelu s bodovou hvězdou (kde zůstávají póly po celý místní rok neosvětleny) je pro čtveřici různých hmotností mateřské hvězdy a pro kruhovou oběžnou dráhu znázorněn na obrázcích 2.4. Rozdíly vykreslujeme jako funkce poloměru dráhy. Pro doplnění je na obrázcích také vyznačena minimální oblast, v níž u modelové planety dojde během první miliardy let k uchycení do stavu vázané rotace.



**Obrázek 2.4:** Vliv zahrnutí konečného rozměru hvězdy v závislosti na její hmotnosti (0,1 až 1 hmotnost Slunce,  $M_S$ ) a poloměru kruhové oběžné dráhy (0,01 až 1 astronomická jednotka,  $AU$ ). Na obrázcích je vykreslena průměrná roční teplota pro bodovou hvězdu (šedě) a pro plošnou hvězdu (černě) v místě, kde je rozdíl těchto teplot (červená křivka) největší, tedy na pólu planety o nulovém sklonu rotační osy ( $\beta = 0^\circ$ ). Zelená oblast značí rozmezí poloměrů dráhy, na nichž je planeta typu Země nejpozději do jedné miliardy let uchycena do stavu vázané rotace. Mezní poloměr je pro ilustrační případy počítán podle článku Correia a Laskar (2010) za předpokladu konstantního časového rozestupu (viz předcházející kapitoly).

### 2.2.2 Nenulová délka periastra

Výšku středu hvězdného disku nad obzorem  $h$ , či jeho zenitovou vzdálenost  $\psi_p$  určujeme ze vztahu

$$\sin h = \cos \psi_p = xx_* + yy_* + zz_*, \quad (2.10)$$

kde  $x, y, z$  označují souřadnice pozorovatele a  $x_*, y_*, z_*$  jsou souřadnice substelárního bodu v kartézské souřadné soustavě, která má počátek ve středu planety a společně s ní rotuje. Okamžitou polohu hvězdy přitom lze v obecném případě vyjádřit jako (viz Dobrovolskis, 2009)

$$\begin{aligned} x_* &= \cos(\Omega_{\text{rot}}t) \cos [\nu(t + \tau) - \nu(\tau)] + \sin(\Omega_{\text{rot}}t) \sin [\nu(t + \tau) - \nu(\tau)] \cos \beta, \\ y_* &= -\sin(\Omega_{\text{rot}}t) \cos [\nu(t + \tau) - \nu(\tau)] + \cos(\Omega_{\text{rot}}t) \sin [\nu(t + \tau) - \nu(\tau)] \cos \beta, \\ z_* &= \sin [\nu(t + \tau) - \nu(\tau)] \sin \beta. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Narozdíl od předcházející kapitoly zde budeme čas  $t$  počítat od jarní rovnodennosti, která nastává s prodlevou  $\tau$  od průchodu planety periastrum. Jarní rovnodenností je myšlen okamžik, kdy se substelární bod nachází právě na rovníku planety. Poledník, který v tentýž okamžik na počátku výpočtu substelárním bodem prochází, pak budeme označovat jako nultý poledník. Pravou anomálii  $\nu$ , tedy úhel periastron-hvězda-planeta, počítáme stejně jako v pododdíle 1.4.2.

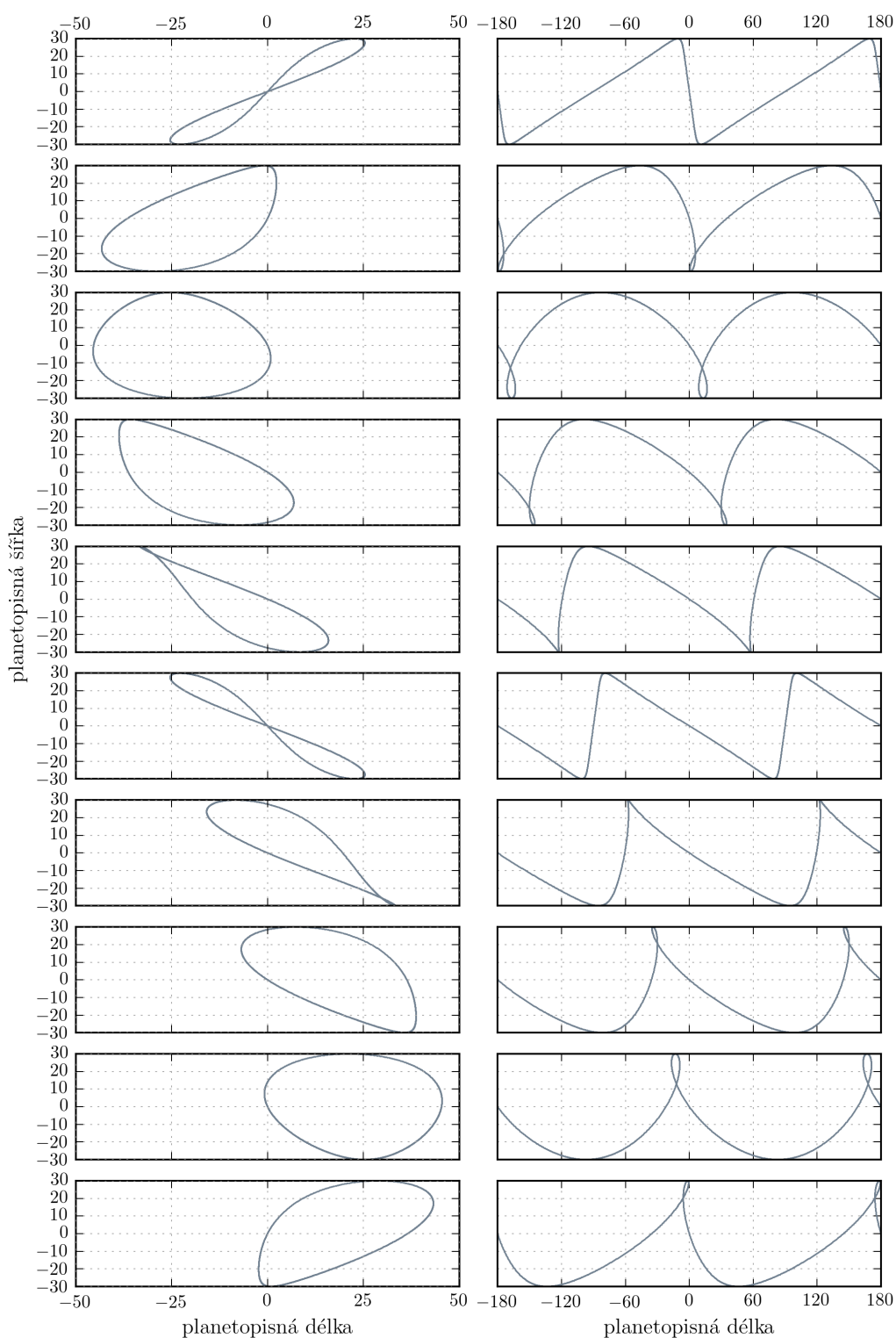
Pro charakterizaci rozestupu mezi jarní rovnodenností a okamžikem průchodu periastrum jsme si v této práci zvolili časový interval  $\tau$ . Jiným přístupem, kterého se běžně využívá v nebeské mechanice (např. Murray a Dermott, 1999), je zadání již dříve zmíněné délky periastra  $\varpi = \Omega + \omega$ , jež udává úhel mezi směrem k jarnímu bodu (osa  $X$  v referenční souřadné soustavě z obrázku 1.1) a pericentrem. Do jarního bodu se mateřská hvězda při pohledu z planety promítá v okamžiku jarní rovnodennosti. Vztah mezi oběma výše zmíněnými veličinami tedy je

$$\varpi = \pi - \nu(\tau). \quad (2.12)$$

Změny délky periastra či našeho časového rozestupu odpovídají v modelové soustavě změnám orientace rotační osy planety (beze změn jejího sklonu). Jestliže například položíme  $\varpi = 90^\circ$  nebo  $\varpi = 270^\circ$ , bude rotační osa ležet v rovině vytyčené normálou k oběžné rovině a průvodičem planety. V případě Země je délka výstupného uzlu rovna  $102,947^\circ$  (pro ekvinokcium J2000.0; viz Murray a Dermott, 1999). Vliv nenulové délky periastra na trajektorii substelárního bodu ilustruje obrázek 2.5.

### 2.2.3 Teplotně závislé parametry

Povrchová teplota na krátkoperiodických terestrických planetách bez atmosféry je v každém okamžiku určena především insolací a vykazuje proto obrovské rozdíly



**Obrázek 2.5:** Trajektorie substelárního bodu pro různé hodnoty časového rozestupu mezi průchodem planety periastrém a okamžikem jarní rovnodennosti. Sada obrázků vlevo odpovídá spin-orbitální resonanci 1:1, sada obrázků vpravo resonanci 3:2, v obou případech je sklon rotační osy  $\beta = 30^\circ$  a výstřednost dráhy  $e = 0, 2$ . Parametr  $\tau$  se shora dolů mění s krokem 0, 1 od hodnoty  $\tau = 0$  po  $\tau = 0, 9 T_{\text{orb}}$ .

mezi denní a noční stranou. Tyto rozdíly mohou dosahovat stovek až tisíců kelvinů. Na noční straně, kde je insolace v danou chvíli nulová a povrch postupně chladne, nabývají významu termofyzikální vlastnosti povrchového materiálu, tedy souhrnně jeho tepelná setrvačnost  $I$ , která je funkcí hustoty, tepelné vodivosti a měrné tepelné kapacity za konstantního tlaku. Trojici zmíněných parametrů jsme doposud považovali za konstantní, v případě velkých změn povrchové teploty je ovšem vhodné uvážit i jejich teplotní závislost.

Kromě tepelné setrvačnosti můžeme k charakterizaci termálních vlastností povrchového materiálu využít také charakteristické hloubky, či hloubky vniku, která je definována jako (Mitchell a de Pater, 1994)

$$L_{\text{char}} = \sqrt{\frac{2k}{\omega_s \rho c_p}}, \quad (2.13)$$

kde  $\omega_s$  označuje frekvenci osvětlování. V případě planet uchycených ve spin-orbitální resonanci, kdy má insolace v libovolném místě periodický průběh a  $L_{\text{char}}$  tak lze snadno určit, představuje tato hloubka několik desítek centimetrů až metry (viz Vasavada a kol., 1999; Urquhart a Jakosky, 1997).

Jelikož studujeme planety bez atmosféry, jež mohly být po dlouhou dobu vystaveny exogenním vlivům, jako jsou například dopady mikrometeoritů i větších těles, kosmické záření a samotné ozařování mateřskou hvězdou, budeme předpokládat, že je jejich povrch pokryt regolitem. Termofyzikálními vlastnostem regolitu včetně jejich teplotní závislosti se věnovalo již vícero studií zabývajících se povrchovou teplotou a s ní souvisejícími jevy na Merkuru, Měsíci či Marsu (např. Ledlow a kol., 1992; Urquhart a Jakosky, 1997; Piqueux a Christensen, 2011; Rumpf a kol., 2013). Regolit je slabě soudržný materiál, tvořený pevnou složkou, tedy zrny různé velikosti, a plynnou složkou, která vyplňuje mezery. Celková tepelná setrvačnost v sobě zahrnuje vliv obou těchto složek a závisí tak i na porozitě materiálu (Piqueux a Christensen, 2011). Pro nárůst hustoty, a tedy snižování porozity s hloubkou  $d$  budeme předpokládat vztah (Carrier a kol., 1991)

$$\rho [\text{kg m}^{-3}] = 1920 \frac{d [\text{m}] + 0,122}{d [\text{m}] + 0,18}. \quad (2.14)$$

S teplotou se hustota téměř nemění (Piqueux a Christensen, 2011). K šíření tepla v regolitu dochází jednak vedením v místech kontaktu jednotlivých zrn, jednak také zářením v mezerách. Právě tento druhý příspěvek k tepelné vodivosti je silně teplotně závislý: při konstantní hustotě narůstá se třetí mocninou teploty. Souhrnnou tepelnou vodivost tak můžeme vyjádřit jako (např. Rumpf a kol., 2013)

$$k = a + bT^3, \quad (2.15)$$

kde za koeficienty  $a$  a  $b$  dosazujeme hodnoty, které určili Fountain a West (1970) laboratorním měřením vodivosti regolitu v simulovaných měsíčních podmínkách, s hustotou



vyjádřenou výjimečně v jednotkách  $\text{g cm}^{-3}$ :

$$a = (2,019 \rho - 1,388) \cdot 10^{-3}$$

$$b = (0,1788 \rho^3 - 0,1289 \rho^2 - 0,1856 \rho + 0,3082) \cdot 10^{-10}$$

Uvedená závislost byla ověřena pro teploty nižší než 370 K. Vzhledem k nedostatku dat týkajících se vyšších teplot však budeme po vzoru Rumpf a kol. (2013) předpokládat, že vztah zůstává v platnosti i nad touto teplotou.

Pro měrnou tepelnou kapacitu za konstantního tlaku je vliv plynné složky materiálu mizivý, stejně tak se vytrácí její hloubková závislost. Teplotní závislost měrné tepelné kapacity lze pro teploty vyšší než 90 K a nižší než 350 K popsat polynomem (Ledlow a kol., 1992)

$$c_p = 758,1408 + 498,3144 \tilde{T} + 73,6384 \tilde{T}^2 + 1138,4664 \tilde{T}^3 + 781,9896 \tilde{T}^4, \quad (2.16)$$

$$\tilde{T} = \frac{T[\text{K}] - 300}{300},$$

založeným na výsledcích laboratorních měření uskutečněných na vzorcích regolitu z Měsíce. Tímto polynomem budeme aproximovat měrnou tepelnou kapacitu i v rozmezí 20 – 90 K. Pro teploty vyšší než 350 K pak Ledlow a kol. (1992) uvádí (podle Wechsler a kol., 1972)

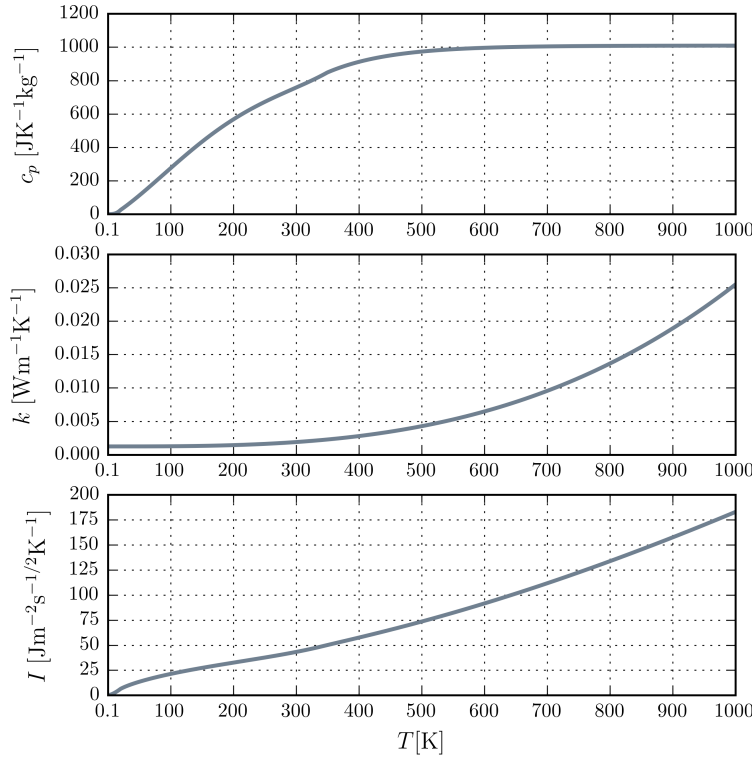
$$c_p = 848,9336 + 160,2472 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{T[\text{K}] - 350}{100} \right) \right]. \quad (2.17)$$

Při extrémně nízkých teplotách, blízcích se absolutní nule, je měrná tepelná kapacita pevných látek úměrná  $T^3$  (např. Beiser, 1975). Pokud tedy teplota klesne pod 20 K, budeme předpokládat vztah

$$c_p = 7,463 \times 10^{-7} T^3. \quad (2.18)$$

Všechny uvedené teplotně závislé veličiny s teplotou zjevně vzrůstají, jejich průběh i rozmezí hodnot jsou znázorněny na obrázku 2.6.

