Globální struktury prostoročasů s černými dírami

Lenka Havrdová

13. dubna 2006

Obsah

1 Úvod **1**

2 Popisy metrik **3**

2.1 C-metrika 3

2.1.1 $\Lambda = 0$ 5

2.1.2 $\Lambda \neq 0$ 10

2.2 Cylindricky symetrické prostoročasy 15

2.2.1 Melvinův magnetický vesmír 15

2.2.2 Levi-Civitova metrika 16

2.2.3 Magnetická struna v AdS 17

2.3 Zobecnění C-metriky 18

2.3.1 Vnějí gravitační pole 18

2.3.2 Ernstova metrika 19

3 Limitní přechody **21**

3.1 Limitní přechody kolem jedné z děr 21

3.1.1 Plochá C-metrika 21

3.1.2 Vakuová C-metrika 22

3.1.3 Nabitá C-metrika 23

3.1.4 Ernstova metrika 24

3.1.5 $\Lambda \neq 0$ 24

3.2 Ploché limity na akceleračním horizontu 26

3.2.1 Plochá C-metrika 26

3.2.2 Vakuová C-metrika 28

3.2.3 Nabitá C-metrika 29

3.2.4 Ernstova metrika 31

3.3 Limity do zakřivených prostoročasů 31

3.3.1 Nabitá C-metrika 32

3.3.2 Vakuová C-metrika 36

3.3.3 C-metrika s $\Lambda \neq 0$ 38

4 Závěr **41**

A Plochá C-metrika **43**

B de Sitter **45**

C Anti-de Sitter **47**

D Nová forma **51**

E Konformní diagramy **53**

F Melvin v C-metrikovské formě **55**

G Limitní přechody Ernstovy metriky **57**

H Elektromagnetické pole při limitních přechodech nabité C-metriky **61**

I Násada pro limitní přechod do zakřiveného prostoročasu **67**

Kapitola 1

Úvod

Mezi vemi řeeními Einsteinových rovnic měly v«dy významné postavení ta řeení, která vykazují nějaké symetrie. Je to pochopitelné, v«dy ¸ přítomnost symetrie ubírá stupně volnosti a značně zjednoduuje řeení. Úplně první známé řeení Einsteinových rovnic - Schwarzschildova metrika, je sféricky symetrické. Postupem času se objevila dalí řeení popisující slo«itější případy. Přesto je fyzikálně relevantních přesných řeení stále málo.

C-metrika je význačná tím, «e popisuje prostoročas generovaný pohybujícími se zdroji a takových řeení opravdu není mnoho. Nadto je to jetě boost-rotačně symetrické řeení patřící do třídy Weylových řeení, co« její význam dále vyzvedává.

V poslední době vzniklo mnoho prací, které se zabývají různými vlastnostmi C-metriky, zejména asymptotickou strukturou záření vydávaného pohybujícími se zdroji. Kromě klasického případu se zaměřují i na zobecnění C-metriky do prostorů s nenulovou kosmologickou konstantou. Za vechny uvedu například [**??**] a [**??**].

Jak je tedy vidět, přesto«e se jedná o velmi dlouho známé řeení, stále jetě je v něm co objevovat. I proto se C-metrika stala hlavním tématem této práce.

Tato práce se soustřeďuje na mo«nosti převést C-metriku nebo nějaké její zobecnění do jiného typu prostoročasu pomocí transformací a kálování souřadnic a odpovídajících změn fyzikálních parametrů. Původní mylenka byla, «e z nabité asymptoticky ploché C-metriky lze limitním vzdalováním černých děr do nekonečna a odpovídajícím zvětováním náboje získat Melvinův magnetický vesmír. Později se ukázalo, «e tato představa není správná, ale limitní přechod do Melvinova magnetického vesmíru se podařil. Společně s ním se naly i limity zobecněné C-metriky s kosmologickou konstantou do analogie k Melvinovu magnetickému vesmíru - magnetické struny v anti-de Sitterově prostoročasu. Podařily se i jiné limitní přechody, ale u některých z nich není jasný fyzikální význam.

Práce je uspořádána takto:

V kapitole 2 jsou uvedeny popisy známých typů metrik, zejména různé verze C-metriky a jejích zobecnění a vedle nich i cylindricky symetrické prostoročasy, které budou potřeba později v kapitole 3. Popisy se zaměřují převá«ně na vlastnosti nejvíce potřebné pro limitní přechody. Kapitola 3 potom obsahuje vlastní provedení limitních přechodů z různých verzí C-metriky. Je rozdělena na tři sekce podle místa, v něm« je limita prováděna, a způsobu kálování souřadnic. Některé z limit byly popsány u« dříve, výsledky v sekci 3.3 a dodatku I jsou, doufám, původní.

Dodatky doplňují hlavní text o podrobnější provedení některých výpočtů, a výklad vztahů a souvislostí, které v hlavním textu stačilo pouze konstatovat. Například dodatek I popisuje, jak byla objevena limita z C-metriky do Melvinova vesmíru, tento výpočet je přitom pouze pomocný, dává jen návod, jak má vlastní limitní přechod vypadat.

Dodatky jsou psány podrobně, tak, aby jim porozuměli i lidé obeznámení pouze se základy obecné teorie relativity.

Kapitola 2

Popisy metrik

Tato kapitola je věnována rozboru vlastností C-metriky včetně různých jejích zobecnění a některých dalích prostoročasů, na ně« vedou některé z limit popsaných v kapitole 3. Důraz je kladen na ty vlastnosti, které budou pro přítí výpočty potřeba. Ostatní je zmíněno nanejvý okrajově.

2.1 C-metrika

C-metrika je jedním z nejvýznamějích zástupců třídy řeení Weylova typu. Ačkoliv byla objevena u« v roce 1918 Levi-Civitou, velmi dlouho nebyla známa její fyzikální interpretace. Trvalo přes padesát let, ne« někdo její význam rozlutil. V roce 1970 Kinnersley a Walker [**??**] ukázali, «e popisuje dvě rovnoměrně urychlené černé díry pohybující se proti sobě buď spojené kosmickou strunou nebo zavěené strunami na nekonečnu. Tato interpretace ovem platí jen pro jednu ze čtyř fyzikálních oblastí C-metriky, význam těch ostatních je dosud nejasný.

Existuje mnoho různých zobecnění C-metriky na případy nabité, rotující, skupiny urychlených černých děr a prostory s nenulovou kosmologickou konstantou obojího znaménka. Kromě toho se přidávají vnějí pole, která poskytují fyzikální zdroj zrychlení pro černé díry a tím odstraňují kónickou singularitu.

Poslední dobou se ve středu zájmu ocitlo záření vydávané pohybujícími se černými děrami v C-metrice. Ta je pro jeho studium výhodným modelem, nebo¸ je jedním z mála známých přesných řeení popisujících pohybující se černé díry. Analýzy blízko konformního nekonečna jsou popsány například v pracích [**??**] a [**??**]. Zde se tím zabývat nebudeme.

C-metrika bývá nejčastěji uváděna ve tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x+y)^2}\left(-F(y)dt^2 + \frac{dy^2}{F(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\varphi^2\right) \tag{2.1}$$

kde $F(\xi) = -Q(\xi) - \frac{\Lambda}{3A^2}$, $G(\xi) = Q(-\xi)$. Je-li $Q(\xi)$ polynom 2. řádu, jedná se o plochou C-metriku, polynom 3. řádu popisuje vakuovou C-metriku a polynom 4. řádu nabitou C-metriku. Elektromagnetické pole takovéto metriky má tvar

$$\mathcal{A} = ey\,dt \tag{2.2}$$

$$\mathcal{F} = e\ dy \wedge dt \tag{2.3}$$

kde $-e^2A^2$ je koeficient u ξ^4. C-metrika je boost-rotačně symetrická, má dva Killingovy vektrory $\frac{\partial}{\partial t}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a konformní Killingův tenzor

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{A^4(x+y)^4}(F(y)dt^2 - \frac{dy^2}{F(y)} + \frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\varphi^2)$$

Rozsah souřadnice t je $\langle -\infty, \infty \rangle$, rozsah souřadnice φ je $\langle -K\pi, K\pi \rangle$, kde K určuje úhlový deficit a rozhoduje o tom, zda je struna nata«ená mezi oběma černými děrami nebo z nich míří do nekonečna. Rozsahy souřadnic x a y závisí na kořenech $F(y)$ a $G(x)$ a budou podrobně rozebrány v podkapitolkách věnujících se jednotlivým případům. Ve větině z nich platí, «e C-metrika ve tvaru 2.1 popisuje čtyři různé prostoročasy oddělené navzájem kořeny $G(x)$ a prostorovým nekonečnem v $y = -x$.

Kauzální struktury černých děr obsa«ených v C-metrice jsou buď schwarzschildovské nebo Reisner-Nordströmovy v závislosti na přítomnosti náboje. Zrychlení ani přítomnost kosmologické konstatnty je nijak zásadně nemění. Stejně tak asymptotické oblasti blízko konformního nekonečna mají charakter buď plochý nebo de Sitterovský nebo anti-de Sitterovský, jedinou drobnou "vadou na kráse" jsou kónické singularity.

Pro C-metriku existuje mnoho různých systémů souřadnic. Kromě tvaru (2.1) se často objevuje i podobná forma, kde y je nahrazeno $-y$. Tím se sjednotí polynomy v proměnných x a y a výsledná metrika nabude tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}\left(F(y)dt^2 - \frac{dy^2}{F(y)} + \frac{dx^2}{F(x)} + F(x)dx^2\right) \tag{2.4}$$

I tento tvar ve výpočtech často vyu«ijeme.

Známo je mnoho dalích souřadnic, kromě těch, které se dají získat lineární transformací jsou to zejména Weylovy kanonické souřadnice. Ty vak vyu«ívat nebudeme, jejich rozsah nepřesahuje akcelerační horizont a bez toho se v kapitole 3 neobejdeme.

Probereme si jednotlivé případy detailněji. Začneme od těch nejjednoduích.

2.1.1 $\Lambda = 0$

Jeliko« se dlouho předpokládala nulovost kosmologické konstanty, větina řeení Einsteinových rovnic s ní nepočítala. Tak i C-metrika vznikla původně v asymptoticky plochém prostoru. Proto do této skupiny patří nejdéle známé a nejdůkladněji zanalyzované případy C-metrik.

Plochá C-metrika

Riemannův tenzor C-metriky vymizí právě tehdy, kdy« $Q(\xi)$ je kvadratická funkce. Taková metrika pak popisuje plochý prostor.

Plochá C-metrika bývá obvykle udávána ve tvaru

$$ds^2 = \frac{{s_0}^2}{(x-y)^2}(-(y^2-1)dt^2 + \frac{dy^2}{y^2-1} + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\varphi^2) \ , \qquad (2.5)$$

Transformace převádějící tento tvar na klasické Minkowského souřadnice jsou popsány v dodatku A. Tato metrika popisuje dvě větve prostoročasu navzájem oddělené nekonečnem v $y = x$. Obě větve mají stejné vlastnosti. Postačí, kdy« se v následujícím rozboru omezíme na jednu z nich. Fyzikální rozsah souřadnic je $x \in \langle -1, 1\rangle$ a $y \in \langle -x, \infty\rangle$. Diagram v rovině xy je znázorněn na obrázku **??**, vztah mezi C-metrikovskými a Rindlerovými urychlenými souřadnicemi na obrázku **??**. Význam této metriky spočívá v tom, «e popisuje plochý prostor v souřadnicích svázaných se dvěma pozorovateli pohybujícími se rovnoměrně urychleně proti sobě umístěnými v bodech $y = \infty$. Zdánlivý paradox toho, «e oba pozorovatelé mají stejnou souřadnici, je dán tím, «e C-metrikovské souřadnice nepokrývají celou varietu. Jak se lze přesvědčit v dodatku A, transformace z Rindlerovských do úhlových C-metrikovských souřadnic není prostá - dvěma různým bodům časoprostoru přiřazuje stejné souřadnice (pokud nele«í v rovině symetrie). Hodnota $y = 1$ vyznačuje rovinu symetrie vesmíru. $x = -1$ označuje vnitřní osu - tedy tu část osy symetrie, po ní« se pohybují pozorovatelé, která je mezi nimi. Hodnota $x = 1$ patří vnější ose - té části osy symetrie, která je vně pozorovatelů. Pozorovatelé jsou na ose umístěni v bodech $\zeta = \pm s_0$ v Rindlerových souřadnicích. Znamená to, «e s_0 vyjadřuje vzdálenost mezi pozorovateli. V případech s černými děrami bude obdobnou úlohu hrát $1/A$.

Vakuová C-metrika

Ve vakuové C-metrice je $Q(\xi)$ kubický polynom. Diagram v rovině xy je na obrázku **??**. Jak je vidět, popisuje čtyři různé oblasti, v nich« je metrika fyzikální. Interpretace tří z nich je nejasná. Čtvrtá, obsahující statickou oblast B, popisuje dvě rovnoměrně urychlené černé díry pohybující se proti sobě, zrychlení je zaji¸ováno kosmickou strunou, která se mů«e nacházet buď mezi nimi (na vnitřní ose) nebo vést od nich do nekonečna (na vnější ose). Mů«e být samozřejmě i vude (s různými úhlovými deficity), ale to je zbytečná komplikace a v praxi se neuva«uje. V této práci je pro limitní přechody vyu«ívána zejména varianta se strunou na vnější ose.

Funkce $Q(\xi)$ mů«e být zapsána mnoha způsoby. Nejobecnější je tvar kořenový: $Q(\xi) = \alpha(\xi - w_c)(\xi - w_a)(\xi - w_m)$. Konstanta α musí být kladná. Obvyklý průběh funkce $Q(\xi)$ je znázorněn na obrázku **??**.

Nejobvyklejí tvar je $Q(\xi) = 1 - \xi^2 + 2mA\xi^3$. m je zde parametr související s hmotností černých děr. Je vidět, «e polo«í-li se $m = 0$, z Q se stane kvadratická funkce a metrika přechází na plochý prostor. Nevýhodou tohoto tvaru ovem je, «e v něm nejsou na první pohled vidět kořeny $Q(\xi)$. V následující stati budou vak pro limitní přechody velmi potřeba a proto tento tvar metriky nebude téměř vyu«íván. Je proto výhodnějí převést metriku do "nové formy C-metriky" podle **??**. Postup bude podrobněji rozebrán v dodatku D u nabité C-metriky, pro ní« byl určen původně. Postačí zatím říct, «e vakuová C-metrika v ní nabírá tvar

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}\Big((1-y^2)(1+2mAy)dt^2 &- \frac{dy^2}{(1-y^2)(1+2mAy)} \\
&+ \frac{dx^2}{(1-x^2)(1+2mAx)} + (1-x^2)(1+2mAx)d\varphi^2\Big)\ . \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Kořen $-1/2mA$ se ztoto«ňuje s w_c, kořen -1 odpovídá w_a a 1 koresponduje s w_m.

Probereme důkladněji oblast B. Právě to je ta oblast, která svou interpretací odpovídá dvěma urychleným černým dírám. $x = -w_m$ odpovídá vnitřní ose, $x = -w_a$ odpovídá vnější ose. $y = \infty$ je prostoročasová singularita, $y = w_c$ je horizont černé díry, $y = w_a$ označuje akcelerační horizont. Jak se lze snadno přesvědčit z konformního diagramu **??**, je to nejzazí místo, kam jetě mů«e dospět informace z černé díry. Obě singularity tedy o sobě navzájem nevědí. Mohlo by se zdát divné, proč jsou černé díry dvě, kdy« se stejně navzájem neovlivňují. Kdybychom ale chtěli jen jednu díru, ztratili bychom symetrii. Případ s jednou černou dírou je mo«ný jen pro malá zrychlení v asymptoticky anti-de Sitterovském prostoročase, jak bude rozebráno později v kapitolce 2.1.2.

Zbývá jetě rozebrat fyzikální parametry této metriky. Jedním z nejvýznamějích je zajisté hmotnost černé díry. Ta se dá pro Schwarzschildovu černou díru odvodit z plochy horizontu pomocí vztahu

$$S = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{\vartheta\vartheta}} d\varphi d\vartheta|_{r=2M} = 2\pi \int_0^{\pi} 4M^2 \sin\vartheta d\vartheta = 16\pi M^2 \tag{2.7}$$

Plocha horizontu černé díry v C-metrice se spočítá analogicky, pouze souřadnice ϑ je zde nahrazena x:

$$\begin{aligned} S = \int_{w_a}^{w_m}\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{xx}} d\varphi dx|_{y=w_c} = \\ = \frac{2\pi}{KA^2}\int_{w_a}^{w_m} \frac{1}{(x-w_c)^2}dx = \frac{2\pi}{KA^2}\frac{w_m - w_a}{(w_m - w_c)(w_a - w_c)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Z po«adavku, aby se plochy horizontů určené oběma způsoby navzájem rovnaly, snadno odvodíme

$$M = \frac{1}{2A}\sqrt{\frac{w_m - w_a}{2K(w_m - w_c)(w_a - w_c)}} \tag{2.9}$$

Dosadíme-li do vzorce hodnoty z nové formy C-metriky, dostaneme

$$M = \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{m}{\sqrt{(2mA)^2 - 1}} \tag{2.10}$$

Chování parametru m tedy nenpopisuje chování skutečné fyzikální hmotnosti příli názorně. Podobně jako jsme určili plochu horizontu černé díry, mů«eme spočítat i plochu akceleračního horizontu. Vyjde nekonečná. Vzdálenost mezi dvěma horizonty po ose lze určit vztahem $\ell = \int_{w_i}^{w_{i+1}} \sqrt{g_{yy}} dy|_{x=w_m}$. Tento integrál vak nemá analytické vyjádření a pro výpočty se tudí« nehodí.

