Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Matúš Jambor

Oceňování dluhových nástrojů s vnořenými opcemi

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2015

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať doc. RNDr. Jiřímu Witzanymu, Ph.D. za odborné vedenie, cenné rady a čas, ktorý mi venoval počas písania tejto práce. Obrovská vďaka patrí mojím rodičom, ktorí ma neustále podporujú počas celého života a v neposlednom rade ďakujem svojej priateľke Barborke za psychickú podporu a všetko, čo pre mňa robí.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatúry a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 2.12.2015 Bc. Matúš Jambor

Název práce: Oceňování dluhových nástrojů s vnořenými opcemi

Autor: Bc. Matúš Jambor

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D., Vysoká škola ekonomická v Praze

Abstrakt: V tejto práci sa zameriame na dlhové nástroje s vnorenými opciami, ktoré ponúkajú možnosť pre veriteľa alebo dlžníka realizovať opciu v predom určených časoch počas jej životnosti. Vďaka tejto bermudskej vlastnosti opcií nie je možné oceniť tieto dlhové inštrumenty využitím štandardných simulačných techník. Avšak môžeme využiť techniku trinomických stromov pre toto ocenenie. Zachovaním konzistencie v ocenení fundamentálnych finančných inštrumentov, je vhodné predpokladať, že úroková sadzba vychádza zo stochastického procesu v koncepcii bez-arbitrážneho ocenenia. Jednou z možností modelovania dynamiky úrokových sadzieb sú jedno-faktorové modely. Vyvinuli sme oceňovací algoritmus založený na trinomickom strome pre Hull-Whiteov model a Black-Karasinski model, ktoré majú požadované vlastnosti a parametre modelov sú kalibrované na tržné data.

Klíčová slova: trinomický strom, ocenenie úrokových derivátov, Hull-Whiteov model, Black-Karasinski model, okamžitá úroková sadzba

Title: Pricing of the debt instruments with embedded options

Author: Bc. Matúš Jambor

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Jiří Witzany, Ph.D., University of Economics in Prague

Abstract: In this thesis we focus on debt instruments with embedded options, which offer the possibility for the creditor or debtor to exercise the option in pre-determined times during its lifetime. With this the Bermudian characteristics it is not possible to price these debt instruments using standard simulation techniques. However, the technique of trinomial trees can be exploited. To preserve consistency with the pricing of fundamental financial instruments, it is suitable to assume that the interest rate follows a stochastic process in the arbitrage free framework. One of the possibilities for modeling the dynamics of interest rates are one-factor models. We have developed a pricing algorithm based on trinomial tree for Hull-White model and Black-Karasinski model which have the desired properties and model parameters are calibrated to the market data.

Keywords: trinomial tree, interest rate derivatives pricing, Hull-White model, Black-Karasinski model, instantaneous interest rate

Obsah

Úvod

V tejto práci sa zaoberáme teóriou oceňovania finančných derivátov, ktorú taktiež prakticky aplikujeme. Finančné deriváty sú inštrumenty, ktorých výplata je odvodená od hodnoty nejakého podkladové aktíva. Pod termínom podkladové aktívum si môžeme predstaviť akcie, indexy, meny, komodity, dlhopisy, hypotéky, teplotné indexy a mnoho ďalších. Finančné deriváty majú široké spektrum využitia v oblasti riadenia finančných rizík, zaisťovacích operácií a rôznych špekulácií. Finančné deriváty povoľujú zúčastneným stranám obchodovať so špecifickými finančnými rizikami, napríklad úrokové riziko, menové, kapitálové a komoditné cenové riziko, kreditné riziko a iné. Tieto riziká sú ponúkané entitám, ktoré chcú alebo sú lepšie prispôsobené prebrať ich na seba a riadiť ich. Jedne z prvých derivátov boli viazané na tulipány a ryžu v 17. storočí. Až do roku 1970 bol trh s derivátmi veľmi malý, keď ekonomické podmienky spolu s pokročilejšími postupmi v oceňovaní derivátov viedli k ohromnému nárastu. V poslednom desaťročí volatilita úrokových sadzieb a výmenných menových kurzov prudko vzrástla, čo nevyhnutne viedlo k vynájdeniu nových efektívnejších spôsobov ako zaistiť príslušné riziká. To je dôvod prečo sú neustále konštruované finančnými inštitúciami oveľa viac sofistikovanejšie deriváty, aby uspokojili potreby seba samých a svojich klientov.

Na druhú stranu, ocenenie týchto derivátov predstavuje obrovský problém, pretože len malá podmnožina finančných derivátov môže byť ocenená presnými analytickými formulami. Ak sa chceme vyhnúť chybám pri ocenení, potrebujeme použiť niektoré numerické metódy ako napríklad stromové štruktúry. Môžeme ich nazvať taktiež mriežkové modely, pretože ich grafická reprezentácia pripomína mriežku. V praxi sú široko používané, pretože sú veľmi flexibilné a intuitívne.

Uvedenú matematickú techniku môžeme prakticky aplikovať na ocenenie sporiacich štátnych dlhopisov, ktoré predstavujú štruktúrovaný produkt - dlhopis s vnorenou opciou. Sporiace štátne dlhopisy emitované Ministerstvom financií ČR teda oceníme pomocou trinomických stromov. Keďže ide o úrokové deriváty, je nutné modelovať vývoj úrokových sadzieb. Hull-Whiteov model a Black-Karasinski model úrokových sadzieb použijeme na vysporiadanie sa so stochastickou povahou úrokových sadzieb na trhu a metóda konštrukcie trinomických stromov bude adaptovaná.

V prvej kapitole zhrnieme základné pojmy, s ktorými sa často budeme stretávať pri študovaní tejto práce a v skratke popíšeme opcie a ich ocenenie.

V druhej kapitole predstavíme modely spotových úrokových sadzieb, Hull-White a Black-Karasinski model, spolu s metódou konštrukcie trinomických stromov.

Tretia kapitola sa zaoberá kalibráciou jednotlivých modelov a v poslednej, štvrtej kapitole, si bližšie predstavíme sporiace štátne dlhopisy a ich ocenenie využitím trinomockých stromov.

Pre všetky výpočty bol využitý software Wolfram Mathematica 10 STUDENT EDITION.

Kapitola 1

Základné pojmy

V tejto kapitole uvedieme základné pojmy, s ktorými sa čitateľ tejto práce stretne mnohokrát v ďalších častiach textu. Medzi najviac skloňované finančné termíny patria bezkupónový dlhopis, diskontný faktor, úroková sadzba a výnosová krivka.

V celej práci budeme uvažovať stochastickú bázu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ s filtráciou $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in [0,T]\}$, ktorá spĺňa zvyčajné podmienky, a to úplnosť a spojitosť sprava. Keďže okamžitá úroková sadzba v čase t je informáciou dostupnou v čase t, tak predpokladajme adaptovaný proces [1] $\{r_t\}_{t\in[0,T]}$ a pre skoro každé ω je funkcia $t \to r_t(\omega)$ sprava spojitá pre $0 \leq t \leq T$. Pre skoro všetky ω je funkcia $t \to r_t(\omega)$ striktne pozitívna a $\int_0^T r_u(\omega)du < \infty$. Pre pevné $\omega \in \Omega$ je $r_t(\omega)$ trajektória procesu ako funkcia premennej t.

Ďalej definujme stochastický diskontný faktor $D(t,T)$ medzi časovými okamihmi t a T. Je to hodnota v čase t rovná jednotkovej čiastke vyplatenej v čase T a je daný vzťahom

$$D(t,T) = \exp\Big(-\int_t^T r_u du\Big), \tag{1.1}$$

kde integrál $\int_t^T r_u du$ je definovaný ako Lebesgueov integrál.

Dôležitým fundamentálnym dlhovým nástrojom je bezkupónový dlhopis (dlhopis s nulovým kupónom) s jednotkovou nominálnou hodnotou. Je to kontrakt, ktorý garantuje jeho držiteľovi v čase splatnosti T vyplatiť jednotkovú čiastku. Označme $P(t,T)$ cenu tohto dlhopisu v čase t pričom platí, že $P(T,T) = 1$ pre všetky T. Neskôr v sekcii 1.1.1 ukážeme, že diskontný faktor je úzko prepojený s cenou bezkupónového dlhopisu, ktorá môže byť vyjadrená ako stredná hodnota náhodnej veličiny $D(t,T)$ pod určitou pravdepodobnostnou mierou.

Výnos do splatnosti štátneho dlhopisu s nulovým kupónom je považovaný za (bezrizikovú) spotovú úrokovú mieru pri investícii do bezrizikového aktíva na dobu

[1] Stochastický proces $\{r_t\}$ je adaptovaný vzhľadom k filtrácii $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ ak r_t je $\mathcal{F}_t$-merateľná pre každé $t \in [0,T]$.

odpovedajúcu dobe do splatnosti tohto dlhopisu. Označme teda $L(t,T)$ spotovú úrokovú sadzbu pre jednoduché úročenie v čase t so splatnosťou v čase T, pre ktorú platí nasledujúci vzťah

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\Big(\frac{1}{P(t,T)} - 1\Big). \tag{1.2}$$

Spotová úroková miera $Y(t,T)$ pri zloženom ročnom úročení v čase t so splatnosťou v čase T je úroková sadzba, pre ktorú platí

$$Y(t,T) = \frac{1}{[P(t,T)]^{\frac{1}{T-t}}} - 1. \tag{1.3}$$

Podobne spotová úroková miera $R(t,T)$ pri spojitom úročení v čase t so splatnosťou v čase T je úroková sadzba, pre ktorú platí

$$R(t,T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}. \tag{1.4}$$

Vo všetkých troch vzťahoch (1.2), (1.3) a (1.4) je $P(t,T)$ cena bezkupónového dlhopisu v čase t so splatnosťou v čase T. Pre okamžitú úrokovú sadzbu r_t platí, že

$$r_t = \lim_{\Delta t \to 0^+} R(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} Y(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0^+} L(t, t+\Delta t). \tag{1.5}$$

Ďalším termínom je výnosová krivka, niekedy tiež označovaná ako časová štruktúra úrokových sadzieb, ktorá vyjadruje závislosť výnosov cenných papierov (dlhopisov) na dobe do ich splatnosti. Najčastejšie sa výnosové krivky konštruujú zo štátnych dlhopisov, pretože štát reprezentuje vhodnú entitu, ktorá emituje dostatočne objemné množstvo dlhopisov s rozdielnymi splatnosťami. Spotová výnosová krivka bezkupónového dlhopisu v čase t je grafom funkcie

$$T \mapsto \begin{cases} L(t,T) & t < T \leq t+1 \text{ (rokov)}, \\ Y(t,T) & T > t+1 \text{ (rokov)}. \end{cases} \tag{1.6}$$

1.1 Opcie

Pocit neistoty z budúceho vývoja je neodlučiteľný prvok spojený s každou činnosťou, ktorá je podmienená určitými nedeterministickými faktormi vyvíjajúcimi sa v čase. Prirodzenou snahou človeka je tento jav, povedzme riziko budúceho vývoja, určitými prostriedkami eliminovať. S týmto úsilím je spojený aj vznik opcií. Opcia je finančný inštrument, ktorého hodnota priamo závisí na hodnote podkladového aktíva, na ktoré je naviazaná. Vďaka tejto závislosti sa opcie taktiež označujú ako deriváty. Najčastejšie používané opcie sú tzv. „plain-vanilla“ opcie. Plain-vanilla opcia je kontrakt, ktorý dáva držiteľovi právo, ale nie povinnosť, kúpiť alebo predať od predávajúceho podkladové aktívum za konkrétnu cenu K (strike cena) v predom definovaných časových okamihoch. Ak nám právo povoľuje kúpiť podkladové aktívum, opcia sa nazýva call opcia. Ak nám právo povoľuje predať, opcia sa nazýva put opcia.

Podkladovým aktívom je typicky akcia. Ak držiteľ využije svoje právo kúpiť (alebo predať) podkladové aktívum od vydavateľa, realizuje alebo uplatní opciu. Opcie, ktoré môžeme realizovať v ľubovoľnom čase až do ich vypršania nazývame americké opcie. Existujú taktiež kontrakty, ktoré nemôžeme realizovať v ľubovoľnom čase $t \in [0, T]$ ale len v čase splatnosti T. Tieto opcie sa nazývajú európske opcie. Opcie, ktoré môžeme realizovať v diskrétnej množine časových okamžikov $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_m\}$, kde $0 \leq T_1 < \ldots < T_m \leq T$ sa nazývajú bermudské opcie. V súčastnosti sa najviac obchodujú opcie amerického typu ($\mathcal{T} = [0, T]$).

Hoci definícia plain-vanilla opcie sedí dobre pre call a put opčné kontrakty, ktoré sa najčastejšie obchodujú na finančných trhoch, môžeme zaviesť obecnejšiu definíciu.

Definícia (Opcia). *Nech $S_t \in \mathbb{R}$ označuje cenu podkladového aktíva v čase $t \in [0, T]$, nech $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia ceny podkladového aktíva a nech $\mathcal{T} \subset [0, T]$ je množina časových okamžikov. Opcia s výplatou H a časovými okamihmi realizácie $\mathcal{T}$ je kontrakt, ktorý dáva držiteľovi právo realizovať opciu v čase $t \in \mathcal{T}$ a obdržať výplatnú čiastku $H(S_t)$ od vydavateľa.*

Uvažujme európsku put opciu na jednu akciu s cenou S_t v čase t. Výplatná funkcia tejto opcie je $H(S_T) := (K - S_T)^+$.

Definícia všeobecnej opcie definuje vývojovo nezávislú opciu, tzn. jej výplata závisí len na cene podkladového aktíva v čase uplatnenia a nie na vývoji ceny podkladového aktíva do času uplatnenia. V tejto práci sa výhradne obmedzíme na vývojovo nezávislé opcie.

Termíny americká a bermudská sa nepoužívajú konzistentne naprieč literatúrou. Dôvodom je, že americkú opciu môžeme chápať ako limitný prípad bermudskej opcie s m rovnako vzdialenými časovými okamihmi uplatnenia opcie pre $m \to \infty$. V literatúre sa môžeme stretnúť s výrazmi „opcia amerického štýlu“ alebo „opcia s predčasným uplatnením“ namiesto bermudská.

1.1.1 Cena opcie

V roku 1973, dvaja matematici, Black a Scholes, odvodili slávnu rovnicu pre ocenenie európskych opcií v článku [14]. Ich preslávený model oceňovania opcií bol počiatkom novej éry vo finančnom sektore. Bohužiaľ, americké opcie a ostatné kontrakty s predčasným splatením predstavovali vážny problém, pretože uzavretá forma oceňovacej rovnice len zriedka existovala pre tieto typy derivátov. Ako sme zmienili vyššie, v týchto prípadoch sú používané rôzne numerické techniky.

Mriežkové modely reprezentujú mocný nástroj ako oceniť americké opcie a ostatné podmienené pohľadávky, ktoré sa nedajú exaktne oceniť Black-Sholesovým modelom. Avšak použitie diskrétnych stavov mriežky a diskrétneho času pre podkladové aktívum, ktorého cena je generovaná logaritmickým difúznym procesom vedie k aproximačným chybám. Špeciálne ide o chybu rozdelenia a nelineárnu chybu. Chyba rozdelenia vzniká, keď mriežkový model s konečnou množinou vetviacich pravdepodobností aproximuje spojité log-normálne rozdelenie diskrétnym rozdelením. Mriežkové modely sú konštruované tak, že diskrétne a spojité rozdelenie majú rovnakú strednú hodnotu a rozptyl, ale nesúlad medzi nimi produkuje distribučné chyby v opčnom ocenení.

Uvažujme európsku put opciu na akciu, ktorá je na peniazoch. Keďže výplatná funkcia opcie je po častiach lineárna funkcia, nelineárna chyba vzniká v okolí realizačnej ceny v čase uplatnenia, keď sa snažíme vyčísliť hodnotu opcie v okolí tohto bodu jedným alebo niekoľkými uzlami mriežkového modelu dostaneme slabú aproximáciu priemernej opčnej hodnoty na tomto okolí.

Jedným prístupom ako získať spravodlivú cenu opcie je skonštruovať zaisťovacie portfólio, tzn. portfólio, ktoré replikuje dokonale hodnotu opcie. Následne vychádzame z bez-arbitrážneho princípu [2], náklady pre každé zaisťovacie portfólio musia byť rovnaké a z toho dostaneme spravodlivú cenu opcie. Tento prístup bol použitý Mertonom [24] a je známy ako dynamická replikácia, ktorý bližšie popíšeme v kapitole 2. Možnosť vyjadriť každú podmienenú pohľadávku ako finálnu hodnotu samofinancujúcej stratégie charakterizuje úplný trh. Black-Scholesov tržný model je úplný a dôsledkom toho každá opcia ocenená týmto modelom má jednoznačne určenú spravodlivú cenu. Bohužiaľ, reálne trhy sú neúplné. Slabšou alternatívou k predpokladu úplnosti je predpoklad absencie arbitráže.

Definícia (Arbitráž). *Arbitráž je hodnotový proces $V(t)$ portfólia, ktoré je riadené samofinancujúcou stratégiou s $V(0) = 0$ a pre nejaký čas $t > 0$*

$$P[V(t) \geq 0] = 1 \text{ a } P[V(t) > 0] > 0.$$

[2] Bez-arbitrážny princíp je predpoklad, že na trhu neexistujú arbitrážne príležitosti, tzn. možnosť vytvoriť bezrizikový zisk.

Bez-arbitrážne ocenenie

Uvažujme stochastickú bázu $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Definujme proces bankového účtu Z^0 pre takmer každé $\omega \in \Omega$ podľa

$$Z_t^0(\omega) = e^{\int_0^t r_u(\omega)du},$$

ktorý je spojitý skoro všade, striktne rastúci a každé Z_t^0 je $\mathcal{F}_t$-merateľné. Ďalej predpokladajme, že $Z_T^0 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Druhým aktívom je bezkupónový dlhopis, ktorý vypláca 1 v čase T. Definujme cenu $P(t,T)$ tohto bezkupónového dlhopisu v čase t, $0 \leq t \leq T$, ktorý vychádza zo stochastického procesu, o ktorom predpokladáme, že pre každé t je cena $P(t,T)$ $\mathcal{F}_t$-merateľná a $P(T,T) = 1$.

Ďalej definujme základnú obchodnú stratégiu $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]}$, ktorá je 2-dimenzionálnym stochastickým procesom $\theta = (\theta^0, \theta^1) : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^2$, pre ktorý existuje prirodzené číslo $n \geq 1$ a postupnosť $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t_{n+1} = T$ taká, že θ_{t_k} je ohraničená a $\mathcal{F}_{t_k}$-merateľná pre $0 \leq k \leq n$ a $\theta_t = \theta_{t_k}$ pre všetky t v intervale $[t_k, t_{k+1}], 0 \leq k \leq n$.
Pričom θ_t^1 môžeme chápať ako počet dlhopisov držaných v čase t a θ_t^0 môžeme interpretovať ako objem peňazí v čase t investovaných v čase 0.
Povieme, že základná obchodná stratégia $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]} = \{(\theta_t^0, \theta_t^1)\}_{t\in[0,T]}$ meniaca hodnoty v časoch $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq t_{n+1} = T$ je samofinancujúca ak pre každé $k = 1, \ldots, n$ platí

$$\theta_{t_{k-1}}^0 Z_{t_k}^0 + \theta_{t_{k-1}}^1 P(t_k, T) = \theta_{t_k}^0 Z_{t_k}^0 + \theta_{t_k}^1 P(t_k, T).$$

Označme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárny súčin v $\mathbb{R}^2$ a položme $Z_t := (Z_t^0, P(t,T))$, samofinancujúcu vlastnosť môžeme vyjadriť ako $\langle \theta_{t^-}, Z_t \rangle = \langle \theta_t, Z_t \rangle$, kde $t \in [t_k, t_{k+1}]$ a $t^- \in [t_{k-1}, t_k]$ pre každé $k = 1, \ldots, n$.
Ďalej definujme množinu M obchodovaných aktív, ktorá je podpriestorom $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tvoreným všetkými f takými, že existuje samofinancujúca stratégia $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]}$ taká, že

$$f = \langle \theta_T, Z_T \rangle = \theta_T^0 Z_T^0 + \theta_T^1 P(T,T).$$

Za predpokladu absencie arbitráže pre každé $f \in M$ také, že $f \geq 0$ skoro isto a $\mathbb{P}(f > 0) > 0$, pre každú samofinancujúcu stratégiu θ,

$$f = \langle \theta_T, Z_T \rangle \Rightarrow \langle \theta_0, Z_0 \rangle > 0.$$

Inak povedané, aby sme získali kladnú hodnotu v čase T, musíme investovať kladnú hodnotu v čase 0 za predpokladu absencie arbitráže.
Ďalej za predpokladu absencie arbitráže platí, že hodnota $\Pi(f) = \langle \theta_0, Z_0 \rangle$ nezávisí

na určitej samofinancujúcej stratégii generujúcej obchodované aktívum $f \in M$ a definuje striktne pozitívny lineárny tvar na M.