Zahrnutí teplotní závislosti tepelné vodivosti a měrné tepelné kapacity vnáší do diskretizované rovnice vedení tepla další nelinearitu, vedle v modelu již přítomné nelinearity dané horní okrajovou podmínkou (2.1). Rovnici vedení tepla je tedy v každém bodě výpočtu nutno řešit iterativně. Za prvotní odhad teploty v celé slupce považujeme v každém časovém kroku teplotní průběh z kroku minulého a dále pokračujeme podle schématu popsaného v bakalářské práci pro případ nelineární horní okrajové podmínky: V každém iteračním kroku  $\alpha$  určujeme hodnotu teplotně závislých parametrů s pomocí



**Obrázek 2.6:** Teplotní závislost termofyzikálních vlastností regolitu. *Shora dolů:* měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku  $c_p$ , tepelná vodivost  $k$ , tepelná setrvačnost  $I = \sqrt{k\rho c_p}$ .

průměru teplot z několika (obyčejně deseti) předcházejících iteračních kroků,

$$\bar{T}^\alpha = \frac{\sum_{\alpha_k=1}^N T^{\alpha-\alpha_k}}{N},$$

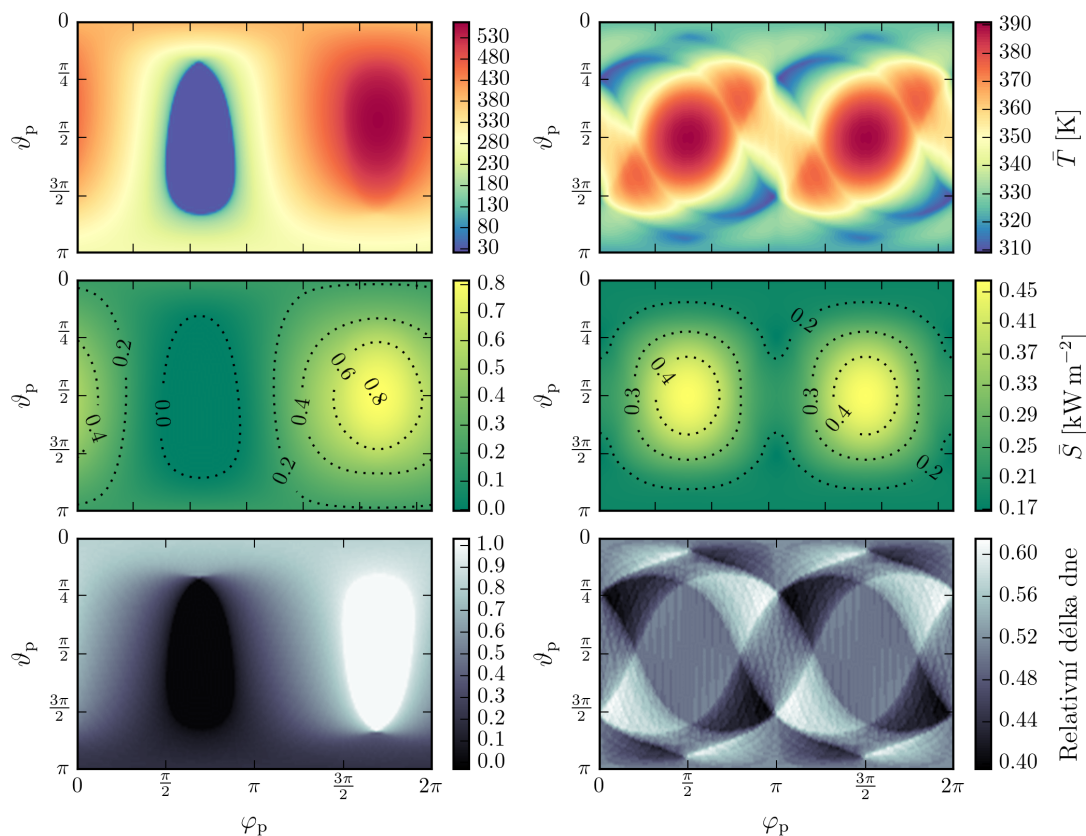
a novou teplotu  $T^\alpha$  s tímto průměrem průběžně srovnáváme. Pokud relativní změna teploty oproti  $\bar{T}^\alpha$  klesne pod požadovanou mez, považujeme řešení za zkonvergované.

## 2.3 Komentář k průměrné teplotě a průměrné insolaci

Při studiu parametrických závislostí v bakalářské práci jsme se zabývali průměrnou teplotou v tom bodě na povrchu planety, který podléhá nejvyšší, či naopak nejnižší střední insolaci. Současně však víme, že průměrná teplota v kterémkoliv místě je vždy nižší nebo nejvýše rovna teplotě odpovídající stacionárnímu stavu při průměrné insolaci, jak plyne z Hölderovy nerovnosti (např. Selsis a kol., 2013)

$$\frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} T(t) dt \leq \left( \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} T^4(t) dt \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (2.19)$$

kde za  $t_{\max}$  dosazujeme insolační periodu. Rovnost nastává ve speciálním případě planety nacházející se ve stavu vázané rotace na kruhové dráze a s nulovým sklonem rotační osy. V obecných případech je skutečná průměrná teplota v každém bodě planety ovlivněna nejen průměrnou insolací, ale především jejím časovým průběhem, tedy režimem střídání dnů a nocí. Rozsah i efektivitu prohřívání během dne, stejně jako rychlost ochlazování během období temna, řídí termofyzikální vlastnosti povrchu, určující jeho tepelnou setrvačnost a charakteristickou hloubku.



**Obrázek 2.7:** Rozložení průměrných teplot, průměrné insolace a relativních délek dne na povrchu modelové planety ( $a = 0,4 \text{ AU}$ ;  $e = 0,5$ ;  $\beta = 30^\circ$ ). Vlevo: planeta ve spin-orbitální resonanci 1:1,  $\tau = 0,1$ ; vpravo: planeta ve spin-orbitální resonanci 3:2,  $\tau = 0,5$ .

Abychom posoudili, jak vypadá vazba mezi průměrnou insolací a průměrnou teplotou, vykreslujeme pro některé speciálně zvolené kombinace parametrů mapy (obrázky 2.7 a 2.8), znázorňující rozložení průměrné povrchové teploty, rozložení průměrné insolace, a rovněž „relativní délku dne“, která pro každý bod na povrchu planety udává poměr délky období s nenulovou insolací k insolační periodě. Rozložení relativních délek dne je v souladu s rozložením průměrů z lokálních rovnovážných teplot

$$T_{\text{eq}} = \sqrt[4]{\frac{S(1-A)}{\sigma\epsilon}}, \quad (2.20)$$

kteří udávají teplotu povrchu se zanedbáním jeho prohřívání z hlubších vrstev v důsledku skin efektu.

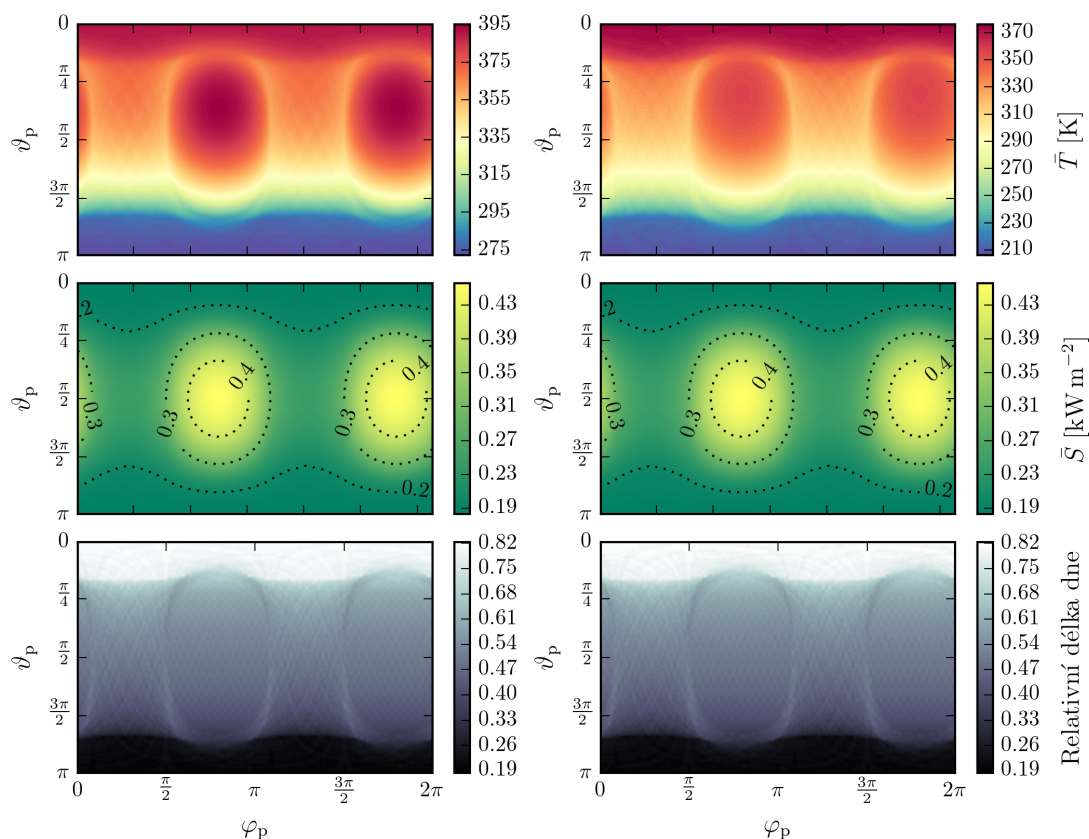
Již první trojice map (obrázek 2.7 vlevo), týkající se planety o hlavní poloose  $a = 0,4 \text{ AU}$  a tepelné vodivosti povrchu  $k = 1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$  uchycené ve stavu vázané rotace na velmi výstředné dráze ( $e = 0,5$ ) a se severní polokoulí orientovanou v okamžiku průchodu periastrum směrem od hvězdy ( $\beta = 30^\circ$ ,  $\tau = 0,1 T_{\text{orb}}$ ), naznačuje, že rozložení průměrné povrchové teploty není zcela totožné s rozložením průměrné insolace. Ačkoliv minimálních teplot očekávatelně nabývají oblasti věčné noci, poloha maximální průměrné teploty je dána spíše kombinací grafů průměrné insolace a relativní délky dne, a nenachází se tedy na rovníku planety, jak by napovídalo samotné rozložení průměrné insolace. Teplota v bodě s nejvyšší průměrnou insolací je v tomto případě o 3 K nižší než maximální průměrná teplota.

Zcela nepředvídatelný průběh povrchové teploty s ohledem na mapu průměrných insolací lze ovšem zaznamenat teprve v případě planety se spin-orbitální resonancí 3:2 (obrázek 2.7 vpravo). V tomto případě předpokládáme, že rotační osa je orientována tak, aby jarní rovnodennost nastávala v okamžiku průchodu planety apoastrem ( $\tau = 0,5 T_{\text{orb}}$ ). Všechny ostatní parametry dráhy ponecháváme stejné jako výše. Rozložení průměrné insolace je nyní symetrické podle rovníku planety<sup>2</sup>, zatímco průměrné teploty vykazují symetrii zcela jinou, totiž bodovou vzhledem ke středu mapy. Pokud tedy hledáme polohu místa s minimální průměrnou teplotou na pólu, kde svého minima nabývá insolace, dopouštíme se v tomto případě chyby až 20 K s ohledem na skutečnou nejnižší teplotu. Bod s maximální průměrnou teplotou zde však díky vysoké tepelné setrvačnosti a vhodným symetriím leží, ve shodě s insolací, na rovníku.

Druhá sada map (obrázek 2.8) znázorňuje závislost rozložení průměrné povrchové teploty na tepelné vodivosti. Planeta je zde opět uchycena ve spin-orbitální resonanci 3:2 na dráze s výstředností  $e = 0,5$  a její rotační osa se sklonem  $\beta = 30^\circ$  je v periastru orientována směrem od hvězdy,  $\tau = 0,1 T_{\text{orb}}$ . Horní z trojice obrázků vlevo vyobrazuje průměrnou teplotu na planetě, jejíž povrch je tvořen kompaktním materiálem s vodivostí  $k = 1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ , kdežto odpovídající obrázek vpravo se týká povrchu s tepelnou vodivostí o dva řády nižší ( $k = 0,01 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ). Tepelná vodivost zřejmě rozhoduje, jakou měrou se na výsledném rozložení povrchových teplot podílí střední insolace a jaký vliv má naopak úhrnná délka dnů či nocí. Při nízké tepelné vodivosti je průměrná teplota výrazněji ovlivňována rychlým chladnutím materiálu, lépe odpovídá lokální rovnovážné teplotě  $T_{\text{eq}}$ , a její maxima tak lze nalézt na tom z pólů planety, jenž zůstává osvětlen po delší část místního roku, tedy v čase, kdy se planeta nachází v okolí apoastra. V našem případě se jedná o severní pól, prudce ohřátý během průchodu planety periastrum, zůstává po většinu času zcela neosvětlen, a proto na něm průměrná povrchová teplota posléze dosahuje minima.

V bakalářské práci jsme se zabývali planetami, na nichž se jarní rovnodennost shoduje s okamžikem průchodu periastrum. Rozložení průměrných povrchových teplot při resonanci 3:2 vykazuje v takovém případě stejné symetrie jako horní mapa pravého sloupce na obrázku 2.7, neboť časový průběh insolace je pro parametr  $\tau = 0$  kvali-

<sup>2</sup>Toto tvrzení platí pro všechny „poločíselné“ spin-orbitální resonance, nezávisle na parametrech  $e$ ,  $\beta$  a  $\tau$  (pro důkaz viz Dobrovolskis, 2013).



**Obrázek 2.8:** Rozložení průměrných teplot, průměrné insolace a relativních délek dne na povrchu modelové planety ( $a = 0,4 \text{ AU}$ ;  $e = 0,5$ ;  $\beta = 30^\circ$ ; rezonance 3:2;  $\tau = 0,1 T_{\text{orb}}$ ) – vliv tepelné vodivosti povrchu. Vlevo:  $k = 1 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ ; vpravo:  $k = 0,01 \text{ W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ .

tativně shodný s průběhem pro parametr  $\tau = 0,5 T_{\text{orb}}$  (viz obrázek 2.5). Dokud jsme tedy uvažovali dostatečně vysokou tepelnou setrvačnost a hledali nejvyšší průměrné teploty v místě s nejvyšší průměrnou insolací, nedopouštěli jsme se podstatných chyb. Za problematický je ovšem nutné považovat odhad *minimálních* průměrných teplot na základě nejnižší střední insolace. Pro teplotu na planetách s nízkou tepelnou setrvačností povrchového materiálu a nenulovým sklonem rotační osy určující veličinou není rozložení průměrné insolace, nýbrž relativní délka dne.

