Posudek oponenta na diplomovou práci

ERIKA MARINGOVÁ: **Elliptic equations in nonreflexive function spaces**

Autorka ve své práci studuje jisté zobecnění funkcionálu minimální plochy ve tvaru $\int_\Omega F(\nabla u)\,dx$, kde Euler-Lagrangeova rovnice má tvar

$$-\operatorname{div}\frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^a)^{1/a}}=0.$$

Rozsah a náročnost práce jsou vyhovující a velké části práce jsou solidně zvládnuté. Některé výsledky jsou dokonce původní. Zpracování má četné nedostatky. Nalezené odborné chyby zmiňuji níže. Některé důležité otázky týkající se současného stavu problematiky nejsou v práci dostatečně zmíněny a tudíž by jim měla být věnována pozornost při obhajobě.

A. Kam až sahají známé výsledky z literatury o obecných funkcionálech s lineárním růstem, zvláště integrandy tvaru $\Phi(|\nabla u|)$? Nedalo by se něco z toho použít?

B. Co je známo o roli konvexity oblasti? Proč se zdůrazňuje nekonvexnost oblasti ve formulaci problému 1?

C. Co se dá říci a co je otevřené co se týče implikace (3.5) $\Longrightarrow$ (3.4)?

Text se nečte příliš dobře, mohl by být lépe uspořádaný a v úvahách jsou myšlenkové skoky, které do diplomové práce nepatří. Odkazy na již dosažené výsledky jsou občas nespecifikovány. Některé části by šly podstatně zjednodušit, hlavně v druhé kapitole. Jak je vidět z níže uvedeného výčtu, vyskytují se i podstatné chyby. Zdá se však, že výsledky a strategie důkazů jsou správné. Chyby jsou rozložené nerovnoměrně, některé důkazy, a to i značně dlouhé a technické, mohou být zcela dobře nebo jen s drobnými chybami. Angličtina je srozumitelná, jazykové chyby nemá smysl řešit, nejsou pro hodnocení práce rozhodující. Konkrétní připomínky jsou následující:

1. V úvodu je nesrozumitelně popsána Hausdorffova míra.

2. Theorem 1.1: špatné používání anglických členů v (i), (ii), (iii) bije do očí.

3. Definice 1.7 (Domain if the class $C^{k,l}$) obsahuje řadu chyb a pojetí (ledabylé použití záměn proměnných) je nevhodné.

4. Proč není Sobolevův exponent p^* jako téměř všude jinde?

5. Theorem 1.5: není zmíněna jednoznačnost operátoru, což je jeho podstatná vlastnost. Úmluva psát u místo $\operatorname{tr} u$ není vhodná, a když už, vysvětlení by mělo být, že se tím rozumí stopa (nikoliv restrikce).

6. Úmluva, že ∇u je BV-derivace a Du absolutně spojitá derivace většinou v literatuře bývá obráceně. I tak, používání symbolů Du a ∇u je v práci nedůsledné.

7. V 1.4 u Hilbertova prostoru by mělo být zdůrazněno, že se zabýváme pouze reálnými prostory funkcí. I tak je srovnání duality a skalárního součinu nevhodně popsané.

8. Co se týče používání symbolů $x\cdot y$ a (u,v) pro skalární součin, nejvhodnější úmluva je používat prvý v konečné dimenzi a druhý v L^2, tak jak je to v dalším praktikováno.

9. Remark 4: má být 4^{-i}.

10. Lemma 1 by se dalo dokázat mnohem jednodušeji. Ryzí konvexita F plyne ze (snadno ověřitelné) pozitivní definitnosti matice $B_{i,j}(\eta)$. Odtud dostaneme ryzí konvexitu po všech přímkách neprocházejících počátkem a ryzí konvexitu na všech paprscích z počátku. Pak už stačí jen zvážit, že $F\geq 0$ a rovnost nastává

právě v počátku. Pokud F je ryze konvexní, známá obecná věta dává, že A je striktně monotonní a platí (iv). Zbývá odhad (iii), i ten by vyšel jednodušeji, kdyby se mocnina odhadovala přímo a nepřeváděla na exponenciálu a logaritmus.

11. Důkaz věty 3.2: Vyskytují se tam výroky jako "$-\nabla d^0 = \mathbf{n}$ on $\partial\Omega_0$", aniž by se vysvětlilo, v jakém smyslu je to míněno.