Dvojicu (M, Π) determinovanú procesmi r a $P(\cdot, T)$ za predpokladu absencie arbitráže nazývame oceňovací princíp.
Definujme: Oceňovací princíp (M, Π) je realizovateľný ak existuje spojitá, striktne monotónna, konvexná relácia preferencií $\preceq$ na $\mathbb{R} \times L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ taká, že pre $(\alpha, g) \in \mathbb{R} \times M$,

$$\alpha + \Pi(g) \leq 0 \Rightarrow (\alpha, g) \preceq (0, 0).$$

Veta 1. *Oceňovací princíp (M, Π) je realizovateľný práve, keď existuje $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \psi > 0$ skoro isto taká, že pre každé $f \in M$ platí*

$$\Pi(f) = E(f \cdot \psi).$$

Definujme proces ceny bezkupónového dlhopisu Z^1 nasledovne

$$Z_t^1 = P(t, T)e^{-\int_0^t r_u du},$$

ktorý zahŕňa menej informácii než dvojica $(Z_t^0, P(t, T))$.

Definícia (Martingal). *$\{X_t, t \in [0, T]\}$ je $\mathcal{F}_t$-adaptovaný náhodný proces pre nejakú filtráciu $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$. Nech pre všetky $t \in [0, T]$, $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Povieme, že $\{X_t, t \in [0, T]\}$ je*

- *$\mathcal{F}_t$-martingal, ak $\forall s, t \in [0, T], s \leq t$ platí*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s, \ \ s.i.$$

- *$\mathcal{F}_t$-supermartingal, ak $\forall s, t \in [0, T], s \leq t$ platí*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s, \ \ s.i.$$

- *$\mathcal{F}_t$-submartingal, ak $\forall s, t \in [0, T], s \leq t$ platí*

$$E[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s, \ \ s.i.$$

Nasledujúcu vetu a jej dôkaz môžeme nájsť v [13].

Veta 2. *Za predpokladu absencie arbitráže, oceňovací princíp (M, Π) je realizovateľný práve, keď existuje rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ taká, že*

(i) $\rho = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} > 0$ skoro isto (tj. $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ sú ekvivalentné)

(ii) $\rho e^{-\int_0^T r_u du} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

(iii) *pri miere* $\mathbb{Q}$ *proces ceny bezkupónového dlhopisu* $Z_t^1 = P(t,T)e^{-\int_0^t r_u du}$ *je martingal.*

Dôkaz. Implikácia: $\Leftarrow$

Nech funkcia $\phi = \rho e^{-\int_0^T r_u du}$ patrí do $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pre každé $f \in M \subset L^2$, $f \cdot \rho e^{-\int_0^T r_u du}$ je v $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a $f e^{-\int_0^T r_u du}$ je v $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$. Preto potom kladná funkcia ϕ by mohla byť ψ z Vety 1.

Za predpokladu, že $\{Z_t^1\}_{t\in[0,T]}$ je martingal pri $\mathbb{Q}$ máme

$$Z_t^1 = E^{\mathbb{Q}}[Z_T^1 \mid \mathcal{F}_t] = E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Potom

$$\begin{aligned} P(t,T) = Z_t^0 \cdot Z_t^1 &= Z_t^0 E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du} \mid \mathcal{F}_t\right], \end{aligned}$$

lebo Z_t^0 je kladný. Z čoho vyplýva, že pre všetky $t < T, 0 < P(t,T) < 1$ skoro všade.

Teraz tvrdíme, že pre každé obchodované aktívum $f \in M$,

$$\Pi(f) = E^{\mathbb{Q}}\left[f e^{-\int_0^T r_u du}\right].$$

Nech $\{\theta_t\}_{t\in[0,T]}$ je samofinancujúca stratégia generujúca f. Predpokladajme, že $\{\theta_t\}$ mení hodnoty v $0 \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le t_{n+1} = T$, z čoho dostaneme

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{Q}}\left[f e^{-\int_0^T r_u du}\right] &= E^{\mathbb{Q}}\left[\langle \theta_{t_{n+1}}, Z_{t_{n+1}}\rangle e^{-\int_0^{t_{n+1}} r_u du}\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[\langle \theta_{t_n}, Z_{t_{n+1}}\rangle e^{-\int_0^{t_{n+1}} r_u du}\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[E^{\mathbb{Q}}\left[\langle \theta_{t_n}, Z_{t_{n+1}} e^{-\int_0^{t_{n+1}} r_u du}\rangle \mid \mathcal{F}_{t_n}\right]\right] \\ &= E^{\mathbb{Q}}\left[\langle \theta_{t_n}, Z_{t_n} e^{-\int_0^{t_n} r_u du}\rangle\right], \end{aligned}$$

posledná rovnosť vzchádza z faktu, že $\langle Z_t e^{-\int_0^t r_u du}\rangle = \langle(1, Z_t^1)\rangle$ je martingal. Opakujme tento postup až do času t_0 až dostaneme $E^{\mathbb{Q}}[\langle \theta_{t_0}, Z_{t_0}\rangle]$ čo je presne $\Pi(f)$.

Implikácia: $\Rightarrow$
Predpokladajme, že oceňovací proces je daný $\Pi(f) = E[f \cdot \psi]$ pre nejaké $\psi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), \psi > 0$ skoro isto.
Z $f = Z_T^0 \in M$ dostaneme $1 = E[\psi e^{\int_0^T r_u du}]$ a preto vieme, že $\rho = \psi e^{\int_0^T r_u du}$ je hustota pravdepodobnostnej miery $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentná k $\mathbb{P}$, a že $\rho e^{-\int_0^T r_u du}$ patrí do $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dokážeme, že Z_t^1 je martingal vzhľadom k miere $\mathbb{Q}$. Definujme pre dané $0 \leq t \leq s \leq T$ a $A \in \mathcal{F}_t$,

$$
\begin{aligned}
\text{pre } u < t\text{: } & \theta_u^0 = \theta_u^1 = 0 \\
\text{pre } u = t\text{: } & \theta_t^1 = 1 \text{ pre } A, \theta_t^1 = 0 \text{ pre } A^C \\
& \theta_t^0 = -P(t,T)e^{-\int_0^t r_u du} \text{ pre } A, \theta_t^0 = 0 \text{ pre } A^C \\
\text{pre } t < u < s\text{: } & \theta_u = \theta_t \\
\text{pre } u = s\text{: } & \theta_s^1 = 0 \\
& \theta_s^0 = P(s,T)e^{-\int_0^s r_u du} - P(t,T)e^{-\int_0^t r_u du} \text{ pre } A, \\
& \theta_s^0 = 0 \text{ pre } A^C \\
\text{pre } u > s\text{: } & \theta_u = \theta_s.
\end{aligned}
$$

Stratégia $\{\theta_u\}_{0 \leq u \leq T}$ je samofinancujúca a generuje

$$f = \left(P(s,T)e^{\int_s^T r_u du} - P(t,T)e^{\int_t^T r_u du}\right)\mathbf{1}_A,$$

kde $\mathbf{1}_A = 1$ pre A a 0 pre A^C. Keďže $\Pi(f) = E(f \cdot \psi)$ je nula a z predchádzajúceho vzťahu dostaneme

$$\int_A P(s,T)e^{\int_s^T r_u du}\psi d\mathbb{P} = \int_A P(t,T)e^{\int_t^T r_u du}\psi d\mathbb{P}$$

čo môžeme vyjadriť ako

$$\int_A P(s,T)e^{-\int_0^s r_u du}\rho d\mathbb{P} = \int_A P(t,T)e^{-\int_0^t r_u du}\rho d\mathbb{P}$$

alebo

$$\int_A Z_s^1 d\mathbb{Q} = \int_A Z_t^1 d\mathbb{Q} \text{ pre všetky } A \in \mathcal{F}_t,$$

čo je požadovaný záver, že

$$Z_t^1 = E^{\mathbb{Q}}[Z_s^1 \mid \mathcal{F}_t] \text{ pre } t < s.$$

Potom tvrdenia (i), (ii) a (iii) z Vety 2 nám dajú

$$P(t,T) = Z_t^0 E^{\mathbb{Q}}\left[(Z_T^0)^{-1} \mid \mathcal{F}_t\right] \text{ a } (Z_T^0)^{-1}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}).$$

□

Nech $(\Omega, \mathcal{F})$ je výberový priestor popisujúci možné scenáre na trhu v časovom období $[0, T]$. Nech $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in [0,T]}$ označuje filtráciu generovanú tržnou históriou až do času t. Ceny podkladových aktív môžu byť potom popísané adaptovaným procesom

$$\begin{aligned} S : [0, T] \times \Omega &\to \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto S_t(\omega) \end{aligned}$$

V tomto prípade ľubovoľnú európsku podmienenú pohľadávku so splatnosťou T môžeme plne popísať špecifikáciou konečnej výplaty $H(\omega) \in M$ pre každý scenár $\omega \in \Omega$. Napríklad pre európsku plain-vanilla put opciu to je $H = (K - S_T)^+$. Oceňovací princíp (M, Π) prisudzuje každej takejto podmienenej pohľadávke $H \in M$ hodnotu $\Pi_t(H)$ v každom časovom okamžiku.

Pre nejakú udalosť $A \in \mathcal{F}$, náhodná premenná $\mathbf{1}_A$ je výplatou podmienenej pohľadávky, ktorá vypláca 1 v čase T ak A vznikne a 0 v opačnom prípade. Zvlášť $\mathbf{1}_\Omega$ odpovedá bezkupónovému dlhopisu, ktorý vypláca 1 v čase T. Za predpokladu konštantnej úrokovej sadzby r je jeho hodnota v čase t rovná $\Pi_t(\mathbf{1}_\Omega) = e^{-r(T-t)}$. Teraz definícia

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} : \mathcal{F} &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto e^{rT} \Pi_0(\mathbf{1}_A) \end{aligned}$$

prináša pravdepodobnostnú mieru na výberový priestor $(\Omega, \mathcal{F})$. A obrátene, každá pravdepodobnostná miera $\mathbb{Q}$ prináša oceňovací princíp (M, Π) nastavením

$$\Pi_0(H) := e^{-rT} E^{\mathbb{Q}}(H) \tag{1.7}$$

pre náhodné výplaty tvaru $H = \sum_i c_i \mathbf{1}_{A_i}$, kde c_i sú nejaké konštanty a $A_i \in \mathcal{F}$ pre $\forall i$ a rozšírením tejto miery (pridaním spojitej vlastnosti Π) na ľubovoľné náhodné výplaty.

Uvažujme trh s pravdepodobnostnou mierou $\mathbb{P}$, akýkoľvek lineárny [3] bez-arbitrážny oceňovací princíp (M, Π) môžeme reprezentovať ako

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}(H \mid \mathcal{F}_t), \tag{1.8}$$

kde $\mathbb{Q}$ je rizikovo neutrálna miera vzhľadom k $\mathbb{P}$.

Tento vzťah je základným stavebným kameňom tejto práce. Nasledujúce kapitoly predpokladajú, že martingalova alebo riziko neutrálna miera $\mathbb{Q}$ popisujúca oceňovací princíp je daná a $\Pi_t(H)$ je numericky aproximovaná prostredníctvom diskontovanej strednej hodnoty (1.8).

Nasledujúca veta nám dáva zaujímavú charakteristiku úplných trhov, ktorú môžeme nájsť v [12].

[3] Ak je jediná opcia predaná za V, n opcií rovnakého typu sú zvyčajne predané za nV.

Veta 3 (Druhá základná veta teórie oceňovania). *Uvažujme tržný model, v ktorom môžeme použiť rizikovo neutrálne ocenenie. Trh je úplný práve vtedy, keď rizikovo neutrálna pravdepodobnostná miera je jednoznačná.*

Z toho vyplýva, že v úplných trhoch existuje len jediný možný (bez-arbitrážny) výber pre opčné ceny. Na druhú stranu v neúplných trhoch opčné ceny nie sú jednoznačne určené pokiaľ nie je vybraná rizikovo neutrálna miera. Na prvý pohľad sa to zdá ako nie veľmi vhodná charakteristika neúplných tržných modelov, ale v skutočnosti to reflektuje to, že neúplné modely systematicky podceňujú riziko spojené s upísaním opcie. V realite rovnako ako v neúplných tržných modeloch, perfektné „hedge“ neexistujú.

1.1.2 Vnorené opcie

Vnorená opcia je komponentou dlhového inštrumentu a garantuje veriteľovi alebo dlžníkovi určité práva, vďaka ktorým môže prevziať isté akcie voči protistrane. Tento termín je zvyčajne prepojený s dlhopismi alebo inými cennými papierami. Nemôže byť oddelený od dlhopisu a preto sa neobchoduje samostatne. Existuje niekoľko typov opcií, ktoré môžu byť vnorené. Niektoré bežné typy dlhopisov s vnorenými opciami obsahujú napríklad vypovedateľné dlhopisy, konvertibilné dlhopisy, predĺžiteľné dlhopisy a vymeniteľné dlhopisy. Dlhopis s opciou pre jeho držiteľa, často označovaný anglickým termínom ako puttable bond, ktorý ho zvýhodňuje, má pridanú hodnotu a preto bude ocenený vyššie než identický dlhopis, ktorý nemá takúto opciu. Dlhopis s opciou pre jeho emitenta, inak nazývaný ako callable dlhopis alebo vypovedateľný dlhopis zo strany emitenta, bude ocenený nižšou hodnotou než identický dlhopis bez opcie.

Puttable dlhopis alebo vypovedateľný dlhopis zo strany majiteľa je dlhopis s vnorenou put opciou. Držiteľ vypovedateľného dlhopisu má právo ale nie povinnosť, požiadať o predčasné splatenie istiny. Put opcia je vypovedateľná v jednom alebo viacerých špecifických dátumoch. Chráni investora pred nárastom úrokových sadzieb potom, čo bol dlhopis kúpený v prípade, že nebude generovať dostatočne hodnotné peňažné toky z kupónových platieb ako sa očakávalo v čase nákupu. Preto investori môžu realizovať opciu a predať dlhopis späť emitentovi. Následne môžu investovať nadobudnutý kapitál z vypovedaného dlhopisu niekde inde na finančnom trhu za vyšší výnos. Podobne callable dlhopis je dlhopis s vnorenou call opciou. Emitent dlhopisu má právo ale nie povinnosť, kúpiť späť dlhopis od držiteľa za predom definovanú cenu v jednom alebo viacerých presne určených dátumoch pred splatnosťou dlhopisu. Ak úrokové sadzby klesnú nadol v rámci obdobia, keď opcia môže byť realizovaná, emitent bude môcť refinancovať svoj dlh niekde inde za nižšiu sadzbu.

Prítomnosť vnorenej opcie v dlhovom inštrumente robí ocenenie takého inštrumentu komplikovanejším. Budovanie modelu na ocenenie dlhopisov s vnorenými opciami závisí na budúcich peňažných tokoch, ktoré sú úzko prepojené na pohyby tržných úrokových sadzieb v budúcnosti. To znamená, že v ocenení musíme zohľadniť stochastickú povahu úrokových sadzieb. Táto neistota a nepredvídavosť je zahrnutá do oceňovacieho modelu prostredníctvom volatility úrokových sadzieb meraných štandardnou odchýlkou. Predpokladajme danú volatilitu úrokových sadzieb, na tomto predpoklade môžeme skonštruovať strom úrokových sadzieb reprezentujúci možné budúce úrokové sadzby konzistentné s predpokladmi o volatilite. Existuje niekoľko modelov úrokových sadzieb, ktoré môžu byť použité na konštrukciu stromov úrokových sadzieb, na ktoré sa v tejto práci zameriame. Úrokový strom reprezentuje pravdepodobnostný popis ako sa môžu úrokové sadzby meniť alebo vyvíjať v čase.

Uvažujme model okamžitých úrokových sadzieb a predpokladajme istú volatilitu úrokových sadzieb. Ďalej predpokladajme, že úroková sadzba môže uskutočniť jeden z troch možných pohybov v ďalšej perióde, teda nadobudne jednu z troch možných hodnôt. Oceňovací model, ktorý obsahuje tento predpoklad v konštrukcii úrokového stromu sa nazýva trinomický model. Modely, ktoré predpokladajú diskrétne zmeny v úrokových sadzbách sa označujú ako oceňovacie modely v diskrétnom čase. Technológia ocenenia opcií je použitá pri ocenení dlhopisov s vnorenými opciami, pretože ocenenie vyžaduje odhad aká je hodnota vnorenej opcie. Ak túto techniku ocenenia vykreslíme v grafickej forme, jej grafická prezentácia vyzerá ako mriežka. Z tohto dôvodu sú tieto modely v praxi bežne označované ako mriežkové modely alebo stromy úrokových sadzieb.

Kapitola 2

Ocenenie derivátov pomocou mriežkových modelov

Black-Scholesov model bol prvým rigoróznym modelom s uzavrenou formou rovnice pre ocenenie európskych call a put opcií založených na pozorovaných parametroch. Zároveň dôležitý bez-arbitrážny princíp použitý k získaniu Black-Scholesovej rovnice poukazuje na teoretické oceňovacie modely pre všetky typy podmienených pohľadávok. Bohužiaľ, americké opcie a iné kontrakty s predčasným splatením predstavujú vážny problém napriek tomu, že bez-arbitrážný princíp stále platí, ale použiteľná uzavrená forma rovníc zriedka existuje.

Black-Scholesova metóda vychádza z predpokladu, že podkladové aktívum, ktoré sa často označuje ako akcia, vychádza zo stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dP_t = \mu P_t dt + \sigma P_t dW_t, \tag{2.1}$$

kde P_t označuje cenu akcie v čase t, parametre μ a σ označujú drift a volatilitu a dW_t reprezentuje prírastok Wienerovho procesu.

So spojitým obchodovaním a bez transakčných nákladov sa môže investor riadiť samofinancujúcou obchodnou stratégiou, kedy by presne replikoval budúce výplaty z derivátov cenných papierov. Aby sme sa vyhli ziskovej arbitráži, hodnota opcie musí byť rovnaká ako náklady na replikované portfólio. To vedie k fundamentálnej stochastickej diferenciálnej rovnici ocenenia podmienených pohľadávok. V niektorých prípadoch sa dá stochastická diferenciálna rovnica vyriešiť a dostaneme tak uzavrenú formu oceňovacej rovnice. V ostatných prípadoch môžeme dostať približnú hodnotu opcie použitím metódy konečných diferencií, čo je numerická technika demonštrovaná v spojitosti s opčným ocenením napríklad Brennanom a Schwartzom (1977) [21].