Na planetách uchycených ve stavu vázané rotace a majících sklon rotační osy menší než  $90^\circ$  jsou význačnými místy oblasti věčného dne či noci, v nichž se nachází jak extrémy průměrné insolace, tak extrémy průměrných teplot (a přirozeně také extrémy „relativní délky dne“). Odhad pozice nejchladnějšího bodu je v tomto případě tedy triviální. Podoba globálního rozložení středních teplot ovšem ani v případě spin-orbitální rezonance 1:1 nenásleduje rozložení průměrné insolace a povrchová teplota v bodě s nejvyšší insolací tak může být i o několik kelvinů nižší než skutečná maximální teplota.

S ohledem na tyto rozdíly mezi laterálním průběhem průměrné insolace a průměrné teploty se v oddíle věnovaném výsledkům budeme zabírat pouze parametrickou

závislostí maximálních průměrných teplot a na rozdíl od bakalářské práce nebudeme vynášet obdobné závislosti pro minimální průměrné teploty. Odhad místa s minimální průměrnou povrchovou teplotou na základě znalosti rozložení insolace ani rovnovážných teplot není obecně postačující a jeho zpřesnění vyžaduje vzít v úvahu vzájemně provázaný vliv obou těchto jevů a termofyzikálních vlastností povrchového materiálu.

## 2.4 Možnosti detekce

Doposud jsme se zabývali abstraktním, teoretickým modelem teploty v povrchové vrstvě planety s libovolnými parametry oběžné dráhy, volitelnou rychlostí rotace a vlastnostmi povrchového materiálu. V posledním výkladovém oddíle této kapitoly se proto zamysleme nad otázkou, zda by znalost povrchové teploty modelových planet mohla posloužit k určení fyzikálních vlastností skutečných terestrických exoplanet, stále za předpokladu neexistující či zcela zanedbatelné atmosféry. Kombinace nepřímých detekčních metod umožňuje určit oběžnou periodu planety, její relativní hmotnost a poloměr vzhledem k mateřské hvězdě<sup>3</sup>, výstřednost dráhy a její sklon vůči pozorovateli i vůči rovině rovníku mateřské hvězdy, a dokonce také přítomnost a chemické složení atmosféry. Z těchto veličin dále můžeme vypočítat například hustotu pozorovaných planet, jejich rovnovážnou teplotu a odhadnout efektivitu slapového zahřívání, které v nich probíhá. Poruchy v periodicitě signálů od známých exoplanet mohou dále poukazovat na přítomnost dalších, dosud nedetekovaných těles v dané soustavě (např. Barnes, 2010).

Mezi veličiny, které jsou naopak převážně neznámé a neurčitelné, patří například sklon rotační osy, rotační perioda planety, a také tepelná setrvačnost jejího povrchu. Informace o všech těchto parametrech je ovšem obsažena v infračerveném, termálním vyzařování planety a její dosažitelnost je tak především otázkou citlivosti použitých detektorů. V případě vybraných plyných exoplanet obíhajících v těsné blízkosti mateřské hvězdy (tzv. horcí jupiteři) bylo již rozložení teploty ve svrchní vrstvě atmosféry na základě infračervených fotometrických křivek ze Spitzerova dalekohledu studováno (např. Bleicic a kol., 2013). Tepelné vyzařování exo-Zemí je v současnosti pod hranicí detekovatelnosti (až na výjimku v podobě 55 Cancri e, viz Demory a kol., 2012), avšak jeho pozorování by mohlo být širěji umožněno například Vesmírným dalekohledem Jamese Webba (JWST). Zahájení této mise je plánováno na rok 2018 ([http://www.nasa.gov/mission\\_pages/webb](http://www.nasa.gov/mission_pages/webb)).

Metoda transitní fotometrie využívá měření změn celkového zářivého toku přicházejícího od hvězdy s obíhající planetou, která při vhodné orientaci oběžné dráhy vůči pozorovateli svou mateřskou hvězdu periodicky „zakrývá“, či je za ní naopak skryta. Dobře, kdy planeta prochází před hvězdným diskem, odpovídá detekce primárního minima fotometrické křivky, při zákrytu planety hvězdou je pozorováno minimum sekundární. Vzhledem k řádovému rozdílu mezi poloměrem hvězdy a planety je však i primární minimum velice mělké, v případě exo-Země přecházející přes disk hvězdy podobné Slunci je jeho relativní hloubka  $\sim 8 \times 10^{-5}$  (Wright a Gaudi, 2012). Na tvaru

<sup>3</sup>Díky vztahům typu (2.8) – (2.9) mezi fyzikálními vlastnostmi hvězd na hlavní posloupnosti lze určit i absolutní hmotnost a poloměr planety.

fotometrické křivky se kromě obíhající exoplanety navíc podílí například i proměnnost samotné mateřské hvězdy (změny její aktivity, přítomnost hvězdných skvrn), nebo, jak již bylo řečeno, přítomnost dalších těles v dané soustavě. Inverze fotometrické křivky tudíž závisí na velkém množství volných parametrů. V této práci se nebudeme věnovat průběhu celé fotometrické křivky tak, jak by byla zaznamenána detektorem, ale omezíme se pouze na příspěvek odpovídající tepelnému vyzařování planety (v infračervené oblasti). Předpokládáme tedy, že změny monochromatického zářivého toku  $\Phi_{\lambda,\text{obs}}$  způsobené oběma vzájemnými zákryty hvězdy a planety již byly odečteny. Modelování syntetických infračervených fotometrických křivek v závislosti na orbitálních parametrech bylo věnováno již mnoho studií (pro planety s atmosférou např. Gaidos a Williams, 2004; Cowan a kol., 2012), velmi podrobně se případu vyzařování terestrických exoplanet bez atmosféry a s přítomným slapovým zahříváním věnoval Selsis a kol. (2013). Na následujících řádcích zopakujeme metodu výpočtu uvedenou v tomto článku a v dalším oddíle shrneme některé její výsledky, tedy parametrické závislosti časového průběhu zářivého toku  $\Phi_{\lambda,\text{obs}}$ , působené rozložením povrchové teploty.

Povrch planety si pro účely výpočtu rozdělíme sítí souřadnic na libovolný počet buněk a ve středu každé z těchto buněk určíme okamžitou povrchovou teplotu  $T_j$  podle okamžitého rozložení insolace. Rovnici vedení tepla řešíme pro jednoduchost v jedné dimenzi a materiálové vlastnosti povrchu považujeme za teplotně nezávislé. Monochromatický zářivý tok na vlnové délce  $\lambda$ , odpovídající tepelnému vyzařování  $j$ -té buňky a přicházející k pozorovateli nacházejícímu se ve vzdálenosti  $r_{\text{obs}}$ , pak můžeme určit jako

$$\Phi_{\lambda,\text{obs}}(r_{\text{obs}}) = \sum_j \mathcal{I}_{\lambda,j} \frac{dA_j}{r_{\text{obs}}^2} \cos \psi_j, \quad (2.21)$$

kde  $dA_j$  značí plochu dané buňky,  $\psi_j$  je úhel mezi normálou k dané buňce a pozorovatelem a  $\mathcal{I}_{\lambda,j}$  představuje monochromatickou intenzitu záření o vlnové délce  $\lambda$ . Za předpokladu, že je planeta lambertovským zářičem, je tato intenzita rovna

$$\mathcal{I}_{\lambda,j} = \frac{\epsilon_\lambda \mathcal{B}_\lambda(T_j)}{\pi}, \quad (2.22)$$

kde  $\epsilon_\lambda$  označuje monochromatickou emisivitu a  $\mathcal{B}_\lambda(T_j)$  odpovídá Planckově funkci,

$$\mathcal{B}_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1}, \quad (2.23)$$

v níž vystupuje rychlost světla  $c$ , Planckova konstanta  $h$  a Boltzmannova konstanta  $k_B$ . Zářivý tok z planety je udáván relativně k zářivému toku hvězdy. Ten, za předpokladu, že hvězdu lze považovat za absolutně černé těleso o teplotě  $T_*$ , vyjadřujeme jako

$$\Phi_{\lambda,\text{obs}}^*(r_{\text{obs}}) = \left( \frac{R_*}{r_{\text{obs}}} \right)^2 \mathcal{B}_\lambda(T_*). \quad (2.24)$$

## 2.5 Výsledky

Cílem této kapitoly bylo především rozšířit a zpřesnit existující model vývoje povrchové teploty. Některé výsledky, které zde budou prezentovány, mají ovšem vazbu také na výsledky předcházející kapitoly, týkající se slapového vývoje a slapového zahřívání. Abychom usnadnili porovnání jak s bakalářskou prací, tak s první kapitolou tohoto textu, studujeme na následujících řádcích dvě různé modelové soustavy o těchto parametrech:

	<b>Model B</b>	<b>Model C</b>
$a$	0,1 AU	0,4 AU
$T_{\text{orb}}$	36,5 dnů	92,4 dnů
$e$	proměnné	0,2 nebo prom.
$\beta$	$0^\circ$	$30^\circ$
$M_*$	0,1 $M_S$	1 $M_S$

Model B zjevně odpovídá stejnojmennému modelu použitému ve výsledcích první kapitoly, model C je totožný s planetou uvažovanou v bakalářské práci. V obou modelech dále předpokládáme, že planeta se svým rozměrem i hmotností shoduje se Zemí, má poměrně nízké albedo  $A = 0,1$ , její emisivita v infračervené oblasti je  $\epsilon = 0,9$  a tepelný tok na spodní hranici povrchové vrstvy činí  $q_b = 0,075 \text{ W m}^{-2}$ . Objemové zahřívání  $H_{\text{int}}$  pokládáme pro jednoduchost rovné nule.

Teplotu ve všech případech počítáme s využitím jednorozměrného modelu. Za počáteční odhad teplotního rozložení v podpovrchové vrstvě považujeme ustálené (stacionární) řešení odpovídající průměrné insolaci a výpočet necháváme postupovat přes tolik period, dokud se relativní změna průměrné teploty oproti předcházející periodě nesníží pod hodnotu  $10^{-5}$ .

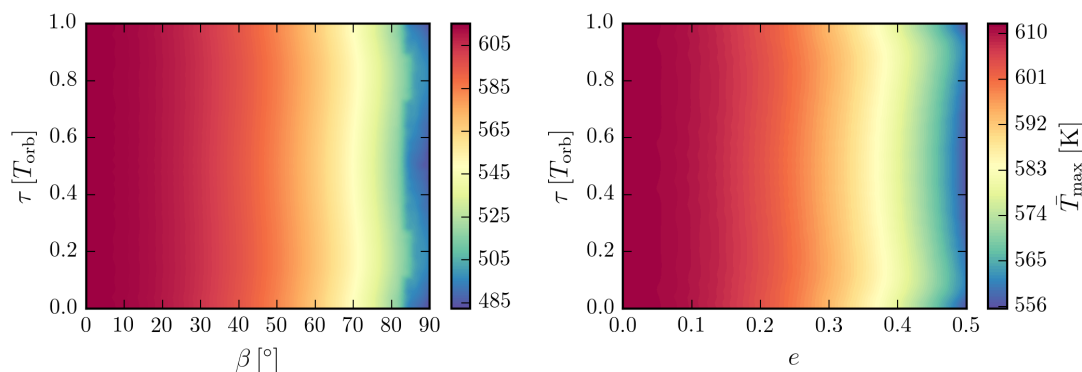
### 2.5.1 Význam parametru $\tau$

Parametr  $\tau$ , představující časový rozestup mezi průchodem planety periastrum a okamžikem jarní rovnodennosti, ovlivňuje rozložení insolace mezi severní a jižní polokouli a způsobuje tak nerovnováhu v jejich ohřívání. Pouze v případě „poločíslných“ spin-orbitálních resonancí, jako jsou 3:2, 5:2 a další, zůstává průměrná insolace pro libovolné kombinace  $\tau$ ,  $e$  a  $\beta$  symetrická podle rovníku (viz Dobrovolskis, 2013), rozložení jejích maximálních hodnot i délka nocí v jednotlivých bodech planety, se však i v tomto případě mění.

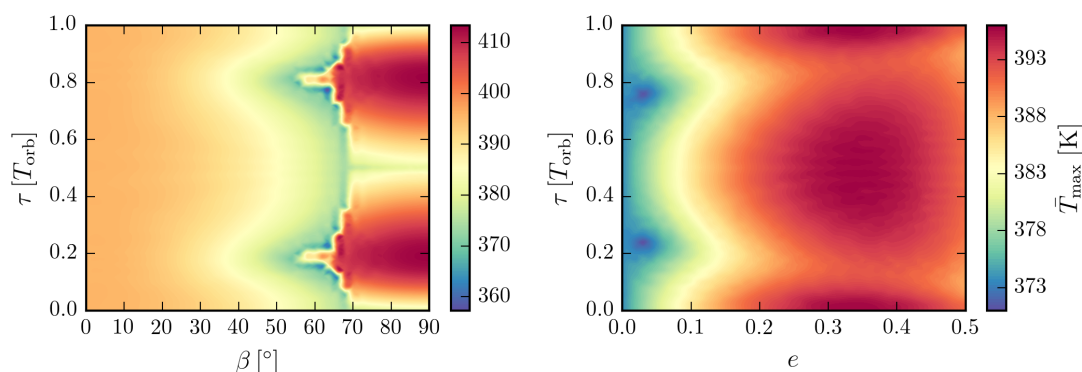
Pro posouzení vlivu různé prostorové orientace rotační osy jsme provedli parametrickou studii shodnou s obdobnými výstupy bakalářské práce, avšak z již uvedených důvodů nezahrnující průměrnou teplotu v bodě s nejnižší průměrnou insolací. Předpokládáme planetu z modelu C, jejíž povrch je tvořen kompaktním materiálem ( $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_p = 800 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ,  $k = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ) o vysoké tepelné setrvačnosti,  $I = 1469,7 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ s}^{-\frac{1}{2}}$ , a studujeme průměrnou teplotu v bodě planety s nejvyšší průměrnou insolací v závislosti na hodnotách  $\tau$ ,  $e$  a  $\beta$ . Aby měl pojem



periastra i jarní rovnodennosti smysl, pokládáme při studii vlivu parametrů ( $e$ ,  $\tau$ ) sklon rotační osy za nenulový,  $\beta = 30^\circ$ , a při studiu vlivu dvojice ( $\beta$ ,  $\tau$ ) pokládáme za nenulovou výstřednost dráhy,  $e = 0,2$ . Výsledek parametrického šetření pro spin-orbitální resonanci 1:1 je znázorněn na obrázku 2.9 a pro resonanci 3:2 na obrázku 2.10.



**Obrázek 2.9:** Parametrické závislosti povrchové teploty při spin-orbitální resonanci 1:1. *Vlevo:* průměrná povrchová teplota v bodě s maximální průměrnou insolací jako funkce sklonu rotační osy  $\beta$  a časového rozestupu mezi průchodem periastrum a jarní rovnodenností  $\tau$ . *Vpravo:* průměrná povrchová teplota v bodě s maximální průměrnou insolací jako funkce výstřednosti  $e$  a rozestupu  $\tau$ .