Dalím důle«itým parametrem je konicita osy. Rozdílná konicita vnitřní a vnějí osy je zdrojem zrychlení pro černou díru. Tah nebo tlak, kterým struna na černou díru působí, je toti« úměrný úhlovému deficitu. Lze dokázat, «e konicita vnitřní osy je v«dy vyí ne« konicita osy vnějí. To ostatně odpovídá i směru zrychlení. Obecný vzorec pro konicitu osy je

$$\kappa = \lim_{\rho\to 0}\frac{\int_0^{2\pi}\sqrt{g_{\varphi\varphi}}d\varphi}{2\pi\int_0^{\rho}\sqrt{g_{\rho\rho}}d\rho'} \tag{2.11}$$

Pro C-metriku se z toho stává

$$\kappa = \frac{1}{2K}\frac{\partial G(x)}{\partial x}|_{x=-w_j} \tag{2.12}$$

kde za j si dosadíme m pro vnitřní osu a a pro vnější. Konicita vnitřní osy se spočítá jako

$$\kappa_1 = \frac{1}{2K}\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=w_m} = \frac{\alpha(w_m - w_c)(w_m - w_a)}{2K} \tag{2.13}$$

Konicita vnější osy je

$$\kappa_2 = \frac{1}{2K}\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=w_a} = \frac{\alpha(w_a - w_c)(w_m - w_a)}{2K} \tag{2.14}$$

Povrchová gravitace na horizontu je dána vztahem $g_i = \frac{K}{2}\left|\frac{dF}{dy}\right|_{y=w_i}$. Tento vztah je ale ovlivněn normalizací Killingova vektoru a není proto jednoznačný. Mů«eme volit například $g_c = \frac{K}{2}(w_c - w_a)(w_c - w_m)$, $g_a = \frac{K}{2}(w_a - w_c)(w_m - w_a)$. Chceme-li jednoznačný parametr, mů«eme pou«ít poměr povrchových gravitací na akceleračním a černoděrovém horizontu

$$g = \frac{g_c}{g_a} = \frac{w_c - w_m}{w_a - w_m} \ . \tag{2.15}$$

Navíc platí

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{g}{g-1} \ . \tag{2.16}$$

Význam povrchových gravitací je i v tom, «e souvisí s obtí«ně definovatelnou (a spočítatelnou) vzdáleností černé díry od akceleračního horizontu, i kdy« ani zde to není jednoznačné. Jedna z mo«ných definic je $L = \frac{1}{g_a}$.

Nabitá C-metrika

Podobně jako vakuová C-metrika popisovala dvě rovnoměrně urychlené Schwarzschildovy černé díry, popisuje nabitá C-metrika dvě rovnoměrně urychlené Reisner-Nordströmovy černé díry. Diagram v rovině xy je znázorněn na obrázku **??**. I nabitá C-metrika popisuje čtyři fyzikální oblasti, tentokrát jsou ale dvě a dvě stejné. Uva«uje se obvykle jen jedna z nich, a to $x \in \langle -w_a, -w_m\rangle$, $y \geq x$. Fyzikální význam jednotlivých kořenů je pak tento: $x = y$ odpovídá nekonečnu, $x = -w_m$ je vnitřní osa, $x = -w_a$ je vnější osa. $y = -\infty$ odpovídá prostorové singularitě, $y = w_i$ je pak její vnitřní horizont a $y = w_o$ je vnější. $y = w_a$ popisuje akcelerační horizont, hodnoty w_m sou5adnice y ve fyzikální oblasti B nikdy nedosáhne.

Obvyklé vyjádření $Q(\xi)$ je $Q(\xi) = 1 - \xi^2 + 2mA\xi^3 - e^2A^2\xi^4$. Vektorový potenciál elektromagnetického pole pak je $\mathcal{A} = ey\,dt$, tenzor elektromagnetického pole je $\mathcal{F} = q\,dy \wedge dt$. Pro nae výpočty je tato forma krajně nevhodná, nebo¸ neposkytuje jasné vyjádření kořenů. Potřebovali bychom ji převést do tvaru, v něm« jsou kořeny na první pohled viditelné. Takovou transformaci popisují Hong a Teo v článku **??**. Zde je uveden v dodatku D. "Nová forma C-metriky" vypadá takto:

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}((1-y^2)(1+r_-Ay)(1+r_+Ay)dt^2$$
$$+\frac{dy^2}{(1-y^2)(1+r_-Ay)(1+r_+Ay)} + \frac{dx^2}{(1-x^2)(1+r_-Ax)(1+r_+Ax)}$$
$$+(1-x^2)(1+r_-Ax)(1+r_+Ax)d\varphi^2) \quad (2.17)$$

kde $r_\pm = m \pm \sqrt{m^2-e^2}$.

A teď u« mů«eme přistoupit k určování fyzikálních parametrů nabité C-metriky. U většiny z nich se postupuje stejně jako u vakuové C-metriky. Konicita vnitřní osy je

$$\kappa_1 = \frac{1}{2K}\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=w_m} = \frac{\alpha(w_m-w_i)(w_m-w_o)(w_m-w_a)}{2K} \, . \quad (2.18)$$

Konicita vnějí osy je

$$\kappa_2 = \frac{1}{2K}\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{x=w_a} = \frac{\alpha(w_a-w_i)(w_a-w_o)(w_m-w_a)}{2K} \, . \quad (2.19)$$

Plocha vnitřního horizontu je

$$S_i = \int_{w_a}^{w_m}\int_0^{2\pi}\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{xx}}d\varphi dx|_{y=w_i} =$$
$$\frac{2\pi}{KA^2}\int_{w_a}^{w_m}\frac{1}{(x-w_i)^2}dx = \frac{2\pi}{KA^2}\frac{w_m-w_a}{(w_m-w_i)(w_a-w_i)} \quad (2.20)$$

plocha vnějího horizontu

$$S_o = \int_{w_a}^{w_m}\int_0^{2\pi}\sqrt{g_{\varphi\varphi}g_{xx}}d\varphi dx|_{y=w_o} = \frac{2\pi}{KA^2}\frac{w_m-w_a}{(w_m-w_o)(w_a-w_o)} \quad (2.21)$$

Plocha akceleračního horizontu je nekonečná.

Dalími velmi důle«itými parametry jsou náboj černých děr a intenzita elektrického pole na ose na akceleračním horizontu. Pro náboj platí Gaussova věta

$$Q_{tot} = \oint \vec{E}.\vec{dS} \, . \quad (2.22)$$

Vektorový element plochy je

$$\vec{dS} = \sqrt{g_{xx}g_{\varphi\varphi}}dx\, d\varphi = \frac{1}{KA^2(x-y)^2}dx\, d\varphi$$

Zbývá určit intenzitu elektrického pole $\vec{E}$. Vyjdeme z tenzoru elektromagnetického pole. Víme, «e $\mathcal{F} = E \wedge e^t + B.\epsilon_\tau$, kde e^t a ϵ_t jsou jednotkové vektory normované na 1. Tenzor elektromagnetického pole lze rozepsat ve tvaru

$$\mathcal{F} = e\, dy \wedge dt = eA^2(x-y)^2\left(\frac{1}{A(x-y)\sqrt{F(y)}}dy\right) \wedge \left(\frac{\sqrt{F(y)}}{A(x-y)}dt\right) \tag{2.23}$$

To dává pro E vztah

$$\vec{E} = eA^2(x-y)^2\vec{e}_y \ , \qquad\qquad E = eA^2(x-y)^2 \ .$$

Intenzita pole na ose na akceleračním horizontu tedy je $E_{ax} = eA^2(w_m - w_a)^2$. Stačí u« jen dosadit do vzorce pro náboj:

$$Q_{tot} = \int_0^{2\pi}\int_{w_a}^{w_m} \frac{eA^2(x-y)^2}{KA^2(x-y)^2} dx\, d\varphi = \frac{2\pi e(w_m - w_a)}{K} \tag{2.24}$$

Povrchová gravitace na horizontu je, stejně jako u vakuové C-metriky, určena vztahem $g_k = \frac{K}{2}\left|\frac{dF}{dy}\right|_{y=w_k}$. Hodnoty pro jednotlivé horizonty jsou $g_i = \frac{K}{2}(w_m - w_i)(w_a - w_i)(w_o - w_i)$, $g_o = \frac{K}{2}(w_m - w_o)(w_a - w_o)(w_o - w_i)$, $g_a = \frac{K}{2}(w_m - w_a)(w_a - w_o)(w_a - w_i)$.

2.1.2 $\Lambda \neq 0$

V této kapitole probereme vlastnosti C-metriky s nenulovou kosmologickou konstantou. Ukazuje se, «e se zde objevují kvalitativně zcela nové vlastnosti, zejména v případě anti-de Sitterovském. Jeliko« C-metrika asymptoticky odpovídá de Sitterovu (anti-de Sitterovu) prostoročasu, povíme si napřed pár slov o nich.

de Sitter

De Sitterův prostoročas je řeením Einsteinových rovnic s $\Lambda > 0$ pro prázdný prostoročas. Je to prostor s konstantí kladnou skalární křivostí o hodnotě $\Lambda/3$. Lze si jej představit jako kouli rozpínající se v čase. Dobře je to vidět například na konformně Minkowského souřadnicích daných vztahem

$$ds^2 = \left(\frac{2\ell_\Lambda^2}{\ell_\Lambda^2 - t^2 + r^2}\right)(-dt^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2) \tag{2.25}$$

kde $\ell_\Lambda = \sqrt{3/\Lambda}$ je poloměr zakřivení. Jinou názornou představou de Sitterova vesmíru je jednodílný hyperboloid vlo«ený do pětirozměrného Minkowského prostoročasu. Rovnice 5D Minkowského prostoročasu je

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2$$

rovnice hyperboloidu

$$-Z_0^2+Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2=\ell_\Lambda^2$$

Tato představa osvětlí jednu dalí zajímavou vlastnost de Sitterova vesmíru - ačkoliv jako celek má konstantní kladnou křivost, existují v něm kromě řezů s konstantní kladnou křivostí i řezy s nulovou a dokonce i zápornou konstantní křivostí.

De Sitterův prostoročas vykazuje vysoké symetrie - společně s Minkowského a anti-de Sitterovým prostoročasem jsou jediná řeení Einsteinových rovnic, která mají deset Killingových vektorů. Konformní diagram de Sitterova vesmíru je na obrázku **??**. Jak je z něj patrné, nekonečna $\mathcal{I}^+$ a $\mathcal{I}^-$ mají prostorupodobný charakter. Různé rodiny souřadnic popisujících de Sitterův prostoročas jsou detailně rozebrány v dodatcích k článku **??**. Vztah mezi standartními, urychlenými a C-metrikovskými koordinátami je popsán v dodatku B.

Nabitá C-metrika v dS

Kdy« u« známe strukturu prázdného de Sitterova prostoročasu, mů«eme se poustit do popisu C-metriky. Vzhledem k tomu, «e vakuová C-metrika je i zde zjednoduením nabité, začneme popis rovnou nabitou C-metrikou. Ta má standartní tvar 2.1, který budeme později pou«ívat i pro nae limitní přechody. V praxi ale tento tvar příli vyu«íván není, častěji se pou«ívá tento:

$$ds^2=\frac{\ell_\Lambda^2}{(\upsilon\cosh\alpha-\xi\sinh\alpha)^2}\left(-\mathcal{F}d\tau^2+\frac{d\upsilon^2}{\mathcal{F}}+\frac{d\xi^2}{\mathcal{G}}+\mathcal{G}d\varphi^2\right) \qquad (2.26)$$

kde $\tau=t\coth\alpha$, $\upsilon=y\tanh\alpha$, $\xi=-x$, $-\mathcal{F}=1-\upsilon^2+\cosh\alpha\frac{2m}{\ell_\Lambda}\upsilon^3-\cosh^2\alpha\frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\upsilon^4$, $\mathcal{G}=1-\xi^2+\sinh\alpha\frac{2m}{\ell_\Lambda}\xi^3-\sinh^2\alpha\frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\xi^4$, akcelerační parametr $\sinh\alpha=\ell_\Lambda A$. Diagram v rovině $\xi\upsilon$ je na obrázku **??**. Proto«e zde u« není mo«né pou«ívat stejné hodnoty kořenů pro $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ (ani pro F a G), zavedeme nové značení pro kořeny $\mathcal{G}(\xi)$. Pojmenujme je vzestupně ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4. Pro $\Lambda=0$ ξ_1 přechází na $-w_m$, ξ_2 na $-w_a$, $\xi_3\to-w_o$ a ξ_4 splývá s $-w_i$. Stejně jako v případě $\Lambda=0$ i zde jsou čtyři fyzikální oblasti, ale vyu«ívá se jenom jedna. Ta se interpretuje jako dvě nabité černé díry pohybující se v de Sitterově prostoročase od pólů směrem k rovníku, ale jetě ne« k němu dorazí, otočí se a vracejí se zpátky, aby se v nekonečném čase dostaly zpátky na póly. Jak by vypadaly dráhy dvou rovnoměrně urychlených pozorovatelů odpovídajících de Sitterově C-metrice s nulovým nábojem i hmotností je zakresleno na obrázku **??**. Význam horizontů je zde podobný jako v konformně plochém případě: $y=\infty$ prostoročasová singularita, $y=w_i$ je vnitřní horizont černé díry, $y = w_o$ je vnějí horizont, $y = w_a$ akcelerační horizont, hodnota $y = w_m$ je zcela mimo vyetřovanou oblast. $\xi = \xi_1$ $\xi = \xi_2$ spojují severní a ji«ní póly děr. Konformní diagram je na obrázku ??. Na první pohled se zdá velmi podobný diagramu pro konformně plochý případ. Je tu vak jeden podstatný rozdíl: zatímco v konformně plochém případě mělo konformní nekonečno na ose nulový charakter, v de Sitterovském je v«dy prostorupodobné.

Fyzikální parametry jsou definovány podobně jako v případě s $\Lambda = 0$. Konicita vnitřní osy je

$$\kappa_1 = \frac{K}{2}\mathcal{G}'|_{\xi=\xi_1} \tag{2.27}$$

konicita vnějí osy

$$\kappa_2 = \frac{K}{2}\mathcal{G}'|_{\xi=\xi_2} \tag{2.28}$$

Anti-de Sitter

Anti-de Sitterův vesmír popisuje vakuový prostoročas s konstantní zápornou skalární křivostí. Lze si ho představit jako hyperboloid vlo«ený do pětirozměrného Minkowského prostoročasu daného metrikou

$$ds^2 = -dZ_0^2 + dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 - dZ_4^2$$

Vlo«ený anti-de Sitterův prostoročas je pak popsán rovnicí

$$-Z_0^2 + Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = -\ell_\Lambda^2 \tag{2.29}$$

kde $\ell_\Lambda = \sqrt{-\frac{3}{\Lambda}}$ je, podobně jako v de Sitterovi, parametr délkové kály. Jak u« bylo zmíněno v kapitole 2.1.2, je to jeden ze tří prostoročasů s 10 nezávislými Killingovými vektory. Konformní diagram je znázorněn na obrázku ??. Jak je z něj jasně patrné, anti-de Sitterův prostoročas má časupodobné konformní nekonečno. O různých souřadnicích anti-de Sitterova vesmíru je více uvedeno v dodatku C, zde si pro příklad uvedeme sférické kosmologické koordináty

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{\cos^2\chi}(-dt^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)) \tag{2.30}$$

Nabitá C-metrika v AdS

Tento případ je oproti ostatním zajímavý zejména tím, «e zatímco C-metrika s $\Lambda \geq 0$ popisuje v«dy pár rovnoměrně urychlených černých děr pohybujících se proti sobě, anti-de Sitterovský případ mů«e popisovat buď dvě rovnoměrně urychlené černé díry nebo jenom jednu rovnoměrně urychlenou černou díru v anti-de Sitterovském vesmíru. Rozhodující pro rozlienní obou případů je hodnota parametru A. Platí-li $A < \sqrt{-\Lambda/3}$, potom metrika popisuje jedinou rovnoměrně urychlenou černou díru, jestli«e je $A > \sqrt{-\Lambda/3}$, potom se jedná o metriku nekonečně mnoha párů rovnoměrně urychlených černých děr pohybujících se proti sobě. Případ $A = \sqrt{-\Lambda/3}$ popisuje černou díru vazánou na 2-bránu ve čtyřech dimenzích. Tímto případem se zde zabývat nebudeme. Pro limitní přechody na akceleračním horizontu bude důle«itý případ nadkritického zrychlení, ale popíeme i časoprostor s podkritickým zrychlením. Ten se hodí pro limitu okolo jedné díry, pro ní« je nadkritický případ zcela nepou«itelný. Dalím podstatným rozdílem oproti předchozím případům je, «e v anti-de Sitterovském prostoru jsou konformní nekonečna časupodobná. Konformní diagramy budou probrány u jednotlivých případů.