Pôvodný binomický model je založený na princípe opčnej replikácie. V rámci binomického stromu môže byť opčná výplata nahradená portfóliom tvoreným z akcie a bezrizikového aktíva. Ostatné mriežkové modely vrátane trinomického nepripúšťajú opčnú replikáciu. Ale podľa štandardných predpokladov opčného ocenenia môžeme ukázať, že spravodlivá opčná hodnota je rovnaká aká by bola v rizikovo neutrálnom svete. V tomto prípade, spravodlivá hodnota môže byť jednoducho získaná spočítaním strednej hodnoty výplaty podľa rizikovo neutrálneho rozdelenia a diskontovaním k počiatočnému dátumu príslušnou bezrizikovou úrokovou sadzbou. Kedykoľvek je možné rizikovo neutrálne ocenenie, každá aproximačná procedúra založená na pravdepodobnostnom rozdelení, ktorá aproximuje rizikovo neutrálne rozdelenie a konverguje k nemu v limite môže byť použitá na ocenenie opcií. Preto môžeme použiť trinomickú mriežku bez straty schopnosti spočítať jednoznačnú opčnú hodnotu.

Jednofaktorové bez-arbitrážne modely úrokových sadzieb sú dôležitým nástrojom pre ocenenie úrokových derivátov. Mriežkové štruktúry alebo stromy sú často používané na implementáciu modelov, ktoré vyrovnávajú počiatočnú výnosovú krivku. Binomické a trinomocké stromy predstavujú jednoduchú alternatívu ku konečným diferenciačným metódam pre implementáciu takýchto modelov. Akonáhle máme spočítanú celú výnosovú krivku v každom uzle, môžeme použiť strom na ocenenie širokého spektra derivátov alebo ako nástroj na simuláciu budúceho vývoja výnosovej krivky. Existuje množstvo rozličných modelov výnosových kriviek s rôznorodými použitými metódami. V literatúre sú modely bežne rozdelené podľa kategorizácie na rovnovážne alebo bez-arbitrážne, na modely spotových alebo forwardových úrokových sadzieb, jednofaktorové alebo viac faktorové modely atď. V skutočnosti väčšina prístupov môže byť zachytená v rámci iného prístupu, a preto záleží na skúsenosti a chuti analytika, s ktorým modelom chce pracovať. Mnoho autorov popisuje ako môžu byť stromy pre spotové úrokové sadzby budované tak, aby boli konzistentné s počiatočnou výnosovou krivkou úrokových sadzieb. Príklady modelov binomických stromov sú Ho-Lee (1986) [22], Black a spol. (1990) [23], Black a Karinski (1991) [19] a Katoley a spol. (1993) [18]. Hull a White (1994,1996) [1] [17] popisujú ako môžu byť konštruované trinomické stromy, keď predpokladáme, že spotová sadzba alebo nejaká funkcia spotovej sadzby vychádza z Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s časovo závislou hladinou reverzie.

Spomínané modely sú veľmi populárne a široko používané pre ocenenie derivátov, pretože je pre ne relatívne jednoduché vybudovať strom. V modeloch Hull-White a Ho-Lee, úrokové sadzby vychádzajú z normálneho správania, zatiaľ čo v ostatných modeloch úrokové sadzby majú log-normálne správanie. Hull-White a Ho-Lee majú nevýhodu v tom, že povoľujú úrokovým sadzbám dostať sa do záporných hodnôt. Tieto modely majú vysokú pravdepodobnosť výskytu záporných sadzieb najmä v prostredí nízkych úrokových sadzieb, ktoré sužuje v súčasnosti veľa krajín vrátane ČR.

Parametre modelov úrokových sadzieb sú typicky vyberané tak, aby sa ceny kalibrovaných inštrumentov zhodovali čo najviac s tými tržnými. Ak úrokový derivát, ktorý sa snažíme oceniť je podobný kalibrovanému inštrumentu, potom kalkulovaná cena nemusí byť citlivá na používaný model. Na druhú stanu, keď sa derivát stáva viac exotickým, používaný model zohráva dôležitú rolu. Preto je nesmierne dôležité vybrať správny model, ktorý zohľadní všetky účely, pre ktoré sa má použiť. Modely úrokových sadzieb by mali byť vyberané tak, aby vyrovnávali tržné ceny a boli konzistentné s empirickými výskumami historického vývoja sadzieb.

2.1 Hull-White model

Hull-Whiteov (HW) model zaraďujeme medzi bez-arbitrážne modely úrokových sadzieb. To znamená, že máme schopnosť presne vyrovnať aktuálnu výnosovú krivku výberom vhodných parametrov modelu. Ďalej môžeme odvodiť explicitné formuly pre ocenenie bezkupónových dlhopisov a úrokových opcií vďaka faktu, že model implikuje normálne rozdelené úrokové sadzby v čase. Hlavnou nevýhodou modelu je možnosť výskytu negatívnych sadzieb.

Uvažujme stochastickú bázu $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$. Vývoj okamžitých úrokových sadzieb je modelovaný prostredníctvom stochastickej diferenciálnej rovnice

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t), \tag{2.2}$$

kde a a σ sú kladné konštanty, $W(t)$ označuje Brownov pohyb alebo inak nazývaný Wiennerov proces a $\theta : [0,T] \to \mathbb{R}$ je merateľná funkcia, ktorá je zvolená tak, aby presne odpovedala aktuálnej časovej štruktúre úrokových sadzieb pozorovaných na trhu

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial t} + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \tag{2.3}$$

kde

$$f^M(0,t) = -\frac{\partial \ln P^M(0,t)}{\partial t}$$

je tržná okamžitá forwardová sadzba v čase 0 pre splatnosť v čase t a $P^M(0,t)$ je tržný diskontný faktor pre splatnosť t.

Ďalšou vlastnosťou zahrnutou v HW modeli je návratnosť ku stredu [1]. Úrokové sadzby majú tendenciu vrátiť sa do rovnovážnych úrovní [2], kde parameter a určuje rýchlosť tejto návratnosti.

[1] V literatúre sa často stretneme s anglickým termínom mean reversion.

[2] Ak sú sadzby pod nejakou rovnovážnou úrovňou sadzieb, majú tendenciu vzrásť. Naopak, ak sú sadzby nad, majú tendenciu klesnúť.

K vyriešeniu stochastickej diferenciálnej rovnice 2.2 využijeme vhodne zvolenú funkciu $f(u, r(u)) = r(u)e^{-a(t-u)}$, ktorú dosadíme do Itôvej formule

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial r}\mu(u) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Big)du + \sigma\frac{\partial f}{\partial r}dW(u),$$

kde $\mu(u) = \theta(u) - ar(u)$.
Po dosadení a následnej úprave dostaneme

$$df = \theta(u)e^{-a(t-u)}du + \sigma e^{-a(t-u)}dW(u).$$

Integráciou pre $s < t$ máme

$$\int_s^t dr(u)e^{-a(t-u)} = \int_s^t \theta(u)e^{-a(t-u)}du + \int_s^t \sigma e^{-a(t-u)}dW(u),$$

z čoho dostaneme vzťah pre $r(t)$

$$\begin{aligned} r(t) &= r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u) \\ &= r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-a(t-s)} + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u), \end{aligned}$$

kde

$$\alpha(t) = f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at})^2. \tag{2.4}$$

Preto $r(t)$ podmienená $\mathcal{F}_s$ je normálne rozdelená so strednou hodnotu a rozptylom v príslušnom poradí

$$\begin{aligned} E(r(t) \mid \mathcal{F}_s) &= r(s)e^{-a(t-s)} + \alpha(t) + \alpha(s)e^{-a(t-s)} \\ Var(r(t) \mid \mathcal{F}_s) &= \frac{\sigma^2}{2a}\Big[1 - e^{-2a(t-s)}\Big]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Teraz definujme proces

$$dx^*(t) = -ax^*(t)dt + \sigma dW(t), x^*(0) = 0, \tag{2.6}$$

z ktorého pre každé $s < t$ dostaneme

$$x^*(t) = x^*(s)e^{-a(t-s)} + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u),$$

z čoho môžeme vyjadriť $r(t) = x^*(t) + \alpha(t)$ pre každé t.

Ako sme spomenuli vyššie existuje teoretická možnosť, že r sa dostane pod 0. Rizikovo neutrálna pravdepodobnosť negatívnych sadzieb v čase t je daná vzťahom

$$\mathbb{Q}\{r(t) < 0\} = \Phi\Big(-\frac{\alpha(t)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2at}]}}\Big),$$

kde Φ označuje kumulatívnu distribučnú funkciu štandardizovaného normálneho rozdelenia. V praxi býva táto pravdepodobnosť zanedbateľná, avšak pri veľmi nízkych úrovniach sadzieb sa táto pravdepodobnosť môže výrazne zvýšiť.

Cena dlhopisov

Cena bezkupónového dlhopisu v čase t vyplácajúceho jednotkovú čiastku v čase splatnosti T je daná vzťahom (??). Túto strednú hodnotu je pomerne ľahké spočítať z dynamiky úrokových sadzieb (2.2). Poznamenajme, že vďaka normálnemu rozdeleniu $r(T)$ podmienenému $\mathcal{F}_t, t \leq T$ je integrál $\int_t^T r(u)du$ normálne rozdelený a môžeme ukázať, že

$$\int_t^T r(u)du \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\Big(B(t,T)[r(t) - \alpha(t)] + \ln\frac{P^M(0,T)}{P^M(0,T)} + \frac{1}{2}[V(0,T) - V(0,t)], V(t,T)\Big),$$

kde

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\big[1 - e^{-a(T-t)}\big],$$
$$V(t,T) = \frac{\sigma^2}{a^2}\Big[T - t + \frac{2}{a}e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\Big],$$

využitím čoho môžeme vyjadriť cenu dlhopisu v tvare

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}, \tag{2.7}$$

kde

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)}\exp\Big\{B(t,T)f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t,T)^2\Big\}.$$

Ocenenie európskych opcií na bezkupónové dlhopisy

Nasledujúce vzťahy sú prebrané z knihy [11] z tretej kapitoly. Cena európskej call opcie $\mathbf{ZBC}(t,T,S,K)$ v čase t a realizačnou cenou K so splatnosťou v čase T, upísaná na bezkupónový dlhopis so splatnosťou v čase $S > T$ vedie k oceňovacej formule

$$\mathbf{ZBC}(t,T,S,K) = E^{\mathbb{Q}}\Big(e^{-\int_t^T r_s ds}(P(T,S) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\Big). \tag{2.8}$$

Podobným cvičením ako sa odvodzuje cena v HW modeli pre dlhopis s nulovým kupónom, môžeme odvodiť cenu európskej call opcie na bezkupónový dlhopis [6]

$$\mathbf{ZBC}(t,T,S,K) = P(t,S)\Phi(h) - KP(t,T)\Phi(h-\sigma_p), \tag{2.9}$$

kde

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1-e^{-2a(T-t)}}{2a}}B(T,S),$$
$$h = \frac{1}{\sigma_p}\ln\frac{P(t,S)}{P(t,T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

a Φ označuje distribučnú funkciu štandardizovaného normálneho rozdelenia.

Analogicky môžeme odvodiť vzťah pre cenu európskej put opcie upísanej na bezkupónový dlhopis, opcia aj dlhopis majú rovnaké parametre ako v prípade call opcie

$$\mathbf{ZBP}(t,T,S,K) = KP(t,T)\Phi(-h+\sigma_p) - P(t,S)\Phi(-h). \tag{2.10}$$

Ocenenie európskych opcií na kupónové dlhopisy

Označme analytickú cenu $\Pi(t,T,r(t))$ bezkupónového dlhopisu získanú HW modelom v čase t so splatnosťou v čase T. Ďalej uvažujme kupónový dlhopis, ktorý vypláca n kupónových platieb $\mathcal{C} = \{c_1,\dots,c_n\}$ v časových okamžikoch $\mathcal{T} = \{T_1,\dots,T_n\}$ a $T \le T_1$. Cena kupónového dlhopisu v čase T je daná vzťahom

$$\mathbf{CB}(T,\mathcal{T},\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n} c_i P(T,T_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Pi(T,T_i,r(T)).$$

Chceme oceniť európsku put opciu v čase t na kupónový dlhopis s realizačnou cenou K a splatnosťou v čase T. Opčná výplata je $(K - \mathbf{CB}(T,\mathcal{T},\mathcal{C}))^+$.

Jamshidian (1989) [10] odvodil jednoduchú metódu, ktorá konvertuje túto pozitívnu časť súm do sumy pozitívnych častí. Jeho trik spočíval v nájdení riešenia pre spotovú úrokovú sadzbu r^* nasledujúcej rovnice

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Pi(T,T_i,r^*) = K$$

a prepísaním výplaty

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \Pi(T,T_i,r^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i \Pi(T,T_i,r(T))\right)^+.$$

Aby sme získali požadovanú dekompozíciu musí používaný model okamžitých úrokových sadzieb spĺňať nasledujúcu podmienku:

$$\frac{\partial \Pi(t,s,r)}{\partial r} < 0 \text{ pre všetky } 0 < t < s.$$

Je zrejmé, že HW model spĺňa túto podmienku. Potom výplatu môžeme prepísať ako

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Big(\Pi(T, T_i, r^*) - \sum_{i=1}^{n} c_i \Pi(T, T_i, r(T)) \Big)^+$$

tak, že ocenenie opcie na kupónový dlhopis je ekvivalentné hodnote portfólia put opcií na bezkupónové dlhopisy. Ak vezmeme rizikovo neutrálnu strednú hodnotu diskontovanej výplaty, dostaneme cenu put opcie v čase t na kupónový dlhopis so splatnosťou v čase T a realizačnou cenou K

$$\mathbf{CBP}(t, T, \mathcal{T}, \mathcal{C}, K) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{ZBP}(t, T, T_i, \Pi(T, T_i, r^*). \tag{2.11}$$

Analogický vzťah platí pre európske call opcie.

2.1.1 Konštrukcia trinomického stromu

Hull a White vo svojej publikácii [17] uvažujú model, ktorý vyzerá nasledovne

$$dx = [\theta(t) - ax]dt + \sigma dW(t) \tag{2.12}$$

kde x je nejakou funkciou $f(r)$ spotovej sadzby r, a a σ sú konštanty volené tak, aby sa zhodovali s tržnými cenami aktívne obchodovateľných finančných derivátov a $dW(t)$ je prírastok Wienerovho procesu. Parameter a označuje stupeň reverzie a $\theta(t)/a$ je časovo závislá hladina reverzie s funkciou $\theta(t)$ vybranou tak, aby sa zhodovala s počiatočnou výnosovou krivkou pozorovanou na trhu.

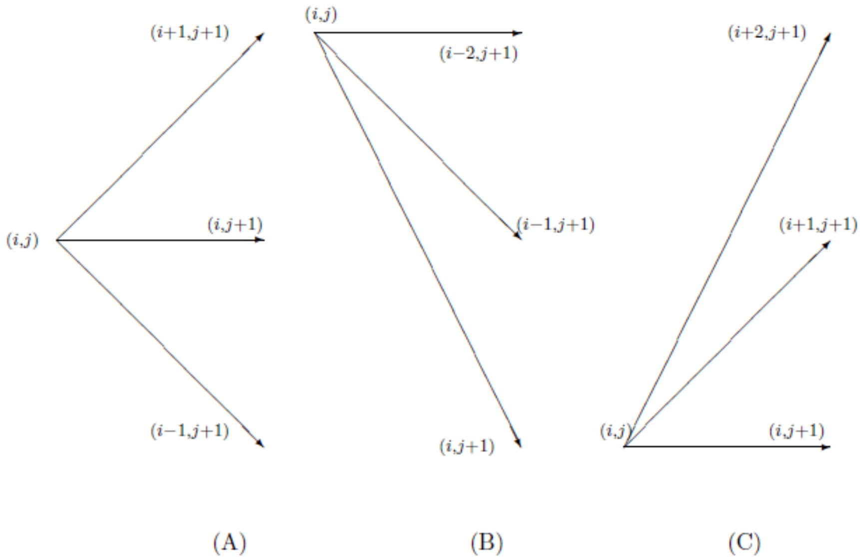
Ilustrujme si teraz procedúru pre konštrukciu trinomického stromu, ktorá vhodne aproximuje vývoj procesu x. Ide o 2-fázovú procedúru, ktorá vychádza z návrhov Hulla a Whita [15].

Prvá fáza

Prvá fáza Hull-Whiteovej metódy zahŕňa konštrukciu trinomického stromu pre proces x^*, ktorý sme už definovali v (2.6) ale zopakujeme ho ešte raz

$$dx^* = -ax^* dt + \sigma dW(t). \tag{2.13}$$

Pre tento proces je $x^*(t + \Delta t) - x^*(t)$ normálne rozdelená. Predpokladajme, že veľkosť časového kroku je Δt. Strom je konštruovaný tak, aby podmienená stredná hodnota a rozptyl v každom uzle odpovedala procesu x^*. Geometria stromu je navrhovaná tak, aby zabezpečila pozitivitu všetkých vetviacich pravdepodobností. Vetvenie stromu môže mať nasledujúce formy, ktoré vidíme na obrázku 2.1.



Obr. 2.1: Vetvenie trinomického stromu.

Ďalšou vlastnosťou geometrie stromu je, že centrálny uzol vždy odpovedá strednej hodnote x^*. To vedie k rýchlejšej konštrukcii stromu a presnejšiemu oceňovaniu. Je veľmi výhodné konštruovať strom takým spôsobom, že všetky uzly stromu odpovedajú špecifickým dátumom ako splátka, výplata kupónu alebo dátum realizácie opcie. Predpokladajme, že chceme vybudovať n-krokový strom s uzlami v časoch $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$, kde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ a $t_{i+1} - t_i = \Delta t$, budeme teda uvažovať ekvidištantné časové okamžiky. Pretože hodnoty všetkých dlhopisov, swapov a ostatných inštrumentov sa počítajú diskontovaním ich peňažných tokov spätne skrz strom, čas T musí byť zvolený tak, že žiadna platba nevzniká po čase T. Mali by sme taktiež zabezpečiť, že vybrané časové okamžiky t_i korešpondujú so všetkými výplatnými dátumami. Nemusíme uvažovať ekvidištantné časové okamžiky.

Označme (i, j) uzly v strome, kde i je časový index $i = 0, 1, \ldots, n$ a j je priestorový index od nejakého $j_{min}(i) < 0$ do $j_{max}(i) > 0$, ktorých určenie hodnoty vysvetlíme v nasledujúcej časti práce. Ďalej označme $x^*_{i,j}$ hodnotu procesu v uzle (i, j).