**Obrázek 2.10:** Parametrické závislosti povrchové teploty při spin-orbitální resonanci 3:2. *Vlevo:* průměrná povrchová teplota v bodě s maximální průměrnou insolací jako funkce sklonu rotační osy  $\beta$  a časového rozestupu mezi průchodem periastrum a jarní rovnodenností  $\tau$ . *Vpravo:* průměrná povrchová teplota v bodě s maximální průměrnou insolací jako funkce výstřednosti  $e$  a rozestupu  $\tau$ .

Charakteristickým rysem grafů závislosti povrchové teploty na parametru  $\tau$  je jejich symetrie podle osy  $\tau = 0,5 T_{\text{orb}}$ . Tato symetrie je zcela očekávatelná, přihlídneme-li k podobě trajektorií substelárního bodu, znázorněných na obrázku 2.5. Extrémy povrchových teplot i insolace například na planetě se speciálně zvoleným parametrem  $\tau = 0,3 T_{\text{orb}}$  budou díky stejnému tvaru trajektorie zjevně shodné s extrémy odpovídajícími planetě s  $\tau = 0,7 T_{\text{orb}}$ . Rozložení insolace či teploty ve jmenovaných případech pak bude navzájem bodově symetrické podle bodu  $(\vartheta_p, \varphi_p) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ .

Parametr  $\tau$  ovlivňuje teplotu na uvažovaných místech zpravidla v relativně malém rozmezí několika jednotek až desítek kelvinů. Jestliže se planeta navíc nachází ve sta-

vu vázané rotace (obrázek 2.9), zůstává její maximální průměrná povrchová teplota pro mírné až střední sklony rotační osy  $\beta \lesssim 60^\circ$  ke změnám  $\tau$  téměř netečná a slabou závislost na sledovaném parametru je možno zaznamenat až při extrémních hodnotách  $\beta$ , kdy se teplota mění nejvýše o 15 K (pro  $\beta = 84^\circ$ ). Velice malý vliv má orientace rotační osy také v případě výstředné oběžné dráhy. Při konstantním sklonu  $\beta = 30^\circ$  a konstantní excentricitě se maximální teplota mění se zvyšujícím se parametrem  $\tau$  vždy o méně než 5 K.

Pro planetu uchycenou ve spin-orbitální resonanci 3:2 nabývají parametrické závislosti povrchové teploty velice komplexní podoby (obrázek 2.10). Zvláště nápadné jsou na grafu ( $\beta, \tau$ ) oblasti okolo  $\tau = 0, 2 T_{\text{orb}}$  (a obdobně kolem  $\tau = 0, 8 T_{\text{orb}}$ ), v nichž nabývá průměrná teplota v bodě s nejvyšší střední insolací svého maxima při libovolném sklonu rotační osy. Mezní hodnoty parametru  $\tau$ , při nichž budou maximální průměrné teploty dosahovat svých extrémů, přirozeně závisí na výstřednosti dráhy a odpovídají případům, kdy rotační osa planety směřuje právě „ke hvězdě“, či naopak „od hvězdy“.

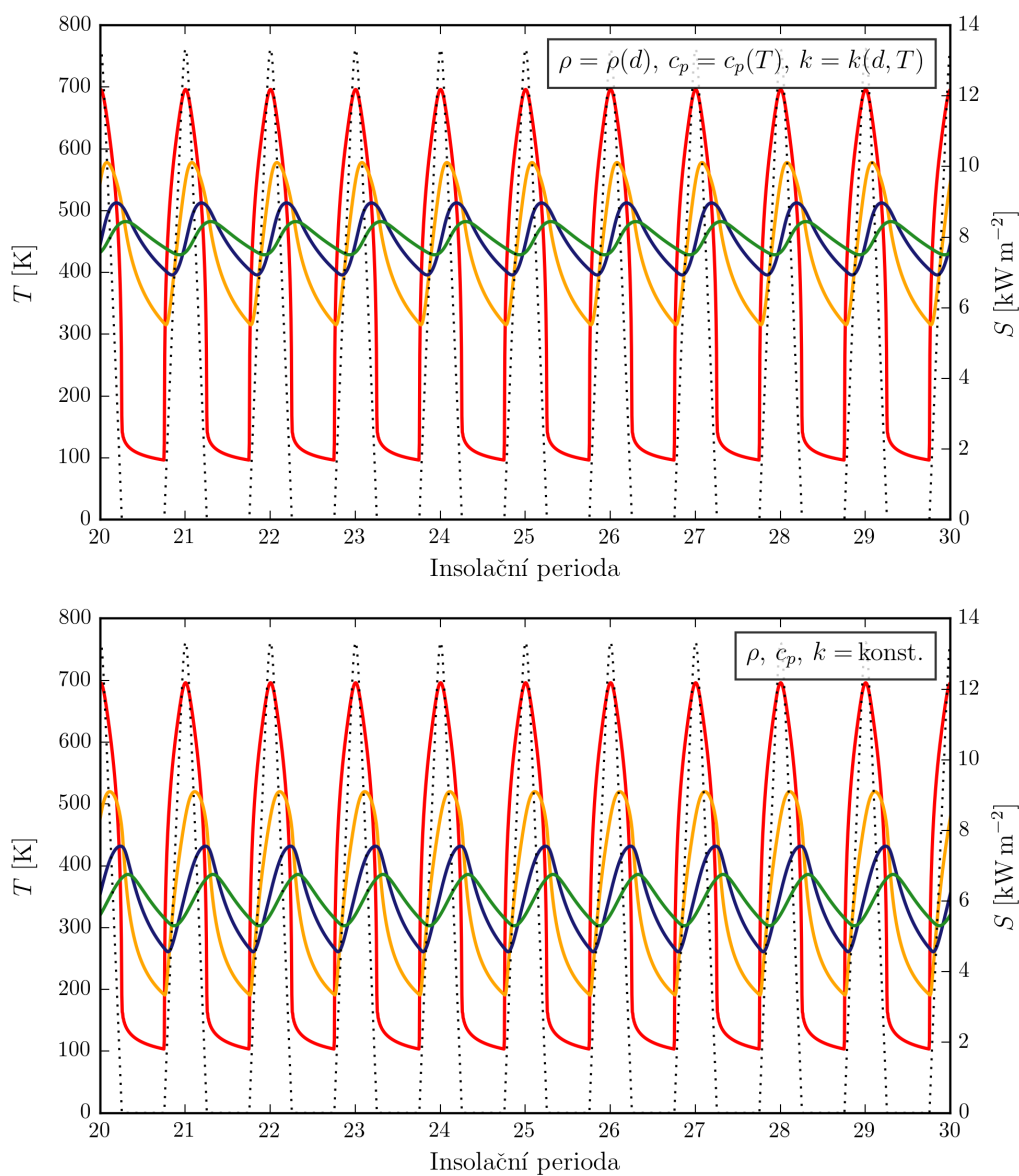
V popsanych parametrických studiích jsme v souladu s bakalářskou prací posuzovali závislost extrému průměrných teplot na sklonu rotační osy v celém oboru ( $0^\circ, 90^\circ$ ) a na výstřednostech v oboru (0; 0, 5) pro spin-orbitální resonance 1:1 a 3:2. Zatímco dlouhodobé udržování nenulové výstřednosti dráhy i nenulového sklonu osy je částečně očekávatelné v případě přítomnosti dalších, velmi hmotných těles ve studované planetární soustavě (Dobrovolskis, 2007, 2009), předpoklad uvedených spin-orbitálních resonancí činí pro realistické planety část prostoru parametrů nedosažitelnou. Jak velká je tato část, závisí na viskozitě planety, její oběžné periodě, a také na její permanentní deformaci. Pro úplnost zde tedy ponecháváme výřezy z prostoru parametrů v celém zmíněném rozsahu a vazbu mezi výstřednostmi a rovnovážnou spin-orbitální resonancí pouze připomínáme.

## 2.5.2 Význam teplotní a hloubkové závislosti $\rho, c_p, k$

Pro posouzení vlivu teplotní závislosti na periodické změny povrchové teploty byl stejně jako v předcházejících případech zvolen model C. Za povrchový materiál ovšem nyní považujeme regolit, jehož tepelná setrvačnost je řádově nižší než setrvačnost kompaktního materiálu uvažovaného v předcházejícím pododdíle (viz obrázek 2.6). Průběh teplot vykreslujeme pro bod na rovníku planety uchycené ve spin-orbitální resonanci 3:2 a s parametrem  $\tau = 0$ .

Vývoj povrchové i podpovrchové teploty v průběhu deseti insolačních period, během kterých již teplota není ovlivněna počáteční podmínkou, je znázorněn na obrázku 2.11. Horní graf zde odpovídá případu hloubkově závislé hustoty regolitu, teplotně závislé měrné tepelné kapacity a teplotně i hloubkově závislé tepelné vodivosti. Spodní graf naopak ukazuje průběh teplot odpovídající konstantním termofyzikálním parametrům, které byly zvoleny jako časový i prostorový průměr vlastností svrchních 50 cm povrchu. Hodnoty těchto konstantních veličin jsou  $\rho = 1621,7 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_p = 923,4 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ ,  $k = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ , a příslušnou charakteristickou hloubku lze tedy určit jako  $L_{\text{char}} = 20 \text{ cm}$ . Právě v hloubkách odpovídajících násobkům poloviny této charakteristické délky veškeré průběhy teplot vynásíme.

Uvážení hloubkové a teplotní závislosti materiálových vlastností má za následek



**Obrázek 2.11:** Vývoj povrchové a podpovrchové teploty v průběhu deseti insolačních period. Planeta z modelu C. Vykreslena je teplota na povrchu planety (červeně) a ve hloubkách  $0, 5 L_{\text{char}}$  (žlutě),  $1 L_{\text{char}}$  (modře) a  $5 L_{\text{char}}$  (zeleně), černá tečkovaná čára představuje změny insolace. Na spodním obrázku jsou termofyzikální parametry povrchu  $\rho, c_p, k$  považovány za konstantní (viz text), kdežto na obrázku horním závisí na hloubce i na teplotě. Charakteristická hloubka v tomto příkladě odpovídá 20 cm.

nárůst tepelné setrvačnosti s hloubkou a její periodické změny v průběhu insolačního cyklu. Zatímco první jmenovaný jev vede ke snížení amplitudy oscilací podpovrchových teplot a k celkovému ohřátí hlubších vrstev v porovnání s případem vybraných konstantních parametrů, druhý z jevů ovlivňuje především nejvyšší a nejnižší hodnoty povrchové teploty. Ta je v okamžiku maximálního osvětlení nepatrně vyšší než pro případ konstantních parametrů a na konci období noci naopak až o 13 K nižší. Podobné srovnání povrchových a podpovrchových teplot je samozřejmě závislé na hodnotách, které zvolíme za odpovídající konstantní parametry, obrázek 2.11 má proto spíše jen ilustrativní charakter.

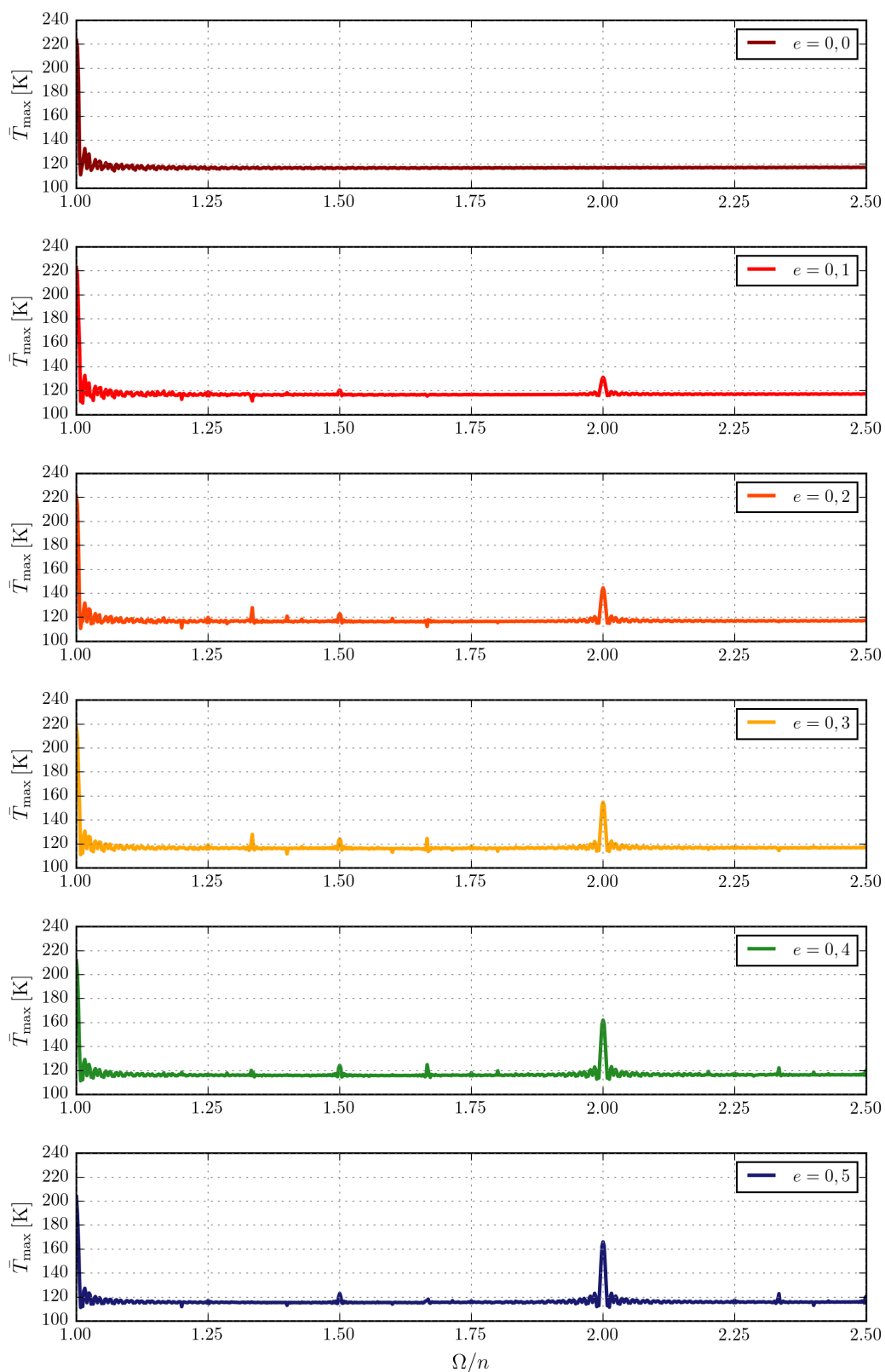
### 2.5.3 Význam spin-orbitálních resonancí

Ve všech předcházejících příkladech jsme explicitně předpokládali, že planeta je uchycena ve stavu spin-orbitální resonance 1:1 či 3:2. Nyní od tohoto předpokladu upustíme, zaměříme se na obecnější rozsah spin-orbitálních poměrů (mezi resonancemi 5:2 a 1:1) a posoudíme, nakolik konkrétní resonance ovlivňují maximální průměrnou povrchovou teplotu na planetách obíhajících po eliptické dráze. Pro tyto účely si zvolíme planetu z modelu B, jejíž povrch bude pokrytý regolitem popsáným v pododdíle 2.2.3. Jelikož má naše modelová planeta nulový sklon rotační osy, nachází se místo s nejvyšší průměrnou teplotou vždy na rovníku, stejně jako místo s nejvyšší průměrnou insolací. Průměry v případě obecného poměru oběžné a rotační frekvence počítáme v průběhu sta oběžných period poté, co povrchová teplota přestane být ovlivňována počáteční podmínkou.