Podkritické zrychlení Začněme případem $A < \sqrt{-\Lambda/3}$. Ten popisuje jednu rovnoměrně urychlenou černou díru v anti-de Sitterově prostoročase zavěenou na kosmické struně za nekonečno. Ta mů«e být buď na "přední" nebo "zadní" ose. Souřadnice tvaru (**??**) nejsou pro větinu bě«ných pou«ití vhodné. Zavádějí se tedy jiné, obdobně jako v de Sitterovském případě. Vypadají takto:

$$\begin{aligned} \tau &= \cot\chi_0 t \\ \upsilon &= \tan\chi_0 y \\ \xi &= -x \end{aligned} \tag{2.31}$$

kde χ_0 je akcelerační parametr a nabývá hodnot $\chi \in \langle 0, \pi/2\rangle$. Souvisí s parametrem A vztahem $A = \frac{1}{\ell_\Lambda}\sin\chi_0$. Metrika pak má tvar

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{\omega^2}(-\mathcal{F}d\tau^2 + \frac{d\upsilon^2}{\mathcal{F}} + \frac{d\xi^2}{\mathcal{G}} + \mathcal{G}d\varphi^2) \tag{2.32}$$

kde

$$\mathcal{F} = 1 + \upsilon^2 - 2\frac{m}{\ell_\Lambda^2}\cos\chi_0\upsilon^3 + \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\cos^2\chi_0\upsilon^4 \tag{2.33}$$

$$\mathcal{G} = 1 - \xi^2 + 2\frac{m}{\ell_\Lambda}\sin\chi_0\xi^3 - \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\sin^2\chi_0\xi^4 \tag{2.34}$$

$$\omega = \upsilon\cos\chi_0 - \xi\sin\chi_0 \tag{2.35}$$

Funkce $\mathcal{F}$ má pro nabitou i černou díru jen dva reálné kořeny a to w_i a w_o. Jak u« názvy napovídají, tyto kořeny definují vnitřní a vnějí horizont černé díry. Akcelerační horizont není přítomen, díky tomu tento případ nemů«e být později pou«it pro přísluné limitní přechody. Diagram v rovině xy je znázorněn na obrázku **??**, konformní diagram na obrázku **??**. Nakreslíme-li konformní diagramy pro různé hodnoty x, mů«eme z nich sestavit trojrozměrný diagram, v něm« je potlačena pouze souřadnice φ. Pro $A = 0$ by tento diagram byl rotačně symetrický, pro A nenulové je deformován. Místo největího prohnutí odpovídá "přední" ose, místo největí vypukliny "zadní" ose. Zakřivení konformního diagramu vyplývá z toho, «e souřadnice jsou přizpůsobeny urychlenému zdroji. Po transformaci metriky do statických souřadnic by se konformní nekonečno stalo sféricky symetrickým, ale prohnula by se trajektorie černé díry. Názornějí by to bylo v případě $e = m = 0$. Tehdy zaniká černá díra a metrika popisuje anti-de Sitterův prostoročas v urychlených souřadnicích přizpůsobených jedinomu pozorovateli. V nich je tento pozorovatel statický. Po transformaci do statických souřadnic by se trajektorie urychleného pozorovatele stala zakřivenou. Více o urychlených souřadnicích anti-de Sitterova vesmíru je uvedeno v dodatku C.

Nadkritické zrychlení Pro nadkritické zrychlení popisuje anti-de Sitterovská C-metrika páry rovnoměrně urychlených nabitých černých děr pohybujících se proti sobě. Ukazuje se, «e je to topologicky nejbohatí oblast. Stejně jako v předchozích případech i zde je výhodné zavést nové souřadnice podle vzorce

$$\begin{aligned} \tau &= \tanh \alpha_0 t \\ \upsilon &= \coth \alpha_0 y \\ \xi &= -x \end{aligned} \tag{2.36}$$

kde α_0 je akcelerační parametr nabývající tentokrát libovolných hodnot a s původním parametrem A souvisí vztahem $A = \frac{1}{\ell_\Lambda} \cosh \alpha_0$. Metrika pak má, podobně jako v případě podkritického zrychlení, tvar

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{\omega^2}(-\mathcal{F} d\tau^2 + \frac{d\upsilon^2}{\mathcal{F}} + \frac{d\xi^2}{\mathcal{G}} + \mathcal{G} d\varphi^2) \tag{2.37}$$

význam metrických funkcí je tentokrát

$$-\mathcal{F} = 1 - \upsilon^2 + 2\frac{m}{\ell_\Lambda} \sinh \alpha_0 \upsilon^3 - \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2} \sinh^2 \alpha_0 \upsilon^4 \tag{2.38}$$

$$\mathcal{G} = 1 - \xi^2 + 2\frac{m}{\ell_\Lambda^2} \cosh \alpha_0 \xi^3 - \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2} \cosh^2 \alpha_0 \xi^4 \tag{2.39}$$

$$\omega = \upsilon \sinh \alpha_0 - \xi \cosh \alpha_0 \tag{2.40}$$

Jak je vidět z xy diagramu (viz. Obr. ??), souřadnice y nabývá ve fyzikální oblasti i hodnoty w_m, čím« se v časoprostoru objevuje nový horizont, kosmologický, a za ním celá nová oblast. To má za důsledek i to, «e metrika u« nepopisuje jen dvě černé díry, ale nekonečně mnoho párů černých děr, které vstoupí ve stejný okam«ik do prostoročasu skrze časupodobné nekonečno, pohybují se s konstantním zrychlením proti sobě, otočí se, vrátí se zpátky a společně z časoprostoru skrz nekonečno vystupují. Při tom jsou samozřejmě urychlovány kosmickými strunami. Potom následuje období, během něho« v prostoročasu není «ádná černá díra, následně se objevuje dalí pár a cyklus se opakuje. Jednotlivé cykly jsou navzájem odděleny kosmologickými horizonty na $y = y_m$. Konformní diagramy pro tento případ jsou znázorněn na obrázku ??. Jak je vidět, pro tři řezy v různých hodnotách x dostáváme tři velmi rozdílné diagramy. Na jednom z nich je dokonce vidět prostorupodobné nekonečno, které by se v asymptoticky anti-de Sitterovském prostoročase vůbec nemělo vyskytovat. To je ale jenom zdánlivé. Znázorníme-li toti« trojrozměrný konformní diagram, v něm« pouze souřadnice φ je potlačena, uvidíme, «e celé konformní nekonečno je časupodobné. Prostorupodobný byl pouze jeden jeho řez v rovině $x = konst.$

2.2 Cylindricky symetrické prostoročasy

Prostoročasy uváděné v tomto oddíle sice neobsahují «ádné černé díry, tak«e by se dalo říct, «e tématicky nepatří do této práce, ale jsou výsledky některých limitních přechodů aplikovaných na C-metriku, proto by tu o nich mělo být to základní řečeno. Stejně jako C-metrika i tyto prostoročasy jsou Petrovova typu D. Podstatný rozdíl je v počtu Killingových vektorů: zatímco C-metrika má dva - rotační okolo osy a boostový, tyto prostoročasy mají tři - rotační, posunutí v čase a posunutí v prostoru podél osy. To má za důsledek mimo jiné i to, «e zatímco C-metrika závisela na dvou souřadnicích, metriky cylindricky symetrických prostoročasy závisejí na jediné, radiální, souřadnici.

2.2.1 Melvinův magnetický vesmír

Melvinův magnetický vesmír je cylindricky symetrický prostoročas generovaný longitudálním magnetickým polem. Jedná se vlastně o jakési zobecnění homogenního magnetického pole do obecné relativity. Je to asi to nejbli«í homogennímu poli, co se v obecné relativitě dá nalézt. Jeho metrika bývá obvykle uváděna ve tvaru

$$ds^2 = \bar{a}^2((1+\rho^2)^2(-dt^2 + dz^2 + d\rho^2) + \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2} d\varphi^2) \tag{2.41}$$

Na první pohled jsou z ní vidět tři Killingovy vektory: $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ společné vem cylindricky symetrickým prostoročasôm. Více Killingových vektorů Melvinův vesmír nemá. Parametr $\bar{a}$ je "poloměr" Melvinova vesmíru a souvisí s intenzitou magnetického pole na ose vztahem $B_0\bar{a} = 2c^2/\sqrt{\mathcal{G}}$, kde B_0 značí hustotu magnetického toku na ose, c je rychlost světla a $\mathcal{G}$ gravitační konstanta. Parametr $\bar{a}$ lze odtransformovat. Magnetický tok mimo osu je dán vztahem

$$B = \frac{B_0}{(1 + \frac{\rho}{\bar{a}})^2} \tag{2.42}$$

Melvinův vesmír je silně zakřivený. Blízko osy se chová jako plochý prostor, snadno si ověříme, «e polo«íme-li $\rho = \epsilon r$ a provedeme rozvoj podle ϵ, dostaneme plochý prostor v cylindrických souřadnicích. Dále od osy se to mění. Na obrázku **??** je vyznačen obvod kru«nice o poloměru ρ v závislosti na ρ. Jak je vidět, v bodě $\rho = \bar{a}/2$ má maximum, potom klesá a« se v nekonečnu limitně přiblí«í nule. I chování geodetik v tomto časoprostoru je zajímavé. Hmotná částice se například mů«e pohybovat rovnoměrně přímočaře po přímce rovnobě«né s osou a není k ní gravitačně přitahována. Naopak částice obíhající osu po kruhové trajektorii tak mohou činit jen při poloměrech meních ne« $\rho < \bar{a}/\sqrt{3}$. Na $\rho = \bar{a}/\sqrt{3}$ existuje světelná kruhová geodetika, pro $\bar{a}/\sqrt{3} < \rho < \bar{a}$ existují prostorupodobné a pro $\rho > \bar{a}$ «ádné kruhové geodetiky neexistují. Dalí zajímavé vlastnosti tohoto vesmíru jsou popsány v článcích **??** a **??**.

Melvinův magnetický vesmír se v poslední době octnul v ohnisku zájmu fyziků, kteří ho vyu«ívají jako podkladové prostředí pro studium černých děr i ve strunových teoriích.

Hodí se jetě poznamenat, «e metriku (2.41) lze interpretovat i jako gravitační pole generované longitudálním elektrostatickým polem. Právě to toti« bude výsledkem některých limit.

2.2.2 Levi-Civitova metrika

Levi-Civitovými metrikami nazýváme skupinu vakuových cylindicky symetrických metrik generovaných nekonečně dlouhými lineárními hmotami umístěnými na ose. Obecně je mo«né zapsat je ve tvaru

$$ds^2 = -r^{4\sigma}dt^2 + r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + \frac{r^{2-4\sigma}}{C^2}d\varphi^2 \tag{2.43}$$

kde σ odpovídá lineární hustotě zdroje a C ovlivňuje konicitu. Killingovy vektory jsou stejné jako u vech statických cylindricky symetrických časoprostorů $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ a $\frac{\partial}{\partial z}$. Kretschmannův skalár má hodnotu

$$\mathcal{R} = 64\sigma^2(4\sigma^2 - 2\sigma + 1)(2\sigma - 1)^2 r^{-16\sigma^2+8\sigma-4} \tag{2.44}$$

Metrika má tedy singularitu křivosti v $r = 0$ pro vechna σ s výjimkou $\sigma = 0$ a $\sigma = 1/2$, pro ně« je prostoročas plochý. LC metrika neobsahuje «ádné horizonty, singularita na ose je tedy nahá. Obecně Levi-Civitova metrika přísluí k Petrovovu typu I kromě případů $\sigma \in \{0, 1/2\}$, které jsou typu 0, a $\sigma \in \{-1/2, 1/4, 1\}$, které jsou typu D. Pro nás bude zajímavý případ $\sigma = 1$.

2.2.3 Magnetická struna v AdS

Dias a Lemos ve své práci **??** hledají prostoročasy generované statickými a rotujícími magnetickými strunami ve vesmírech s $\Lambda < 0$. Mezi nimi uvádějí i statické řeení s longitudálním magnetickým polem ve tvaru

$$ds^2 = -(\alpha r)^2 dt^2 + (\alpha r)^2 dz^2 + \frac{dr^2}{(\alpha r)^2 + b(\alpha r)^{-1} - 4\chi_m^2 (\alpha r)^{-2}} + \\ + \frac{1}{\alpha^2}((\alpha r)^2 + b(\alpha r)^{-1} - 4\chi_m^2(\alpha r)^{-2}) d\varphi^2 \ , \quad (2.45)$$

kde $\alpha = \sqrt{-\frac{\Lambda}{3}}$. Vektorový potenciál přísluný k této metrice je

$$\mathcal{A} = -\frac{2\chi_m}{\alpha^3 r} d\varphi \ . \quad (2.46)$$

Parametr $b = 8M$, kde M je lineární hustota hmotnosti zdroje. Kretschmannův skalár této metriky je

$$\mathcal{R} = R^{\mu\nu\kappa\lambda} R_{\mu\nu\kappa\lambda} = 24\alpha^2 (1 + \frac{b^2}{(\alpha r)^6}) - \frac{4\chi_m^2}{\alpha^5 r^7}(b - \frac{7\chi_m^2}{6\alpha^3 r}) \quad (2.47)$$

Mů«e se zdát, «e na $r = 0$ je singularita křivosti, ale ve skutečnosti je tato hodnota mimo fyzikální oblast metriky. Je proto vhodné zavést jiné souřadnice. Pro ty je potřeba znát kořen rovnice $(\alpha r)^2 + b(\alpha r)^{-1} - 4\chi_m^2(\alpha r)^{-2} = 0$. Ten je

$$r_+ = \frac{b^{1/3}}{2\alpha}\left(\sqrt{\frac{2}{\sqrt{s}} - s} - \sqrt{s}\right)$$

$$s = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\left(\frac{4h^2}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\left(\frac{4h^2}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$h^2 = \frac{16\chi_m^2}{b^{4/3}} \quad (2.48)$$

Nová souřadnice se pak zavede $\rho^2 = r^2 - r_+^2$. V ní má metrika tvar

$$
\begin{aligned}
ds^2 = &-\alpha^2(\rho^2 + r_+^2)dt^2 + \frac{\frac{\rho^2}{\rho^2+r_+^2}}{\alpha^2(\rho^2 + r_+^2) + \frac{b}{\left(\alpha^2(\rho^2+r_+^2)\right)^{1/2}} - \frac{4\chi_m^2}{\alpha^4(\rho^2+r_+^2)}} d\rho^2 + \\
&+ \frac{1}{\alpha^2}(\alpha^2(\rho^2 + r_+^2) + \frac{b}{(\alpha^2(\rho^2 + r_+^2))^{1/2}} - \frac{4\chi_m^2}{\alpha^4(\rho^2 + r_+^2)})d\varphi^2 + \alpha^2(\rho^2 + r_+^2)dz^2
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

Tento časoprostor nemá «ádný horizont ani singularity křivosti, má vak kónickou singularitu na $\rho = 0$. Ta mů«e být odstraněna změnou rozsahu souřadnice φ na

$$
\varphi \in \left\langle 0, \frac{2\pi}{\alpha r_+ - \frac{b}{2(\alpha r_+)^2} + \frac{4\chi_m^2}{\alpha^5 r_+^3}} \right\rangle
$$

Radiální geodetiky v tomto vesmíru lze popsat vztahem

$$
\dot{\rho}^2 = -\frac{1}{g_{\rho\rho}} \frac{E^2 g_{\varphi\varphi} + L^2 g_{tt}}{g_{tt} g_{\varphi\varphi}} - \frac{P^2}{g_{\rho\rho} g_{zz}} - \frac{\delta}{g_{\rho\rho}} \,, \tag{2.50}
$$

kde δ je 0 pro světelnou geodetiku a 1 pro časupodobnou geodetiku. Lze dokázat, «e prostor je v časupodobném i nulovém smyslu geodeticky úplný.

2.3 Zobecnění C-metriky

Mnohým fyzikům se nelíbila přítomnost kosmických strun v klasické C-metrice, hledali tedy způsoby, jak je nahradit nějakým fyzikálním zdrojem urychlující síly. Figurují mezi nimi zejména práce Ernsta [**??**] a [**??**]. Pro zobecnění vakuové C-metriky vyu«il vnější gravitační pole, pro nabitou C-metriku pole magnetické. Zde jsou uváděna konkrétní provedení. Jsou to pouze výsledky, bez odvození a postupů, jakými se k nim dá dospět.

2.3.1 Vnější gravitační pole

Ernst ve svém práci [**??**] ukázal, jakým postupem lze zobecnit osově symetrická řeení vakuových Einsteinových rovnic. Nebudeme zde probírat celý postup, uká«eme si pouze jeho aplikaci na vakuovou C-metriku. Zavedeme dvě nové funkce předpisem

$$
L = -(\frac{F(y)}{(x + y)^2} + 2mAy) \tag{2.51}
$$

$$H = \frac{G(x)}{(x+y)^2} + 2mAx \tag{2.52}$$

kde $F(y) = -1 + y^2 - 2mAy^3$ a $G(x) = 1 - x^2 - 2mAx^3$ stejně jako ve standartní vakuové C-metrice. Pomocí těchto funkcí lze zapsat takovouto metriku:

$$ds^2 = \frac{1}{(x+y)^2}(-Fe^{k(L+H)}dt^2 + e^{k(H-L)}e^{-k^2\frac{FG}{(x+y)^4}}(\frac{dx^2}{G} + \frac{dy^2}{F}) + Ge^{-k(L+H)}d\varphi^2) \tag{2.53}$$

k je zde parametr charakterizující přidané gravitační pole. Je vidět, «e polo«íme-li $k = 0$, přejde metrika (2.53) na bě«nou vakuovou C-metriku. Nás zajímá hlavně, kdy dojde k zániku kónické singularity. Dá se dokázat, «e je to právě tehdy, kdy« $k = 1$. Tehdy má přidané vnější gravitační pole přesně takovou hodnotu, «e je fyzikálním zdrojem zrychlení černé díry.