Zo vzťahoch (2.5) a $x^*(t) = x(t) - \alpha(t)$ pre každé t máme

$$\begin{aligned} E(x^*(t_{i+1}) \mid x^*(t_i) = x^*_{i,j}) &= x^*_{i,j} e^{-a\Delta t} \\ Var(x^*(t_{i+1}) \mid x^*(t_i) = x^*_{i,j}) &= \frac{\sigma^2}{2a}\Big[1 - e^{-2a\Delta t}\Big] =: V^2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Položme $x^*_{i,j} = j\Delta x^*_i$, kde [3]

$$\Delta x^*_i = V\sqrt{3} = \sigma\sqrt{\frac{3}{2a}[1 - e^{-2a\Delta t}]}, \tag{2.15}$$

je vertikálna vzdialenosť medzi uzlami stromu v časovom kroku i. Takto zvolená hodnota pre Δx^*_i reprezentuje dobrý výber z hľadiska minimalizácie chyby, viď Hull-White (1993) [15]. Akonáhle sú vybrané časové okamžiky, musíme zvoliť hodnoty $x^*_{i,j}$ v každom uzle, pričom centrálny uzol $x^*_{i,0} = 0$ pre každé i. Potom v každom časovom kroku $t_i, i = 1, \ldots, n$ umiestnime uzly v

$$j_{min}(i)\Delta x^*_i, \ldots, -2\Delta x^*_i, -\Delta x^*_i, \Delta x^*_i, 2\Delta x^*_i, \ldots, j_{max}(i)\Delta x^*_i.$$

Naším prvým zámerom je vybudovať strom, ktorého uzly sú rozmiestnené v $x^*_{i,\cdot}$ a časoch t_i pre všetky $i = 1, \ldots, n$. K tomu potrebujeme vyriešiť, ktorú z troch vetviacich metód aplikujeme v každom uzle. Takto sa určí celkový tvar stromu. Následne musia byť spočítané vetviace pravdepodobnosti. Vetvenie stromu a príslušné pravdepodobnosti sú zvolené tak, aby každý uzol v strome čo najviac napodoboval proces (2.13), čo docielime zabezpečením, že stredná hodnota a rozptyl zmeny náhodnej premennej $\Delta x^*_{i,j}$ je

$$\begin{aligned} E(\Delta x^*_{i,j} \mid x^*_{i,j}) &= x^*_{i,j} e^{-a\Delta t} - x^*_{i,j} = (e^{-a\Delta t} - 1)x^*_{i,j} =: Mx^*_{i,j} \\ Var(\Delta x^*_{i,j} \mid x^*_{i,j}) &= V^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

V každom uzle (i, j) stromu vyberáme adekvátny vetviaci proces a vetviace pravdepodobnosti, ktoré musia byť kladné. Definujme vetviace pravdepodobnosti do najvyššej, strednej a najnižšej vetvy ako p_u, p_m a p_d. Väčšine uzlov je priradené zvyčajné vetvenie A, ale pre dostatočne kladné alebo záporné j je potrebné prepnúť vetviaci proces. Definujme j_{max} ako hodnotu $max(j_{max}(i))$ pre všetky i, kedy prepíname vetvenie z A na B a obdobne j_{min} ako hodnotu $min(j_{min}(i))$, kedy prepíname vetvenie z A na C. Hull a White ukázali v článku [17], že vetviace pravdepodobnosti sú vždy kladné ak j_{max} je rovné najmenšiemu celému číslu väčšiemu ako $-0,184/M$ a $j_{min} = -j_{max}$.

[3]Rozmiestnenie uzlov môžeme nastaviť $\Delta x^*_i = V\sqrt{n}$ pre rozsah hodnôt n bez poškodenia numerickej procedúry. Výber hodnoty $n = 3$ povoľuje procedúre presne replikovať prvých 5 momentov podmieneného rozdelenia $x^*_{i+1}|x^*_i$, keď stupeň reverzie je nula. Produkuje to trochu rýchlejšiu konvergenciu než pre ostatné hodnoty n.

Pre každý typ vetvenia sú pravdepodobnosti p_u, p_m a p_d spočítané z rovníc, ktoré zabezpečujú, že stredná hodnota a rozptyl Δx^* sa zhodujú, viď (2.16). Zároveň musí platiť, že súčet $p_u + p_m + p_d = 1$. To vedie k trom rovniciam s troma neznámymi. Ak vetvenie má zvyčajný tvar A, potom riešením rovníc je

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{j^2M^2 + jM}{2} \\ p_m &= \frac{2}{3} - j^2M^2 \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{j^2M^2 - jM}{2} \end{aligned}$$

Vďaka vlastnosti HW modelu, špeciálne návratnosti ku stredu, povoľujeme neštandardné vetvenie na okrajoch stromu (obrázok B a C). Na hornom okraji dostaneme modifikované pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{7}{6} + \frac{j^2M^2 + 3jM}{2} \\ p_m &= -\frac{1}{3} - j^2M^2 - 2jM \\ p_d &= \frac{1}{6} + \frac{j^2M^2 + jM}{2} \end{aligned}$$

a na dolnom okraji stromu dostaneme pravdepodobnosti

$$\begin{aligned} p_u &= \frac{1}{6} + \frac{j^2M^2 - jM}{2} \\ p_m &= -\frac{1}{3} - j^2M^2 + 2jM \\ p_d &= \frac{7}{6} + \frac{j^2M^2 - 3jM}{2} \end{aligned}$$

Toto ukončuje konštrukciu stromu pre zjednodušený proces (2.13).

Druhá fáza

V druhej fáze našej procedúry pre konštrukciu stromu chceme „prepočítať“ uzly stromu, ktoré sme získali v prvej fáze takým spôsobom, aby presne vyrovnávali počiatočnú výnosovú krivku. Naším cieľom je konvertovať strom pre proces x^* na strom pre proces x. To môžeme urobiť využitím explicitnej formuly (2.4). Ďalej definujme

$$\alpha(t) = x(t) - x^*(t).$$

Hoci kombinácia presnej formuly (2.4) s aproximačnou podstatou stromu nám zabraňuje v získaní korektných tržných diskontných faktorov v čase 0. Napríklad analytické nahradenie v čase 0 je $\alpha(0) = x(0)$, kde $x(0)$ je nejakou funkciou $f(r(0))$. Takže cena bezkupónového dlhopisu so splatnosťou v čase t_1 spočítaná v strome by bola $exp(-r(0)t_1)$, čo je rozdiel oproti $P^M(0,t_1) = exp(-R(0,t_1)t_1)$, kde $R(0,t_1)$ je spojito úročená sadzba v čase 0 so splatnosťou v čase t_1, ktorú sme definovali v 1.4. To je hlavný dôvod prečo metóda navrhovaná Hullom a Whiteom [17] a jej druhá fáza spočíva v aplikácií nahradení, ktoré perfektne kopírujú tržnú bezkupónovú krivku v čase 0. Musíme podotknúť, že dokonca malé chyby v ocenení diskontovaných dlhopisov môžu viesť k nezanedbateľným chybám v cenách opcií upísaných na dlhopisoch.

Označme α_i nahradenie v čase t_i, ktoré je spoločné pre všetky uzly $(i,\cdot)$. Uvažujme uzol (i,j) stromu v čase t_i, pre ktorý $x^*_{i,j} = j\Delta x^*_i$ a $0 \le i \le n, j_{min} \le j \le j_{max}$ a definujme

$\alpha_i : \alpha(t_i)$
$\Delta t : t_{i+1} - t_i$
$x^*_{i,j}$: hodnota $j\Delta x^*_i$ v uzle (i,j)
$f_{i,j}$: hodnota $f(r)$ v uzle (i,j), čo je $x^*_{i,j} + \alpha_i$
$r_{i,j}$: okamžitá úroková sadzba v uzle (i,j), čo je $f^{-1}(x^*_{i,j} + \alpha_i)$
$Q(i,j|h,k)$[4] : súčasná hodnota inštrumentu v uzle (h,k), ktorý vypláca 1 v uzle (i,j) a 0 v ostatných uzloch
$p(i,j|h,k)$: pravdepodobnosť prechodu z uzla (h,k) do uzla (i,j)
$Q_{i,j} : Q(i,j|0,0)$

Hodnoty α_i a $Q_{i,j}$ sú spočítané rekurzívne od α_0, ktorá je nastavená tak, aby sme získali korektný diskontný faktor pre splatnosť t_1, t.j. $\alpha_0 = -\ln(P^M(0,t_1))/t_1$. Počiatočná hodnota $Q_{0,0}$ je rovná 0. Len čo je známa hodnota α_i, môžeme spočítať hodnoty $Q_{i+1,j}$ pre $j = j_{min}(i+1), \ldots, j_{max}(i+1)$ nasledovne

$$Q(i+1,j|i,k) = p(i+1,j|i,k)e^{-r_{i,k}(t_{i+1}-t_i)}$$

a

$$\begin{aligned} Q_{i+1,j} &= \sum_k Q_{i,k} Q(i+1,j|i,k) \\ &= \sum_k Q_{i,k} p(i+1,j|i,k) e^{-r_{i,k}(t_{i+1}-t_i)}, \end{aligned}$$

kde sčítame cez všetky hodnoty k v časovom okamžiku t_i, pre ktoré je pravdepodobnosť prechodu z uzla (i,k) do uzla $(i+1,j)$ nenulová. Po získaní hodnoty $Q_{i,j}$

[4]Diskrétna analógia k Ärrow-Debreu cene".

pre každé $j_{min}(i), \ldots, j_{max}(i)$ je hodnota α_i spočítaná z rovnice

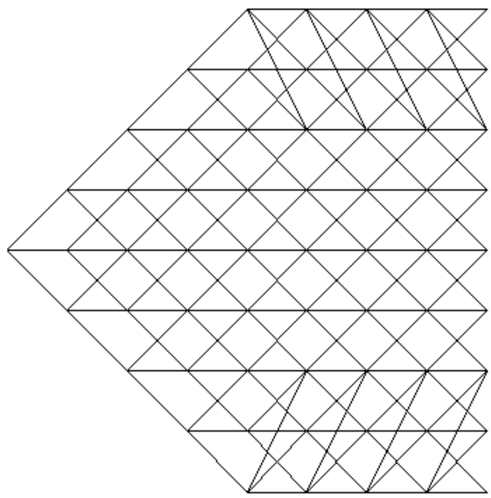
$$P(0, t_{i+1}) = \sum_{j_{min}(i)}^{j_{max}(i)} Q_{i,j} \exp(-(\alpha_i + j\Delta x_i^*)\Delta t),$$

ktorú môžeme ľahko transformovať

$$\alpha_i = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\sum_{j_{min}(i)}^{j_{max}(i)} Q_{i,j} \exp(-j\Delta x_i^* \Delta t)}{P(0, t_{i+1})}.$$

Nakoniec skončíme s konštrukciou stromu, keď každý uzol (i, j) bude mať priradenú hodnotu $r_{i,j} = f^{-1}(x_{i,j}^* + \alpha_i)$.

Na obrázku 2.2 môžeme ilustrovať jednoduchý trinomický strom so všetkými troma typmi vetvenia.



Obr. 2.2: Trinomický strom.

2.2 Black-Karasinski model

Nevýhoda negatívnych sadzieb bola taktiež popísaná Blackom a Karasinskim [19] v ich lognormálnom modele úrokových sadzieb. Black a Karasinski predpokladali, že proces okamžitej úrokovej sadzby sa vyvíja ako exponenciála Ornstein-Uhlenbeckovho procesu s časovo závislými koeficientami. Vzhľadom k tomu, že tržné formuly pre capy a swapcie sú založené na predpoklade lognormálnych sadzieb, zdá sa rozumné zvoliť rovnaké rozdelenie pre okamžitý proces úrokovej sadzby. [5] Okrem toho, pomerne dobré vyrovnávacie vlastnosti modelu na tržné dáta a špeciálne implikované volatility pre swapcie, urobili tento model veľmi populárnym medzi finančnými analytikmi. Nevýhodou tohoto modelu je neexistencia analytického vyjadrenia pre cenu dlhopisu s nulovým kupónom. To činí kalibráciu modelu na tržné dáta viac obtiažnejšou než v prípade Hull-Whiteovho modelu. Skutočne, keď používame strom na ocenenie opcie na dlhopis, musíme skonštruovať strom až do maturity dlhopisu, ktorý môže byť oveľa väčší než samotný strom skonštruovaný do expirácie príslušnej opcie. Podobná nepríjemnosť vzniká, keď potrebujeme simulovať sadzby, ktoré nie sú okamžité. Ak potrebujeme simulovať napríklad 4-ročnú sadzbu za jeden rok, musíme skonštruovať strom až do času 5 rokov. V prípade Hull-Whiteovho modelu nám stačí simulovať spotovú sadzbu do jedného roku a forwardovú sadzbu platnú za 1 rok na 4 roky ľahko spočítame z analytického vyjadrenia pre cenu dlhopisu s nulovým kupónom.

Ďalšou a oveľa podstatnejšou nevýhodou tohoto modelu je, že stredná hodnota bankového účtu je nekonečno bez ohľadu na uvažovanú splatnosť, ktorá vzniká ako dôsledok lognormálneho rozdelenia úrokových sadzieb. Ide o všeobecný problém lognormálnych modelov, ktorý je čiastočne prekonaný tým, že používame stromy s konečnou množinou stavov a teda s konečným počtom budúcich stredných hodnôt.

Black a Karasinski predpokladali, že logaritmus $ln(r(t))$ okamžitej úrokovej sadzby sa vyvíja pod rizikovo neutrálnou mierou podľa rovnice

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a(t)\ln(r(t))]dt + \sigma(t)dW(t), \tag{2.17}$$

kde $r(0)$ je kladná konštanta, $\theta(t), a(t)$ a $\sigma(t)$ sú deterministické funkcie času, ktoré môžu byť zvolené tak, aby presne vyrovnávali počiatočnú výnosovú krivku a niektoré krivky tržnej volatility.

Podobne ako v Hull-White modele môžeme nastaviť $a(t) = a$ a $\sigma(t) = \sigma$, kde a a σ sú kladné konštanty

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a\ln(r(t))]dt + \sigma dW(t). \tag{2.18}$$

Tento výber môžeme argumentovať tým, že ak chceme presnú kalibráciu na súčasnú výnosovú krivku, perfektné vyrovnanie na časovú štruktúru volatility môže byť celkom nebezpečné a musí sa s tým zaobchádzať opatrne. Dôvod je dvojaký. Za prvé, nie všetky volatility, ktoré sú kótované na trhu sú významné. Niektoré tržné sektory sú menej likvidné, teda priradené kotácie nemusia byť spoľahlivé a dokonca nemusia mať ani informačný charakter. Za druhé, budúce štruktúry volatility

[5] Hoci lognormálny proces okamžitej úrokovej sadzby nevedie k lognormálnych jednoduchým forwardovým sadzbám alebo lognormálnym swapovým sadzbám.

implikované obecným procesom zmeny v úrokových sadzbách sú pravdepodobne nerealistické v tom, že neodpovedajú typickým tržným tvarom. Tým, že jedinou časovo závislou funkciou bude θ, rozhodneme o presnom vyrovnaní na súčasnú výnosovú krivku a zvyšné dva parametre ponecháme pre účely kalibrácie.

Ako v predchádzajúcom modele, koeficienty a a σ môžu byť interpretované nasledovne: a určuje mieru „rýchlosti“, pri ktorej logaritmus $r(t)$ smeruje k dlhodobej hodnote; σ je štandardná odchýlka okamžitej sadzby $r(t)$ za jednotku času.

Z rovnice (2.18) a použitím Itôvho lemmata dostaneme

$$dr(t) = r(t)\left[\theta(t) + \frac{\sigma^2}{2} - a\ln(r(t))\right]dt + \sigma r(t)dW(t), \tag{2.19}$$

ktorej explicitné riešenie splňuje pre každé $s \leq t$,

$$r(t) = \exp\left\{\ln r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\right\} \tag{2.20}$$

Preto $r(t)$ podmienená $\mathcal{F}_s$ je lognormálne rozdelená s prvým a druhým momentom v príslušnom poradí

$$E\left(r(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{\ln r(s)e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \frac{\sigma^2}{4a}\left[1 - e^{-2a(t-s)}\right]\right\} \tag{2.21}$$

$$E\left(r^2(t) \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{2\ln r(s)e^{-a(t-s)} + 2\int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \frac{\sigma^2}{a}\left[1 - e^{-2a(t-s)}\right]\right\}. \tag{2.22}$$

Navyše nastavením

$$\alpha(t) = \ln r(0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du, \tag{2.23}$$

dostaneme

$$\lim_{t\to\infty} E(r(t)) = \exp\left(\lim_{t\to\infty}\alpha(t) + \frac{\sigma^2}{4a}\right). \tag{2.24}$$

Limita na ľavej strane sa nedá spočítať analyticky. Avšak nasledujúca numerická procedúra poskytuje pre extrapoláciu asymptotickú hodnotu $\alpha(t)$.

2.2.1 Konštrukcia trinomického stromu

Ako sme už spomínali, Black-Karasinski model nemá analytické vyjadrenie ani pre diskontovaný dlhopis, ani pre opcie na dlhopisy. Na ocenenie týchto a iných finančných inštrumentov prostredníctvom tohoto modelu musia byť použité numerické procedúry. Efektívna numerická procedúra bola navrhnutá Hullom a Whiteom, ktorá je založená na priamej transformácii trinomického stromu, ktorú sme ilustrovali v sekcii 2.1. Okamžitú spotovú sadzbu môžeme napísať v tvare

$$r(t) = e^{\alpha(t)+x^*(t)}, \tag{2.25}$$

kde α a x^* sú definované ako (2.23) a (2.13). Obdobne ako pre Hull-Whiteov model, najprv konštruujeme trinomický strom pre x^* a potom použijeme (2.25) a nahradíme uzly v strome tak, aby sme získali počiatočnú výnosovú krivku.

Zafixujme časový horizont T a časy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ a položme $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ pre každé i. Opäť označme uzly (i, j), kde časový index i má rozsah od 0 do n a priestorový index j od $j_{min}(i)$ do $j_{max}(i)$. Označme $x^*_{i,j}$ hodnotu procesu v uzle (i, j) a položme $x^*_{i,j} = j\Delta x^*_i$, kde Δx^*_i je definované ako (2.13). Vetvenie stromu a vetviace pravdepodobnosti sú taktiež rovnako definované ako v HW modele.

Znova označme α_i posunutie v čase t_i, ktoré je spoločné pre všetky uzly $(i, \cdot)$. Veľkosť α_i je numericky spočítaná s jedným rozdielom, že platí (2.25). Ďalej označme $Q_{i,j}$ súčasnú hodnotu inštrumentu, ktorý vypláca 1 ak dosiahne uzol (i, j) a 0 v ostatných uzloch. Hodnoty α_i a $Q_{i,j}$ sú spočítané rekurzívne od α_0 tak, aby sme získali správne diskontné faktory pre prvú splatnosť t_1, napríklad $\alpha_0 = \ln(-\ln(P^M(0, t_1))/t_1)$. Len čo je známa hodnota α_i, hodnoty $Q_{i+1,j}$, $j = j_{min}(i + 1), \ldots, j_{max}(i + 1)$ sú spočítané prostredníctvom

$$Q_{i+1,j} = \sum_k p(i + 1, j|i, k) \exp[-\exp(\alpha_i + k\Delta x^*_i)\Delta t_i] Q_{i,k}, \tag{2.26}$$

kde opäť rovnako platí 2.1.1. Po získaní hodnôt $Q_{i,j}$ pre každé $j = j_{min}(i), \ldots, j_{max}(i)$ spočítame hodnotu α_i numerickým riešením

$$\psi(\alpha_i) := P(0, t_{i+1}) - \sum_{j=j_{min}(i)}^{j_{max}(i)} Q_{i,j} \exp[-\exp(\alpha_i + j\Delta x^*_i)\Delta t_i] = 0. \tag{2.27}$$

Nakoniec musíme aplikovať exponenciálnu funkciu pre všetky uzly stromu tak, aby sme v každom uzle (i, j) mali príslušnú hodnotu $r_{i,j} = \exp(x^*_{i,j} + \alpha_i)$.

2.3 Ocenenie derivátov s predčasným splatením pomocou stromu

V predchádzajúcej kapitole sme predstavili konštrukcie trinomických stromov založené na diskrétnych stavoch procesu vývoja úrokových sadzieb pri rizikovo neutrálnej miere. V tejto kapitole ukážeme ako oceniť všeobecné deriváty, ktorých ocenenie nezávisí na vývoji minulých cien, prostredníctvom tejto numerickej procedúry. Táto technika je obzvlášť užitočná, keď sa snažíme oceniť dlhové inštrumenty, ktoré majú v sebe zahrnutú možnosť predčasného splatenia. Okrem tejto techniky existuje viacero metód, napríklad Monte Carlo a iné. Na začiatok spomenieme niekoľko všeobecných poznámok k oceneniu pomocou stromov a potom prejdeme k detailnejším popisom.