Závislost maximální průměrné teploty na spin-orbitálním poměru<sup>4</sup>  $\Omega/n$  pro pětici různých výstředností dráhy je znázorněna na obrázku 2.12. Jestliže se planeta nachází mimo spin-orbitální resonanci, její průměrné teploty se po dostatečně dlouhé době zjevně stávají nezávislými na rychlosti rotace. Pokud ovšem dojde k záhytu planety do resonantního stavu, v němž je její rotační frekvence celočíselným násobkem středního pohybu (resonance 1:1 či 2:1), maximální průměrná povrchová teplota dramaticky narůstá. Nejvýraznější nárůst je patrný v případě vázané rotace, kdy se nejvyšší teplota na studované planetě zvyšuje až o 100 K, pro výstřednější dráhy však nabývají významu i vyšší celočíselné resonance a význačnost stavu 1:1 mírně klesá. Co se týče „poločíselných“ spin-orbitálních resonancí, jejich vliv na maximální průměrnou teplotu na planetě není zásadní (v případě resonance 3:2 a výstřednosti  $e = 0,4$  vzroste maximální průměrná teplota při daném středování o 5 K). Mírný vzrůst či pokles průměrné povrchové teploty lze nalézt i pro slabší spin-orbitální resonance, například 4:3, které ovšem nejsou z hlediska slapové dynamiky stabilní.

Význam jednotlivých spin-orbitálních resonancí pro maximální průměrné teploty je pochopitelný a souvisí s rozptřením zářivého toku od mateřské hvězdy po povrchu planety. Jestliže se planeta nachází ve stavu vázané rotace, je v případě kruhové dráhy věčně osvětlena jen jedna její polokoule a nad nejteplejším místem se hvězda nachází po celou dobu oběhu. Pokud se výstřednost dráhy zvyšuje, hvězda se nad daným bodem začne „kolébat“, dochází k libraci v planetopisné délce a dopadající zářivý tok je

<sup>4</sup>V této parametrické studii měníme pouze rotační frekvenci planety, nezabýváme se vývojem dráhy a hlavní poloosu  $a$  držíme konstantní.

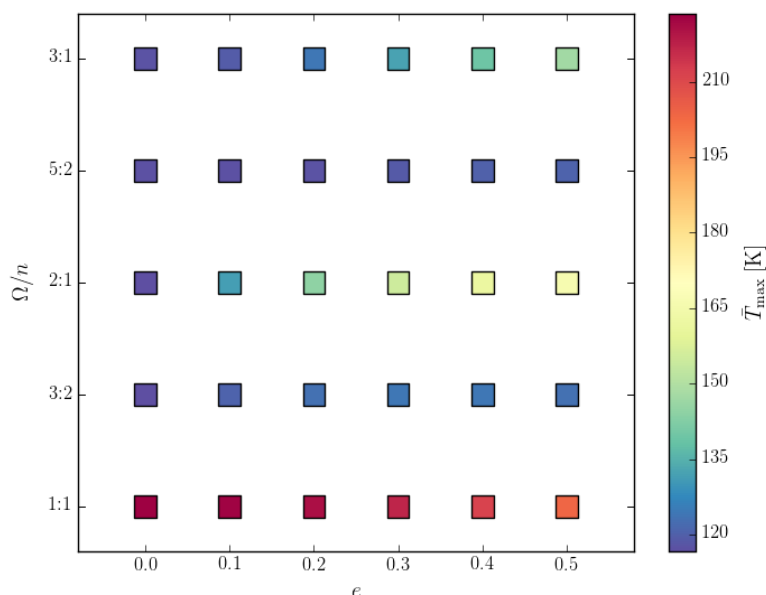


**Obrázek 2.12:** Závislost maximální průměrné povrchové teploty na spin-orbitálním poměru pro různé výstřednosti dráhy. Planeta z modelu B. Výrazný nárůst teploty je asociován s celočíselnými spin-orbitálními resonancemi 2:1 a 1:1.

rozprostřen po větší části planetárního povrchu. Teplota nejteplejšího bodu se tak mírně sníží, a toto snížení je tím výraznější, čím více se oběžná dráha odlišuje od kružnice. Kromě většího rozprostření přijímaného toku se navíc na výstředné dráze mění okamžitá vzdálenost planety od hvězdy, což taktéž vede ke snížení maximální průměrné teploty oproti případu kruhové dráhy.

Na planetách o vyšších spin-orbitálních resonancích neexistují oblasti věčného dne či věčné noci, dopadající zářivý tok je tedy rozložen po celém jejich povrchu a maximum průměrných teplot nedosahuje takových hodnot jako při vázané rotaci. Pokud se planeta nachází na kruhové oběžné dráze, neexistují na ní ani význačné body a průměrná teplota zůstává stejná na celém rovníku – tento případ se pak neliší od neresonantních stavů. S jinou situací se setkáváme při uvážení výstředné oběžné dráhy. Tehdy se v případě „poločíselných“ resonancí (3:2, 5:2) na planetě nachází dva význačné body a v případě „celočíselné“ resonance (2:1, 3:1) jeden význačný bod, odpovídající místu, které v okamžiku průchodu planety periastronem leží právě pod hvězdou. Celková energie, kterou planeta na oběžné dráze se zvolenou excentricitou během svého oběhu (či několika oběhů) přijme, je však přirozeně nezávislá na konkrétním spin-orbitálním poměru, a průměrná teplota v jednom ze dvou stejně význačných bodů na planetě s resonancí 3:2 nebo 5:2 tak bude vždy nižší než průměrná teplota v jediném význačném bodě na planetě s celočíselnou resonancí.

Čím vyšší je výstřednost dráhy, tím vzrůstá také průměrná teplota ve zmíněném význačném bodě. Vyšší celočíselné spin-orbitální resonance tak ovlivňují především teplotu na planetách s velmi excentrickou dráhou. Shrnutí maximálních průměrných teplot v závislosti na výstřednosti a typu spin-orbitální resonance poskytuje obrázek 2.13.

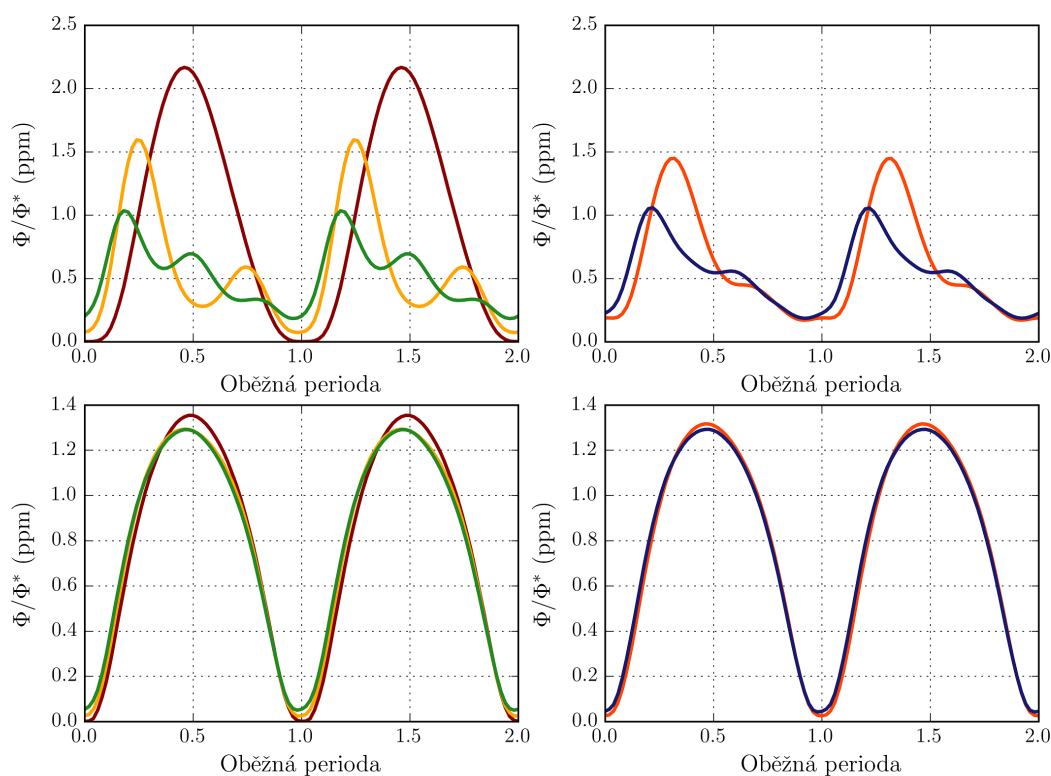


**Obrázek 2.13:** Průměrná povrchová teplota v místě s nejvyšší střední insolací jako funkce výstřednosti oběžné dráhy  $e$  a spin-orbitálního poměru  $\Omega/n$ . Planeta z modelu B.

### 2.5.4 Fotometrické křivky

Rozložení povrchové teploty i jeho časové změny v průběhu oběžné periody závisí na velkém množství parametrů. Tato závislost se promítá také do souhrnného zářivého toku, který od planety přichází ke vzdálenému pozorovateli. K ilustraci vlivu některých veličin jsme proto pro obě modelové planety určili průběhy fotometrických křivek, či přesněji té jejich části, která odpovídá tepelnému vyzařování povrchu. Pro podrobnější studii všech podstatných vlivů odkazujeme čtenáře na článek Selsis a kol. (2013).

Není-li uvedeno jinak, v případě obou modelových planet předpokládáme, že povrch planety je tvořen kompaktním materiálem z pododdílu 2.5.1 ( $\rho = 2700 \text{ kg m}^{-3}$ ,  $c_p = 800 \text{ J K}^{-1}\text{kg}^{-1}$ ,  $k = 1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ ) a má tedy vysokou tepelnou setrvačnost,  $I = 1469,7 \text{ J m}^{-2}\text{K}^{-1}\text{s}^{-\frac{1}{2}}$ . Průběh fotometrických křivek vykreslujeme pro vlnovou délku  $\lambda = 10 \text{ }\mu\text{m}$  a relativní tok odpovídající termálnímu vyzařování planety ku toku z hvězdy,  $\Phi_{\lambda,\text{obs}}/\Phi_{\lambda,\text{obs}}^*$ , uvádíme speciálně pro pozorovatele, který se nachází v rovině oběžné dráhy a pro nějž se planeta procházející periastrum jeví být právě v novu. Rozestup mezi průchodem planety periastrum a jarní rovnodenností volíme nulový, výstřednost dráhy ovšem nenulovou,  $e = 0,2$ . Veličinami, které jsme v průběhu studie měnili, jsou

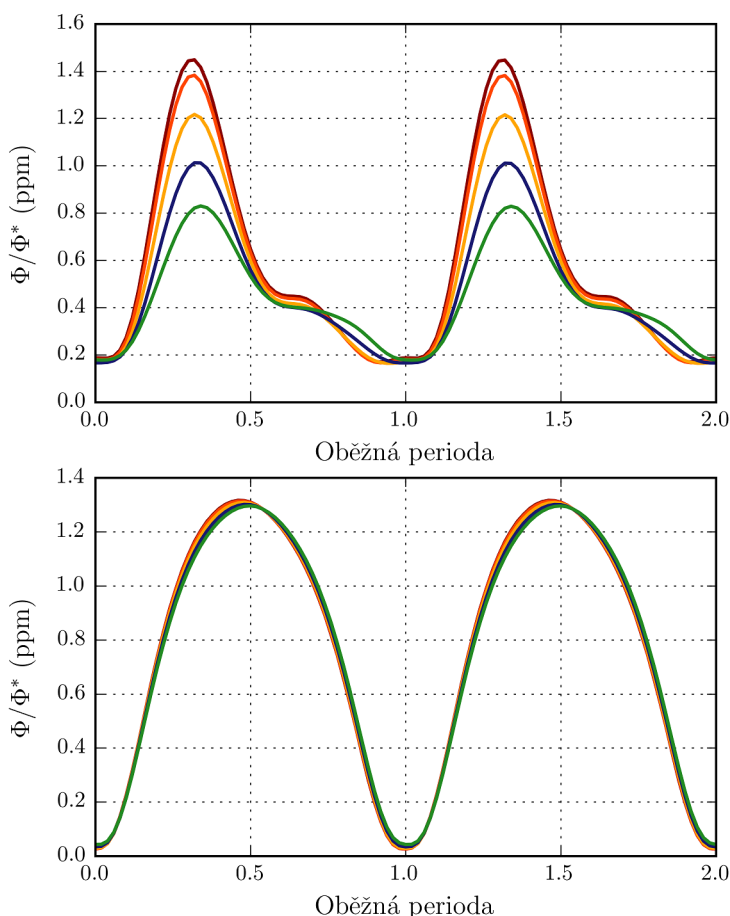


**Obrázek 2.14:** Závislost časového průběhu fotometrických křivek na typu spin-orbitální resonance. V horním řádku je znázorněn průběh relativního toku  $\Phi_{\lambda,\text{obs}}/\Phi_{\lambda,\text{obs}}^*$  pro planetu z modelu B, v dolním řádku pro planetu z modelu C, v obou případech je výstřednost  $e = 0,2$ , sklon rotační osy  $\beta = 0^\circ$  a tepelná vodivost  $k = 1 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ . Křivky vlevo odpovídají „celočíslným“ spin-orbitálním resonancím 1:1 (tmavě červená), 2:1 (žlutá) a 3:1 (zelená), křivky vpravo odpovídají „poločíslným“ resonancím 3:2 (oranžová) a 5:2 (tmavě modrá).

spin-orbitální poměr, sklon rotační osy a tepelná vodivost povrchu.

Podoba fotometrických křivek pro různou volbu spin-orbitálních resonancí je vynešena na obrázku 2.14, pro větší přehlednost rozděleném na dvě dvojice grafů. Horní dvojice odpovídá planetě z modelu B a celočíselným, respektive poločíselným resonancím, dolní dvojice pak znázorňuje totéž pro planetu z modelu C. Znatelný rozdíl mezi oběma modely je způsoben především rozdílnými oběžnými, a tudíž také insolačními, periodami: zatímco na průběhu křivky z modelu B, kde oběžná perioda činí 36,5 dne, je vliv různých spin-orbitálních poměrů ihned patrný, křivka z modelu C s oběžnou periodou 92,4 dne následuje spíše střídání fází planety (tok je nejvyšší v „úplňku“). Díky delším obdobím s nulovou insolací může planeta z modelu C efektivněji vychladnout, a její povrchová teplota tak více odpovídá rovnovážné teplotě (2.20).