2.3.2 Ernstova metrika

Ernstova metrika odstraňuje kónickou singularitu z nabité C-metriky tak, «e přidává vnější longitudální elektrické pole. Samo magnetické pole je ale zdrojem gravitace a tak zakřivuje prostoročas. Tuto metriku lze z klasické nabité C-metriky dostat pomocí transformace Harrisonova typu. Přepime si nabitou C-metriku do nových souřadnic jako v [??]. Příslušná transformace je

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{A(x+y)} \\ Au &= t + \int^y \frac{1}{F(y)}dy \\ H(r) &= -A^2r^2G(x - \frac{1}{Ar}) = -A^2r^2G(x) + ArG'(x) \\ &+(1 + 6mAx + 6e^2A^2x^2) - 2\frac{m + 2e^2Ax}{r} + \frac{e^2}{r^2} \end{aligned} \tag{2.54}$$

Tím získáme C-metriku ve tvaru

$$ds^2 = -Hdu^2 - 2dudr - 2Ar^2dudx + \frac{r^2}{G}dx^2 + r^2Gdz^2 \tag{2.55}$$

V původní nabité C-metrice je elektromagnetické pole dáno pomocí $\Phi = -ieX$, $\mathcal{E} = -(r^2G(x) + e^2x^2)$. Zavedeme nové pole vztahem

$$\begin{aligned} \Phi' &= \frac{1}{L}(\Phi + \frac{i}{2}E_0\mathcal{E}) \\ \mathcal{E}' &= \frac{\mathcal{E}}{L} \end{aligned} \tag{2.56}$$

kde $L = 1 + iE_0\Phi - \frac{1}{4}E_0^2\mathcal{E}$. Tím metrika přejde na tvar

$$ds^2 = L^2(-Hdu^2 - 2dudr - 2Ar^2dudx + \frac{r^2}{G}dx^2) + \frac{r^2}{L^2}Gdz^2 \tag{2.57}$$

Po zpětné transformaci do C-metrikovských souřadnic získáme

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{A^2(x+y)^2}\Big(L^2((1 - y^2 + 2mAy^3 + e^2A^2y^4)dt^2 + \\ + \frac{dy^2}{-1 + y^2 - 2mAy^3 + e^2A^2y^4} + \frac{dx^2}{1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4}) + \\ + \frac{1}{L^2}(1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4)d\varphi^2\Big) \end{aligned} \tag{2.58}$$

$$L = 1 + E_0ex + \frac{E_0^2}{4}(\frac{1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4}{A^2(x+y)^2} + e^2x^2) \tag{2.59}$$

Za povimnutí stojí, «e analogickou transformací by se z plochého prostoru dal získat Melvinův magnetický vesmír. Význam pou«itých parametrů je zde stejný jako v C-metrice, E_0 značí intenzitu vnějího elektrostatického pole na ose. Bě«ná interpretace této metriky je dvě urychlené černé díry pohybující se proti sobě v elektrické analogii Melvinova magnetického vesmíru. Toto«nost Ernstovy metriky s $e = m = 0$ s Melvinovým magnetickým vesmírem je dokázána v dodatku F. Platí-li podmínka $eE_0 = mA$ odpovídající druhému Newtonovu zákonu, potom na ose není «ádná kónická singularita.

Kapitola 3

Limitní přechody

Vlastnosti C-metriky byly rozebrány v kapitole 2.1. V této se budeme věnovat mo«ným limitním přechodům z C-metriky do jiných prostoročasů. Některé z nich budou "staří známí" - zejména ploché prostory, prostory s jednou černou dírou a Melvinův magnetický vesmír, jiné budou spíe zajímavé matematické konstrukce pochybného fyzikálního významu. Některé z nich se ale dají vyjádřit společným vzorcem a odliují se pouze parametry. Vzhledem k tomu, o jak odliné prostory se jedná, je to zajímavá souvislost, díky ní« stojí za to zmínit je vechny.

Pavel Sládek se v **??** zabývá liminími přechody C-metriky zapsané ve Weylově formě. Zde jsou rozebírány limity v Kinnersly - Walkerově formě.

3.1 Limitní přechody kolem jedné z děr

Zde se budeme zabývat takovými limitami, v nich« sledujeme jednu z černých děr a druhou posíláme do nekonečna. Očekáváme, «e dostaneme klasické prostoročasy s jednou stojící černou dírou a to se nám splní. Podrobný postup limitního procesu je popsán v dodatcích G a H.

3.1.1 Plochá C-metrika

Bylo by velice překvapující, kdyby limitním přechodem z plochého prostoru vzniklo cokoliv jiného ne« plochý prostor, jednoduchý příklad vak dobře ilustruje, jak limitní postupy fungují.

Vyjdeme z obvyklého tvaru

$$ds^2 = \frac{{s_0}^2}{(x-y)^2}(-(y^2-1)dt^2 + \frac{dy^2}{y^2-1} + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\varphi^2).$$

Limity kolem jednoho z pólů i mezi nimi se zakládají na zvětování vzdálenosti mezi póly na nekonečno, čili $s_0 \to \infty$. Je potřeba proměnné x a y překálovat takovými mocninami s_0, aby «ádný z členů výsledné metriky nedivergoval ani neklesal k nule. Nebudu zde uvádět postupy hledání takovýchto transformací, ukazuji pouze výsledky.

Provedeme substituci

$$y = s_0\eta \qquad t = \frac{\tau}{s_0} \tag{3.1}$$

a dosadíme do metriky. Vyjde

$$ds^2 = \frac{{s_0}^2}{{s_0}^2(\eta - \frac{x}{s_0})}(-(\eta^2 - \frac{1}{s_0})d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{\eta^2 - \frac{1}{s_0}} + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\varphi^2) \tag{3.2}$$

Nyní provedeme limitu pro s_0 rostoucí do nekonečna:

$$\lim_{s_0 \to \infty} ds^2 = \frac{1}{\eta^2}(-\eta^2 d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{\eta^2} + \frac{dx^2}{1-x^2} + (1-x^2)d\varphi^2) \tag{3.3}$$

Interpretace této metriky bude jasnější po provedení následující transformace souřadnic:

$$\eta = \frac{1}{r} \qquad d\eta = -\frac{1}{r^2}dr$$
$$x = \cos\vartheta \qquad dx = -\sin\vartheta d\vartheta$$

Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme

$$ds^2 = -d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 \tag{3.4}$$

co« je plochý prostor ve sférických souřadnicích.

3.1.2 Vakuová C-metrika

Pro vakuovou i nabitou C-metriku platí: bě«ně uváděný tvar je pou«itelný na limitu okolo jedné z děr, ale krajně nevhodný pro limitu na akceleračním horizontu. "Nová forma C-metriky" je výhodná pro obě limity, proto ji budeme pou«ívat i pro tuto limitu. Koho by zajímala tato limita ve standartním tvaru, mů«e si snadno spočítat, «e pou«ité postupy fungují úplně stejně a vedou na toto«né výsledky. I obecný kořenový tvar je vhodný, ale výsledky nejsou tak názorné.

Vyjdeme z tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}((1-y)(1+y)(1+2mAy)dt^2 - \frac{dy^2}{(1-y)(1+y)(1+2mAy)}$$
$$+ \frac{dx^2}{(1-x)(1+x)(1+2mAx)} + (1-x)(1+x)(1-2mAx)d\varphi^2) \tag{3.5}$$

Pro limitu okolo černé díry pou«ijeme substituci

$$y = \frac{\eta}{A} \qquad dy = \frac{d\eta}{A}$$
$$t = A\tau \qquad dt = Ad\tau$$

Dosadíme, vykrátíme a provedeme limitu $a \to 0$. Dostaneme

$$ds^2 = -(1 + 2m\eta)d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{\eta^4(1 + 2m\eta)} + \frac{dx^2}{\eta^2(1 - x^2)} + \frac{1 - x^2}{\eta^2}d\varphi^2) \tag{3.6}$$

Do obvyklejího tvaru tuto metriku převedeme známou substitucí

$$\eta = -\frac{1}{r} \qquad d\eta = \frac{1}{r^2}dr$$
$$x = \cos\vartheta \qquad dx = -\sin\vartheta d\vartheta$$

Tím dospějeme k tvaru

$$ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r})d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 \tag{3.7}$$

co« je známá metrika Schwartzshildovy černé díry.

3.1.3 Nabitá C-metrika

Postup je analogický předchozím případům, nejpodstatnějím rozdílem je, «e nyní je potřeba sledovat i tenzor elektromagnetického pole.

Vycházíme z nové formy C-metriky roznásobené do tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{A^2(x - y)^2}((1 - y^2)(1 + 2mAy + e^2A^2y^2)dt^2 - \\ -\frac{dy^2}{(1 - y^2)(1 + 2mAy + e^2A^2y^2)} + \frac{dx^2}{(1 - x^2)(1 + 2mAx + e^2A^2x^2)} + \\ +(1 - x^2)(1 + 2mAx + e^2A^2x^2)d\varphi^2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Elektromagnetické pole:

$$\mathcal{A} = ey\,dt \qquad \mathcal{F} = e\,dy \wedge dt$$

Substituce

$$\begin{aligned} y &= \frac{\eta}{A} \\ t &= A\tau \end{aligned} \tag{3.9}$$

a limita $A \to 0$ dává

$$ds^2 = -(1+2m\eta+e^2\eta^2)d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{\eta^4(1+2m\eta+e^2\eta^2)} + \frac{dx^2}{\eta^2(1-x^2)} + \frac{1-x^2}{\eta^2}d\varphi^2) \tag{3.10}$$

$$\mathcal{A} = e\eta d\tau \qquad \mathcal{F} = ed\eta \wedge d\tau$$

a u« známou transformací souřadnic

$$\eta = -\frac{1}{r} \qquad x = \cos\vartheta$$

dostaneme Reisner-Nordströmovu černou díru:

$$ds^2 = -(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2})d\tau^2 + \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta d\varphi^2 \tag{3.11}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{e}{r}d\tau \qquad \mathcal{F} = \frac{e}{r^2}dr \wedge d\tau$$

3.1.4 Ernstova metrika

Limitní přechody Ernstovy metriky jsou do podrobností rozebrány v dodatku G, zde se tedy omezíme jen na konstatování nejdůle«itějích závěrů.

Souřadnicové transformace se provádějí stejným způsobem jako ve vech předchozích případech Výsledná metrika pak má tvar

$$ds^2 = L^2(-(1-\frac{2M}{r}+\frac{e^2}{r^2})d\tau^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}+\frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\vartheta) + \frac{r^2\sin^2\vartheta}{L^2}d\varphi^2 \tag{3.12}$$

$$L = 1 + E_0 e\,\cos\vartheta + \frac{E_0^2}{4}(r^2\sin^2\vartheta + e^2\cos^2\vartheta)$$

co« je metrika jedné Reisner-Nordströmovy černé díry ve vnějím homogenním elektrostatickém poli. Snadno nahlédneme, jak vypínání jednotlivých parametrů převádí tuto metriku na jednoduí případy.

3.1.5 $\Lambda \neq 0$

Zmíníme se jetě o limitách černých děr s nenulovou kosmologickou konstantou. Pro jejich provedení je potřeba převést metriku z tvaru (2.1) na tvar

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{\omega^2 R^2}(-\mathcal{H}dT^2 + \frac{dR^2}{\mathcal{H}} + R^2(d\Theta^2 + \mathcal{G}d\Phi^2)) \tag{3.13}$$

kde $\mathcal{H} = \frac{1}{\upsilon}\mathcal{F}$ a υ, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ a ω byly definovány v přísluných sekcích o C-metrice s nenulovou kosmologickou konstantou. Dosáhne se toho transformací

$$\begin{aligned} T &= \ell_\Lambda \tau \\ R &= \frac{\ell_\Lambda}{\upsilon} \\ \Phi &= \varphi \\ d\Theta &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}} d\xi \\ \Theta = \frac{\pi}{2} \qquad pro \qquad \xi &= 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Zde u« musíme rozebrat ka«dý případ zvlá¸. Začneme s de Sitterovským. V něm je

$$\begin{aligned} -\mathcal{F} &= 1 - \upsilon^2 + \cosh\alpha \frac{2m}{\ell_\Lambda}\upsilon^3 - \cosh^2\alpha \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\upsilon^4 \\ \mathcal{G} &= 1 - \xi^2 + \sinh\alpha \frac{2m}{\ell_\Lambda^2}\xi^3 - \sinh^2\alpha \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\xi^4 \\ \omega &= \upsilon\cosh\alpha - \xi\sinh\alpha \end{aligned}$$

Jeliko« $\sinh\alpha = \ell_\Lambda A$, vidíme, «e $\mathcal{G}$ v limitě $A \to 0$ přechází na $1 - \xi^2$. Tím se souřadnice Θ zjednoduuje na $\cos\Theta = -\xi$. $\mathcal{F}$ se mění na $1 - \upsilon^2 + \frac{2m}{\ell_\Lambda}\upsilon^3 - \alpha\frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\upsilon^4$. $\omega = \upsilon$. Výsledná metrika má tvar

$$ds^2 = \ell_\Lambda^2\Big(-(1 - \frac{R^2}{\ell_\Lambda^2} - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2})dT^2 + \frac{dR^2}{1 - \frac{R^2}{\ell_\Lambda^2} - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2}} + R^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\Phi^2)\Big) \tag{3.15}$$

co« je metrika Reisner-Nordströmovy černé díry v de Sitterově prostoročase.

Pokročíme k anti-de Sitterovu prostoročasu. Začneme s podkritickým zrychlením.

$$\mathcal{F} = 1 + \upsilon^2 - 2\frac{m}{\ell_\Lambda^2}\cos\chi_0\upsilon^3 + \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\cos^2\chi_0\upsilon^4 \tag{3.16}$$

$$\mathcal{G} = 1 - \xi^2 + 2\frac{m}{\ell_\Lambda}\sin\chi_0\xi^3 - \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\sin^2\chi_0\xi^4 \tag{3.17}$$

$$\omega = \upsilon\cos\chi_0 - \xi\sin\chi_0 \tag{3.18}$$

$A = \frac{1}{\ell_\Lambda}\sin\chi_0$ Jak je vidět, je zde velká analogie s de Sitterovským případem. Pro $A \to 0$ je $\mathcal{G} = 1 - \xi^2$, $\mathcal{F} = 1 + \upsilon^2 - 2\frac{m}{\ell_\Lambda^2}\upsilon^3 + \frac{e^2}{\ell_\Lambda^2}\upsilon^4$ a $\omega = \upsilon$. To dává metriku formálně stejného tvaru jako v de Sitterovském případě a odpovídá to Reisner-Nordströmově černé díře v anti-de Sitterově prostoročase.

Zbývá u« jen nadkritický případ. V něm je $A = \frac{1}{\ell_\Lambda} \cosh \alpha_0$. Je zcela očividné, «e úravá strana této rovnice nemů«e jít nikdy k nule. Není to překvapující - v«dy ˛ tato varianta je přípustná jen pro A dostatečně velké. Limitu okolo jedné černé díry zde tedy provádět nelze.

3.2 Ploché limity na akceleračním horizontu

V této části si popíeme ty limitní přechody na akceleračním horizontu, při nich« jsou obě souřadnice x i y kálovány stejným faktorem. Zároveň při nich posíláme A k nule a tedy obě černé díry do nekonečna. Sledujeme chování fyzikálních parametrů při těchto limitách.

3.2.1 Plochá C-metrika

Stejně jako v minulé kapitole začneme i tentokrát jednoduchým příkladem na ilustraci postupu. V prvním kroku provedeme transformaci, která posouvá počátek souřadnice y na rovinu symetrie (v pozdějích případech tomu bude odpovídat akcelerační horizont), a káluje obě souřadnice malým parametrem ϵ.

$$y = 1 + \epsilon\eta \qquad dy = \epsilon d\eta \qquad x = -1 + \epsilon\xi \qquad dx = \epsilon d\xi \tag{3.19}$$

Po dosazení provedeme rozvoj podle ϵ do řádu ϵ^2. Dostaneme

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{s_0^2}{4}(1 + \epsilon(\xi - \eta) + \epsilon^2(\xi - \eta)^2)(-\epsilon\eta(\epsilon\eta + 2)dt^2 + \\ \frac{\epsilon}{2\eta}(1 - \frac{\epsilon\eta}{2})d\eta^2 + \frac{\epsilon}{2\xi}(1 + \frac{\epsilon\xi}{2})d\xi^2 + \epsilon\xi(2 - \epsilon\xi)d\varphi^2) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Po roznásobení a zanedbání členů vyích řádů

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{s_0^2}{4}\Big(-(\epsilon^2\eta^2 + 2\epsilon\eta + \epsilon^2\eta(\xi - \eta))dt^2 + (\frac{\epsilon}{2\eta} - \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{2\eta}(\xi - \eta))d\eta^2 + \\ +(\frac{\epsilon}{2\xi} + \frac{\epsilon^2}{4} + \frac{\epsilon^2}{2\xi}(\xi - \eta))d\xi^2 + (2\epsilon\xi - \epsilon^2\xi^2 + \epsilon^2\xi(\xi - \eta))d\varphi^2\Big) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Aby metrika nedivergovala, je nutno polo«it $\epsilon = \frac{1}{s_0^2}$. Po dosazení a vykrácení

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4}\Big(-(\frac{\eta^2}{s_0^2} + 2\eta + \frac{\eta}{s_0^2}(\xi - \eta))dt^2 + (\frac{1}{2\eta} - \frac{1}{4s_0^2} + \frac{1}{2\eta s_0^2}(\xi - \eta))d\eta^2 + \\ (\frac{1}{2\xi} + \frac{1}{4s_0^2} + \frac{1}{2s_0^2\xi}(\xi - \eta))d\xi^2 + (2\xi - \frac{\xi}{s_0^2} + \frac{\xi}{s_0^2}(\xi - \eta))d\varphi^2\Big) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Limita $s_0 \to \infty$ dává

$$ds^2 = \frac{1}{4}(-2\eta dt^2 + \frac{d\eta^2}{2\eta} + \frac{d\xi^2}{2\xi} + 2\xi d\varphi^2) \tag{3.23}$$

Tento prostor lze snadněji interpretovat po sérii transformací: Nejprve:

$$\eta = 2\zeta^2 \qquad d\eta = 4\zeta d\zeta \qquad \xi = 2\rho^2 \qquad d\xi = 4\rho d\rho \tag{3.24}$$

To vede na metriku ve tvaru

$$ds^2 = -\zeta^2 dt^2 + d\zeta^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \tag{3.25}$$

co« je plochý prostor v Rindlerovských (urychlených) souřadnicích. Do plochého prostoru v cylindrických souřadnicích se z něho přejde transformací

$$T = \zeta \sinh t$$

$$z = \zeta \cosh t$$

Dostáváme u« klasickou metriku v cylindrických souřadnicích

$$ds^2 = -dT^2 + dz^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \tag{3.26}$$

Limitní přechod na ose symetrie lze provést i jednoduím způsobem, ten vak není nejvhodnějí pro některé slo«itějí případy. Provedeme subsituci

$$\begin{aligned} y = 1 + \frac{\epsilon\eta^2}{2} \qquad & dy = \epsilon\eta d\eta \\ x = -1 + \frac{\epsilon\xi}{2} \qquad & dx = \epsilon\xi d\xi \\ t = \frac{\tau}{\epsilon} \qquad & dt = \frac{d\tau}{\epsilon} \\ \varphi = \frac{\phi}{\epsilon} \qquad & d\varphi = \frac{d\phi}{\epsilon} \end{aligned} \tag{3.27}$$

Po dosazení a zanedbání členů vyího řádu

$$ds^2 = \frac{s_0^2}{(2 + \frac{\epsilon}{2}(\eta^2 - \xi^2))^2}(-(\eta^2 + \frac{\epsilon^2\eta^4}{4})d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{1 + \frac{\epsilon^2\eta^2}{4}} + \frac{d\xi^2}{1 + \frac{\epsilon^2\xi^2}{4}} + (\xi^2 + \frac{\epsilon^2\xi^4}{4})d\phi^2) \tag{3.28}$$

Polo«íme-li nyní $\epsilon = 0$, dostaneme

$$ds^2 = \frac{s_0^2}{4}(-\eta^2 d\tau^2 + d\eta^2 + d\xi^2 + \xi^2 d\phi^2) \tag{3.29}$$

co« je nám u« známý plochý prostor v Rindlerovských souřadnicích.