Na ocenenie produktov s predčasným splatením môžeme použiť stromové štruktúry, keď fundamentálna podkladová premenná je málo dimenzionálna, povedzme jedna alebo dve dimenzie. Toto je splnené v prípade modelov úrokových sadzieb, ktoré v tejto práci uvažujeme. V týchto prípadoch reprezentuje strom ideálny inštrument vďaka svojej vlastnosti ocenenia „spätne v čase“. V každom koncovom uzle stromu je známa hodnota výplatnej funkcie, pričom môžeme postupovať späť v čase a aktualizovať hodnotu uzlu prostredníctvom diskontovania. Typickým príkladom je dlhopis, ktorý vypláca istinu a prípadnú kupónovú sadzbu v dobe splatnosti. V každom uzle stromu porovnávame spätne kumulovanú hodnotu s výplatou plynúcou z uplatnenia predčasného splatenia v danom uzle. Na tomto princípe funguje rozhodovací proces, či v danom uzle uplatníme predčasné splatenie alebo nie. Dosiahnutím počiatočného uzlu stromu v čase 0, dostaneme približnú cenu inštrumentu s možnosťou predčasného splatenia.

Stromy majú všeobecne problémy s ocenením produktov, ktorých budúca hodnota závisí na hodnotách minulých. Na ocenenie takýchto produktov sú vhodné Monte Carlo metódy. Skutočne, v prípade, že sa pokúsime oceniť takýto kontrakt spätne z koncových uzlov stromu máme okamžite problém, pretože výplata v ľubovoľnom finálnom uzle závisí na minulej histórii podkladovej premennej, ktorá ale v čase ocenenia nie je známa. Existujú však procedúry, ktoré dokážu učiniť stromy schopné oceniť tieto produkty, typickým príkladom sú bariérové a lookback opcie.

Predpokladajme, že sme vybrali model okamžitých úrokových sadzieb a príslušný strom, presnejšie trinomický strom konštruovaný podľa procedúry popísanej vyššie. Ďalej máme konečnú množinu časových okamžikov $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$ a v každom čase t_i konečný počet stavov. Časový horizont T je najdlhšia splatnosť, ktorá je relevantná pre ocenenie a daný derivát. j-tý uzol v čase t_i je označený ako (i, j) s priradenou úrokovou sadzbou $r_{i,j}$ a $i = 0, \ldots, n$, kde pre každé i máme pre rozsah j od $j_{min}(i)$ do $j_{max}(i)$.

Jednoduchá výplata

Na začiatok uvažujme jednoduchý prípad derivátu, ktorého výplata v čase T je daná funkciou $H(T, r_T)$. Ďalej označme $h(t, r_t)$ bez-arbitrážnu cenu pohľadávky v čase t pri úrokovej sadzbe r_t. Je zrejmé, že platí $h(T, r_T) = H(T, r_T)$ a

$$\begin{aligned} h(0, r_0) &= E\big\{e^{-\int_0^T r_t dt} h(T, r_T)\big\} \\ &= E\Big\{e^{-\int_0^{t_{n-1}} r_t dt} E\big[e^{-\int_{t_{n-1}}^T r_t dt} h(T, r_T) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}\big]\Big\} \\ &= E\big\{e^{-\int_0^{t_{n-1}} r_t dt} h(t_{n-1}, r_{t_{n-1}})\big\} \\ &= E\big\{e^{-\int_0^{t_1} r_t dt} h(t_1, r_{t_1})\big\}. \end{aligned}$$

Hodnota $h(t_i, r_{t_i})$ je spočítaná iteratívne, diskontovaním stredných hodnôt v neskorších časových okamžikoch, napríklad

$$h(t_{n-1}, r_{t_{n-1}}) = E\big[e^{-\int_{t_{i-1}}^{t_i} r_t dt} h(t_i, r_{t_i}) \mid \mathcal{F}_{t_{i-1}}\big] \tag{2.28}$$

tak, že hodnotu derivátu môžeme spočítať v ľubovoľnom čase iteratívne a to tak, že začneme v čase výplaty T. Toto je vlastnosť, ktorá je použitá v ocenení prostredníctvom stromu. Presnejšie je použitá nasledujúca procedúra založená na spätnej indukcii.

Označme $h_{i,j}$ hodnotu derivátu v uzle (i, j) a nastavme koncové uzly

$$h_{n,j} := h(T, r_{n,j}) = H(T, r_{n,j}). \tag{2.29}$$

V koncovom čase $t = t_n = T$ sú hodnoty derivátu v stromových uzloch známe vďaka podmienke pre výplatu (2.29). Teraz sa posunieme naspäť do času t_{n-1} a aplikujeme všeobecné pravidlo (2.28) pričom $i = n$. Začneme od najnižšej úrovne $j = j_{min}(n-1)$ až do $j = j_{max}(n-1)$ a použijeme aproximáciu

$$h(t_{n-1}, r_{t_{n-1}}) \approx e^{-r_{t_{n-1}}(T - t_{n-1})} E[h(T, r_T) \mid \mathcal{F}_{t_{n-1}}],$$

aby sme spočítali hodnotu derivátu v uzle $(n-1, j)$ ako diskontované stredné hodnoty odpovedajúce hodnotám v uzloch $(n, k+1), (n, k)$ a $(n, k-1)$

$$h_{n-1,j} = e^{-r_{n-1,j}(T - t_{n-1})}[p_u h_{n,k+1} + p_m h_{n,k} + p_d h_{n,k-1}].$$

Potom sa posunieme do času t_{n-2}, znovu aplikujeme (2.28) pričom $i = n-1$ a spočítame diskontované stredné hodnoty ako v predchádzajúcom kroku. Všeobecný krok naspäť medzi časmi t_{i+1} a t_i je popísaný nasledovne

$$h_{i,j} = e^{-r_{i,j}(t_{i+1} - t_i)}[p_u h_{i+1,k+1} + p_m h_{i+1,k} + p_d h_{i+1,k-1}].$$

Pokračujeme v spätnom prechádzaní stromu až kým nedosiahneme počiatočný uzol $(0, 0)$, ktorému odpovedá hodnota $h_{0,0}$, ktorá dáva požadovanú aproximáciu pre cenu derivátu $h(0, r_0)$.

Jednoduchá výplata s predčasným uplatnením

Predpokladajme rovnakú výplatu ako v predchádzajúcom prípade ale s tým rozdielom, že držiteľ kontraktu má právo požiadať o predčasné splatenie v ľubovoľnom časovom okamihu t pred splatnosťou T, ktorý prijíma z dôsledku uplatnenia v čase t čiastku $H(t, r_t)$ (typickým príkladom sú americké opcie). Vzhľadom k tomu, že plánujeme použiť strom s časovými okamžikmi $t_i, i = 0, 1, \ldots, n$, bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať, že predčasné uplatnenie môže vzniknúť len v časových okamihoch t_i.

Potrebujeme upraviť všeobecný krok spätnej indukcie v strome, ktorý je popísaný medzi časovými okamžikmi t_{i+1} a t_i nasledovne:

$$h_{i,j} = max\Big(e^{-r_{i,j}(t_{i+1}-t_i)}[p_u h_{i+1,k+1} + p_m h_{i+1,k} + p_d h_{i+1,k-1}], H(t_i, r_{i,j})\Big).$$

V skutočnosti, o čo sa snažíme je rolovať „spätne-kumulovanú“ hodnotu $h_{i+1,\cdot}$ v čase t_{i+1} do času t_i a potom následne porovnať túto „spätne-kumulovanú“ hodnotu

$$e^{-r_{i,j}(t_{i+1}-t_i)}[p_u h_{i+1,k+1} + p_m h_{i+1,k} + p_d h_{i+1,k-1}]$$

s hodnotou okamžitého uplatnenia opcie, ktorú by sme boli získali ak by sme ju realizovali

$$H(t_i, r_{i,j}).$$

Potom vezmeme najlepšiu z týchto dvoch možností. Napríklad tú, ktorá maximalizuje hodnotu ako sme to ilustrovali na našom príklade. Niektoré kontrakty ako napríklad opcie bermudského typu povoľujú možnosť realizácie len v niektorých predom definovaných časových okamihoch, čo vedie k oveľa viac redukovanej podmnožine časových okamžikov pre uplatnenie opcie než je kompletná množina všetkých časových okamžikov stromu $t_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Takže, keď sa pohybujeme spätne v strome pri ocenení takého typu kontraktu, porovnanie medzi „spätne-kumulovanou“ hodnotou a hodnotou okamžitého uplatnenia kontraktu vzniká iba v časových okamihoch, kedy môžeme danú možnosť uplatniť. Vo zvyšných okamžikoch je krok spätnej indukcie rovnaký ako v predchádzajúcom prípade bez možnosti predčasného uplatnenia.

Ďalší prípad výplaty

Druhý trochu komplikovanejší príklad výplatnej funkcie v čase T vyzerá nasledovne:

$$g(T, P(T, T_1), P(T, T_2), \ldots, P(T, T_m)), \tag{2.30}$$

kde $P(T, T_1), P(T, T_2), \ldots, P(T, T_m)$ sú ceny dlhopisov v čase T pre narastajúce splatnosti $T_1, T_2, \ldots, T_m$ a $T_1 > T$. Ide o typický prípad, keď výplata je závislá napríklad na referenčných alebo swapových sadzbách, ktoré môžu byť vyjadrené v termínoch cien dlhopisov s nulovým kupónom.

Ak zvolíme analyticko-poddajný model okamžitých úrokových sadzieb, napríklad Hull-White model (2.1), u ktorého existujú explicitné formule pre vyjadrenie cien bezkupónových dlhopisov ako funkcie času a úrokovej sadzby $P(t, S) = \Pi(t, S; r_t)$, kde Π je explicitná funkcia. V takýchto prípadoch môžeme nahradiť výplatu (2.30) nejakou funkciou $\hat{g}(T, r_T)$, ktorú môžeme oceniť presne ako v prvom prípade jednoduchej výplaty, kde strom konštruujeme len do času T.

Namiesto toho, ak zaobchádzame s modelom ako Black-Karasinski (2.2), ktorý nedisponuje analytickými formulami pre ceny dlhopisov, v takomto prípade sme nútený konštruovať strom až do poslednej príslušnej splatnosti T_m.

Každá hodnota dlhopisu v čase T je získaná prostredníctvom spätnej indukcie, priradením hodnoty 1 všetkým uzlom v strome v príslušnej maturite. Poznamenajme, že potrebujeme rozširovať celý vektor cien dlhopisov spätne v čase spolu s úrokovou sadzbou a „spätne-kumulovanou“ hodnotou. Preto v každom uzle stromu v danom čase t_i musíme uložiť všetky ceny dlhopisov, ktoré sme už spočítali do toho času, napríklad všetky $P(t_i, T_l), T_l > t_i$. Navyše vždy, keď dosiahneme novú splatnosť $t_i = T_l$, musíme pridať komponentu do vektoru a nastaviť hodnotu tejto novej komponenty rovnú 1. Táto komponenta predstavuje cenu dlhopisu $P(\cdot, T_l)$, ktorá vznikla v práve dosiahnutom čase $t_i = T_l$ a ktorej súčasná hodnota je nepochybne rovná 1. Z toho vidíme, že ako sa pohybujeme spätne, dimenzia vektoru hodnoty dlhopisu uložená v každom uzle môže vzrásť.

Vzhľadom k tomu, že v každom uzle máme celú krivku bezkupónových dlhopisov podľa príslušných časových okamžikoch, kalkulačná procedúra od času T do času 0 je ekvivalentná predchádzajúcim dvom príkladom v závislosti na prítomnosti možnosti predčasného uplatnenia.

Kapitola 3

Kalibrácia

Oba modely okamžitých úrokových sadzieb, HW a BK model, ktoré sme spomenuli v tejto práci odpovedajú súčasnej výnosovej krivke pozorovanej na trhu prostredníctvom deterministickej funkcie $\theta(t)$. Parametre a a σ kalibrujeme ako hodnoty, pre ktoré je štvorcová suma rozdielov medzi tržnými cenami a modelovanými cenami minimálna. Pri takejto kalibrácii je kľúčové vybrať vhodný finančný nástroj, ktorý svojou povahou odpovedá alebo sa veľmi podobá inštrumentu, ktorý sa snažíme oceniť. Pre náš produkt, na ktorý v nasledujúcej kapitole 4 aplikujeme oceňovací model a ktorý v nej samozrejme bližšie predstavíme, sa javia swapcie ako vhodne zvolený úrokový nástroj. Swap opcie alebo swapcie sú opcie na úrokové swapy a zaraďujeme ich medzi ďalšie populárne typy úrokových opcií. Dávajú držiteľovi právo vstúpiť do určitého úrokové swapu v určitý čas v budúcnosti, presnejšie v čase splatnosti swapcie. Držiteľ samozrejme nemusí toto právo uplatniť. Opodstatnením výberu tohoto finančného derivátu je, že swapciu môžeme chápať ako istý typ opcie na dlhopis, viď str. 660 v [6].

Úrokový swap môžeme uvažovať ako dohodu o výmene dlhopisu s fixným kupónom za dlhopis s pohyblivým kupónom. Na začiatku swapu je hodnota dlhopisu s pohyblivým kupónom vždy rovná nominálnej hodnote swapu. Swapciu preto môžeme považovať za opciu na výmenu dlhopisu s fixným kupónom za nominálnu hodnotu swapu, čo je vlastne typ opcie na dlhopis.

Pre odvodenie tržnej ceny swapcie musíme najprv poznať cenu úrokového swapu, na ktorý je naviazaná.

3.1 Úrokový swap

Nasledujúce vzťahy pochádzajú z prvej kapitoly knihy [11]. Úrokový swap je dohoda medzi dvoma stranami o budúcej periodickej výmene platieb. Tento kontrakt definuje dátumy, kedy sa vymieňajú platby a spôsob akým sú tieto platby kalkulované. Označme $\mathcal{T} := \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$ množinu časov a $\tau := \{\tau_{\alpha+1}, \dots, \tau_\beta\}$ množinu časových období medzi nimi, kde $\tau_i = T_i - T_{i-1}$. Najbežnejší typ swapu je „plain-vanilla“ úrokový swap. Uvažujme časový okamžik T_i z množiny $\mathcal{T}$, v ktorom jedna strana platí čiastku $N\tau_i K$, ktorá odpovedá úroku z nominálnej hodnoty N pri vopred stanovej fixnej sadzbe K za časové obdobie τ_i. Na oplátku prijíma od protistrany čiastku $N\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$, ktorá odpovedá úrokom pri spotovej úrokovej miere $L(T_{i-1}, T_i)$ v čase T_{i-1} splatnej v čase T_i z rovnakej nominálnej hodnoty za rovnaké časové obdobie. Táto spotová úroková miera predstavuje referenčnú úrokovú sadzbu. Pre český finančný trh je to PRIBOR (Prague Interbank Offered Rate).

Diskontovaná výplata v čase $t < T_\alpha$ strany, ktorá platí fixnú sadzbu je

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) N \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K), \tag{3.1}$$

zatiaľ čo diskontovaná výplata pre stranu, ktorá prijíma fixnú sadzbu spočítame ak rovnicu (3.1) vynásobíme -1.

Úrokový swap si môžeme predstaviť ako portfólio FRA (Forward Rate Agreement) kontraktov, kde FRA môžeme považovať za špeciálny prípad úrokového swapu na jedno obdobie. Hodnotu swapu v čase t pre stranu prijímajúcu fixnú sadzbu je

$$N\Big(P(t, T_\beta) - P(t, T_\alpha) + \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i)\Big). \tag{3.2}$$

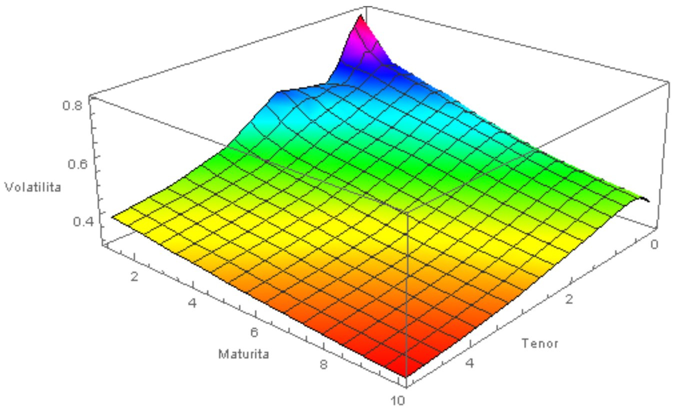
Obdobne určíme hodnotu swapu pre protistranu.

Forwardová swapová sadzba $S_{\alpha,\beta}(t)$ v čase t pre množinu časov $\mathcal{T}$ a časových období τ je úroková sadzba K stanovená pre fixnú nohu swapu, ktorá zaručuje, že kontrakt je v čase t spravodlivý pre obe strany, tj. vzťah (3.2) je rovný 0. Potom

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i)}. \tag{3.3}$$

3.2 Swapcie

Ceny swapcií na peniazoch (at-the-money) so splatnosťou do 5 rokov sú dostupné na českom trhu pre CZK (česká koruna). Ceny kótované na trhu nie sú skutočné ceny, namiesto toho sú swapcie kótované ako Blackove implikované volatility, viď nasledujúci obrázok 3.1.



Obr. 3.1: Implikovaná volatilita pre swapcie obchodované v CZK k dátumu 1.11.2013. Zdroj Reuters, graf vlastná úprava.

Uvažujme európsku payer [1] swapciu, ktorá dáva držiteľovi právo uzavrieť úrokový swap v dobe splatnosti swapcie T_α, v ktorom bude platiť protistrane fixnú čiastku až do splatnosti podkladového swapu T_β, kde $T_\beta - T_\alpha$ sa označuje ako tenor swapcie.

Berme v úvahu hodnotu podkladového swapu v čase prvej re-fixácie T_α pohyblivej sadzby, ktorý je zároveň časom splatnosti swapcie. Táto hodnota je

$$N \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i)\tau_i(F(T_\alpha; T_{i-1}, T_i) - K).$$

Opcia bude uplatnená v prípade, že táto hodnota je kladná. Potom diskontovaná výplata hodnota tejto swapcie k súčasnému času t je vyjadrená vzťahom

$$ND(t, T_\alpha)\left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i)\tau_i(F(T_\alpha; T_{i-1}, T_i) - K)\right)^+.$$

V praxi sa oceňujú swapcie pomocou Blackovej formule. Cena uvažovanej swapcie v čase 0 sa spočíta zo vzorca, ktorý nájdeme v [11]

$$\mathbf{PS}^{Black}(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\alpha,\beta}) = NBl(K, S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}, \omega) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i K P(t, T_i), \tag{3.4}$$

[1] V tejto práci budeme používať tento anglický termín, pretože je trefnejší než preklad „platiaca“ swapcia.

kde

$$\begin{aligned}
Bl(K,F,v,\omega) &= F\omega\Phi(\omega d_1(K,F,v)) - K\omega\Phi(\omega d_2(K,F,v)),\\
d_1(K,F,v) &= \frac{\ln(F/K)+v^2/2}{v},\\
d_2(K,F,v) &= \frac{\ln(F/K)-v^2/2}{v},\\
v &= \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_\alpha}
\end{aligned}$$

a $\sigma_{\alpha,\beta}$ je implikovaná volatilita kótovaná na trhu a pre uvažovanú payer swapciu je $\omega = 1$ (call opcia). Podobne by sme spočítali cenu receiver swapcie s jedinou zmenou $\omega = -1$ (put opcia).

Z analytickej formule pre výpočet ceny put opcie v čase t na kupónový dlhopis so splatnosťou v čase T a realizačnou cenou K uvedenej v (2.11) môžeme analyticky oceniť aj európske swapcie ako dôsledok toho, že ich môžeme považovať za opcie na kupónové dlhopisy. Uvažujme payer swapciu so strike cenou K, splatnosťou v čase T a nominálnou hodnotou N, ktorá dáva držiteľovi právo vstúpiť v čase T do úrokového swapu s výplatnými časmi $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$, $T_1 > T$, kde platí fixnú sadzbu K a prijíma PRIBOR. Označme τ_i časové obdobie medzi T_{i-1} a T_i, $i = 1, \dots, n$ a množinu $c_i := K\tau_i$ pre $i = 1, \dots, n-1$ a $c_n := 1 + K\tau_n$. Ďalej označme r^* hodnotu spotovej úrokovej sadzby v čase T, pre ktorú platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A(T,T_i) e^{-B(T,T_i)r^*} = 1,$$

a položme $K_i := A(T,T_i)\exp(-B(T,T_i)r^*)$, potom cena platiacej swapcie v čase $t < T$ je daná vzťahom

$$\mathbf{PS}(t,T,\mathcal{T},N,K) = N\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{ZBP}(t,T,T_i,K_i). \tag{3.5}$$

Analogicky môžeme vyjadriť cenu receiver swapcie.