Vyšší rotační frekvence vede k rovnoměrnějšímu rozložení povrchových teplot, tedy k menším amplitudám změn relativního toku. Na grafech příslušejících modelu B dále vidíme několik lokálních maxim, která odpovídají okamžikům, kdy je k pozorovateli

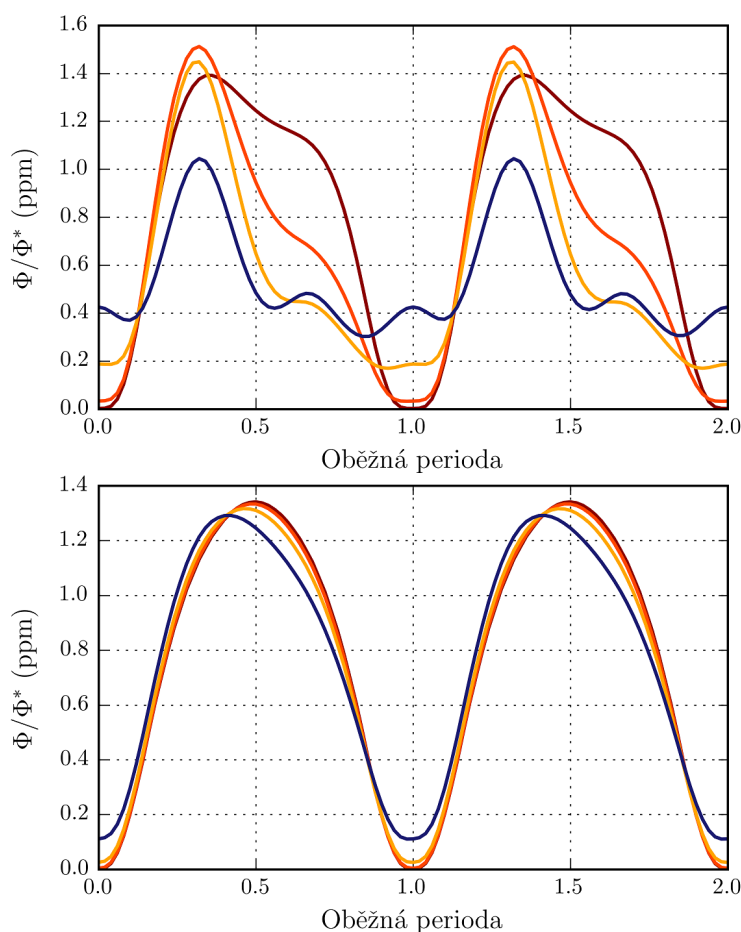


**Obrázek 2.15:** Závislost časového průběhu fotometrických křivek na sklonu rotační osy  $\beta$ . Výstřednost dráhy je  $e = 0,2$ , spin-orbitální resonance 3:2 a tepelná vodivost povrchu  $k = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$ . Znázorňujeme průběh relativního toku  $\Phi_{\lambda, \text{obs}} / \Phi_{\lambda, \text{obs}}^*$  po dobu dvou oběhů pro sklony  $0^\circ$  (tmavě červená),  $20^\circ$  (světle červená),  $40^\circ$  (žlutá),  $60^\circ$  (tmavě modrá) a  $80^\circ$  (zelená). *Nahoře:* model B, *dole:* model C.



pootočena ta polokoule planety, jež byla insolaci vystavena v okamžiku průchodu periastrum. V případě vázané rotace na kruhové dráze by jediné maximum nastávalo právě v polovině oběžné periody. Uvážení nenulové výstřednosti dráhy ovšem vede k libraci v planetopisné délce, během průchodu periastrum se proto prohřívá rozsáhlejší část povrchu a příslušné maximum je tak zaznamenáno krátce před polovinou oběhu. Na křivkách modelu C tuto asymetrii právě kvůli delším obdobím nočního chladnutí nepozorujeme.

Vliv sklonu rotační osy, znázorněný na obrázku 2.15, jsme studovali pro případ spin-orbitální resonance 3:2, opět s nenulovou výstředností dráhy a s položením  $\tau = 0$ . Díky rovnoměrnějšímu prohřívání povrchu v důsledku librace v planetopisné délce i šířce je i v tomto případě sledován pokles amplitudy variací se zvyšujícím se sklonem. Vidíme také, že při menším sklonu rotační osy dosahuje vykreslený relativní tok svého maxima dříve, než když je osa skloněna výrazněji.



**Obrázek 2.16:** Závislost časového průběhu fotometrických křivek na tepelné vodivosti  $k$ . Výstřednost dráhy je  $e = 0,2$ , spin-orbitální resonance 3:2 a sklon rotační osy  $\beta = 0^\circ$ . Znáznorňujeme průběh relativního toku  $\Phi_{\lambda, \text{obs}} / \Phi_{\lambda, \text{obs}}^*$  po dobu dvou oběhů pro vodivosti  $k = 0,01 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (tmavě červená),  $k = 0,1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (světle červená),  $k = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (žlutá) a  $k = 10 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$  (tmavě modrá). *Nahoře:* model B, *dole:* model C.

Posledním diskutovaným parametrem je tepelná vodivost povrchu, jejíž odraz v časovém průběhu fotometrických křivek ukazuje obrázek 2.16. Také zde předpokládáme spin-orbitální resonanci 3:2 a nulový sklon rotační osy. Nízká tepelná vodivost ( $k = 0,01 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ , tmavě červená křivka), a z ní vyplývající nízká tepelná setrvačnost povrchu, má za následek takové rozložení povrchové teploty, které je dáno z největší míry okamžitým rozložením insolace. Vysoká tepelná vodivost ( $k = 10 \text{ W m}^{-1}\text{K}^{-1}$ , tmavě modrá křivka) naopak podtrhuje vliv rotace planety, lokální maxima odpovídající okamžikům, kdy se k pozorovateli natáčí polokoule ohřívána v periastru, jsou zde mnohem zřetelnější. Vyšší tepelná setrvačnost též očekávatelně vede k menším amplitudám změn relativního toku a k vyššímu infračervenému vyzařování neosvětlené polokoule pozorovanému v okamžiku novu, tedy v našem případě na počátku každé oběžné periody.

Pokud okamžitou teplotu celého planetárního povrchu aproximujeme její průměrnou hodnotou  $T_p$ , můžeme poměr  $\delta$  monochromatického toku od tepelně vyzařující planety k monochromatickému toku přicházejícímu na téže vlnové délce ( $10 \mu\text{m}$ ) od její mateřské hvězdy vyjádřit jako (Wright a Gaudi, 2012)

$$\delta = \left( \frac{r_p}{R_*} \right)^2 \frac{\mathcal{B}_\lambda(T_p)}{\mathcal{B}_\lambda(T_*)} \gamma_{\lambda,\text{therm}}, \quad (2.25)$$

kde  $\gamma_{\lambda,\text{therm}}$  je termální fázová křivka, daná skutečným laterálním rozložením povrchové teploty. Uvedený vztah nám říká, že relativní tok od planety, veličina vynášená na všech předcházejících obrázcích, je tím vyšší, čím nižší je poloměr a související efektivní teplota hvězdy. V modelové soustavě B se setkáváme s poměrně málo hmotnou hvězdou hlavní posloupnosti, která má tudíž i menší poloměr a povrchovou teplotu než exo-Slunce z modelu C (viz vztahy (2.8) a (2.9)). Tento rozdíl mezi mateřskými hvězdami také vysvětluje, proč je v našich ilustracích relativní tok od chladnější planety z modelu B (maximální průměrná teplota cca 100 až 200 K) srovnatelný, anebo dokonce vyšší než relativní tok od planety z modelu C, jež dosahuje povrchových teplot kolem 600 až 700 K.

Poměr monochromatických toků od hvězdy a od planety je v případě obou modelových systémů velice nízký, nejvýše v řádu jednotek ppm. Webbův dalekohled, konkrétně jeho přístroj MIRI, určený pro spektroskopii i přímé zobrazení v infračervené oblasti mezi 5 a 28,3  $\mu\text{m}$ , pravděpodobně nebude schopen detekovat variace toku nižší než 10 ppm (Maurin a kol., 2012). Rozlišitelnými by ovšem mohly být termální fotometrické křivky příslušející rozměrnějším exo-Zemím nacházejícím se na krátkoperiodických drahách okolo chladnějších hvězd, zvláště, pokud je povrch těchto planet tvořen kompaktním materiálem. Podobnou modelovou soustavu studoval ve svém článku Selsis a kol. (2013) a nacházel relativní toky v řádu desítek až stovek ppm. Inverze fotometrických křivek horkých krátkoperiodických exoplanet by díky možnosti určení spin-orbitálních resonancí či sklonů rotační osy mohla v budoucnu přispět také k ověření předpovědí slapových teorií.

# Závěr

V diplomové práci jsme se zabývali dvěma tématy souvisejícími s dlouhodobým vývojem terestrických exoplanet bez atmosféry. Prvním z těchto témat byl slapový vývoj oběžné dráhy a rotační frekvence, druhým tématem pak byla parametrická závislost povrchové teploty, studovaná s využitím zpřesněného numerického modelu pro řešení rovnice vedení tepla. V obou kapitolách jsme se seznámili se souvisejícími teoretickými základy, představili či připomněli vlastní výpočetní schéma a diskutovali některé jeho výsledky, ilustrované na třech modelových soustavách obsahujících hvězdu a jedinou – terestrickou – planetu. Významný jev, kterému jsme se věnovali v souvislosti s oběma tématy, představují spin-orbitální resonance.

Reakce planety na slapové zatěžování byla popisována pomocí Maxwellovy viskoelastické reologie. Tento přístup je odlišný od tradičních slapových teorií, které předpokládají konstantní časový či fázový rozestup mezi průchodem slapotvorného tělesa nad určitým místem na planetě a zdvižením slapové výdutě, proto také předpovídá odlišné stabilní rotační stavy. Zatímco jedním z výsledků tradičních teorií je uchycení sféricky symetrické planety na výstředné dráze výhradně do stavů pseudo-synchronní rotace, uvážení Maxwellovy reologie vede k samovolnému vzniku spin-orbitálních resonancí, aniž by bylo nutné předpokládat permanentní deformaci planety. V závislosti na frekvenci slapového zatěžování, efektivní viskozitě a modulu torse planetárního pláště jsou spin-orbitální resonance různě výrazné (dochází tedy i k uchycení do „pseudo-resonantní“ rotace, která je blízká, avšak nikoliv rovná některé z resonancí) a liší se také rozmezí výstředností, při nichž je daný spin-orbitální poměr stabilní. V limitních případech, kdy lze odezvu planety považovat za viskózní či elastickou, je slapový vývoj dobře popsán modelem s konstantním časovým rozestupem a stabilním stavem tehdy skutečně bývá pseudo-synchronní rotace.

Stabilita spin-orbitálních resonancí či naopak pseudo-synchronních stavů při zadaných excentricitách souvisí s lokálními minimy disipace mechanické energie, a tedy slapového zahřívání. Planeta, která je již na počátku svého slapového vývoje uchycena do některého ze stabilních stavů, v něm také zpravidla setrvává, není-li výstřednost její dráhy vnějšími vlivy podstatně změněna. V první kapitole jsme tuto skutečnost ilustrovali speciálními případy spin-orbitální resonance 1:1 či 3:2. Pro planetu na kruhové dráze je jediným stabilním spin-orbitálním poměrem vázaná rotace, pokud však uvažujeme dráhy výstřednější, existuje stabilních stavů několik. Do kterého z nich je planeta během svého vývoje uzamčena přitom závisí na její počáteční rotační frekvenci.

Ve druhé kapitole jsme kromě zhodnocení vlivu doplněných zpřesnění bakalářské práce diskutovali také vliv spin-orbitálních resonancí na maximální průměrnou teplotu planetárního povrchu. V modelové soustavě vedlo uchycení do stavu vázané rotace ke zvýšení této teploty až o sto kelvinů, v případě výstředných drah se ukázaly být podstatnými také vyšší celočíselné resonance 2:1 a 3:1, které měly za následek zvýšení teploty o několik desítek kelvinů. Sledovaný nárůst maximální průměrné teploty je projevem změny v rozložení insolace. Zatímco mimo resonantní stavy je každá rovnoběžka osvětlována z dlouhodobého hlediska rovnoměrně (průměrná insolace nezávisí na planetopisné délce), při uzamčení do spin-orbitální resonance vznikají na povrchu

planety význačná místa, nad nimiž se mateřská hvězda nachází právě v okamžiku průchodu planety periastrum. V případě celočíselných resonancí je takové místo jediné.

Rotační frekvence planety, stejně jako sklon její rotační osy, sice patří mezi veličiny, které v současné době není možné detekovat, informace o obou veličinách je ovšem obsažena v souhrnném tepelném vyzařování povrchu a odráží se ve tvaru infračervených fotometrických křivek, zvláště pokud je planeta krátkoperiodická, obíhá okolo relativně chladné hvězdy a její povrch má vysokou tepelnou setrvačnost. Naději na detekci tepelného vyzařování některých terestrických exoplanet poskytuje plánovaná mise Vesmírného dalekohledu Jamese Webba.

Při implementaci numerického schématu pro slapový vývoj oběžné dráhy maxwellovského tělesa jsme použili několik zjednodušení. V evoluční rovnici pro rotační frekvenci jsme neuvažovali člen odpovídající vývoji momentu setrvačnosti  $J_{zz}$ , ačkoliv je jeho velikost (v případě Země) srovnatelná se členem odpovídajícím vývoji rotační frekvence  $\Omega_{\text{rot}}$ . Obdobně jsme předpokládali, že hlavní poloosa ani výstřednost dráhy se v průběhu padesáti či sta oběhů podstatně nemění a můžeme je po tuto dobu považovat za konstantní. Jedním z důsledků našich zjednodušení jsou oscilace výsledné rotační frekvence kolem rovnovážné polohy. Tyto oscilace nemají fyzikální povahu, jejich rozsah je závislý na době středování i na délce časového kroku, ani při výrazném snížení časového kroku ovšem nevymizí. Představený numerický model umožňuje studovat i dlouhodobý vývoj tvaru oběžné dráhy, tedy její hlavní poloosy a výstřednosti, tomuto tématu se však budeme moci věnovat až po zpřesnění konkrétní implementace. Při studiu slapového vývoje rotační frekvence reálných planet je třeba uvážit také frekvenční závislost efektivní viskozity (Běhounková a kol., 2013).

Vedle doplnění zmíněných časových závislostí a realistické vazby mezi efektivní a „dlouhoperiodickou“ viskozitou plánujeme naše výsledky dále porovnat s literaturou věnovanou analytickému popisu slapového vývoje viskoelastických těles, jako je například nedávný článek Correia a kol. (2014). Jedním z výsledků prezentovaných v tomto článku, který bude možné ke srovnání využít, je závislost stabilních spin-orbitálních poměrů na frekvenci slapového buzení a Maxwellově času, a rovněž přehled kritických excentricit, při nichž jsou vyšší spin-orbitální resonance udržitelné. Kvalitativně se naše výsledky s předpověďmi analytické studie shodují: v nízkofrekvenčním přiblížení jsou stabilní rotační stavy dobře popsány modelem s konstantním časovým rozestupem, při zvyšování frekvence slapového buzení dochází postupně k výskytu stabilních stavů blízkých resonancím a při nejvyšších v článku uvažovaných frekvencích konečně i k uchycení do samotných spin-orbitálních resonancí.

Výhodou numerického výpočtu slapového vývoje je možnost zahrnout heterogenní rozložení viskozity planetárního pláště a studovat tak například souběžný vývoj vnitřní struktury a oběžné dráhy. Rozložení viskozity může být v případě vázané rotace ovlivněno vyšší teplotou – a tedy nižší viskozitou – té polokoule, která je po celou dobu oběhu orientována směrem ke hvězdě, v obecném případě se viskozitní struktura pláště mění v důsledku plášťové konvekce, jež je pro krátkoperiodické planety navíc silně ovlivněna slapovým zahříváním (Běhounková a kol., 2010). Model slapového vývoje oběžné dráhy i zpřesněný program pro výpočet povrchové teploty, jež byly představeny v této práci, mohou být pro podobnou studii dále využity.