3.2.2 Vakuová C-metrika

Limita ve vakuové C-metrice se provádí obdobným způsobem. Hlavním rozdílem zde je přítomnost struny na ose a dalích fyzikálních parametrů, jejich« vývoj budeme sledovat. V metrice 2.6 není úhlový parametr K explicitně uváděn, je zahrnut v rozsahu souřadnice φ. Překálujeme φ tak, aby při rozsahu nové souřadnice $\phi = \langle 0, 2\pi \rangle$ nebyl na ose mezi dírami «ádný úhlový deficit. Odpovídajícím způsobem překálujeme i souřadnici t. To sice není nutné, ale výsledek je pak úhlednějí.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\varphi}{1-2mA} \\ t &= \frac{\tau}{1+2mA} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Navíc dosadíme za x a y analogicky k případu ploché metriky:

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{\epsilon\eta^2}{2} \\ x &= -1 + \frac{\epsilon\xi^2}{2} \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dosazení do metriky dává

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{1}{A^2(-2+\frac{\epsilon}{2}(\xi^2-\eta^2))^2}\Big(-\frac{\frac{\epsilon\eta^2}{2}(2+\frac{\epsilon\eta^2}{2})(1+2mA+mA\epsilon\eta^2)}{(1+2mA)^2}d\tau^2 + \\ & + \frac{2\epsilon d\eta^2}{(2+\frac{\epsilon\eta^2}{2})(1+2mA+mA\epsilon\eta^2)} + \frac{2\epsilon d\xi^2}{(2+\frac{\epsilon\xi^2}{2})(1+2mA+ma\epsilon\xi^2)} + \\ & + \frac{\frac{\epsilon\xi^2}{2}(2+\frac{\epsilon\xi^2}{2})(1+2mA+mA\epsilon\xi^2)}{(1-2mA)^2}d\phi^2\Big) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Aby zůstaly vechny členy v metrice konečné a vliv prostoročasových singularit nebyl zcela potlačen, dosadíme $\epsilon = A^2$, $m = \frac{\mu}{A}$. Upravíme a dostaneme

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \frac{1}{A^2(-2+\frac{A^2}{2}(\xi^2-\eta^2))^2}\Big(-\frac{A^2\eta^2(2+\frac{A^2\eta^2}{2})(1+2\mu+\mu A^2\eta^2)}{2(1+2\mu)^2}d\tau^2 + \\ & + \frac{2A^2 d\eta^2}{(2+\frac{A^2\eta^2}{2})(1+2\mu+A^2\mu\eta^2)} + \frac{2A^2 d\xi^2}{(2-\frac{A^2\xi^2}{2})(1-2\mu+A^2\mu\eta^2)} \\ & + \frac{A^2\xi^2}{2}(2-\frac{a^2\xi^2}{2})(1-2\mu+A^2\mu\xi^2)d\phi^2\Big) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Poleme-li nyní A k nule, dostaneme

$$ds^2 - \frac{1}{4}\Big(-\frac{\eta^2}{1+2\mu}d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{1+2\mu} + \frac{d\xi^2}{1-2\mu} + \frac{\xi^2}{1-2\mu}d\phi^2\Big) \tag{3.34}$$

co« po jednoduchém překálování dává známé Rindlerovy souřadnice. Limita vakuové C-metriky tedy vede k plochému prostoru a vliv černých děr zcela vymizí.

Podívejme se teď na chování fyzikálních parametrů během tohoto přechodu. Konicitu vnitřní osy jsme dr«eli rovnu jedné, během limity se nezměnila. Konicita vnějí osy

$$\kappa_2 = \frac{-2mA(-1+\frac{1}{2mA})(1+1)}{2(1-2mA)} \to 1 \tag{3.35}$$

Plocha černoděrového horizontu

$$S = \frac{2\pi}{KA^2}\frac{w_m - w_a}{(w_m - w_c)(w_a - w_c)} \sim \frac{1}{A^2} \to \infty \tag{3.36}$$

Poměr povrchových gravitací na černoděrovém a na akceleračním horizontu

$$g = \frac{g_c}{g_a} = \frac{w_c - w_m}{w_a - w_m} = \frac{-\frac{1}{2\mu} - 1}{-1-1} = \frac{1+2\mu}{2\mu} \tag{3.37}$$

3.2.3 Nabitá C-metrika

I limita na akceleračním horizontu je analogická vakuovému případu, napíeme vechny substituce naráz:

$$m = \frac{\mu}{A} \qquad e = \frac{q}{A}$$

aby byla zachována struktura Reisner-Nordströmových černých děr se dvěma horizonty a nevznikaly nahé singularity, musí být splněna podmínka $\mu > q$.

$$\varphi = \frac{\phi}{1-2\mu+q^2} \qquad t = \frac{\tau}{1+2\mu+q^2}$$

$$y = 1 + \frac{A^2\eta^2}{2} \qquad dy = A^2\eta d\eta$$

$$x = -1 + \frac{A^2\xi^2}{2} \qquad dx = A^2\eta d\eta$$

Berme A jako malý parametr, zanedbáme členy úměrné A^2 a vyí, A ponecháme. Zůstane

$$ds^2 = \frac{1}{4}(-\frac{\eta^2}{1+2\mu+q^2}d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{1+2\mu+q^2} + \frac{d\xi^2}{1-2\mu+q^2} + \frac{\xi^2}{1-2\mu+q^2}d\phi^2) \tag{3.38}$$

$$\mathcal{A}=\frac{\frac{q}{A}(1+\frac{A^2\eta^2}{2})}{(1+2\mu+q^2)}d\tau \qquad \mathcal{F}=\frac{Aq\eta}{1+2\mu+q^2}d\eta\wedge d\tau$$

Metrika evidentně odpovídá plochému prostoru v rindlerovských souřadnicích, interpretace elektromagnetického pole tak jasná není. Provedeme převod do Minkowského souřadnic a uvidíme, co vyjde. Začneme transformací

$$\zeta=\frac{\eta}{2\sqrt{1+2\mu+q^2}} \qquad \rho=\frac{\xi}{2\sqrt{1-2\mu+q^2}}$$

pokračujeme

$$T=\zeta\sinh\tau \qquad Z=\zeta\cosh\tau \qquad Y=\rho\sin\phi \qquad X=\rho\cos\phi$$

dostaneme

$$ds^2=-dT^2+dZ^2+dX^2+dY^2$$

$$\mathcal{A}=\frac{q}{A}(\frac{1}{(Z^2-T^2)(1+2\mu+q^2)}+2A)(ZdT-TdZ) \qquad \mathcal{F}=4Aq\,dZ\wedge dT$$

Jedná se tedy o homogenní elektrické pole ve směru Z, s klesajícím A jde k 0, ale pomaleji ne« zakřivení prostoročasu, je to plochý prostor s testovacím polem. Zbývá u« jen zmínit se o fyzikálních parametrech. Konicita vnitřní osy zůstává jednotková, konicita vnějí osy přechází na

$$\kappa_2=\frac{-e^2A^2(-1-\frac{1}{A(m-\sqrt{m^2-e^2})})(-1-\frac{1}{A(m+\sqrt{m^2-e^2})})(1+1)}{2(1-2mA+A^2e^2)}$$
$$\rightarrow\frac{4q^2(1+\mu)}{(1+q^2)^2-4\mu^2} \tag{3.39}$$

Plocha vnějího horizontu

$$S_o=\frac{2\pi}{(1-2\mu+q^2)A^2}\frac{1+1}{(1+\frac{1}{\mu+\sqrt{\mu^2-q^2)}})(-1+\frac{1}{\mu+\sqrt{\mu^2-q^2)}})}\sim\frac{1}{A^2}\rightarrow\infty \tag{3.40}$$

To odpovídá tomu, «e fyzikální hmotnost černé díry roste do nekonečna úměrně $1/A$. Analogicky do nekonečna poroste i plocha vnitřního horizontu. Asi nejzajímavějí parametr pro tuto limitu je náboj černých děr.

$$Q_{tot}=\frac{2\pi e(w_m-w_a)}{K}=\frac{2\pi\frac{q}{A}(1+1)}{1-2\mu+q^2}\sim\frac{1}{A}\rightarrow\infty \tag{3.41}$$

To, «e náboj roste do nekonečna, nepřekvapuje. Porovnáme tento případ s klasickou analogií - polem dvou rovnoměrně urychlených bodových nábojů v Minkowského prostoročase. Provádíme-li limitu takovou, «e je posíláme do nekonečna a zároveň zvyujeme náboj tak, aby vzniklo homogenní elektrické pole, musíme náboj zvyovat úměrně $\frac{1}{A^2}$. Je sice mo«né v nabité C-metrice provést takovou limitu, aby vak nevznikala nahá singularita, je potřeba rychleji zvyovat i fyzikální hmotnost a plochu vnějího horizontu. To ale vede na degenerovaný případ, v něm« splývá vnějí horizont s akceleračním.

3.2.4 Ernstova metrika

Podrobný rozbor této limity je v dodatku **??**, tak«e i zde se omezíme na nejdůle«itější závěry. Transformace se provádějí shodně s předchozími případy, navíc přibude podmínka $E = E_1 A$. Není překvapující, «e zakřivení časoprostoru dané černými děrami zcela vymizí. Zajímavější je, «e z metriky, v ní« se původně nenacházela «ádná kónická singularita, vznikne prostor s kosmickou strunou na ose, a to

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + d\rho^2 + \frac{(1-2\mu+q^2)}{L^4}\rho^2 d\varphi^2 \tag{3.42}$$

$$L = 1 - \frac{qE_1B}{c_0}(1+c_1) + \frac{E_1^2B^2}{4}(1+c_1^2)^2 \tag{3.43}$$

kde c_0, c_2 a B jsou faktory z převodu Ernstovy metriky do nové formy a jsou to konečné výrazy závislé na μ a q. V limitách C-metriky je faktor $(1-2\mu+q^2)$ odstraněn překálováním ϕ, které ruí kónickou singularitu vnitřní osy. Ernstova metrika vak «ádnou takovou singularitu neměla a překálování tudí« nepotřebovala. I kdyby bylo provedeno, pořád by zůstal úhlový deficit způsobovaný faktorem L, vznik kónické singularity je tedy způsoben počáteční přítomností vnějího elektrického pole.

3.3 Limity do zakřivených prostoročasů

V předchozí kapitole byly probrány ty limity na akceleračním horizontu, při nich« jsou x a y kálovány stejně. Bylo zjištěno, «e «ádná z nich na zakřivený prostoročas nevede. V této kapitole si předvedeme limity, které na zakřivený prostoročas vedou. Ukazuje se, «e vechny výsledky limitních přechodů lze zapsat jediným souhrnným vzorcem, a to

$$ds^2 = -\frac{1}{x^2}dt^2 + \frac{1}{x^2}dz^2 + \frac{dx^2}{x^2(lx^4+kx^3-\frac{\Lambda}{3})} + \frac{lx^4+kx^3-\frac{\Lambda}{3}}{x^2}d\varphi^2 \tag{3.44}$$

Postup, kterým se najde správný tvar této metriky je uveden v dodatku I. Nelze ale jediným souhrnným předpisem zapsat vechny limitní přechody - v nabitém a vakuovém případě toti« provádíme rozvoj v různých fyzikálních oblastech.

A jaký je fyzikální význam nalezené třídy řeení? Obecně se to nedá říci. Některé konkrétní případy odpovídají dobře známým řeením Einsteinových rovnic, spadá mezi ně Melvinův Magnetický vesmír, Levi-Civitova metrika a magnetická struna v anti-de Sitterově prostoročase. Není ale vůbec jasné, co tato metrika představuje pro kladnou kosmologickou konstantu. Celkově se snad dá prohlásit, «e parametr k souvisí s hmotností a l s nábojem zdroje. Zároveň je vidět, «e pro «ádné hodnoty parametrů l, k a $\Lambda = 0$ nelze dostat plochý prostor. Pro $\Lambda > 0$ a $k = l = 0$ metrika nemá správnou signaturu, nepopisuje tedy «ádný prostoročas. Pro $\Lambda > 0$ a $k = l = 0$ je to anti-de Sitterův vesmír, skalární křivost je rovna 4Λ, tedy konstantní a záporná, přesně jak to odpovídá anti-de Sitterovu prostoročasu. Zbývá je najít převod do konvenčnější formy.

V následujících kapitolách bude popsáno provedení těch limit, které vedou na fyzikálně interpretovatelný prostoročas. Ty bez interpretací zde pomíjím, pokud by vak někdo o ně měl zájem, jistě pro něj nebude obtí«né odvodit je analogicky. Jak je vidět, vechny postupy jsou si podobné. Stačí jenom určit správnou oblast provádění limity.

3.3.1 Nabitá C-metrika

V této kapitole probereme limitní přechod, jím« se nabitá C-metrika převádí na Melvinův vesmír. Podrobné odvození, proč limita musí vypadat tak, jak vypadá, je popsáno v dodatku I. Zde je uvedeno konkrétní provedení tohoto přechodu. Zapíeme nabitou C-metriku v kořenovém tvaru:

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}(&\alpha(y-w_i)(y-w_o)(y-w_a)(y-w_m)dt^2 - \\ &-\frac{dy^2}{\alpha(y-w_i)(y-w_o)(y-w_a)(y-w_m)} + \\ &+\frac{dx^2}{\alpha(x-w_i)(x-w_o)(x-w_a)(x-w_m)} + \\ &+\frac{1}{K^2}\alpha(x-w_i)(x-w_o)(x-w_a)(x-w_m)d\varphi^2) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Provedeme lineární transformaci takovou, aby w_a bylo rovno 0, tedy přesouváme počátek souřadnic na akcelerační horizont. Zatím nekálujeme. Navíc zajistíme, «e na ose mezi děrami nebude přítomna kónická singularita. Toho dosáhneme vhodným nastavením parametru K. Dosazením do vzorce pro fyzikální konicitu dostaneme

$$\kappa_1 = \frac{\alpha}{2K}(w_m - w_i)(w_m - w_o)(w_m - w_a) \tag{3.46}$$

Aby bylo $\kappa_1 = 1$, musí být $K = \frac{\alpha}{2}(w_m - w_i)(w_m - w_o)w_m$. Metrika pak bude mít tvar

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}\Big(\alpha(y-w_i)(y-w_o)y(y-w_m)dt^2 -$$

$$-\frac{dy^2}{\alpha(y-w_i)(y-w_o)y(y-w_m)}+\frac{dx^2}{\alpha(x-w_i)(x-w_o)x(x-w_m)}+ \\ +\frac{4}{\alpha}\frac{(x-w_i)(x-w_o)x(x-w_m)}{((w_m-w_i)(w_m-w_o)w_m)^2}d\varphi^2\Big) \tag{3.47}$$

Přistupme nyní k vlastnímu výpočtu. Začínáme se kálováním. Dosadíme do metriky

$$y=\epsilon\eta \qquad t=\frac{\tau}{\epsilon} \qquad w_i=\widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu} \qquad w_o=\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu} \tag{3.48}$$

kde $1>\mu\geq\frac{1}{2}$. Tato podmínka je nutná, aby se η dalo vůči horizontům zanedbat a přitom nedocházelo k záměně pořadí horizontů, jak bude jetě zmíněno. Vyjde

$$ds^2=\frac{1}{A^2(x-\epsilon\eta)^2}\Big(\alpha(\epsilon\eta-\widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu})(\epsilon\eta-\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu})\epsilon\eta(\epsilon\eta-w_m)\frac{d\tau^2}{\epsilon^2}- \\ -\frac{\epsilon^2 d\eta^2}{\alpha(\epsilon\eta-\widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu})(\epsilon\eta-\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu})\epsilon\eta(\epsilon\eta-w_m)}+ \\ +\frac{dx^2}{\alpha(x-\widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu})(x-\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu})x(x-w_m)} \\ +\frac{4}{\alpha}\frac{(x-\widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu})(x-\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu})x(x-w_m)}{((w_m-\widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu})(w_m-\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu})w_m)^2}d\varphi^2\Big) \tag{3.49}$$

Nyní provedeme limitu $\epsilon\to 0$. Fyzikálně to odpovídá přibli«ování vnějího a vnitřního černoděrového horizontu k akceleračnímu. Tím se také projeví význam podmínky $\mu\geq\frac{1}{2}$: vnitřní horizont se nesmí přibli«ovat rychleji ne« vnějí, tím by se jejich pořadí naruilo a dolo by k problémům s fyzikální interpretací celé metriky. Vra˛me se zpátky k metrice. Po provedení limity z ní zůstane

$$ds^2=\frac{1}{A^2x^2}(-\alpha\widetilde{w}_i\widetilde{w}_o w_m\eta d\tau^2+\frac{d\eta^2}{\alpha\widetilde{w}_i\widetilde{w}_o w_m\eta}+\frac{dx^2}{\alpha x^3(x-w_m)}+\frac{4}{\alpha w_m^6}x^3(x-w_m)d\varphi^2) \tag{3.50}$$

Upravme tuto metriku do obvyklejího tvaru. Postup je stejný jako v dodatku I. Proto«e ale chceme mít přehled o některých fyzikálních parametrech, zejména konicitě, uvedeme si alespoň vechny pou«ité transformace.