12. Důkaz věty 3.2: Poslední odhad v (3.9) obecně neplatí.

13. Důkaz věty 3.2, (3.10): Výsledný odhad platí, ale odvození ne.

14. Důkaz věty 3.3, Step 1: Funkce φ má být vektorová a má se počítat s $D_i\varphi_i$ a nikoli s $D_i\varphi$.

15. Důkaz věty 3.3, Step 2, 3. řádek: jaképak taking $\varphi := -\mathbf{n}$, když φ má být lipschitzovská na celém Ω_0 a $\mathbf{n}$ je jen v $L^\infty(\partial\Omega)$? Vypadá to, jako by autorka dvakrát dokazovala tu samou nerovnost, z toho jednou zcela špatně. Ta druhá nerovnost je ovšem opravdu triviální, i když zdůvodnění musí vypadat jinak.

16. Důkaz věty 3.3, Step 2: Konstrukce φ_i^n, jejich konvergence a limitní přechod jsou popsány ledabyle. Dokonce je pro jejich konvergenci použit symbol $\nearrow$ jako by šlo o skalární funkce.

17. Důkaz věty 3.3, Step 2: Tvrdí se, že $\varphi_3^{\delta,\alpha,\gamma} \to \varphi_3^{\delta,\alpha}$ ve $W^{1,1}$, ačkoli limitní funkce je pouze L^∞.

18. Důkaz věty 3.3, Step 2: Aproximace normály pomocí derivace funkce vzdálenosti není nejlepší, protože funguje jen z jedné strany. Při zhlazení pak dá na hranici poloviční hodnoty. Kromě toho hraniční chování derivace vzdálenosti není triviální a v práci nenajdeme ani vysvětlení, ani odkaz. Přitom na lipschitzovské hranici se dá normála relativně snadno aproximovat pomocí funkce, která je při vhodné soustavě souřadnic konstantní na svislých úsečkách (globálně se použije rozklad jednotky).

19. Důkaz věty 3.3, Step 2: Odvození odhadu (4.10) není jasné, chtělo by to odhad $|\nabla u^\varepsilon| \le c(1 + F(\nabla u^\varepsilon))$, který není zmíněn.

20. (4.5), (4.6), když konstanta c závisí na K a K závisí na ε, na čem tedy c nezávisí? Volba u_D^ε a ε by měla být lépe vysvětlena.

21. Důkaz lemmatu 4.5, v definici $T_M(u)$ asi nemělo být $\operatorname{sgn} u$. Každopádně pod (4.28) se počítá jednou tak, podruhé onak.

22. ve (4.33), kam se poděl člen $\int |T_M(u)|^{p-1}|u|\tau^2$?

23. Důkaz lemmatu 4.6.: testovací funkce je legitimní, ale mělo by to být ověřeno.

24. Důkaz lemmatu 4.6.: namísto odkazu na "text výše" by měl být konkrétní odkaz a zmíněné odhady by měly být v předchozím textu zdůrazněny jako tvrzení.

25. Text na začátku strany 45 by měl být přesunut do 4.5. Namísto toho by se hodilo shrnutí, co všechno bylo dosaženo pro u^ε.

26. Text na začátku strany 45: najednou se mluví o stejnoměrném odhadu $\int_\Omega |\nabla u^\varepsilon|$, hodil by se odkaz.

27. str. 47: z bodové konvergence $A((\nabla u^\varepsilon) - A(\nabla u)) \cdot (\nabla u^\varepsilon - \nabla u)$ skutečně plyne bodová konvergence ∇u^ε, ale odvození je moc rychlé.

28. str 48: srovnání s větou 3.3 by bylo jasnější, kdyby se volila φ s opačným znaménkem.

29. Důkaz věty 4.1 by měl obsahovat shrnutí.

30. Důkaz lemmatu 5.1: místo $(u')^a$ má být $|u'|^a$. Z formule, v níž se poprvé objeví c, je zřejmé, že u' nemění znaménko a pro $K > 0$ je $c < 0$ a $u' < 0$. Odtud teprve se dostane formule pro u a mělo by se ověřit a zdůraznit, že toto u je

skutečně řešení, protože ve znění lemmatu se mluví o existenci. Formulace "K may be infinite" je nešťastná, asi se chce říci, že může být libovolně velké.

Z předložené práce je patrné, že autorka je schopna použít známé metody na získání nových výsledků, ale potřebuje pevné vedení. Odevzdaná verze má značné rezervy, nicméně může být uznaná jako diplomová práce.

V Praze 25. srpna 2015

Prof. RNDr. Jan Malý, DrSc.