# A. Kaulův rozvoj slapového potenciálu

V následujícím textu se omezíme na vyjádření slapotvorného potenciálu  $\mathcal{U}$  na stupni  $j = 2$  a potenciál budeme rozvíjet v souladu s postupem uvedeným v článcích Kaula (1961) a Kaula (1964) jako

$$\mathcal{U}(r_p, \vartheta_p, \varphi_p) = \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{m=0}^j \sum_{p=0}^j \sum_{q=-\infty}^{\infty} \mathcal{U}_{jmq},$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{jmq} = \frac{\mathcal{G}M_*}{a^*} \left(\frac{r_p}{a^*}\right)^j \frac{(j-m)!}{(j+m)!} (2 - \delta_{0m}) \mathcal{P}_{jm}(\cos \vartheta_p) \mathcal{F}_{jmp}(i^*) \mathcal{G}_{jpq}(e^*) \times \\ \times \begin{cases} \cos & j-m \text{ sudé} \\ -\sin & j-m \text{ liché} \end{cases} \{ \nu_{jmq}^* - m(\varphi_p + \theta^*) \}, \end{aligned}$$

$$\nu_{jmq}^* = (j - 2p)\omega^* + (j - 2p + q)l^* + m\Omega^*.$$

Význam přítomných veličin je vyloženo v první kapitole, zde jen připomeňme, že  $\mathcal{F}_{jmp}(i^*)$  značí funkce inklinace (či přesněji sinu inklinace) a  $\mathcal{G}_{jpq}(e^*)$  jsou funkce excentricity. Za předpokladu nulového sklonu rotační osy zůstávají v rozvoji do stupně 2 nenulovými pouze ty funkce inklinace, jejichž indexy  $(j, m, p)$  jsou rovny  $(2, 0, 1)$  nebo  $(2, 2, 0)$ . Meze pro index  $q$  volíme podle požadované přesnosti v excentricitě. V tabulce, kterou uvádí Kaula (1964, str. 664), lze nalézt polynomy  $\mathcal{G}_{2pq}$ , rozvinuté do řádu 2 ve výstřednosti, zde pro doplnění uvádíme i některé další funkce excentricity, které nám umožní provést rozvoj Kaulova potenciálu s přesností do řádu 4. Funkce byly nalezeny s pomocí tabulek Cayley (1861), hvězdičku nad  $e^*$  z praktických důvodů vynecháváme.

$$\mathcal{G}_{20-4} = \frac{1}{24}e^4$$

$$\mathcal{G}_{21-4} = \frac{77}{16}e^4$$

$$\mathcal{G}_{20-3} = \frac{1}{48}e^3$$

$$\mathcal{G}_{21-3} = \frac{53}{16}e^3$$

$$\mathcal{G}_{20-2} = 0$$

$$\mathcal{G}_{21-2} = \frac{9}{4}e^2 + \frac{7}{4}e^4$$

$$\mathcal{G}_{20-1} = -\frac{1}{2}e + \frac{1}{16}e^3$$

$$\mathcal{G}_{21-1} = \frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3$$

$$\mathcal{G}_{200} = 1 - \frac{5}{2}e^2 + \frac{13}{16}e^4$$

$$\mathcal{G}_{210} = 1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{15}{8}e^4$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{201} &= \frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 & \mathcal{G}_{211} &= \frac{3}{2}e + \frac{27}{16}e^3 \\
\mathcal{G}_{202} &= \frac{17}{2}e^2 - \frac{115}{6}e^4 & \mathcal{G}_{212} &= \frac{9}{4}e^2 + \frac{7}{4}e^4 \\
\mathcal{G}_{203} &= \frac{845}{48}e^3 & \mathcal{G}_{213} &= \frac{53}{16}e^3 \\
\mathcal{G}_{204} &= \frac{533}{16}e^4 & \mathcal{G}_{214} &= \frac{77}{16}e^4
\end{aligned}$$

Kaula (1964) vyjadřuje slapotvorný potenciál v pojmech přidružených Legendrových polynomů, v zájmu souladu s programem *Andy4* zde však budeme užívat sférických harmonických funkcí. Po dosažení příslušných funkcí excentricity a inklinace a uvážení  $n^2 = \mathcal{G}_{M^*/a^3}$  lze celkový potenciál na povrchu planety zapsat jako

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(r_p, \vartheta_p, \varphi_p) &= \sum_q (\mathcal{U}_{201q} + \mathcal{U}_{220q}) = B_{20}Y_{20} + B_{22}Y_{22} + B_{2-2}Y_{2-2} = \quad (\text{A.1}) \\
&= B_{20}Y_{20} + \text{Re}\{B_{22}\}\text{Re}\{Y_{22} + Y_{2-2}\} + \text{Im}\{B_{22}\}\text{Im}\{Y_{22} - Y_{2-2}\} = \\
&= B_{20}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\mathcal{P}_{20} + \text{Re}\{B_{22}\}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\mathcal{P}_{22}\cos(2\varphi) - \text{Im}\{B_{22}\}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{6\pi}}\mathcal{P}_{22}\sin(2\varphi),
\end{aligned}$$

s koeficienty

$$\begin{aligned}
B_{20} &= -\sqrt{\frac{\pi}{5}}n^2r_p^2 \left[ 1 + 3e\cos nt + \frac{1}{2}e^2(3 + 9\cos 2nt) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{8}e^3(27\cos nt + 53\cos 3nt) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}e^4\left(\frac{15}{4} + 7\cos 2nt + \frac{77}{4}\cos 4nt\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re}\{B_{22}\} &= \sqrt{\frac{3\pi}{10}}n^2r_p^2 \left\{ \cos(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{1}{2}e \left[ 7\cos(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \cos(n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}e^2 \left[ 17\cos(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) - 5\cos(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{16}e^3 \left[ \frac{1}{3}\cos(n + 2\Omega_{\text{rot}})t + \cos(n - 2\Omega_{\text{rot}})t - 123\cos(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{845}{3}\cos(5n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}e^4 \left[ \frac{1}{12} \cos(2(n + \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{13}{8} \cos(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) - \frac{115}{3} \cos(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{533}{8} \cos(2(3n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] \Big\} \\
\text{Im}\{B_{22}\} = & -\sqrt{\frac{3\pi}{10}}n^2r_p^2 \left\{ \sin(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{1}{2}e \left[ 7 \sin(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \sin(n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \right. \\
& + \frac{1}{2}e^2 \left[ 17 \sin(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) - 5 \sin(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] + \\
& + \frac{1}{16}e^3 \left[ \frac{1}{3} \sin(n + 2\Omega_{\text{rot}}) + \sin(n - 2\Omega_{\text{rot}})t - 123 \sin(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{845}{3} \sin(5n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \\
& + \frac{1}{2}e^4 \left[ \frac{1}{12} \sin(2(n + \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{13}{8} \sin(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) - \frac{115}{3} \sin(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{533}{8} \sin(2(3n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] \Big\}
\end{aligned}$$

Obdobně pro Kaulův rozvoj slapové síly na povrchu planety můžeme psát

$$\mathbf{f}_t(r_p, \vartheta_p, \varphi_p) = A_{20} \mathbf{Y}_{20}^1 + \text{Re}\{A_{22}\} \text{Re}\{\mathbf{Y}_{22}^1 + \mathbf{Y}_{2-2}^1\} + \text{Im}\{A_{22}\} \text{Im}\{\mathbf{Y}_{22}^1 - \mathbf{Y}_{2-2}^1\},$$

s koeficienty

$$\begin{aligned}
A_{20} = & -\sqrt{2\pi}n^2r_p \left[ 1 + 3e \cos nt + \frac{1}{2}e^2(3 + 9 \cos 2nt) + \right. \\
& + \frac{1}{8}e^3(27 \cos nt + 53 \cos 3nt) + \\
& \left. + \frac{1}{2}e^4 \left( \frac{15}{4} + 7 \cos 2nt + \frac{77}{4} \cos 4nt \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Re}\{A_{22}\} = & \sqrt{3\pi}n^2r_p \left\{ \cos(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{1}{2}e \left[ 7 \cos(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \cos(n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \right. \\
& + \frac{1}{2}e^2 \left[ 17 \cos(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) - 5 \cos(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16}e^3 \left[ \frac{1}{3} \cos(n + 2\Omega_{\text{rot}})t + \cos(n - 2\Omega_{\text{rot}})t - 123 \cos(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{845}{3} \cos(5n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \\
& + \frac{1}{2}e^4 \left[ \frac{1}{12} \cos(2(n + \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{13}{8} \cos(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) - \frac{115}{3} \cos(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{533}{8} \cos(2(3n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Im}\{A_{22}\} = & -\sqrt{3}\pi n^2 r_p \left\{ \sin(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{1}{2}e \left[ 7 \sin(3n - 2\Omega_{\text{rot}})t - \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. - \sin(n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \right. \\
& + \frac{1}{2}e^2 \left[ 17 \sin(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) - 5 \sin(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] + \\
& + \frac{1}{16}e^3 \left[ \frac{1}{3} \sin(n + 2\Omega_{\text{rot}}) + \sin(n - 2\Omega_{\text{rot}})t - 123 \sin(3n - 2\Omega_{\text{rot}}) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{845}{3} \sin(5n - 2\Omega_{\text{rot}})t \right] + \\
& + \frac{1}{2}e^4 \left[ \frac{1}{12} \sin(2(n + \Omega_{\text{rot}})t) + \frac{13}{8} \sin(2(n - \Omega_{\text{rot}})t) - \frac{115}{3} \sin(2(2n - \Omega_{\text{rot}})t) + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{533}{8} \sin(2(3n - \Omega_{\text{rot}})t) \right] \Big\}
\end{aligned}$$



# Seznam použité literatury

- ANDRLE, P. (1971). *Základy nebeské mechaniky*. První vydání. Academia, Praha.
- BARNES, R., editor (2010). *Formation and evolution of exoplanets*. Wiley-VCH, Weinheim. ISBN 978-3-527-40896-2.
- BARNES, R., RAYMOND, S. N., JACKSON, B. a GREENBERG, R. (2008). Tides and the Evolution of Planetary Habitability. *Astrobiology*, **8**(3), 557–568. doi: 10.1089/ast.2007.0204.
- BARNES, R., JACKSON, B., GREENBERG, R. a RAYMOND, S. N. (2009). Tidal Limits to Planetary Habitability. *The Astrophysical Journal Letters*, **700**(1), L30–L33. doi: 10.1088/0004-637X/700/1/L30.
- BATALHA, N. M., ROWE, J. F., BRYSON, S. T. A KOL. (2013). Planetary Candidates Observed by Kepler. III. Analysis of the First 16 Months of Data. *The Astrophysical Journal Supplement*, **204**(2). doi: 10.1088/0067-0049/204/2/24.
- BEISER, A. (1975). *Úvod do moderní fyziky*. První vydání. Academia, Praha.
- BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G., CHOBLET, G. a ČADEK, O. (2010). Coupling mantle convection and tidal dissipation: applications to Enceladus and Earth-like planets. *Journal of Geophysical Research*, **115**(E09011). doi: 10.1029/2009JE003564.
- BĚHOUNKOVÁ, M., TOBIE, G., CHOBLET, G. a ČADEK, O. (2013). Impact of tidal heating on the onset of convection in Enceladus's ice shell. *Icarus*, **226**(1), 898–904. doi: 10.1016/j.icarus.2013.06.033.
- BLECIC, J., HARRINGTON, J., MADHUSUDHAN, N. A KOL. (2013). Thermal emission of WASP-14b revealed with three *Spitzer* eclipses. *The Astrophysical Journal*, **779**(5). doi: 10.1088/0004-637X/779/1/5.
- BROUWER, D. a CLEMENCE, G. M. (1961). *Methods of celestial mechanics*. První vydání. Academic Press, New York. ISBN 978-1-4832-0075-0.
- BURŠA, M. a PĚČ, K. (1988). *Tíhové pole a dynamika Země*. První vydání. Academia, Praha.
- CARRIER, W. D., OLHOEFT, G. R. a MENDELL, W. W. (1991). Physical properties of the lunar surface. In HEIKEN, G. H., VANIMAN, D. T. a FRENCH, B. M., ed., *The Lunar Sourcebook: A User's Guide to the Moon*, pages 475–594. Cambridge University Press.
- CAYLEY, A. (1861). Tables of the developments of functions in the theory of elliptic motion. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, **29**, 191–306.
- CORREIA, A. a LASKAR, J. (2010). Tidal Evolution of Exoplanets. (arXiv 1009.1352v2).

- CORREIA, A. C. M., BOUÉ, G., LASKAR, J. a RODRÍGUEZ, A. (2014). Deformation and tidal evolution of close-in planets and satellites using a Maxwell viscoelastic rheology. *Astronomy & Astrophysics*, **571**(A50). doi: 10.1051/0004-6361/201424211.
- COWAN, N. B., VOIGT, A. a ABBOT, D. S. (2012). Thermal phases of Earth-like planets: estimating thermal inertia from eccentricity, obliquity and diurnal forcing. *The Astrophysical Journal*, **757**(80). doi: 10.1088/0004-637X/757/1/80.
- COX, A. N., editor (2000). *Allen's astrophysical quantities*. Čtvrté vydání. Springer-Verlag, New York. ISBN 978-0-387-95189-8.
- DARWIN, G. H. (1880). On the secular change in the elements of the orbit of a satellite revolving about a tidally distorted planet. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **171**, 713–891. (přetištěno v *Scientific Papers*, Cambridge, Vol. II, 1908).
- DEMORY, B.-O., GILLON, M., SEAGER, S. A KOL. (2012). Detection of thermal emission from a super-Earth. *The Astrophysical Journal*, **751**(L28). doi: 10.1088/2041-8205/751/2/L28.
- DOBROVOLSKIS, A. R. (2007). Spin states and climates of eccentric exoplanets. *Icarus*, **192**(1), 1–23. doi: 10.1016/j.icarus.2007.07.005.
- DOBROVOLSKIS, A. R. (2009). Insolation patterns on synchronous exoplanets with obliquity. *Icarus*, **204**(1), 1–10. doi: 10.1016/j.icarus.2009.06.007.
- DOBROVOLSKIS, A. R. (2013). Insolation on exoplanets with eccentricity and obliquity. *Icarus*, **226**(1), 760–776. doi: 10.1016/j.icarus.2013.06.026.
- DRESSING, C. D., SPIEGEL, D. S., SCHARF, C. A. A KOL. (2010). Habitable climates: The influence of eccentricity. *The Astrophysical Journal*, **721**(2), 1295–1307. doi: 10.1088/0004-637X/721/2/1295.
- EFROIMSKY, M. (2005). Gauge Freedom in Orbital Mechanics. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **1065**, 346–374. doi: 10.1196/annals.1370.016.
- EFROIMSKY, M. (2012). Bodily tides near spin-orbit resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **112**(3), 283 – 330. doi: 10.1007/s10569-011-9397-4.
- EFROIMSKY, M. a WILLIAMS, J. G. (2009). Tidal torques. A critical review of some techniques. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **104**(3), 257 – 289. doi: 10.1007/s10569-009-9204-7.
- EUBANKS, T. M. (1993). Variations in the Orientation of the Earth. In SMITH, D. E. a TURCOTTE, D. L., ed., *Contributions of Space Geodesy to Geodynamics: Earth Dynamics*.
- FERRAZ-MELLO, S., RODRÍGUEZ, A. a HUSSMAN, H. (2008). Tidal friction in close-in satellites and exoplanets: The Darwin theory re-visited. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **101**(1-2), 171 – 201. doi: 10.1007/s10569-008-9133-x.