Začneme jednoduchou transformací

$$\eta=\frac{\alpha\widetilde{w}_i\widetilde{w}_o w_m}{4}\zeta^2 \\ \tau=\frac{2}{\alpha\widetilde{w}_i\widetilde{w}_o w_m}\theta \\ x=w_m\xi \tag{3.51}$$

Pokračujeme

$$t = \zeta \sinh\theta \qquad z = \zeta \cosh\theta \qquad \xi = \frac{1}{1+\rho^2}$$

Poslední transformace

$$t = \frac{2}{w_m\sqrt{-\alpha}}T \qquad z = \frac{2}{w_m\sqrt{-\alpha}}Z$$

převede metriku na klasickou formu Melvinova vesmíru

$$ds^2 = \frac{-4}{\alpha w_m^4}((1+\rho^2)^2(-dT^2 + dZ^2 + d\rho^2) + \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}d\varphi^2) \tag{3.52}$$

Zbývá prostudovat chování fyzikálních parametrů v této limitě.

Konicita na vnitřní ose se zachovává. Je to patrné z tohoto výpočtu, kde jsme začínali s $\kappa_1 = 1$ a i na konci se to tak zůstalo. Na počátku jsme učinili předpoklad, «e $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Mů«eme vak místo něho nastavit libovolný jiný pevný rozsah úhlové souřadnice, například $\varphi \in \langle 0, 2\pi C \rangle$, kde C je libovolné nezáporné číslo, potom fyzikální konicita osy je C a během limitního přechodu se zachovává.

Konicita na vnějí je dána vztahem

$$\kappa_2 = \frac{w_i w_o w_m}{\alpha(w_m - w_i)(w_m - w_o)w_m} \tag{3.53}$$

To v limitě přechází na

$$\kappa_2 = \frac{\epsilon \widetilde{w}_i \widetilde{w}_o w_m}{(w_m - \epsilon^{1-\mu}\widetilde{w}_i)(w_m - \epsilon^{\mu}\widetilde{w}_o)w_m} \tag{3.54}$$

To klesá k nule úměrně ϵ. To odpovídá i fyzikálnímu náhledu, nebo¸ v naí limitě vnějí osa přechází v nekonečno a v Melvinově vesmíru s rostoucím ρ obvod kru«nice o poloměru ρ klesá k 0.

Hmotnost černé díry je úměrná ploe vnějího horizontu. Ta je dána vztahem

$$S_o = \frac{4\pi}{A^2\alpha(w_m - w_i)(w_m - w_o)w_m}\frac{-w_m}{w_o(w_o - w_m)} \tag{3.55}$$

co« v naí limitě přechází na

$$S_o = \frac{4\pi}{A^2\alpha(w_m - \widetilde{w}_i\epsilon^{1-\mu})(w_m - \widetilde{w}_o\epsilon^{\mu})w_m}\frac{-w_m}{\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu}(\widetilde{w}_o\epsilon^{\mu} - w_m)} \tag{3.56}$$

Jak je vidět, S_o roste nade vechny meze úměrně $\epsilon^{-\mu}$.

Náboj černé díry je dán vztahem

$$Q = \frac{\pi w_m \alpha (w_m - w_i)(w_m - w_o) w_m}{A} \sqrt{\frac{-2\epsilon_0 \alpha}{\kappa}} \tag{3.57}$$

To v naí limitě odpovídá

$$Q = \frac{\pi w_m \alpha (w_m - \widetilde{w}_i \epsilon^{1-\mu})(w_m - \widetilde{w}_o \epsilon^{\mu}) w_m}{A} \sqrt{-2\epsilon_0 \alpha} \tag{3.58}$$

Náboj se tedy řádově nemění. Podobně je to i s intenzitou pole na ose: $E = A w_m^2 \sqrt{\frac{-2\alpha}{\epsilon_0 \kappa}}$ se v limitě zachvává.

Povrchová gravitace na akceleračním horizontu je dána vztahem $g_a = -\frac{\alpha}{4}(w_m - w_i)(w_m - w_o) w_m^2 w_i w_o$. To v limitě přechází na $g_a = -\frac{\alpha}{4}(w_m - \widetilde{w}_i \epsilon^{1-\mu})(w_m - \widetilde{w}_o \epsilon^{\mu}) w_m^2 \widetilde{w}_i \widetilde{w}_o \epsilon$. Povrchová gravitace na akceleračním horizontu klesá úměrně ϵ. Povrchová gravitace na vnějím horizontu je dána vztahem $g_o = -\frac{\alpha}{4}(w_m - w_i)(w_m - w_o)^2 w_m (w_o - w_i) w_o$. To v limitě přejde na $g_o = -\frac{\alpha}{4}(w_m - \widetilde{w}_i \epsilon^{1-\mu})(w_m - \widetilde{w}_o \epsilon^{\mu})^2 w_m (\widetilde{w}_o \epsilon^{\mu} - \widetilde{w}_i \epsilon^{1-\mu}) \widetilde{w}_o \epsilon^{\mu}$. Jak je vidět, i g_o klesá k 0 úměrně ϵ. Poměr povrchových gravitací

$$g = \frac{g_o}{g_a} = \frac{(w_o - w_i)(w_m - w_o)}{w_i w_m} = \frac{(\widetilde{w}_o \epsilon^{\mu} - \widetilde{w}_i \epsilon^{1-\mu})(w_m - \widetilde{w}_o \epsilon^{\mu})}{\epsilon^{1-\mu} \widetilde{w}_i w_m} \sim 1 \tag{3.59}$$

Vzdálenost černé díry od akceleračního horizontu zůstává kupodivu konečná.

C-metrika obvykle nebývá uváděna v kořenovém tvaru, bylo by proto vhodné provést limitu v některém z obvyklejích. Klasický tvar C-metriky se vůbec nehodí, nebo¸ v něm nejsou vidět kořeny, jak u« bylo mnohokrát řečeno. Nová forma C-metriky je pro tyto výpočty výhodnějí. Začněme s kořenovým tvarem 2.17. Upravíme ho substitucí $y = \upsilon - 1$, $x = \xi - 1$ na tvar

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{A^2(\xi - \upsilon)^2} & \Big(\upsilon(2-\upsilon)(1 - r_+ A + r_+ A\upsilon)(1 - r_- A + r_- A\upsilon) dt^2 - \\ & - \frac{d\upsilon^2}{\upsilon(2-\upsilon)(1 - r_+ A + r_+ A\upsilon)(1 - r_- A + r_- A\upsilon)} + \\ & + \frac{d\xi^2}{\xi(2-\xi)(1 - r_+ A + r_+ A\xi)(1 - r_- A + r_- A\xi)} + \\ & + \xi(2-\xi)(1 - r_+ A + r_+ A\xi)(1 - r_- A + r_- A\xi) d\varphi^2\Big) \end{aligned} \tag{3.60}$$

Provedeme transformaci

$$\upsilon = \epsilon \eta \qquad t = \frac{\tau}{\epsilon} \qquad r_+ = \frac{1 + \epsilon^{\mu}}{A} \qquad r_- = \frac{1 + \epsilon^{1-\mu}}{A}$$

Dostaneme

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \frac{1}{A^2(\xi - \epsilon\eta)^2}(\eta(2-\epsilon\eta)(-\epsilon^{1-\mu} + (1+\epsilon^{1-\mu})\epsilon\eta)(-\epsilon^{\mu} + (1-\epsilon^{\mu})\epsilon\eta)\frac{d\tau^2}{\epsilon} - \\
- \frac{\epsilon d\eta^2}{\eta(2-\epsilon\eta)(-\epsilon^{1-\mu} + (1+\epsilon^{1-\mu})\epsilon\eta)(-\epsilon^{\mu} + (1-\epsilon^{\mu})\epsilon\eta)} + \\
+ \frac{d\xi^2}{\xi(2-\xi)(-\epsilon^{1-\mu} + (1+\epsilon^{1-\mu})\xi)(-\epsilon^{\mu} + (1+\epsilon^{\mu})\xi)} + \\
+ \xi(2-\xi)(-\epsilon^{1-\mu} + (1+\epsilon^{1-\mu})\xi)(-\epsilon^{\mu} + (1+\epsilon^{\mu})\xi)d\varphi^2)
\end{aligned}
\tag{3.61}
$$

Limita $\epsilon \to 0$ dává

$$
ds^2 = \frac{1}{A^2\xi^2}(2\eta d\tau^2 - \frac{d\eta^2}{2\eta} + \frac{d\xi^2}{\xi^3(2-\xi)} + \xi^3(2-\xi)d\varphi^2) \tag{3.62}
$$

Převod do Melvinových souřadnic se provádí stejně jako u kořenového tvaru.

3.3.2 Vakuová C-metrika

Jak je ukázáno v dodatku I, metrika ve tvaru

$$
ds^2 = -\frac{1}{x^2}dt^2 + \frac{1}{x^2}dz^2 + \frac{dx^2}{kx^5} + kxd\varphi^2 \tag{3.63}
$$

odpovídá Levi-Civitově metrice se $\sigma = 1$, co« je gravitační pole nekonečně dlouhé lineární hmoty o hustotě $\sigma = 1$. Jako limita vakuové C-metriky to vypadá dost nepravděpodobně, nebo ¸ v C-metrice mezi dírami «ádná hmota není, nanejvý kónická singularita. Tento paradox je ovem zcela zdánlivý. Do tvaru 3.63 nelze toti« přejít z vakuové C-metriky ve fyzikální oblasti B, musí se provést limita v oblasti A a ta má pro $x = \infty$ časoprostorovou singularitu. Vzhledem k následné transformaci souřadnic $x = r^{-2}$ se pak lineární hmota vyvine zcela přirozeně z ní. Limitu není mo«né v oblasti B provádět zejména proto, «e x^3 je polynom s trojnásobně degenerovaným kořenem, chceme-li ho dostat limitním přechodem z obecného polynomu 3. stupně, musíme poslat vechny tři kořeny k sobě a tím oblast B zcela zanikne. Ze statických oblastí se zachová pouze C.

Je mo«né si to představit i jinak: v dodatku I je popsáno, jak Levi-Civitovu metriku z Melvinovy získat posláním jednoduchého kořenu k nekonečnu. Celkový limitní postup byl 1) ze čtyř nedegenerovaných horizontů uděláme jeden trojnásobně degenerovaný a jeden nedegenerovaný (odpovídající w_m) a přitom omezíme rozsah souřadnice y 2) nedegenerovaný horizont poleme do nekonečna. Tyto kroky vak lze prohodit. Kdy« poleme nejprve horizont w_m

do nekonečna, z nabité C-metriky získáme to, co je ve vakuové C-metrice v xy diagramu popisováno jako statická oblast C. Potom poleme vechny tři zbývající horizonty k sobě a omezíme rozsah souřadnice y. Snadno se přesvědčíme, «e jsme dospěli k té samé Levi-Civitově metrice. Schéma postupu je znázorněno na obrázku **??**.

A teď u« konkrétní provedení této limity. V metrice **??** provedeme lineární transformaci souřadnic $x = \xi + w_c$, $y = \upsilon + w_c$. Ta převede metriku na tvar

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(\xi-\upsilon)^2}(\alpha\upsilon(\upsilon-\bar{w}_a)(\upsilon-\bar{w}_m)dt^2 - \frac{d\upsilon^2}{\alpha\upsilon(\upsilon-\bar{w}_a)(\upsilon-\bar{w}_m)} + \\ + \frac{d\xi^2}{\alpha\xi(\xi-\bar{w}_a)(\xi-\bar{w}_m)} + \frac{\alpha}{K^2}\xi(\xi-\bar{w}_a)(\xi-\bar{w}_m)d\varphi^2) \quad (3.64)$$

Dále postupujeme analogicky s nabitým případem, přesto se vak vyskytnou odlinosti. Překálování souřadnic a horizontů nyní vypadá takto:

$$\begin{aligned} \upsilon &= \epsilon\eta \\ t &= \frac{\tau}{\epsilon} \\ \bar{w}_a &= \epsilon^{\mu}\tilde{w}_a \\ \bar{w}_m &= \epsilon^{1-\mu}\tilde{w}_m \\ 1 > \mu &\geq \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Metrika má po dosazení a limitě $\epsilon \to 0$ tvar

$$ds^2 = \frac{1}{A^2\xi^2}(\alpha\tilde{w}_a\tilde{w}_m\eta d\tau^2 - \frac{d\eta^2}{\alpha\tilde{w}_a\tilde{w}_m\eta} + \frac{d\xi^2}{\alpha\xi^3} + \frac{\alpha}{K^2}\xi^3 d\varphi^2) \quad (3.66)$$

Provedeme postupně transformace

$$\eta = -\frac{\alpha\tilde{w}_a\tilde{w}_m}{4}\zeta^2 \qquad \tau = \frac{2}{\alpha\tilde{w}_a\tilde{w}_m}\tilde{\tau} \quad (3.67)$$

$$t = \zeta\sinh\tilde{\tau} \qquad z = \zeta\cosh\tilde{\tau} \qquad x = \frac{1}{r^2} \quad (3.68)$$

$$R = 2^{1/3}r \qquad T = 2^{-2/3}t \qquad Z = 2^{-2/3}z \quad (3.69)$$

Výsledná metrika má potom tvar

$$ds^2 = -R^4dT^2 + R^4dZ^2 + R^4dR^2 + \frac{2^{2/3}}{K^2R^2}d\varphi^2 \quad (3.70)$$

co« je přesně Levi-Civitova metrika se $\sigma = 1$, $C = 2^{-1/3}K$.

3.3.3 C-metrika s $\Lambda \neq 0$

Jak má vypadat výsledek limitního přechodu je popsáno v dodatku I, zbývá nám pouze jeho konkrétní provedení pro $\Lambda \neq 0$. Zjistíme, «e je prakticky shodné s případem $\Lambda = 0$, lií se jen v jediném členu. Ukazuje se táké, podle očekávání, «e pro $\Lambda = 0$ vechny rovnice přecházejí na dříve popsané případy. Je to celkem pochopitelné, v«dy¸ násada pro tento limitní přechod byla odvozena nezávisle na hodnotě kosmologické konstanty. Vyjdeme z obvyklého tvaru C-metriky s nenulovou kosmologickou konstantou:

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}((\frac{\Lambda}{3A^2} + 1 - y^2 - 2mAy^3 - e^2A^2y^4)dt^2 - \\
-\frac{dy^2}{\frac{\Lambda}{3A^2} + 1 - y^2 - 2mAy^3 - e^2A^2y^4} + \frac{dx^2}{1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4} + \\
+(1 - x^2 - 2mAx^3 - e^2A^2x^4)d\varphi^2)
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Abychom dostali limitu v po«adovaném tvaru, potřebujeme $\frac{\Lambda}{3A^2}$ nějak dostat z $F(y)$ do $G(x)$. Toho docílíme jednoduchou transformací souřadnic:

$$
\begin{aligned}
t &= \sqrt{\frac{\Lambda}{3A^2} + 1}\ \bar{t} \\
y &= \sqrt{\frac{\Lambda}{3A^2} + 1}\ \bar{y} \\
x &= \sqrt{\frac{\Lambda}{3A^2} + 1}\ \bar{x} \\
\varphi &= \sqrt{\frac{\Lambda}{3A^2} + 1}\ \bar{\varphi}
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

Navíc zavedeme nový parametr $\bar{A}$ formulí $\bar{A} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3} + A^2}$. Ta je v anti-de Sitterovském případě pou«itelná jen pro $A > \sqrt{-\Lambda/3}$. To je naprosto přirozený po«adavek, říká pouze to, «e potřebujeme nadkritické zrychlení. Kdyby se neobjevil hned tady, narazili bychom na něj později, proto«e podkritické zrychlení nemá akcelerační horizont, na něm« chceme rozvíjet.