Pre HW model spočítame modelované ceny swapcií pomocou (3.5). Pre BK model avšak neexistujú presné analytické formule na vyjadrenie cien diskontovaných dlhopisov a opcií na dlhopisy. Preto je nevyhnutné spočítať cenu swapcií prostredníctvom stromu, ktorého konštrukciu sme popísali v 2.2.1. Pre účely kalibrácie a spočítanie tržných cien swapcií sme použili tržné implikované volatility kótované na trhu k 1.11.2013 pre tenory 3 a 5 rokov, ktoré nájdeme v tabuľke 3.1.

	Tenor	
Maturita	3Y	5Y
1M	58.6	48.5
2M	60.4	52.4
3M	61	54.3
6M	62	56.7
9M	59.2	55
1Y	57.4	53.2
18M	52.8	49.6
2Y	49.8	46.1
3Y	42.6	39.6
4Y	39.1	36.6
5Y	36.3	33.9

Tabuľka 3.1: Implikované volatility (v %) pre swapcie k 1.11.2013. Zdroj Reuters.

	a	σ
Hull-White model	0.0341	0.0245
Black-Karasinski model	0.0289	0.262

Tabuľka 3.2: Parametre kalibrované na tržné swapčné ceny.

V tabuľke 3.2 nájdeme parametre a a σ získané kalibráciou pre príslušné modely.

Pozrime sa ešte na stredné kvadratické chyby odhadov parametrov a a σ pre jednotlivé modely, ktoré nájdeme v tabuľke 3.3. Napriek tomu, že HW model o niečo málo lepšie fituje teoretické tržné ceny než BK model, nemôžeme tento model prehlásiť za lepší. Ba naopak, v nasledujúcej kapitole ukážeme, že vhodnejším kandidátom pre ocenenie nami vybraného finančného nástroja je práve BK model. Možným dôvodom prečo je stredná kvadratická chyba simulovaných cien väčšia u BK modelu je práve aproximácia cien swapcií pomocou trinomického stromu, než v prípade HW modelu je to analytická formula. Zároveň musíme podotknúť, že tieto výsledky sú založené na tržných cenách k jednému určitému dni, ak sa situácie čo len trochu zmení, výsledky kalibrácie sa môžu výrazne líšiť.

	HW model	BK model
RMSE	2.05×10^{-3}	2.78×10^{-3}
MSE	4.21×10^{-6}	7.73×10^{-6}

Tabuľka 3.3: Stredné kvadratické chyby odhadov parametrov pre jednotlivé modely.

Kapitola 4

Sporiace štátne dlhopisy

V novembri 2011 Ministerstvo financií ČR vydalo pilotnú emisiu sporiacich štátnych dlhopisov (SSD) určených tuzemským a zahraničným fyzickým osobám a neziskovým inštitúciám. Cieľom ministerstva bolo zmapovať záujem drobných investorov o tento inštrument a najmä navýšiť podiel držiteľov štátneho dlhu Českej republiky práve v segmente domácností a neziskových inštitúcií. Jedná sa o zdroj financovania štátu, ktorého rozvoj a systematická prevádzka by mohla priniesť v strednodobom výhľade významný stabilizujúci prvok riadenia refinančného rizika, ktoré vzniká neschopnosťou štátu emitovať nové dlhopisy na finančnom trhu k splateniu svojich dlhopisov alebo záväzkov, ktoré sú v daný moment splatné. Ďalej môže zmierniť neistoty ohľadom funkčnosti európskych finančných trhov a priniesť žiadúcu inštitucionálnu diverzifikáciu držiteľov štátneho dlhu ČR smerom k posíleniu domáceho konzervatívne ladeného segmentu domácností. Štruktúra štátneho dlhu ČR je z hľadiska držiteľov charakterizovaná veľmi nízkym podielom spomínaného segmentu. Čo dosvedčuje nasledujúca tabuľka, ktorej čísla pochádzajú z oficiálnych webových stránok a publikácií Ministerstva financií ČR [25].

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Domácnosti	1,1%	1,1%	0,9%	2,0%	3,7%	5,3%	4,8%
Domáce finančné inštitúcie	71,2%	69,7%	65,0%	61,9%	63,8%	56,4%	65,0%
Zahraničné inštitúcie	24,2%	25,9%	29,2%	28,9%	29,3%	32,1%	27,3%
Ostatné inštitúcie	3,5%	3,3%	4,9%	7,2%	3,3%	6,1%	2,8%

Tabuľka 4.1: Štruktúra držiteľov štátneho dlhu ČR.

Táto diskrepancia vyplýva z dosavádnej koncentrácie domácej emisnej činnosti ČR na inštitucionálny finančný sektor a z absencie dlhopisového nástroja s emisnými podmienkami zameranými na drobných investorov a domácností, ktorých motiváciou je dlhodobé sporenie prostredníctvom štátnych dlhopisov. Takéto nástroje sú bežné vo viacerých vyspelých zemiach ako napríklad Nemecko, Rakúsko, Kanada, Spojené štáty americké, Švédsko, Maďarsko alebo Poľsko.

Nepredpokladalo sa, že predaje dlhopisov pilotnej emisie presiahnu 10 miliárd Kč. Pôvodné upisovacie obdobie stanovené emisnými podmienkami od 3.10.2011 do 1.11.2011 bolo skrátené len na 5 dní, a to do 7.10.2011 z dôvodu veľkého záujmu upisovateľov o tieto dlhopisy. Aj napriek výraznému skráteniu upisovacieho obdobia bolo upísaných dlhopisov v celkovej nominálnej hodnote 20,4 miliardy Kč. Mimoriadny záujem verejnosti o investovanie finančných prostriedkov do SSD môžeme pričítať vysokej atraktívnosti tohoto inštrumentu, ktorý predstavuje bezpečný a konzervatívny spôsob sporenia založený na garantovanom úrokovom výnose a garancii splatenia dlžnej čiastky priamo zo strany Českej republiky. Tento enormný dopyt môže indikovať takisto nevhodne nastavené parametre a emisné podmienky dlhopisu, ktoré výrazne zvýhodňujú držiteľa voči emitentovi. Dôležitou vlastnosťou SSD je postupne rastúci kupón (v anglickej terminológii tzv. step-up coupon), ktorého cieľom je motivovať držiteľa držať dlhopis do splatnosti. Zároveň je ale možné SSD v určitých časových obdobiach predčasne splatiť bez sankcií a poplatkov. Tieto doplnkové vlastnosti robia tento dlhový inštrument veľmi atraktívnym pre potencionálnych investorov.

Predmetom našej štúdie bude oceniť vybrané sporiace štátne dlhopisy spolu s vnorenou opciou, ktorá predstavuje možnosť predčasného splatenia istiny na požiadanie držiteľa.

Emitent	Ministerstvo financií ČR	Ministerstvo financií ČR	Ministerstvo financií ČR
Zkrátený názov	SSD-P ČR, FIX %, 16 II	SSD-K ČR, FIX %, 18 II	SSD-R ČR, FIX %, 18 II
Poradové číslo emisie	84.	85.	86.
Nominálna hodnota	1 Kč	1 Kč	1 Kč
Emisný kurz k dátumu emisie	100% nominálnej hodnoty	100% nominálnej hodnoty	100% nominálnej hodnoty
Forma dlhopisu	cenný papier na doručiteľa	cenný papier na doručiteľa	cenný papier na doručiteľa
Podoba dlhopisu	zaknihovaný cenný papier	zaknihovaný cenný papier	zaknihovaný cenný papier
Druh dlhopisu	štátny dlhopis	štátny dlhopis	štátny dlhopis
Mena	koruna česká (CZK)	koruna česká (CZK)	koruna česká (CZK)
Dátum počiatku lehoty pre upisovanie emisie	4.11.2013	4.11.2013	4.11.2013
Dátum ukončenia lehoty pre upisovanie emisie	12.12.2015	12.12.2017	12.12.2017
Dátum emisie	12.12.2013	12.12.2013	12.12.2013
Dátum splatnosti	12.12.2016	12.12.2018	12.12.2018
Výnos dlhopisu	určený pevnou úrokovou sadzbou*	určený pevnou úrokovou sadzbou*	určený pevnou úrokovou sadzbou*
Zdanenie výnosu dlhopisu	podľa právnych predpisov ČR	podľa právnych predpisov ČR	podľa právnych predpisov ČR
ISIN	CZ0001004170	CZ0001004188	CZ0001004196

*stanovený pre jednotlivé výnosové obdobia, viď obr. 4.3

Obr. 4.1: Základný popis dlhopisov vo vianočnej emisii 2013.

Kupújúci alebo držiteľ SSD (retailový segment) kupuje od emitenta (Ministerstvo financií ČR) puttable dlhopis. Spravidla bývajú tieto dlhopisy s vnorenou put opciou drahšie než dlhopisy bez opcií s rovnakými parametrami. Zároveň musíme podotknúť, že retailový segment sa nebude chovať racionálne ako finančné inštitúcie v zmysle nákupu alebo predaja cenných papierov, tzn. drobní investori v podobe domácností ČR nebudú realizovať svoje opčné právo v mnohých situáciach aj keby to bolo pre nich výhodné. Čo má za následok zníženie ceny vnorenej put opcie. V našom modele uvažujeme, že držiteľ realizuje svoju opciu akonáhle to bude pre neho výhodné. Na ocenenie takto komplikovaných inštrumentov sa v praxi využívajú rôzne numerické techniky. My sa na týchto príkladoch budeme snažiť demonštrovať jednu z nich.

4.1 Podrobnejšie informácie o dlhopisoch

Cieľom strednodobého sporiaceho dlhopisového programu bolo vymedziť základný rámec pre emisnú činnosť Ministerstva financií v oblasti neobchodovateľných domácich štátnych dlhopisov vo výhľade do roku 2014 z hľadiska typov ponúkaných dlhopisov, zabezpečenia technickej prevádzky a distribučnej infraštruktúry. Ministerstvo ponúkalo sporiace štátne dlhopisy v dvoch verejných sériách v priebehu kalendárneho roku, v tzv. jarnej sérii a vianočnej sérii. Indikatívny dátum emisie bol stanovený na jún a december a upisovacie obdobie na máj a november pre príslušnú sériu. Po obmene vedenia na Ministerstvu, prestali byť SSD ponúkané širokej verejnosti. Poslednou bola jarná emisia v roku 2014, teda dohromady s pilotnou emisiou ich bolo šesť. V tejto práci sa zameriame na predposlednú vianočnú emisiu v decembri 2013, ktorá ponúkala nasledujúce typy dlhopisov (obrázok 4.2). Všetky informácie o parametroch dlhopisov sú dostupné na webovej stránke [26].

SSD patria medzi najbezpečnejšie, konzervatívne spôsoby sporenia, pretože predstavujú finančný nástroj s garantovaným výnosom dlhopisu a garanciou splatenia dlžnej čiastky. Platné ohodnotenie finančnej spôsobilosti (rating) dlhodobých korunových záväzkov ČR k dátumu určenia emisných podmienok vykonané spoločnosťou Standard & Poor's je na úrovni AA, spoločnosťou Moody's na úrovni A1 a spoločnosťou Fitch Ratings na úrovni AA-.

Dlhopisy môže upísať len fyzická osoba, občianske združenie fyzických osôb; odborová organizácia alebo organizácia zamestnávateľov; nadácia alebo nadačný fond; všeobecne prospešná spoločnosť; stavovská komora alebo profesijná organizácia; školská právnická osoba, ktorej zriaďovateľom nie je ministerstvo, kraj, obec alebo zväz obcí; Hospodářska komora České republiky alebo Agrární komora České republiky; verejná vysoká škola; verejná výskumná inštitúcia; Česká televize, Český rozhlas alebo Česká tisková kancelář; Všeobecná zdravotní pojišťovna České republiky alebo rezortná, odborová, podniková a ďalšia zdravotná poisťovňa; územné samosprávne celky a vyššie územné samosprávne celky ČR alebo hlavné mesto Praha; dobrovoľný zväzok obcí; Svaz měst a obcí České republiky, Sdružení místních samospráv České republiky alebo Asociace krajů České republiky; spoločenstvo vlastníkov jednotiek.

Predpokladaná celková nominálna hodnota emisie pre 3-ročný prémiový dlhopis bola 5 miliárd korún a pre 5-ročný kupónový dlhopis 500 miliónov korún. Dlhopi-

ZÁKLADNÍ PARAMETRY SPOŘICÍCH STÁTNÍCH DLUHOPISŮ VYDÁVANÝCH DNE 12. 12. 2013				
Státní spořicí dluhopis	**Prémiový**	**Kuponový**	**Reinvestiční**	**Proti-inflační**
Upisovací období 1. tranše	**4. 11. – 29. 11. 2013**	**4. 11. – 29. 11. 2013**	**4. 11. – 29. 11. 2013**	**4. 11. – 29. 11. 2013**
Datum emise tranše	**12.12.2013**	**12.12.2013**	**12.12.2013**	**12.12.2013**
Datum splatnosti emise	**12.12.2016**	**12.12.2018**	**12.12.2018**	**12.12.2020**
Jmenovitá hodnota 1 ks	1 Kč	1 Kč	1 Kč	1 Kč
Emisní kurz	100%	100%	100%	100%
Min. počet ks 1 objednávky dluhopisů	1 000 ks	1 000 ks	1 000 ks	1 000 ks
Pořizovací cena 1 000 ks	1 000 Kč	1 000 Kč	1 000 Kč	1 000 Kč
Max. hodnota objednávky na osobu	50 000 000 ks	50 000 000 ks	50 000 000 ks	50 000 000 ks
Úpis formou reinvestice jmenovité hodnoty	ANO	NE	ANO	ANO
Typ úročení	pevná úroková sazba s prémií v posledním roce	rostoucí pevná úroková sazba	rostoucí pevná úroková sazba	procentní změna indexu spotřebitelských cen
Reinvestice výnosu dluhopisu*	ANO	NE	ANO	ANO
Frekvence připsání výnosu dluhopisu	1x ročně	1x ročně	1x ročně	2x ročně
Výplata výnosu dluhopisu	při splatnosti	1x ročně	při splatnosti	při splatnosti
Možnost předčasného splacení	ANO	ANO	ANO	ANO
Možnost reinvestice jmenovité hodnoty dluhopisu do jiných dluhopisů	ANO	ANO	ANO	ANO

* výnos dluhopisu není vyplácen, ale je reinvestován připsáním dalších spořicích státních dluhopisů ve výši výnosu dluhopisu na majetkový účet

Obr. 4.2: Ponúkané dlhopisy vo vianočnej emisii 2013.

sy mohli byť v súlade s ustanovením § 7 zákona o dlhopisoch vydané v menšom alebo vo väčšom objeme emisie než bola predpokladaná celková nominálna hodnota emisie dlhopisov. Možný rozsah zväčšenia objemu emisie dlhopisov činil 50 miliárd korún. Emisie dlhopisov môžu byť vydávané v rámci lehoty pre upisovanie emisie dlhopisov postupne po častiach, tzy. v tranžiach. Aj v tejto vianočnej emisii bolo upisovacie obdobie prvej tranže skrátené len na 4 dni kvôli vysokému dopytu zo strany upisovateľov. Dohromady bolo upísaných takmer 11 miliárd kusov prémiového 3-ročného dlhopisu a takmer 1,4 miliardy kusov kupónového 5-ročného dlhopisu.

Dlhopisy boli ponúkané k úpisu verejne, prostredníctvom poverených osôb. Medzi sprostredkovateľov upisovania dlhopisov patrili Česká spořitelna, a.s., Československá obchodní banka, a.s., J&T BANKA, a.s., Komerční banka, a.s. a vybrané pobočky Českej pošty, s.p. Jeden upisovateľ môže upísať prostredníctvom jednej žiadosti o úpis najmenej 1000 kusov dlhopisov s nominálnou hodnotou 1 Kč. Ďalej jeden upisovateľ môže podať žiadosť alebo žiadosti o úpis pri úpise dlhopisov každej tranže emisie dlhopisov v celkovom počte najviac päť miliónov kusov pre každú jednotlivú tranžu emisie dlhopisov. Upisovatelia sú povinní pri podaní žiadosti o úpis distribútorovi alebo ministerstvu dôveryhodným spôsobom dosvedčiť, že náležia medzi osoby vyhradené emisnými podmienkami k úpisu. Cenou úpisu dlhopisov príslušnej tranže emisie dlhopisov sa rozumie celková nominálna hodnota dlhopisov upisovaných jedným upisovateľom prostredníctvom jednej žiadosti o úpis násobená jej emisným kurzom. Upisovateľ je povinný uhradiť cenu úpisu dlhopisov do piatich pracovných dní od dátumu ukončenia upisovacieho obdobia príslušnej tranže emisie dlhopisov, ak neurčí ministerstvo najneskôr k dátumu zahájenia upisovacieho obdobia príslušnej tranže emisie dlhopisov inak. Od okamžiku uhradenia ceny úpisu dlhopisov do dátumu vydania príslušnej tranže emisie dlhopisov nie je táto čiastka úročená. Upisovacie obdobie pre prvú tranžu emisie dlhopisov bolo ukončené k dátumu 29.11.2013. O vydaní prípadných ďalších tranžiach emisie dlhopisov môže rozhodnúť emitent a určiť dátum zahájenia a dátum ukončenia upisovacieho obdobia príslušnej ďalšej tranže emisie dlhopisov.

Výnos dlhopisu je určený pevnou úrokovou sadzbou vo výške, ktorá pre každé úrokové obdobie narastá, viď 4.3. Výnosy sú vyplácané jedenkrát ročne, a to vždy k dátumu 12.12. začínajúc rokom 2014 pre vybranú vianočnú emisiu. Celková čiastka výnosov zo všetkých dlhopisov vlastníka tejto emisie dlhopisov vyplatená vlastníkovi dlhopisov sa po zdanení dane vyberanej zrážkou podľa zvláštnej sadzby dane zaokrúhľuje na haliere. Ak pripadne dátum vyplatenia výnosov na deň, ktorý nie je pracovným dňom, bude vyplatenie výnosov uskutočnené prvý nasledujúci pracovný deň bez nároku na výnos za toto odsunutie platby.

Od 1.1.2013 nadobudla platnosť novela zákona č. 192/2012 Sb., o daniach z príjmov, ktorá upravuje zdanenie výnosov. Pred touto novelou bola v súlade so zákonom č. 586/1992 Sb., o daniach z príjmov, efektívna daň sporiacich štátnych dlhopisov vplyvom zaokrúhľovania nulová. Základ dane pre 15% zdanenie výnosov z držania cenných papierov sa stanovoval samostatne za jednotlivé cenné papiere. Základ dane sa následne zaokrúhľoval na celé koruny dole. Pretože nominálna hodnota jedného dlhopisu činí 1 Kč, vplyvom zaokrúhlenia bola efektívna daň nulová. Táto zmena sa netýka starších emisií pred rokom 2013, ktoré budú až do svojej splatnosti podliehať zdaneniu podľa právnej úpravy platnej k dátumu emisie. Všetky nové emisie dlhopisov od začiatku roka 2013 a teda aj naša pozorovaná vianočná emisia budú podliehať zdaneniu podľa spomínanej novely zákona o daniach z príjmov. Daňová úľava padla a úrokové výnosy vyhlasované Ministerstvom financií budú v hrubej výške, a preto budú musieť potencionálni investori počítať s tým, že ich dostanú v poníženej výške o 15% zrážkovú daň.