- FOUNTAIN, J. A. a WEST, E. A. (1970). Thermal conductivity of particulate basalt as a function of density in simulated lunar and Martian environments. *Journal of Geophysical Research*, **75**(20), 4063–4069. doi: 10.1029/JB075i020p04063.
- GAIDOS, E. a WILLIAMS, D. M. (2004). Seasonality on terrestrial extrasolar planets: inferring obliquity and surface conditions from infrared light curves. *New Astronomy*, **10**(1), 67–77. doi: 10.1016/j.newast.2004.04.009.
- GELMAN, S. E., ELKINS-TALTON, L. T. a SEAGER, S. (2011). Effects of stellar flux on tidally locked terrestrial planets: Degree-1 mantle convection and local magma ponds. *The Astrophysical Journal*, **735**(72). doi: 10.1088/0004-637X/735/2/72.
- GERSTENKORN, H. (1955). Über Gezeitenreibung beim Zweikörperproblem. *Zeitschrift für Astrophysik*, **36**, 245–275.
- GOLDREICH, P. (1963). On the eccentricity of satellite orbits in the solar system. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **126**, 257–268.
- GOLDREICH, P. (1966). Final spin states of planets and satellites. *Astronomical Journal*, **71**(1).
- GOLDREICH, P. a SOTER, S. (1966). Q in the Solar System. *Icarus*, **5**, 375–389.
- GORDA, S. Y. a SVECHNIKOV, M. A. (1999). Empirical L-M, R-M, and M-T<sub>eff</sub> relations for main-sequence stars: Components of close binary systems and low-mass stars. *Astronomy Reports*, **43**(8), 521–525.
- HANYK, L., MATYSKA, C. a YUEN, D. A. (2005). Short time-scale heating of the Earth's mantle by ice-sheet dynamics. *Earth Planets Space*, **57**(9), 895–902.
- HAYEK, W., SING, D., PONT, F. a ASPLUND, M. (2012). Limb darkening laws for two exoplanet host stars derived from 3D stellar model atmospheres. Comparison with 1D models and HST light curve observations. *Astronomy & Astrophysics*, **539** (A102). doi: 10.1051/0004-6361/201117868.
- HELLER, R. a BARNES, R. (2013). Exomoon Habitability Constrained by Illumination and Tidal Heating. *Astrobiology*, **13**(1), 18–46. doi: 10.1089/ast.2012.0859.
- HENNING, W. G., O'CONNELL, R. J. a SASSELOV, D. D. (2009). Tidally Heated Terrestrial Exoplanets: Viscoelastic Response Models. *The Astrophysical Journal*, **707**(1000). doi: 10.1088/0004-637X/707/2/1000.
- HUT, P. (1981). Tidal evolution in close binary systems. *Astronomy and Astrophysics*, **99**(1), 126–140.
- ŠIDLICHOVSKÝ, M. Nebeská mechanika. Skripta pro MFF UK, dostupná z <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~davok/scripta-NB1.pdf>.
- KALTENEGGER, L., MIGUEL, Y. a RUGHEIMER, S. (2012). Rocky exoplanet characterization and atmospheres. *International Journal of Astrobiology*, **11**(4), 297–307. doi: 10.1017/S1473550412000134.

- KASPI, Y. a SHOWMAN, A. P. (2015). Atmospheric dynamics of terrestrial exoplanets over a wide range of orbital and atmospheric parameters. *The Astrophysical Journal*, **804**(1). doi: 10.1088/0004-637X/804/1/60.
- KAULA, W. M. (1961). Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **5** (2), 104–133. doi: 10.1111/j.1365-246X.1961.tb00417.x.
- KAULA, W. M. (1964). Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. *Reviews of Geophysics*, **2**(4), 661–685. doi: 10.1029/RG002i004p00661.
- KÁŇOVÁ, M. (2013). Insolace a povrchová teplota na planetách mimo sluneční soustavu. Bakalářská práce, MFF UK, Praha.
- KOVALEVSKY, J. (1967). *Introduction to celestial mechanics*. Astrophysics and space science library. Springer, New York. ISBN 978-9401175500.
- LANDAU, L. D. a LIFŠIC, E. M. (1976). *Mechanics*. Třetí vydání. Butterworth-Heinemann, Oxford. ISBN 0-7506-2896-0.
- LANDAU, R. (1982). A comment on the insolation at Mercury. *Icarus*, **52**, 202–204. doi: 10.1016/0019-1035(82)90180-4.
- LECONTE, J., FORGET, F., CHARNAY, B. A KOL. (2013). 3D climate modeling of close-in land planets: Circulation patterns, climate moist bistability, and habitability. *Astronomy & Astrophysics*, **554**(A69). doi: 10.1051/0004-6361/201321042.
- LEDLOW, M. J., ZEILIK, M., BURNS, J. O. A KOL. (1992). Subsurface emissions from Mercury - VLA radio observations at 2 and 6 centimeters. *Astrophysical Journal*, **384**, 640–655. doi: 10.1086/170906.
- LÉGER, A., GRASSET, O., FEGLEY, B. A KOL. (2011). The extreme physical properties of the CoRoT-7b super-Earth. *Icarus*, **213**(1), 1–11. doi: 10.1016/j.icarus.2011.02.004.
- MACDONALD, G. J. F. (1964). Tidal Friction. *Reviews of Geophysics*, **2**, 467–541.
- MAKAROV, V. V. a EFROIMSKY, M. (2013). No Pseudosynchronous Rotation for Terrestrial Planets and Moons. *The Astrophysical Journal*, **764**(1). doi: 10.1088/0004-637X/764/1/27.
- MARDLING, R. A. a LIN, D. N. C. (2002). Calculating the tidal, spin, and dynamical evolution of extrasolar planetary systems. *The Astrophysical Journal*, **573**(2), 829–844. doi: 10.1086/340752.
- MATAS, J. (1995). Mantle viscosity and density structure. Diplomová práce, MFF UK, Praha.
- MAURIN, A. S., SELSIS, F., HERSANT, F. a BELU, A. (2012). Thermal phase curves of nontransiting terrestrial exoplanets. II. Characterizing airless planets. *Astronomy & Astrophysics*, **538**(A95). doi: 10.1051/0004-6361/201117054.

- MAYOR, M. a QUELOZ, D. (1995). A Jupiter-mass companion to a solar-type star. *Nature*, **378**(6555), 355–359. doi: 10.1038/378355a0.
- MIGNARD, F. (1979). The Evolution of the Lunar Orbit Revisited I. *The Moon and the Planets*, **20**, 301–315.
- MITCHELL, D. L. a DE PATER, I. (1994). Microwave imaging of Mercury's thermal emission at wavelengths from 0.3 to 20.5 cm. *Icarus*, **110**(1), 2–32. doi: 10.1006/icar.1994.1105.
- MURRAY, C. D. a DERMOTT, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 0-521-57597-4.
- NOVOTNÝ, O. (1998). *Motions, gravity field and figure of the Earth: lecture notes for post-graduate studies*. Bahia: Instituto de Física, Salvador.
- NÉRON DE SURGY, O. a LASKAR, J. (1997). On the long term evolution of the spin of the Earth. *Astronomy and Astrophysics*, **318**, 975–989.
- PIQUEUX, S. a CHRISTENSEN, P. R. (2011). Temperature-dependent thermal inertia of homogeneous Martian regolith. *Journal of Geophysical Research*, **116**(E7). doi: 10.1029/2011JE003805.
- RUMPF, M. E., FAGENTS, S. A., CRAWFORD, I. A. a JOY, K. H. (2013). Numerical modeling of lava-regolith heat transfer on the Moon and implications for the preservation of implanted volatiles. *Journal of Geophysical Research*, **118**(3), 382–397. doi: 10.1029/2012JE004131.
- SCALO, J., KALTENEGGER, L., SEGURA, A. a KOL. (2007). M Stars as Targets for Terrestrial Exoplanet Searches And Biosignature Detection. *Astrobiology*, **7**(1), 85–166. doi: 10.1089/ast.2006.0125.
- SEAGER, S., KUCHNER, M., HIER-MAJUMDER, C. A. a MILITZER, B. (2007). Mass-radius relationships for solid exoplanets. *The Astrophysical Journal*, **669**(2), 1279–1297. doi: 10.1086/521346.
- SELSIS, F., MAURIN, A.-S., HERSANT, F. a KOL. (2013). The effect of rotation and tidal heating on the thermal lightcurves of super Mercuries. *Astronomy & Astrophysics*, **555**(A51). doi: 10.1051/0004-6361/201321661.
- TOBIE, G., ČADEK, O. a SOTIN, C. (2008). Solid tidal friction above a liquid water reservoir as the origin of the South Pole Hotspot on Enceladus. *Icarus*, **196**(2), 642–652. doi: 10.1016/j.icarus.2008.03.008.
- TORGE, W. (2001). *Geodesy*. Třetí přepracované a rozšířené vydání. Walter de Gruyter, Berlin. ISBN 3-11-017072-8.
- URQUHART, M. L. a JAKOSKY, B. M. (1997). Lunar thermal emission and remote determination of surface properties. *Journal of Geophysical Research*, **102**(E5), 10959–10969. doi: 10.1029/97JE00224.

- VAN SUMMEREN, J., CONRAD, C. P. a GAIDOS, E. (2011). Mantle convection, plate tectonics, and volcanism on hot exo-Earths. *The Astrophysical Journal Letters*, **736** (L15). doi: 10.1088/2041-8205/736/L15.
- VARŠALOVIČ, D. A., CHERSONSKIJ, V. K. a MOSKALEV, A. N. (1988). *Quantum theory of angular momentum: irreducible tensors, spherical harmonics, vector coupling coefficients, 3nj symbols*. World Scientific, Singapore. ISBN 9971-50-996-2.
- VASAVADA, A. R., PAIGE, D. A. a WOOD, S. E. (1999). Near-Surface Temperatures on Mercury and the Moon and the Stability of Polar Ice Deposits. *Icarus*, **141**(2), 179–193. doi: 10.1006/icar.1999.6175.
- WECHSLER, A. E., GLASER, P. E. a FOUNTAIN, J. A. (1972). Thermal properties of granulated materials. *Progress in Astronautics and Aeronautics*, **28**, 215 – 241.
- WRIGHT, J. T. a GAUDI, B. S. (2012). Exoplanet Detection Methods. In OSWALT, T. a KALAS, P., ed., *Planets, Stars and Stellar Systems*. Přijato k publikaci, (arXiv:1210.2471v2).

# Přehled použitého značení

## Univerzální konstanty

$\mathcal{G}$	Newtonova gravitační konstanta
$\sigma_{\text{SB}}$	Stefanova-Boltzmannova konstanta
$h$	Planckova konstanta
$c$	rychlost světla
$k_{\text{B}}$	Boltzmannova konstanta

## Mateřská hvězda

$M_*$	hmotnost hvězdy
$R_*$	poloměr hvězdy
$L_*$	zářivý výkon hvězdy

## Modelová planeta

$m$	hmotnost planety
$r_{\text{p}}, r_{\text{surf}}$	poloměr planety
$r_{\text{OC}}, r_{\text{CMB}}$	poloměr vnějšího jádra
$r_{\text{IC}}$	poloměr vnitřního jádra
$\rho_{\text{M}}$	hustota pláště
$\rho_{\text{OC}}$	hustota vnějšího jádra
$\rho_{\text{IC}}$	hustota vnitřního jádra
$g_{\text{surf}}$	střední tíhové zrychlení na povrchu
$g_{\text{CMB}}$	střední tíhové zrychlení na CMB
$\eta$	efektivní viskozita
$\mu$	efektivní modul torse
$\tau_{\text{M}}$	Maxwellův čas
$\mathbb{J}$	tensor setrvačnosti

$\Omega_{\text{rot}}$  rotační frekvence

### Keplerovy elementy

$a$  hlavní poloosa

$e$  výstřednost

$i$  inklinace

$\Omega$  délka výstupného uzlu

$\omega$  argument pericentra

$t_0$  okamžik průchodu pericentrem

### Charakterizace oběhu

$r$  okamžitá vzdálenost hvězdy a planety

$n$  střední pohyb (oběžná frekvence)

$T_{\text{orb}}$  oběžná perioda

$l$  střední anomálie

$E$  excentrická anomálie

$\nu$  pravá anomálie

$p$  parametr elipsy

$\mathcal{M}$  celkový moment hybnosti soustavy hvězda-planeta

### Poruchový počet a slapové teorie

$\varepsilon \mathbf{f}$  poruchová síla

$R, S, W$  složky poruchové síly v kartézských souřadnicích

$\mathcal{V}$  poruchový potenciál

$\mathcal{R}$  poruchová funkce

$\psi_{\text{p}}$  zenitová vzdálenost hvězdy

$\theta$  hvězdný čas

$\mathcal{U}$  slapotvorný potenciál



$\delta\mathcal{U}$	dodatkový potenciál
$\delta_G$	geometrický rozestup
$\Delta t$	časový rozestup
$\varepsilon$	fázový rozestup
$Q$	faktor kvality
$\mathcal{F}_{jmp}, \mathcal{G}_{jpp}$	Kaulovy funkce inklinace a výstřednosti

### Deformace planety

$\mathbf{f}_t$	slapová síla
$\mathbf{f}_{cf}$	odstředivá síla
$\mathbf{f}_{self}$	self-gravitace
$\mathbf{f}$	celková budící síla
$\mathcal{U}_{cf}$	odstředivý potenciál
$\mathbf{u}$	vektor posunutí
$u_r$	radiální složka vektoru posunutí
$\pi$	přírůstek tlaku
$\mathbb{D}$	deviátor přírůstkového tenzoru napětí
$\sigma_{surf}, \sigma_{CMB}$	plošná hustota na povrchu či CMB
$h_t$	průměrný výkon slapového zahřívání na jednotku objemu
$P_t$	celkový průměrný výkon slapového zahřívání

### Povrchová teplota

$T$	teplota
$T_{eq}$	lokální rovnovážná teplota
$S$	insolace
$S_*$	extrasolární konstanta
$A$	albedo
$\epsilon$	emisivita

---

$k$	tepelná vodivost
$c_p$	měrná tepelná kapacita za konstantního tlaku
$\rho$	hustota povrchového materiálu
$I$	tepelná setrvačnost
$H_{\text{int}}$	objemové zahřívání
$L_{\text{char}}$	charakteristická hloubka
$h$	výška hvězdy nad obzorem
$\beta$	sklon rotační osy
$\varpi$	délka periastra
$\tau$	časová prodleva mezi průchodem planety periastrum a jarní rovnodenností

### **Tepelné vyzařování povrchu**

$\Phi_\lambda$	monochromatický tok
$\mathcal{I}_\lambda$	monochromatická intenzita
$\mathcal{B}_\lambda(T)$	Planckova funkce
$\delta$	poměr toku od planety ku toku od hvězdy