Z transformace dostaneme novou metriku ve tvaru

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \frac{1}{\bar{A}^2(\bar{x}-\bar{y})^2}((1 - \bar{y}^2 - 2m\bar{A}\bar{y}^3 - e^2\bar{A}^2\bar{y}^4)d\bar{t}^2 - \frac{d\bar{y}^2}{1 - \bar{y}^2 - 2m\bar{A}\bar{y}^3 - e^2\bar{A}^2\bar{y}^4} \\
+\frac{d\bar{x}^2}{-\frac{\Lambda}{3\bar{A}^2} + 1 - \bar{x}^2 - 2m\bar{A}\bar{x}^3 - e^2\bar{A}^2\bar{x}^4} + (-\frac{\Lambda}{3\bar{A}^2} + 1 - \bar{x}^2 - 2m\bar{A}\bar{x}^3 - e^2\bar{A}^2\bar{x}^4)d\bar{\varphi}^2)
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

Zde mů«eme provést transformaci do "nové formy C-metriky" podle dodatku D. Pak posuneme počátky souřadnice y na akcelerační horizont a identickou transformaci aplikujeme i na x. Vyjde

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(\xi - \upsilon)^2}\Big(\upsilon(2-\upsilon)(1 - r_+A + r_+A\upsilon)(1 - r_-A + r_-A\upsilon)dt^2 - \\ - \frac{d\upsilon^2}{\upsilon(2-\upsilon)(1 - r_+A + r_+A\upsilon)(1 - r_-A + r_-A\upsilon)} \\ + \frac{d\xi^2}{\xi(2-\xi)(1 - r_+A + r_+A\xi)(1 - r_-A + r_-A\xi) - \frac{\Lambda}{3A^2}} + \\ +(\xi(2-\xi)(1 - r_+A + r_+A\xi)(1 - r_-A + r_-A\xi) - \frac{\Lambda}{3A^2})d\varphi^2\Big) \quad (3.74)$$

Provedeme substituci analogicky s případem $\Lambda = 0$:

$$\upsilon = \epsilon\eta \qquad t = \frac{\tau}{\epsilon} \qquad r_+ = \frac{1+\epsilon^{\mu}}{A} \qquad r_- = \frac{1+\epsilon^{1-\mu}}{A}$$

Po dosazení a limitě $\epsilon \to 0$ dospějeme k metrice

$$ds^2 = \frac{1}{A^2\xi^2}\Big(2\eta d\tau^2 - \frac{d\eta^2}{2\eta} + \frac{d\xi^2}{\xi^3(2-\xi) + \frac{\Lambda}{3A^2}} + (\xi^3(2-\xi) + \frac{\Lambda}{3A^2})d\varphi^2\Big) \quad (3.75)$$

Jaký je fyzikální význam této metriky? Pro $\Lambda = 0$ je to u« dříve popsaný Melvinův vesmír, pro $\Lambda < 0$ je to statická magnetická struna v anti-de Sitterově prostoročase popsaná v kapitole 2.2.3, interpretace pro $\Lambda > 0$ není jasná. Nepodařilo se mi najít o ní nějaké pojednání. Uvedu jen malé odůvodnění slo«itosti její interpretace vůči případům s $\Lambda \leq 0$.

Fyzikální rozsah souřadnice x je omezen kořeny rovnice ve tvaru $Ax^4 + Bx^3 + C$. Ka«dou takovouto rovnici lze ekvivalentně popsat tvarem $\alpha(-a^4(1+p+p^2)x^4 + a^3(1+p+p^2+p^3)x^3 - p^3)$. e je to ekvivalentní, je poznat z toho, «e oba tvary mají stejný počet nezávislých parametrů. Překálováním $x = \xi/a$ a vydělením celé rovnice α přejdeme do tvaru $-(1+p+p^2)\xi^4 + (1+p+p^2+p^3)\xi^3 - p^3$, který má kořeny 1 a p. Analýzou metriky s $G(\xi)$ v takovémto tvaru bylo zjitěno, «e kořen $\xi = 1$ odpovídá ose. Navíc porovnáním s tvarem z limity C-metriky zjistíme, «e p má stejné znaménko jako Λ. V tvaru s $\alpha = 1$ je přímo $p^3 = \Lambda/3$. Pro $\Lambda \leq 0$ je pak fyzikální rozsah souřadnice x $\langle 0, 1\rangle$, proto«e díky prefaktoru před celou metrikou je v $x = 0$ nekonečno. Pro $\Lambda > 0$ je rozsah souřadnice $x \in \langle p, 1\rangle$, co« znemo«ňuje pou«ít rovnou relativně jednoduché transformace převádějící interval $\langle 1, 0\rangle$ na $\langle 0, \infty\rangle$, je potřeba souřadnici napřed posunout a to se citelně projeví na slo«itosti výsledku. Zjednoduení se mi nepodařilo nalézt.

Kapitola 4

Závěr

Hlavním přínosem této práce je nalezení limitních přechodů C-metriky do cylindricky symetrických prostoročasů shrnutých metrikou (3.44).

Zbývají tu stále mo«nosti k dalí práci. Zejména by stálo za to najít nějakou interpretaci metriky (3.44) pro $\Lambda > 0$. Kdy« pro $\Lambda = 0$ je to Melvinův magnetický vesmír a pro $\Lambda < 0$ je to nekonečně dlouhá magnetická struna v anti-de Sitterově prostoročase, mohla by to pro $\Lambda > 0$ být magnetická struna nata«ená kolem ”rovníku” de Sitterova vesmíru? Nebo je to něco úplně jiného? A má to vůbec fyzikální smysl?

Příloha A

Plochá C-metrika

Zde uká«eme převod mezi plochou C-metrikou a Minkowského metrikou. Vyjdeme z Minkowského metriky v klasickém tvaru

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + d\bar{z}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 \tag{A.1}$$

a transformacemi

$$\begin{aligned}
\bar{t} &= \zeta \sinh \tau \\
\bar{z} &= \zeta \cosh \tau \\
\bar{x} &= \rho \cos \varphi \\
\bar{y} &= \rho \sin \varphi
\end{aligned} \tag{A.2}$$

převedeme na Rindlerovy urychlené souřadnice

$$s^2 = -\zeta^2 d\tau^2 + d\zeta^2 + d\rho^2 + d\varphi^2 \tag{A.3}$$

Tu přetransformujeme pomocí

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta}{s_0} &= \frac{\sinh \upsilon}{\cosh \upsilon + \cos \xi} \\
\frac{\rho}{s_0} &= \frac{\sin \xi}{\cosh \upsilon + \cos \xi}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

do tvaru

$$ds^2 = \frac{s_o^2}{(\cosh \upsilon + \cos \xi)^2}(-\sinh^2 \upsilon d\tau^2 + d\upsilon^2 + d\xi^2 + \sin^2 \xi d\varphi^2) \tag{A.5}$$

Zde u« stačí jednoduchá transformace $y = \cosh \upsilon$, $x = \cos \xi$, abychom dosáhli ký«eného tvaru 2.5.

Příloha B

de Sitter

V této sekci si popíeme vztah mezi de Sitterovým vesmírem ve standartních souřadnicích a v C-metrikovských souřadnicích. Vyjdeme z klasického tvaru C-metrikovských souřadnic **??** a provedeme transformaci

$$\begin{aligned} \tau &= t \coth \alpha \\ \upsilon &= y \tanh \alpha \\ \xi &= -x \end{aligned} \tag{B.1}$$

kde $\sinh \alpha = \ell_\Lambda A$ je akcelerační parametr. Tím převedeme metriku na tvar

$$ds^2 = r^2 \left(-(1-\upsilon^2) d\tau^2 + \frac{d\upsilon^2}{(1-\upsilon^2)} + \frac{d\xi^2}{(1-\xi^2)} + (1-\xi^2) d\varphi^2 \right) \tag{B.2}$$

kde $r = \frac{\ell_\Lambda}{\upsilon \cosh \alpha - \xi \sinh \alpha}$, Definujeme nové souřadnice předpisem

$$\begin{aligned} T &= \ell_\Lambda \tau \\ R &= \frac{\ell_\lambda}{\upsilon} \\ \cos \Theta &= -\xi \\ \Phi &= \varphi \end{aligned} \tag{B.3}$$

a získáme metriku ve tvaru

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} \left(-(1 - \frac{R^2}{\ell_\Lambda^2}) dT^2 + \frac{dR^2}{1 - \frac{R^2}{\ell_\Lambda^2}} + R^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2) \right) \tag{B.4}$$

Ve standartních souřadnicích má de Sitterův vesmír tvar

$$ds^2 = -\left(1 - R_{dS}^2\right) dT_{dS}^2 + \left(1 - R_{dS}^2\right)^{-1} dR_{dS}^2 + R_{dS}^2 (d\Theta_{ds}^2 + \sin^2 \Theta_{dS} d\Phi_{dS}^2) \tag{B.5}$$

Kdy« do této metriky dosadíme

$$
\begin{aligned}
R_{dS}\cos\Theta_{dS} &= \frac{R\cos\Theta + R_0}{1+\ell_\Lambda^{-2}R_0 R\cos\Theta} \\
R_{dS}\sin\Theta_d S &= \frac{R\sin\Theta\sqrt{1-\ell_\Lambda^{-2}R_0^2}}{1+\ell_\Lambda^{-2}R_0 R\cos\Theta} \\
T_{dS} &= T \\
\Phi_{dS} &= \Phi
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

po úpravách nám vyjde přesně metrika B.4.

Příloha C

Anti-de Sitter

U« jsme si popsali vztah C-metrikovských souřadnic ke standartním v plochém a de Sitterovském případě, zbývá nám jetě probrat případ anti-de Sitterovský. Anti-de Sitterův vesmír ve standartních sférických kosmologických souřadnicích má tvar

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{\cos^2\chi}(-dt^2 + d\chi^2 + \sin^2\chi(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)) \tag{C.1}$$

Ten lze pomocí

$$\begin{aligned}\cos\chi &= \cos\zeta\cos\rho \\ \sin\zeta &= \sin\chi\cos\vartheta \\ \tan\vartheta &= \cot\zeta\sin\rho \\ \tan\rho &= \tan\chi\sin\vartheta\end{aligned} \tag{C.2}$$

převést na cylindrické kosmologické souřadnice ve tvaru

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda}{\cos^2\zeta\cos^2\rho}(-dt^2 + d\zeta^2 + \cos^2\zeta(d\rho^2 + \sin^2\rho d\varphi^2)) \tag{C.3}$$

Ta se standartní statickou formou typu I

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{R_I^2}{\ell_\Lambda^2}\right)dT_I^2 + \left(1 + \frac{R_I^2}{\ell_\Lambda^2}\right)^{-1}dR_I^2 + R_I^2(d\Theta_I^2 + \sin^2\Theta_I d\Phi_I^2) \tag{C.4}$$

souvisí transformací

$$\begin{aligned}T_I &= \ell_\Lambda t \\ R_I &= \ell_\Lambda\tan\chi \\ \Theta_I &= \vartheta \\ \Phi_I &= \varphi\end{aligned} \tag{C.5}$$

Se statickou formou typu II, která má tvar

$$ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{R_{II}^2 \cos^2 \Theta_{II}} \left[-(1 - \frac{R_{II}^2}{\ell^2}) dT_{II}^2 + (1 - \frac{R_{II}^2}{\ell^2})^{-1} r R_{II}^2 + R_{II}^2 (d\Theta_{II}^2 + \sin^2 \Theta_{II} d\Phi^2) \right] \tag{C.6}$$

souvisí transformací

$$\begin{aligned} T_{II} &= \frac{\ell_\Lambda}{2} \log \left| \frac{\sin t - \sin \zeta}{\sin t + \sin \zeta} \right| \\ R_{II} &= \ell_\Lambda \frac{\cos \zeta}{\cos t} \\ \Theta_{II} &= \rho \\ \Phi_{II} &= \varphi \end{aligned} \tag{C.7}$$

Podobně jako se lií interpretace anti-de Sitterovy C-metriky pro různé velikosti zrychlení, i zde je mo«né pou«ít typ I jen pro podkritické a typ II pro nadkritické zrychlení. Vzhledem k tomu, «e anti-de Sitterovská C-metrika popisuje dva různé prostoročasy pro různé hodnoty A, musíme i zde rozebrat dva odliné případy. Začneme podkritickým zrychlením. Dosadíme-li do metriky (C.4) $e = 0$ a $m = 0$, dostaneme

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{(\ell_\Lambda \cos \chi_0 + R'_I \sin \chi_0 \cos \Theta'_I)^2} [- \left(1 + \frac{R_I'^2}{\ell_\Lambda^2}\right) dT_I'^2 + \left(1 + \frac{R_I'^2}{\ell_\Lambda^2}\right)^{-1} dR_I'^2 \\ + R_I'^2 (d\Theta_I'^2 + \sin^2 \Theta'_I d\Phi_I'^2)] \end{aligned} \tag{C.8}$$

Definujeme urychlené sférické souřadnice t'_I, χ'_I, ϑ'_I, φ'_I analogicky k transformaci (C.5) a provedeme dalí transformaci

$$\begin{aligned} t'_I &= t \\ \cos \chi'_I &= \cos \chi_0 \cos_\chi - \sin \chi_0 \sin \chi \cos \vartheta \\ \varphi'_I &= \varphi \\ \cot \vartheta'_I &= cos\chi_0 \cot \vartheta + \sin \chi_0 \cot \chi \sin^{-1} \vartheta \end{aligned} \tag{C.9}$$

dostaneme anti-de Sitterův vesmír ve standartních sférických kosmologických souřadnicích.

Přejděme k případu nadkritického zrychlení. Pro nulovou hmotnost a náboj přechází metrika na

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{\ell_\Lambda^2}{(\ell_\Lambda^2 \sinh \alpha_0 + R'_{II} \cosh \alpha_0 \cos \Theta'_{II})^2} [-(1 - \frac{R_{II}'^2}{\ell^2}) dT_{II}'^2 \\ + (1 - \frac{R_{II}'^2}{\ell^2})^{-1} dR_{II}'^2 + R_{II}'^2 (d\Theta_{II}'^2 + \sin^2 d\Phi_{II}'^2)] \end{aligned} \tag{C.10}$$

Zavedeme nové souřadnice t'_{II}, χ'_{II}, ϑ'_{II}, φ'_{II} a t'_{II}, ζ'_{II}, ρ'_{II}, φ'_{II} analogicky k transformacím (C.7) a (C.2). Tím jsme dostali urychlené sférické a cylindrické souřadnice. Na statické je převedeme předpisem

$$\begin{aligned}
\cot t'_{II} &= \frac{\cosh \alpha_0 \cos t - \sinh \alpha_0 \cos \chi}{\sin t} \\
\cot \chi'_{II} &= \frac{-\sinh \alpha_0 \cos t + \cosh \alpha_0 \cos \chi}{\sin \chi}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Příloha D

Nová forma

Obvyklé vyjádření $F(\xi)$ je $F(\xi) = 1-\xi^2+2mA\xi^3-e^2A^2\xi^4$. Vektorový potenciál elektromagnetického pole pak je $\mathcal{A} = ey\,dt$, tenzor elektromagnetického pole je $\mathcal{F} = q\,dy\wedge dt$. Pro nae výpočty je tato forma krajně nevhodná, nebo neposkytuje jasné vyjádření kořenů. Chtěli bychom ji převést do jiné podoby, formálně stejné, ale s jasně patrnými kořeny polynomu $F(\xi)$. Takovou transformaci popisují Hong a Teo v článku **??**. Autoři nahradili staré parametry novými, vlnkovanými, podle předpisu

$$\begin{aligned}
x &= Bc_0(\tilde{x}-c_1)\\
y &= Bc_0(\tilde{y}-c_1)\\
t &= \frac{c_0}{B}\tilde{t}\\
\varphi &= \frac{c_0}{B}\tilde{\varphi}\\
A &= \frac{\tilde{A}}{B}\\
e &= \frac{\tilde{e}}{c_0^2}\\
m &= \frac{1}{c_0^3}(\tilde{m}+2\tilde{e}^2c_1\tilde{A})\\
\tilde{\mathcal{A}} &= \tilde{e}\tilde{y}d\tilde{t}\\
F(\xi) &= B^2\tilde{F}(\tilde{\xi})\\
\tilde{\mathcal{F}} &= \tilde{e}\,d\tilde{y}\wedge d\tilde{t}\ ,
\end{aligned} \tag{D.1}$$

kde

$$c_0^2 = 1-\tilde{e}^2\tilde{A}^2+6\tilde{m}\tilde{A}c_1+6\tilde{e}^2\tilde{A}^2c_1^2 \qquad \frac{1}{B^2} = 1+(1=\tilde{e}^2\tilde{A}^2)c_1^2+4\tilde{m}\tilde{A}c_1^3+3\tilde{e}^2\tilde{A}^2c_1^4$$

kde c_1 je řeením rovnice $4\tilde{e}^2\tilde{A}^2c_1^3 + 6\tilde{m}\tilde{A}c_1^2 + 2(1-\tilde{e}^2\tilde{A}^2)c_1 - 2\tilde{m}\tilde{A} = 0$. Je to kubická rovnice s nekladným diskriminantem, tak«e má tři reálné kořeny. Navíc, proto«e součin těchto tří kořenů je $\tilde{m}/(2\tilde{e}^2\tilde{A})$, co« je kladné, mů«e být buď jeden z nich kladný a dva záporné nebo jsou vechny tři kladné. Zvolením kteréhokoliv z těchto tří kořenů lze přesně dopočítat ostatní pomocné veličiny, pro převod metriky to ale není nutné.

Autoři ve své práci neuva«ovali kosmologickou konstantu. Ukazuje se, «e tato transformace je vhodná i pro ni. V časoprostorech s kosmologickou konstantou přibývá u $F(y)$ člen $\frac{\Lambda}{3A^2}$. Převedeme-li ho do nové formy přesně podle předpisu, získáme $\frac{B^2\Lambda}{\tilde{A}^2}$. To skvěle vyhovuje podmínce $F(\xi) = B^2\tilde{F}(\tilde{\xi})$. Převod do nové formy C-metriky lze tedy provést i pro C- metriku s $\Lambda \neq 0$ a kosmologickou konstantu přitom není potřeba nijak transformovat. Výsledná metrika má potom tvar

$$
\begin{aligned}
ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}\Big(&(\frac{\Lambda}{3A^2} + (1-y^2)(1+r_-Ay)(1+r_+Ay))dt^2 + \\
&\frac{dy^2}{(\frac{\Lambda}{3A^2} + (1-y^2)(1+r_-Ay)(1+r_+Ay))} + \\
&\frac{dx^2}{(1-x^2)(1+r_-Ax)(1+r_+Ax)} + (1-x^2)(1+r_-Ax)(1+r_+Ax)d\varphi^2\Big)
\end{aligned}
\tag{D.2}
$$

kde $r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - e^2}$.

Příloha E

Konformní diagramy

Pro lepí pochopení globální struktury prostoročasu slou«í konformní diagramy. Umo«ňují znázornit strukturu časoprostoru i tam, kam bě«ně pou«ívané souřadnice nedosahují. Konformní diagramy jsou vlastně diagramy v souřadnicích, které jsou hladké ve vech bodech časoprostoru. Některé prostoročasy lze popsat jedinou sadou konformních souřadnic, jiné je potřeba pokrýt sadou souřadnicových map. Těch mů«e být i nekonečno, ale to pro znázorňování nebývá problém, nebo˛ obvykle vytvářejí periodické struktury. Tak tomu bude i v případě C-metriky.