Výnosové obdobie sa stanovilo ako 12-mesačné, a to vždy od 12.12. príslušného roku do 12.12. nasledujúceho roku. Prvé výnosové obdobie pre vyplatenie výnosu sa stanovilo od 12.12.2013 do 12.12.2014. Výpočet výnosu a pomerného výnosu prebieha na báze skutočného počtu kalendárnych dní v roku a skutočného počtu dní v príslušnom výnosovom období (štandard act/act). Výnos obdrží vždy osoba, ktorá je vlastníkom dlhopisu k dátumu 12.11., začínajúc rokom 2014. Zaobstaranie dlhopisov nie je zaťažené žiadnym poplatkom a podobne nie sú spoplatnené ani ďalšie služby ako napríklad zriadenie a vedenie majetkového účtu, na ktorom budú evidované dlhopisy. Emitent si podľa ustanovení § 9 zákona o dlhopisoch vyhradzuje právo splatiť dlhopisy pred dátumom ich splatnosti vrátane pomerného výnosu v prípade, keď na strane emitenta vo vzťahu k vlastníkovi dlhopisov vzniknú pochybnosti ohľadom pravdivosti poskytnutých údajov a informácií alebo iné pochybnosti o tom, či je úpis dlhopisov v súlade s povahou a požiadavkami stanovenými emisnými podmienkami, či nie sú obchádzané, a to najmä v súvislosti s okruhom osôb oprávnených nadobudnúť tieto dlhopisy vrátane pochybností o poskytnutých informáciách o pôvode finančných prostriedkov použitých k úhrade ceny úpisu dlhopisov.

Dôležitou vlastnosťou tohoto nástroja je možné vrátenie investovaných finančných prostriedkov formou predčasného splatenia, a to bez akejkoľvek finančnej penalizácie. Žiadosť o predčasné splatenie zo strany vlastníka dlhopisov je možné podávať v stanovených obdobiach, tzn. ide o typ bermudskej opcie, ktorú môže uplatniť v určitých obdobiach. Do 500 tisíc kusov nie je žiadosť o predčasné splatenie k jednému dátumu predčasného splatenia nijak obmedzená. Z celkového počtu nad 500 tisíc kusov môže byť predčasne splatené k jednému dátumu predčasného splatenia najviac 50% kusov. Príslušný výnos alebo pomerný výnos za obdobie od dátumu zahájenia príslušného výnosového obdobia do dátumu predčasného splatenia bude po zdanení daňou vyberanou zrážkou podľa zvláštnej sadzby dane vyplatený a nominálna hodnota príslušných dlhopisov bude splatená osobe, ktorá je vlastníkom dlhopisu vždy k prvému pracovnému dňu po príslušnom dátume posledného možného podania žiadosti o predčasné splatenie. V nasledujúcich tabuľkách sú uvedené kupónové platby a stanovené dátumy podania žiadosti o predčasné splatenie pre príslušné typy dlhopisov v danej emisii 4.4, zdroj opäť www.sporicidluhopisycr.cz.

Období	Prémiový	Kuponový	Reinvestiční
12. 12. 2013 – 12. 12. 2014	0,50%	0,50%	0,50%
12. 12. 2014 – 12. 12. 2015	0,50%	1,00%	1,00%
12. 12. 2015 – 12. 12. 2016	6,00%	3,00%	3,00%
12. 12. 2016 – 12. 12. 2017		4,00%	4,00%
12. 12. 2017 – 12. 12. 2018		5,50%	6,50%

Obr. 4.3: Výnosy jednotlivých typov dlhopisov.

4.2 Ocenenie

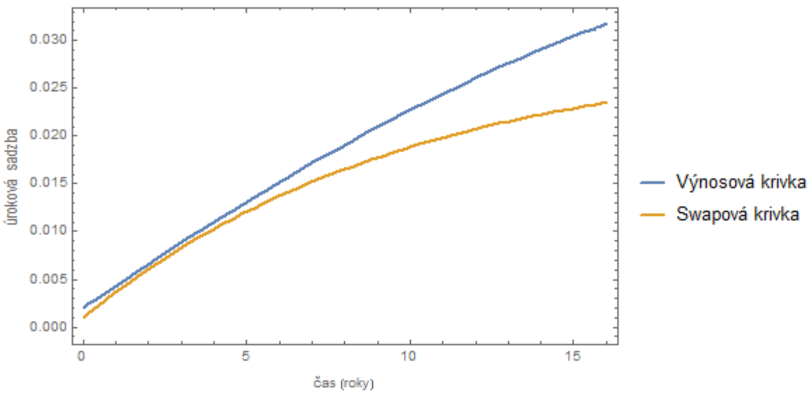
V tejto sekcii sa bližšie pozrieme na ocenenie a nastavenie úrokových parametrov dvoch typov dlhopisov z vianočnej emisie v roku 2013, a to 3-ročného prémiového dlhopisu a 5-ročného kupónového dlhopisu. Upisovacie obdobie pre oba typy

PŘEDČASNÉ SPLACENÍ PRÉMIOVÝCH SPOŘICÍCH STÁTNÍCH DLUHOPISŮ	
Podání žádosti o předčasné splacení	**Datum předčasného splacení**
1.10.2014 - 31.10.2014	12.12.2014
1.10.2015 - 30.10.2015	12.12.2015

ŘEDČASNÉ SPLACENÍ KUPONOVÝCH SPOŘICÍCH STÁTNÍCH DLUHOPISŮ	
Podání žádosti o předčasné splacení	**Datum předčasného splacení**
1.10.2014 - 31.10.2014	12.12.2014
1.4.2015 - 30.4.2015	12.6.2015
1.10.2015 - 30.10.2015	12.12.2015
1.4.2016 - 29.4.2016	12.6.2016
3.10.2016 - 31.10.2016	12.12.2016
3.4.2017 - 28.4.2017	12.6.2017
2.10.2017 - 31.10.2017	12.12.2017
3.4.2018 - 30.4.2018	12.6.2018

Obr. 4.4: Obdobia pre podanie žiadosti o predčasné splatenie istiny.

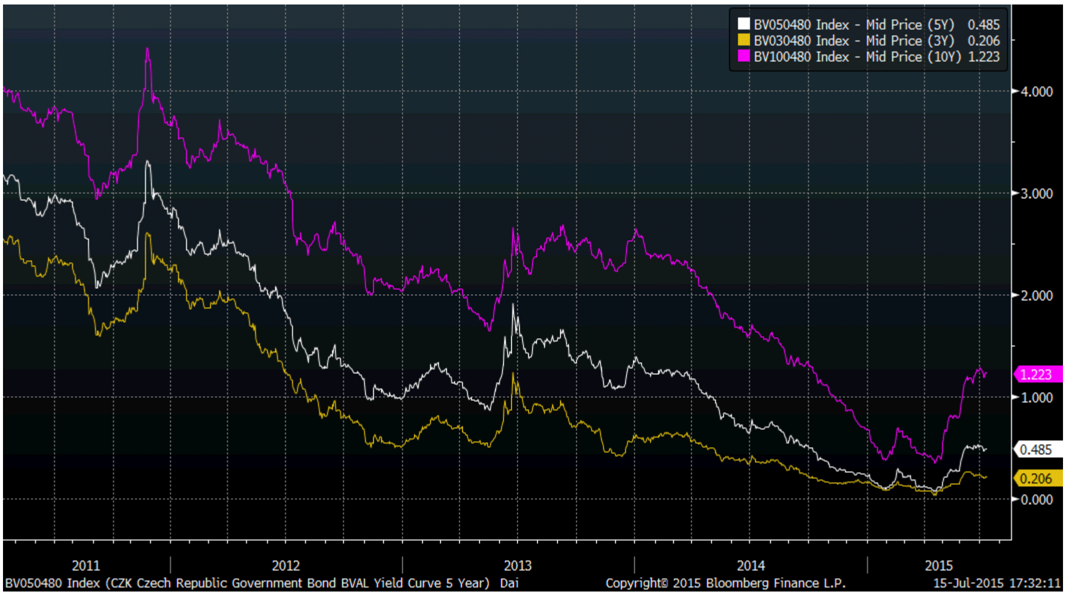
dlhopisov započalo k dátumu 4.11.2013. Pre ocenenie preto budeme vychádzať z výnosovej krivky českých štátnych bezkupónových dlhopisov k dátumu 1.11.2013, teda tesne pred začiatkom upisovacieho obdobia, ktorej jednotlivé výnosy podľa splatnostnej štruktúry vyrovnávame pomocou Swenssonovej metódy [1]. Výnos 3-ročného dlhopisu k tomuto dátumu sa pohyboval okolo 0,60% a výnos 5-ročného dlhopisu okolo 1,1%. Na obrázku 4.5 vidíme okrem výnosovej krivky bezkupónových štátnych dlhopisov aj swapovú krivku.



Obr. 4.5: Výnosová krivka štátnych dlhopisov ČR a swapová krivka k dátumu 1.11.2013.

[1] Študijné materiály a vlastné poznámky z prednášok pána docenta Hurta.

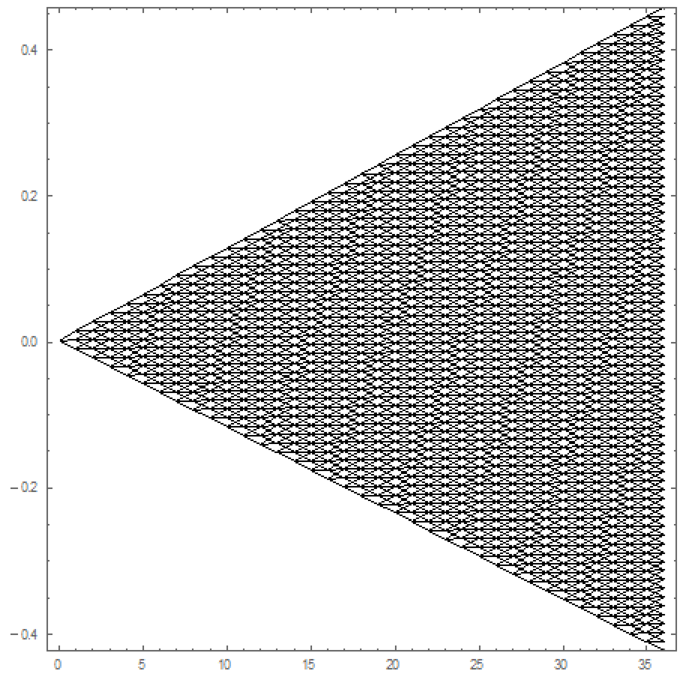
Kupónové platby SSD boli nastavené tak, aby motivovali investorov držať dlhopisy do splatnosti a to tak, že šlo o tzv. step-up kupón, teda kupón s rastúcou sadzbou, viď tabuľku výnosov jednotlivých dlhopisov na obrázku 4.3. Na nasledujúcom obrázku 4.6 vidíme vývoj výnosov českých štátnych dlhopisov od roku 2011 pre tri splatnosti, a to 3, 5 a 10 rokov. V prípade 3-ročného prémiového dlhopisu nesúceho priemerný výnos 2,3% je porovnateľný výnos pozorovaný naposledy ku koncu roka 2011. Podobne je to aj u 5-ročného kupónového dlhopisu s priemerným výnosom 2,8%. Ďalej musíme podotknúť, že výnosy dlhopisov ale aj referenčné a swapové sadzby boli v roku 2013 na pomerne nízkych úrovniach. No napriek tomu nasledujúce dva roky výnosy z dlhopisov ako aj úrokové sadzby klesali a dostali sa na oveľa nižšie úrovne. Tento jav nenastal len v Českej republike ale postihol takmer celý európsky finančný trh.



Obr. 4.6: Vývoj výnosov českých štátnych dlhopisov pre splatnosť 3, 5 a 10 rokov. Zdroj Bloomberg.

4.2.1 Konštrukcia stomu

Uvažujme 3-ročný dlhopis z tabuľky 4.2 s príslušnými kupónovými platbami 4.3 a obdobiami možného predčasného splatenia 4.4. Konštrukciou 3-ročného trinomického stromu pre HW model popísanou v sekcii 2.1.1 s príslušnými kalibrovanými parametrami z tabulky 3.2 a časovým krokom 1 mesiac obdržíme 653 záporných úrokových sadzieb. Jeho grafickú reprezentáciu môžeme vidieť na obrázku 4.7, ktorá na prvý pohľad vyzerá prekvapujúco, pretože strom sa zdá byť symetrický okolo nuly. Čo zapríčiňuje fakt, že úrokové sadzby boli na úrovniach blízkych nule a sploštený tvar výnosovej krivky na kratšom konci. HW trinomický strom nemôžeme použiť na ocenenie inštrumentov kvôli vysokej pravdepodobnosti produkcie veľkého počtu záporných úrokových sadzieb, ktoré by veľmi skreslili výslednú cenu pozorovaného produktu. Napriek tomu, že HW model lepšie kalibroval tržné ceny swapcií než BK model, pre ocenenie SSD sa javí Black-Karasinski model a jeho trinomický strom ako lepší kandidát.



Obr. 4.7: Trinomický model pre Hull-Whiteov model.

Log-normálny model sme vybrali z dôvodu veľmi nízkych úrokových sadzieb, ktoré v poslednom období sužujú viaceré krajiny Európy. Ostatné modely, ktoré predpokladajú normálne rozdelenie v zmenách úrokových sadzieb majú vysokú pravdepodobnosť početného výskytu záporných sadzieb. No na druhú stranu treba podotknúť, že ešte v nedávnej dobe by nás boli investori a rôzni veritelia vysmiali za záporne kótované krátke úrokové sadzby, no dnes vieme, že tento nezvyčajný jav skutočne nastal. Referenčné sadzby EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) a swapové sadzby do splatnosti troch rokov sú záporné.

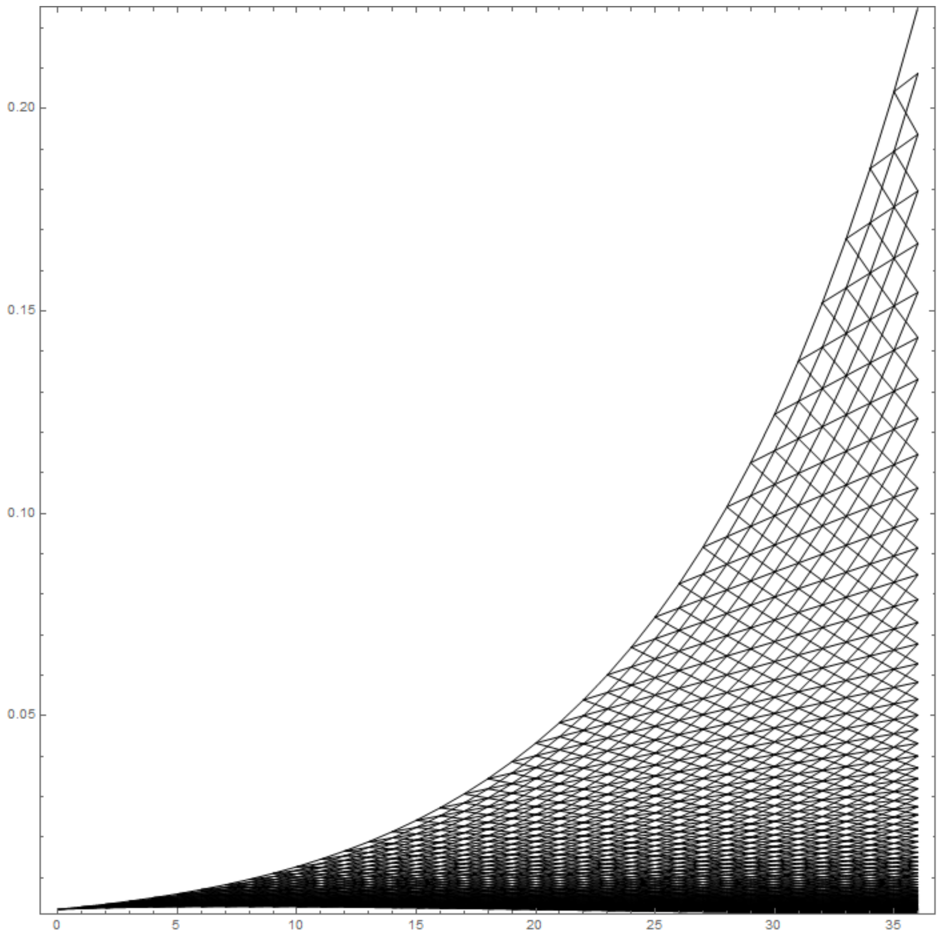
Medzi ďalšie postrehy v rámci ocenenia SSD musíme spomenúť polovičný limit na predčasné splatenie celkového počtu kusov cenných papierov nad 500 tisíc, ktorý môžeme plne eliminovať na základe charakteristík štatistického súboru držiteľov

SSD, pretože 75%-ný kvantil počtu dlhopisov v obehu držaných jedným držiteľom je pre všetky typy dlhopisov približne 500 000 kusov a fakt, že dohromady za šesť emisií bolo predčasne splatených len 0,59% celkovej nominálnej hodnoty nakúpených dlhopisov. Na obrázku 4.8 vidíme grafickú reprezentáciu trinomickej mriežkovej štruktúry pre Black-Karasinski model s mesačným krokom a príslušnými úrokovými sadzbami. Mesačný krok sme zvolili z dôvodu, že centrálna banka už niekoľko rokov drží svoj hlavný menovo-politický nástroj v podobe repo operácií na technickej nule (0.05%). Ide o 2-týždňovú repo sadzbu, za ktorú ČNB prijíma od bánk prebytočnú likviditu a bankám predáva ako kolaterál dohodnuté cenné papiere. Preto prvou signifikantnou úrokovou sadzbou, ktorá nie je priamo pod vplyvom centrálnej banky je mesačná sadzba alebo mesačný výnos zo štátnych pokladničných poukázok. Prostredníctvom tejto mriežky spočítame cenu vnorenej opcie kupónového dlhopisu, ktorá umožňuje majiteľovi cenného papiera predčasne požiadať emitenta o vrátenie istiny v predom stanovených obdobiach. Obdobie pre podanie žiadosti je dlhé jeden mesiac, s rovnako dlhým časovým krokom môžeme teda predpokladať, že ide o jeden časový okamih.

Emisný kurz všetkých dlhopisov v každej zo šiestich emisií bol rovný 100%, tzn. 1000 kusov SSD s nominálnou hodnotou 1 Kč bolo predávaných domácnostiam za 1000 Kč. V prípade spomínaného 3-ročného SSD z vianočnej emisie 2013 s príslušnými kupónovými platbami 4.3 nám jeho kalkulovaná cena v čase emisie vyšla 104,41 a cena vnorenej put opcie tohoto dlhopisu je nulová. Všetky ceny sú spočítané bez zahrnutia 15 % zrážkovej dane. Cena tejto opcie je 0 z dôvodu vyplácaného posledného kupónu, ktorý je 12-násobne väčší než kupóny v predošlých rokoch a ktorý zráža cenu put opcie nadol. Napriek tomu, že používame lognormálny model, ktorý produkuje len kladné úrokové sadzby s pomerne vysokou volatilitou, ktorý ma tendenciu konvergovať k nekonečnu je 6%-ný kupón vyplatený v splatnosti dlhopisu výrazný faktor ovplyvňujúci cenu vnorenej put opcie. Cena celého inštrumentu indikuje, že štát ponúka dlhopisy podstatne lacnejšie než je ich spravodlivá hodnota.

Zaujímavým pozorovaním je, že ak by bol posledný kupón rovnaký ako predošlé kupóny, teda 0,5%. Cena takto upraveného dlhopisu bez vnorenej opcie by bola 99,05 a cena vnorenej put opcie 0,87. Za túto opciu kupujúci platí emitentovi, takže navýši cenu celého inštrumentu na 99,71. Čo sa už podobá hodnote emisného kurzu.

Ďalším zaujímavým pozorovaním je cena hypotetického SSD s vnorenou call opciou, teda callable dlhopis, ktorý zvýhodňuje emitenta a dáva mu možnosť predčasne splatiť istinu dlhopisu veriteľovi. Ako sme uviedli vyššie, cena 3-ročného SSD s príslušnými kupónovými platbami je v čase emisie 104,41 a cena vnorenej call opcie je 4,91. Táto cena opcie ale celkovú cenu SSD znižuje na 99,51. Znova je táto hodnota blízko emisnej cene rovnej 100. Za týchto okolností sa sporiaci štátny



Obr. 4.8: Trinomický strom pre 3-ročnú splatnosť pre Black-Karasinski model.

dlhopis s príslušnými emisnými podmienkami javí ohodnotený skôr ako inštrument s vnorenou call opciou pre emitenta a nie ako finančný nástroj, ktorého pôvodné zamýšľanie bolo umožniť držiteľovi požiadať o predčasné splatenie istiny.

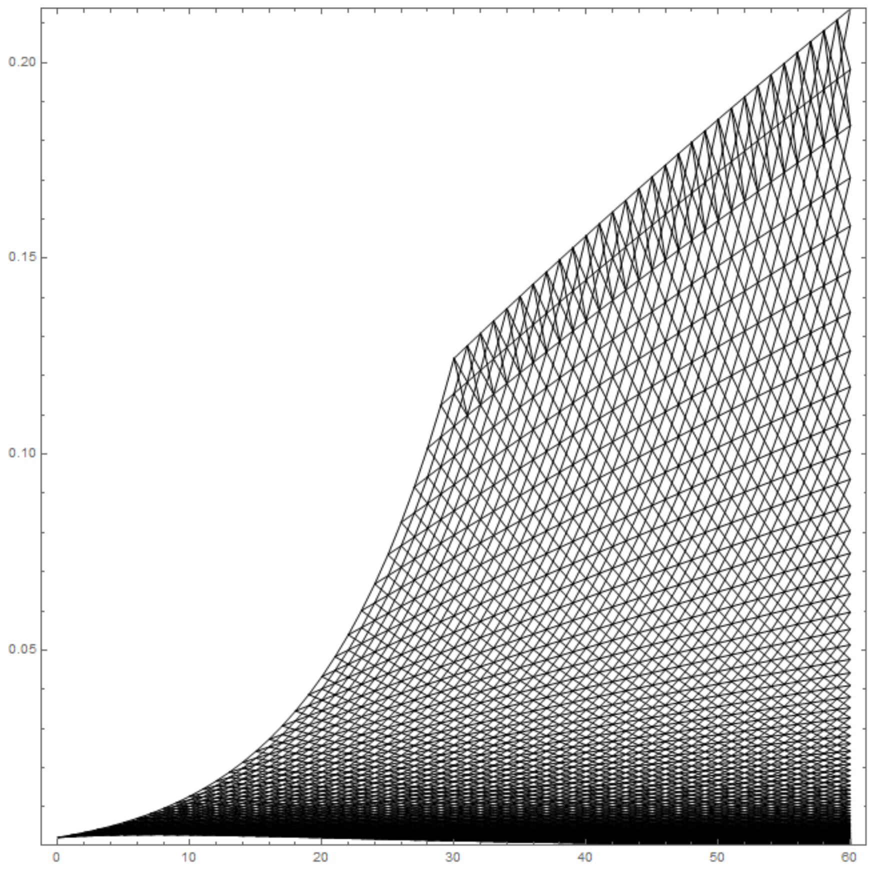
Významným faktorom ovplyvňujúcim cenu skúmaného produktu je práve nastavenie výšky kupónu. Pozrime sa na tabuľku 4.2, v ktorej sú spočítané hypotetické ceny 3-ročného prémiového sporiaceho dlhopisu s príslušnými cenami opcií pri zmene vyplácaných kupónových sadzieb.

V prípade 5-ročného kupónového dlhopisu s príslušnými kupónmi a bez vnorenej opcie je jeho cena v čase emisie rovná 107,28 a cena vnorenej put opcie je 0. Výrazné navýšenie ceny SSD je spôsobené jeho samotnou dlhšou splatnosťou a vyšším počtom období pre podanie žiadosti o možné predčasné splatenie. Opäť ak spočítame cenu callable dlhopisu, jeho cena bude 99,39 a cena samotnej call opcie

Kupóny			Cena				
1.rok	2.rok	3.rok	Dlhopis	Puttable dlhopis	Put opcia	Callable dlhopis	Call opcia
0.5%	0.5%	6%	104.41	104.41	0	99.51	4.91
0.5%	0.5%	4%	102.46	102.46	0	99.51	2.95
0.5%	0.5%	2%	100.51	100.51	0	99.51	1.00
0.5%	0.5%	0.5%	99.05	99.71	-0.66	99.05	0

Tabuľka 4.2: Ceny 3-ročného prémiového dlhopisu a vnorených opcií v závislosti na kupónových platbách.

7,89.



Obr. 4.9: Trinomický strom pre 5-ročnú splatnosť.

Taktiež prikladáme tabuľku 4.3 s hypotetickými cenami dlhopisov a opcií pre rôzne nastavenia výšky kupónu.

Na prvý pohľad sa zdá, že emisie SSD sú pre štát nevýhodné, pretože ich vý-

Kupóny					Cena					
1.rok	2.rok	3.rok	4.rok	5.rok	Dlhopis	Puttable dlhopis	Put opcia	Callable dlhopis	Call opcia
0.5%	1%	3%	4%	5.5%	107.28	107.28	0	99.39	7.89
0.5%	1%	1.5%	2%	2.5%	101.08	101.08	0	99.33	1.75
1.5%	1.5%	1.5%	1.5%	1.5%	101.16	101.64	-0.48	99.71	1.45
0.5%	1%	1%	1%	2%	99.17	100.00	-0.83	98.84	0.33
0.5%	0.5%	0.5%	0.5%	0.5%	96.30	99.90	-3.60	96.30	0

Tabuľka 4.3: Ceny 5-ročného kupónového dlhopisu a vnorených opcií v závislosti na kupónových platbách.

nosy ďaleko presahujú výnosy z cenných papierov predávaných v aukciách veľkým finančným inštitúciám. Pravdou však je, že ide o úplne odlišné trhy pre rôznych veriteľov. „Klasické“ dlhopisy sa predávajú niekoľkokrát mesačne vo veľkých objemoch, naproti tomu SSD sa predávali 2-krát ročne v marginálnych objemoch z hľadiska objemu štátneho dlhu. Malá intenzita emisií, stanovenie fixného kupónu a rôzne technické obmedzenia neumožňujú okamžite reagovať na neustále sa meniace tržné podmienky ako je to u klasických štátnych dlhopisov, ktoré sa predávajú formou súťaže, ktorý investor ponúkne najmenší výnos.

Zároveň pri riadení štátneho dlhu nie sú najdôležitejším ukazateľom úrokové náklady ale musia sa brať v úvahu rôzne riziká a strategické ciele. Štát si otvára ďalší spôsob financovania štátneho dlhu a tým pádom riziká diverzifikuje, pretože európske finančné trhy sú v posledných rokoch veľmi turbulentné. Zároveň sa posilňuje dlhodobá udržateľnosť financovania dlhu. Domácnosti dostávajú časť úrokových výnosov, ktoré by beztak štát zaplatil niekde inde. Ako sme spomenuli na začiatku kapitoly, tento systém funguje v mnohých vyspelých štátoch. Štát pripravuje v najbližšej dobe predstavenie nového systému emisií SSD pre širokú verejnosť, ktoré by mali byť ďaleko flexibilnejšie, intenzívnejšie a dostupnejšie.

SSD mali poskytnúť drobným investorom alternatívnu formu zhodnotenia finančných prostriedkov oproti komerčným bankám. Skutočnosťou však je, že ani jediná komerčná banka na území ČR v danom období neponúkala vyššie výnosy zo svojich produktov (termínované vklady, sporiace účty, atď.) než výnosy SSD. Banky pre ocenenie svojich produktov používajú referenčné a swapové úrokové sadzby, ktoré boli v tomto období výrazne pod štátnou výnosovou krivkou, hlavne na dlhšom konci, viď obrázok 4.5.

Neoddeliteľným faktom však ostáva, že emisné parametre SSD neboli zvolené najvhodnejšie vzhľadom k dostupným informáciám o finančnom sektore ČR pred upisovacím obdobím. Zároveň použité numerické metódy v podobe stromových štruktúr, ktoré sme podrobne popísali v tejto práci tieto dohady potvrdzujú.

Záver

V tejto práci sme sa zaoberali oceňovaním dlhopisov s vnorenými opciami pomocou techník založených na stromových (mriežkových) modeloch.

Stromové štruktúry a rôzne numerické metódy nachádzajú využitie vo finančnom svete tam, kde analytické oceňovacie formule zlyhávajú. Prínosom práce je demonštrácia tejto numerickej techniky na ocenenie reálne obchodovateľných dlhových nástrojoch, emitovaných Ministerstvom financií ČR, a to sporiace štátne dlhopisy s vnorenou put opciou bermudského typu.

Zároveň sme poukázali na to, že modely predpokladajúce normalitu v úrokových sadzbách nepredstavujú najvhodnejší výber v období nízkych úrokových sadzieb. Najmä kvôli vysokej pravdepodobnosti výskytu negatívnych sadzieb, ktoré skresľujú kalkulovanú cenu modelovaných finančných nástrojov. V poslednej dobe sa stretávame s prípadmi, kedy určité finančné nástroje nesú záporný výnos (sú úročené zápornou sadzbou). Napriek tomu sa zdá, že ide skôr o dočasný jav a záporné sadzby sa budú vyskytovať len po obmedzenú dobu na krátkom konci výnosovej krivky. Tento jav dáva priestor pre nájdenie nových modelov popisujúcich stochastickú vlastnosť úrokových sadzieb a takisto priestor pre nové finančné produkty, ktoré budú zohľadňovať túto možnosť.

Za týchto okolností veľmi záleží na skúsenosti analytika, aký model najlepšie vystihuje podstatu oceňovaného inštrumentu a jeho korektné ocenenie. Nejde prehliadnuť fakt, že nastavenie predajných parametrov a samotnej ceny sporiacich štátnych dlhopisov sa výrazne líši od nami spočítanej ceny. Porovnaním modelovanej a skutočne ponúkanej ceny dospejeme k jednoznačnému záveru, že kupujúcemu sa vyplatí investovať do tohto dlhopisu. Predajná cena nemusí byť spravidla odvodená len od výšky úrokových nákladov ale môže zahŕňať rôzne strategické ciele. Napríklad za účelom diverzifikácie rizika plynúceho z riadenia štátneho dlhu a neistoty na európskych kapitálových trhoch, ktoré idú na vrub práve týmto úrokovým nákladom. Namieste vzniká otázka ako vhodne vyčísliť tieto faktory a transformovať ich do celkovej ceny inštrumentu. Čo by bolo predmetom najskôr vhodne zvolených Monte Carlo simulácií za rôznych stresových podmienok na domácom a zahraničnom kapitálovom trhu, ktoré prekračujú rozsah tejto práce.

Zdôvodnenie výhodnejšieho úročenia SSD oproti „klasickým“ štátnym dlhopisom sa nedá vyhľadať v žiadnom verejne publikovanom materiály Ministerstva financií ČR. Na otázku autora tejto práce, z čoho vychádza nastavenie výnosov SSD, smerovanú na odbor riadenia štátneho dlhu ČR mu bolo písomne zdelené, že nastavenie výnosov SSD vychádza z interných analytických výstupov založených prevažne na modelovaní výnosovej krivky štátnych strednodobých a dlhodobých dlhopisov ČR. Výnosy SSD sú stanovené na základe týchto analýz tak, aby pre drobných investorov SSD predstavovali porovnateľnú alternatívu oproti spektru komerčne ponúkaných sporiacich inštrumentov. Zvýhodnené úročenie SSD oproti klasickým SD bolo taktiež predmetom kritiky odbornej verejnosti [27]. Nie je nám ale doposiaľ známe, že by k tejto téme bola spracovaná kvalifikovaná analýza.

Zoznam použitej literatúry

[1] HULL, John C., WHITE, Alan D. *Using Hull-White Interest Rate Trees.* The Journal of Derivatives, Vol 3, No 3, 1996, pp 26–36.

[2] HULL, John C., WHITE, Alan D. *Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method.* The Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol 25, No 1, 1990, pp 87–100.

[3] LEIPPOLD, Markus, WIENER, Zvi. *Efficient calibration of trinomial trees for one-factor short rate models.* Review of Derivatives Research, Vol 7, No 3, 2004, pp 213–239.

[4] COX, J. C., ROSS, S. A., RUBINSTEIN, M. *Option pricing: A simplified approach.* Journal of Financial Economics, Vol 7, No 3, 1979, pp 229–263.

[5] HULL, John C., WHITE, Alan D. *Pricing Interest-Rate-Derivative Securities.* Review of financial studies, Vol 3, 1990, pp 573–592. ISBN 08939454.

[6] HULL, John C. *Options, futures and other derivatives.* 8th ed. Boston: Prentice Hall, 2012, 841 p. ISBN 0132164949.

[7] HULL, John C., WHITE, Alan D. *The General Hull-White Model and Supercalibration.* Financial Analysts Journal, Vol 57, No 6, 2001, pp 34–43.

[8] LI, Anlong, RITCHKEN, Peter, SANKARASUBRAMANIAN, L. *Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims.* Journal of Finance, Vol 50, No 2, 1995, pp 719–737.

[9] LEIPPOLD, Markus, WIENER, Zvi. *Algorithms behind term structure models of interest rates II: The Hull-White trinomial tree of interest rates.* SSRN Electronic Journal, 2001, pp 1–17.

[10] JAMSHIDIAN, Farshid. *An Exact Bond Option Formula.* Journal of Finance, Vol 44, No 1, 1989, pp 205–209.

[11] Brigo, Damiano, Mercurio, Fabio. *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit.* 2nd ed. New York: Springer, 2006, 981 p. ISBN 3540221492.

[12] Shreve, Steven E. *Stochastic Calculus for Finance I & II.* New York: Springer, 2004, 208 p. ISBN 9780387401003.

[13] Artzner, Philippe, Delbaen, Freddy *Term structure of interest rates: The martingale approach.* Advances in Applied Mathematics, Vol 10, No 1, 1989, pp 95–129.

[14] Black, Fischer, Scholes, Myron. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, Vol 81, No 3, 1973, pp 637. ISBN 00223808.

[15] Hull, John C., White, Alan D. *One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities.* The Journal of Financial and Quantitative Analysts, Vol 28, No 2, 1993, pp 235–254.

[16] Hull, John C., White, Alan D. *A generalized procedure for building trees for the short rate and its application to determining market implied volatility functions.* Quantitative Finance, Vol 15, No 3, 2015, pp 443–454.

[17] Hull, John C., White, Alan D. *Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I Single-Factor Models.* The Journal of Derivatives, Vol 2, No 1, 1994, pp 7–16.

[18] Kalotay, Andrew J., Williams, George O., Fabozzi, Frank J. *A Model for Valuing Bonds and Embedded Options.* Financial Analysts Journal, Vol 49, No 3, 1993, pp 35–46.

[19] Black, Fischer, Karasinski, Piotr. *Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal.* Financial Analysts Journal, Vol 47, No 4, 1991, pp 52–59.

[20] Figlewski, Stephen, Gao, Bin. *The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing.* Journal of Financial Economics, Vol 53, No 3, 1999, pp 313–351.

[21] Brennan, Michael, Schwartz, Eduardo. *The Valuation of American Put Options.* The Journal of Finance, Vol 32, No 2, 1977, pp 449–462.

[22] Ho, Thomas, LEE, Sang-Bin. *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims.* The Journal of Finance, Vol 41, No 5, 1986, pp 1011–1029.

[23] Black, Fischer, Derman, Emanuel, Toy, William. *Implied Trinomial Tress of the Volatility Smile.* Financial Analysts Journal, Vol 46, No 1, 1990, pp 33–39.

[24] Merton, Robert C. *Theory of Rational Option Pricing.* The Bell Journal of Economics and Management Science, Vol 4, No 1, 1973, pp 141–183.

[25] http://www.mfcr.cz/cs/verejny-sektor/hospodareni/rizeni-statniho-dluhu

[26] http://www.sporicidluhopisycr.cz/cs/o-dluhopisech

[27] http://www.penize.cz/dluhopisy/286061-statni-sporici-dluhopisy-slozite-pocty-maskuji-nizky-vynos
http://zpravy.e15.cz/byznys/finance-a-bankovnictvi/babis-chce-omezit-statni-sporici-dluhopisy-snizi-i-jejich-urok-1079311
http://www.finfin.cz/statni-sporici-dluhopisy-klame-vas-rostouci-urok/

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých skratiek

$(\cdot)^+$	$(\cdot)^+ := max(\cdot, 0)$
S	cena podkladového aktíva
x	logaritmická cena podkladového aktíva ($x = \log S$)
h, H	výplatná funkcia
K	realizačná cena (strike price); realizačná sadzba
N	nominálna hodnota
Ω	množina možných scenárov, ktoré môžu vzniknúť na trhu
$\mathbb{Q}$	ekvivalentná martingalova miera k $\mathbb{P}$
$\mathcal{T}$	množina časových okamžikov
$\mathcal{C}$	množina kupónových platieb
$D(t, T)$	diskontný faktor medzi časmi t a T
$P(t, T)$	cena bezkupónového dlhopisu v čase t so splatnosťou v čase T
$P^M(0, T)$	tržná cena bezkupónového dlhopisu v čase 0 so splatnosťou v čase T
$r(t)$	okamžitá úroková sadzba v čase t
$L(t, T)$	spotová úroková sadzba pre jednoduché úročenie v čase t so splatnosťou v čase T
$Y(t, T)$	spotová úroková sadzba pre zložené úročenie v čase t so splatnosťou v čase T
$R(t, T)$	spotová úroková sadzba pre spojité úročenie v čase t so splatnosťou v čase T
HW model	Hull-Whiteov model
a	rýchlosť návratnosti k rovnovážnej hodnote $\theta(t)$
σ	absolútna volatilita okamžitej úrokovej sadzby
θ	rovnovážna hodnota okamžitej úrokovej sadzby

$f^M(0,t)$	tržná okamžitá forwardová sadzba v čase 0 pre splatnosť v čase t
$W(t)$	štandardný Brownov pohyb
Φ	distribučná funkcia štandardizovaného normálneho rozdelenia
$\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	normálne rozdelenie so strednou hodnotou μ a rozpytlom σ
$\mathbf{ZBC}(t,T,S,K)$	cena európskej call opcie v čase t a realizačnou cenou K so splatnosťou v čase T na bezkupónový dlhopis so splatnosťou v čase S
$\mathbf{ZBP}(t,T,S,K)$	cena európskej put opcie v čase t a realizačnou cenou K so splatnosťou v čase T na bezkupónový dlhopis so splatnosťou v čase S
$\Pi(t,T,r(t))$	analytická cena bezkupónového dlhopisu získaná HW modelom v čase t so splatnosťou v čase T
$\mathbf{CB}(T,\mathcal{T},\mathcal{C})$	cena kupónového dlhopisu v čase T
$\mathbf{CBP}(t,T,\mathcal{T},\mathcal{C},K)$	cena európskej put opcie v čase t a realizačnou cenou K so splatnosťou v čase T na kupónový dlhopis
τ_i	dobra medzi časmi T_i T_{i-1}
$S_{\alpha,\beta}(t)$	forwardová swapová sadzba
$F(t,T,S)$	forwardová úroková sadzba určená v čase t na obdobie medzi časmi T a S
$\mathbf{PS}^{Black}$	cena platiaceho swapca spočítaná pomocou Blackovej formuly
$\mathbf{PS}$	cena platiaceho swapca spočítaná pomocou HW modelu
BK model	Black-Karasinski model
SSD	sporiace štátne dlhopisy
SD	štátne dlhopisy
ČNB	Česká národná banka
ČR	Česká republika