V C-metrice vyu«ijeme konformní diagramy v rovině ty. Dvourozměrná metrika v této rovině má tvar

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}(-F(y)dt^2 + \frac{dy^2}{F(y)}) \tag{E.1}$$

Potřebujeme ji převést do takových souřadnic, v nich« je $g_{tt} = -g_{yy}$. toho se dá snadno docílit transformací

$$Y = \int_0^y \frac{1}{F(\eta)} d\eta \ . \tag{E.2}$$

Ta převede metriku na tvar

$$ds^2 = \frac{F(y)}{A^2(x-y)^2}(-dt^2 + dY^2) \tag{E.3}$$

Pro dalí postup je potřeba rozliit, přes kolikrát degenerovaný horizont chceme se souřadnicemi přecházet. Je-li jednoduchý nebo lie degenerovaný ($3\times$, $5\times$,...), pak funkce $Y(y)$ má průběh podobný tomu vyznačenému na obrázku (obrázek) a pou«ijeme postup A, je li horizont degenerovaný $2\times$, $4\times$, ... pak má průběh jako na obrázku (obrázek) a pou«ijeme postup B. První krok mají společný: Zavedeme světelné souřadnice

$$u_o = t + Y \ , \qquad v_0 = t - y \ .$$

V druhém kroku se projeví odlinosti. Zápis mají oba případy stejný:

$$u = \epsilon_1 e^{-\gamma_1 u_0} \ , \qquad v = \epsilon_2 e^{\gamma_2 v_0}$$

V obou případech se volí $\epsilon_1 \epsilon_2 = -sgn(F(y))$. Rozdíl je v γ. V případě A mají γ_1 i γ_2 stejné znaménko, a to + pokud je $Y(y)$ na přísluném horizontu $+\infty$, v opačném případě je to $-$. V případě B mají γ_1 a γ_2 znaménka opačná. Pro kreslení konformního diagramu je na ka«dém horizontu potřeba pou«ít obě kombinace.

Dalí převody jsou pro obě varianty společné:

$$\widetilde{u} = \arctan u \ , \qquad \widetilde{v} = \arctan v \ . \tag{E.4}$$

A konečně se vrátíme k jedné souřadnici časové a druhé prostorové a tím bude proces hledání konformních souřadnic zavren:

$$\tau = \widetilde{u} + \widetilde{v} \ , \qquad \vartheta = \widetilde{u} - \widetilde{v} \ . \tag{E.5}$$

Příklady konformních souřadnic přecházejících přes horizont s lichou a sudou degenerací jsou na obrázcích (obrázek), (obrázek).

Příloha F

Melvin v C-metrikovské formě

V tomto dodatku si objasníme souvislost mezi Ernstovou metrikou bez černých děr a Melvinovým magnetickým vesmírem. Napime si Ernstovu metriku s $e = m = 0$. Ta má tvar

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x+y)^2}\Big((1 + \frac{E_0^2}{4A^2}\frac{(1-x^2)}{(x+y)^2})^2((1-y^2)dt^2 - \frac{dy^2}{1-y^2} + \frac{dx^2}{1-x^2}) + \\ + \frac{1}{(1 + \frac{E_0^2}{4A^2}\frac{(1-x^2)}{(x+y)^2})^2}(1-x^2)d\varphi^2\Big) \tag{F.1}$$

Podle fyzikálního názoru by toto měl být Melvinův magnetický vesmír, není to ale na první pohled zřejmé. Je potřeba to dokázat. Nejjednoduí je to převodem Melvinova vesmíru z cylindrických do C-metrikových souřadnic. Melvinův magnetický vesmír v cylindrických souřadnicích vypadá takto:

$$ds^2 = \bar{a}^2((1+\rho^2)^2(-dt^2 + dz^2 + d\rho^2) + \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2}d\varphi^2) \tag{F.2}$$

kde $\bar{a}$ je parametr určující velikost vesmíru, jeho hodnota závisí na síle magnetického pole vztahem $\bar{a} = 2/B_0$, kde B_0 je hodnota magnetického pole na ose, gravitační konstanta je pokládána rovna 1.

Převod do C-metrikovských souřadnic proběhne ve třech krocích, úplně stejně jako při převodu Minkowského prostoru do C-metrikovských souřadnic. Připomínám přísluné kroky transformace:

V prvním zavedeme urychlené souřadnice transformací

$$\begin{aligned} t &= \zeta \sinh \tau \\ dt &= \sinh \tau \, d\zeta + \zeta \cosh \tau \, d\tau \\ z &= \zeta \cosh \tau \\ dz &= \cosh \tau \, d\zeta + \zeta \sinh \tau \, d\tau \end{aligned} \tag{F.3}$$

Dostaneme metriku ve tvaru

$$ds^2 = a_0^2((1+\rho^2)^2(-\zeta^2 d\tau^2 + d\zeta^2 + d\rho^2) + \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2} d\varphi^2) \tag{F.4}$$

V druhém kroku zavedeme úhlové C-metrikovské souřadnice:

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta}{B} &= \frac{\sinh\,\upsilon}{\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi} \\
\frac{d\zeta}{B} &= \frac{1}{(\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi)^2}((1 + \cosh\,\upsilon\ \cos\,\xi)d\upsilon + \sinh\,\upsilon\ \sin\,\xi\ d\xi) \\
\frac{\rho}{B} &= \frac{\sin\,\xi}{\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi} \\
\frac{d\rho}{B} &= \frac{1}{(\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi)^2}(-\sinh\,\upsilon\,\sin\,\xi\ d\upsilon + (1 + \cosh\,\upsilon\ \cos\,\xi)d\xi)
\end{aligned} \tag{F.5}$$

Po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned}
ds^2 = \frac{a_0^2 B^2}{(\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi)^2}\Big((1 + \frac{B^2 \sin^2\xi}{(\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi)^2})^2\Big(-\sinh^2\upsilon d\tau^2 + \\
+\frac{1}{(\cosh\,\upsilon + \cos\,\xi)^2}((1 + 2\cosh\,\upsilon\ \cos\,\xi + \cosh^2\upsilon\ \cos^2\xi + \sinh^2\upsilon\ \sin^2\xi) \times \\
\times(d\upsilon^2 + d\xi^2))\Big) + \frac{\sin^2\xi\ d\varphi^2}{(1 + \frac{B^2\sin^2\xi}{(\cosh\,\upsilon+\cos\,\xi)^2})^2}\Big)
\end{aligned} \tag{F.6}$$

V poslením kroku transformací dosadíme

$$\begin{aligned}
y &= \cosh\,\upsilon \\
dy &= \sinh\,\upsilon\,d\upsilon \\
x &= -\sin\,\xi\,d\xi \\
dx &= \cos\,\xi\,d\xi
\end{aligned} \tag{F.7}$$

Vyjde

$$\begin{aligned}
ds^2 = \frac{a_0^2 B^2}{(x+y)^2}\Big((1 + \frac{B^2(1-x^2)}{(x+y)^2})^2(-(y^2-1)d\tau^2 + \frac{dy^2}{y^2-1} + \frac{dx^2}{1-x^2}) + \\
+\frac{(1-x^2)}{(1+\frac{B^2(1-x^2)}{(x+y)^2})^2}d\varphi^2\Big)
\end{aligned} \tag{F.8}$$

Prostým porovnáním zjistíme, «e polo«íme-li $a_0^2 = \frac{4}{E_0^2}$, $B^2 = \frac{E_0^2}{4A^2}$, pak si jsou obě metriky rovny.

Příloha G

Limitní přechody Ernstovy metriky

Předvedeme si podrobně postup provádění limit z Ernstovy metriky. Probíráme limitu okolo jedné černé díry i na akceleračním horizontu. V následujících vzorcích stačí polo«it $E_0 = 0$ abychom dostali postup pro nabitou C-metriku, $e = 0$ pro vakuovou a $m = 0$ pro plochou. Postup je ve vech případech stejný. Začneme limitou okolo jedné černé díry. Transformace souřadnic je

$$\begin{aligned} y &= \frac{\eta}{A} \\ dy &= \frac{d\eta}{A} \\ t &= A\tau \\ dt &= A d\tau \end{aligned} \tag{G.1}$$

Tím nabude metrika tvaru

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{(Ax+\eta)^2}\Big(L^2((A^2-\eta^2+2m\eta^3-e^2\eta^4)d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{-A^2+\eta^2-2m\eta^3+e^2\eta^4} + \\ + \frac{dx^2}{1-x^2-2mAx^3-e^2A^2x^4}) + \frac{1}{L^2}(1-x^2-2mAx^3-e^2A^2x^4)d\varphi^2\Big) \end{aligned} \tag{G.2}$$

$$L = 1 + E_0 ex + \frac{E_0^2}{4}(\frac{1-x^2-2max^3-e^2A^2x^4}{Ax+\eta} + e^2x^2) \tag{G.3}$$

Po dosazení $A = 0$, co« odpovídá vzdálení druhé černé díry do nekonečna, vyjde

$$ds^2 = \frac{1}{\eta^2}\Big(L^2(-(1-2m\eta+e^2\eta^2)d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{\eta^2(1-2m\eta+e^2\eta^2)} + \frac{dx^2}{1-x^2}) + \frac{1-x^2}{L^2}d\varphi^2\Big) \tag{G.4}$$

$$L = 1 + E_0 ex + \frac{E_0^2}{4}\left(\frac{1-x^2}{\eta^2} + e^2x^2\right) \tag{G.5}$$

Do obvyklejího tvaru tuto metriku převedeme transformací

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{r} \\ x &= \cos\vartheta \end{aligned} \tag{G.6}$$

Tím získáme metriku ve tvaru

$$ds^2 = L^2\left(-(1-\frac{2M}{r}+\frac{e^2}{r^2})d\tau^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}+\frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\vartheta\right) + \frac{r^2\sin^2\vartheta}{L^2}d\varphi^2 \tag{G.7}$$

$$L = 1 + E_0 e\,\cos\vartheta + \frac{E_0^2}{4}(r^2\sin^2\vartheta + e^2\cos^2\vartheta)$$

To odpovídá Reisner-Nordströmově černé díře ve vnějím elektrickém poli. Snadno nahlédneme, «e pro $E_0 = 0$ to odpovídá Reisner-Nordströmově černé díře bez vnějího pole, pro $E_0 = 0$, $e = 0$ Schwarzschildově černé díře a pro $E_0 = 0$, $e = 0$, $m = 0$ plochému prostoru. Vechno to jsou přesně ty výsledky, které jsme očekávali.

Nyní přistoupíme k limitě na akceleračním horizontu. Aby to bylo mo«né, je potřeba Ernstovu metriku převést do "nové formy", podobně jako v dodatku **??**. K tam popsaným transformacím přibude navíc $E = \frac{E_0 B}{c_0}$. Vyjádření konstant c_0, c_1 je slo«ité, postačí snad říct, «e při následující limitě zůstanou konečné. Metrika přechází na tvar:

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}\Big(&L^2(-(1-y^2)(1+2mAy+A^2e^2y^2)dt^2 \\ &+\frac{dy^2}{(1-y^2)(1+2mAy+A^2e^2y^2)} + \frac{dx^2}{(1-x^2)(1+2mAx+A^2e^2x^2)}) + \\ &+\frac{1}{L^2}(1-x^2)(1+2mAx+A^2e^2x^2)d\varphi^2\Big) \end{aligned} \tag{G.8}$$

$$L = 1 + eE(x-c_1) + \frac{E^2}{4}\left(\frac{(1-x^2)(1+2mAx+e^2A^2x^2)}{A^2(x-y)^2} + c_0^2(x-c_1)^2\right) \tag{G.9}$$

Podle **??** v Ernstově metrice není přítomna kónická singularita, je-li A dostatečně malé a platí $eE = mA$. V této limitě je tato podmínka splněna. Pus¸me se nyní do vlastního výpočtu limity. Dosadíme

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{A^2\eta^2}{2} \\ x &= -1 + \frac{A^2\xi}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{\mu}{A} \\
e &= \frac{q}{A} \\
E &= E_1 A \\
c1 &= \frac{1}{2q^2}(\mu q^2 + \mu q^4 - \mu^3)^{1/3} - \frac{\mu}{q^2} + \frac{3\mu^2 + 2q^4 - 2q^2}{6q^2(\mu q^2 + \mu q^4 - \mu^3)^{1/3}} \\
c_0^2 &= 1 - q^2 + 6\mu c_1^3 + 3q^2 c_1^4 \\
\frac{1}{B^2} &= 1 + (1 - q^2)c_1^2 + 4\mu c_1^3 + 3q^2 c_1^4
\end{aligned}
\tag{G.10}
$$

Dostaneme

$$
ds^2 = \frac{1}{4}\Big(L^2(-\eta^2(1+2\mu+q^2)dt^2 + \frac{d\eta^2}{1+2\mu+q^2} + \frac{d\xi^2}{1-2\mu+q^2}) + \frac{x^2}{L^2}(1-2\mu+q^2)d\varphi^2\Big)
\tag{G.11}
$$

$$
L = 1 - \frac{qE_1B}{c_0}(1 + c_1) + \frac{E_1^2B^2}{4}(1 + c_1^2)^2
\tag{G.12}
$$

Metriku dále upravíme:

$$
\begin{aligned}
\zeta &= \frac{L\eta}{2(1 + 2\mu + q)^{1/2}} \\
\rho &= \frac{L\xi}{2(1 - 2\mu + q^2)^{1/2}} \\
\tau &= (1 + 2\mu + q^2)t
\end{aligned}
\tag{G.13}
$$

Pak

$$
ds^2 = -\zeta^2 d\tau^2 + d\rho^2 + \frac{(1 - 2\mu + q^2)^2}{L^4}\rho^2 d\varphi^2
\tag{G.14}
$$

Dalí substituce

$$
\begin{aligned}
T &= \zeta \sinh \tau \\
Z &= \zeta \cosh \tau
\end{aligned}
\tag{G.15}
$$

dává

$$
ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + d\rho^2 + \frac{(1 - 2\mu + q^2)}{L^4}\rho^2 d\varphi^2
\tag{G.16}
$$

Fyzikální konicita osy je $\kappa = \frac{1-2\mu+q^2}{L^2}$, dostali jsme tedy plochý prostor s kosmickou strunou. Pokud bychom začali v klasické C-metrice, kde je $L = 1$, a na počátku překálovali φ tak, aby se na ose mezi dírami nevyskytovala kónická singularita, nedostali bychom ji ani ve výsledku.

Příloha H

Elektromagnetické pole při limitních přechodech nabité C-metriky

V tomto dodatku popíeme podrobně chování elektromagnetického pole při limitách nabité C-metriky. Pou«ité transformace se přitom nijak nelií od těch vyu«itých v dodatku G. Tenteokrát nás ale zajímá hlavně jejich působení na elektromagnetické pole. Vyjdeme z nabité C-metriky ve tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}(1 - y^2 + 2mAy^3 - e^2a^2y^4)dt^2 - \frac{dy^2}{1 - y^2 + 2mAy^3 - e^2A^2y^4}$$
$$+ \frac{dx^2}{1 - x^2 + 2mAx^3 + e^2A^2x^4} + (1 - x^2 + 2mAx^3 + e^2A^2x^4)d\varphi^2) \quad \text{(H.1)}$$

$$\mathcal{A} = ey\,dt \quad \text{(H.2)}$$
$$\mathcal{F} = e\,dy \wedge dt \quad \text{(H.3)}$$

Podobně jako ve vakuovém případě je i zde vhodnějí pou«ít "novou formu" popsanou v **??**, která má pro nabitý případ tvar

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}((1-y^2)(1+r_+Ay)(1+r_-Ay)dt^2 -$$
$$-\frac{dy^2}{(1-y^2)(1+r_+Ay)(1+r_-Ay)} + \frac{dx^2}{(1-x^2)(1+r_+Ax)(1+r_-Ax)}$$
$$+(1-x^2)(1+r_+Ax)(1+r_-Ax)d\varphi^2) \quad \text{(H.4)}$$

kde $r_\pm = m_\pm\sqrt{(m^2 - e^2)}$. Tuto metriku lze roznásobit do tvaru

$$ds^2 = \frac{1}{A^2(x-y)^2}((1-y^2)(1+2mAy+e^2A^2y^2)dt^2 -$$

$$-\frac{dy^2}{(1-y^2)(1+2mAy+e^2A^2y^2)}+\frac{dx^2}{(1-x^2)(1+2mAx+e^2A^2x^2)}+$$
$$+(1-x^2)(1+2mAx+e^2A^2x^2)d\varphi^2) \quad \text{(H.5)}$$

Elektromagnetické pole:

$$\mathcal{A} = ey\,dt \quad \text{(H.6)}$$
$$\mathcal{F} = e\,dy \wedge dt \quad \text{(H.7)}$$

Proveďme nejprve limitu okolo jedné z černých děr. Substituce:

$$y = \frac{\eta}{A}$$
$$dy = \frac{d\eta}{A}$$
$$t = A\tau$$
$$dt = Ad\tau \quad \text{(H.8)}$$

vede na

$$ds^2 = \frac{1}{(Ax-\eta)^2}((1-\frac{\eta^2}{A^2})(1+2m\eta+e^2\eta^2)d\tau^2 -$$
$$-\frac{d\eta^2}{(a^2-\eta^2)(1+2m\eta+e^2\eta^2)}+\frac{dx^2}{(1-x^2)(1+2mAx+e^2A^2x^2)}+$$
$$+(1-x^2)(1+2mAx+e^2A^2x^2)d\varphi^2) \quad \text{(H.9)}$$

$$\mathcal{A} = e\eta\,d\tau \quad \text{(H.10)}$$
$$\mathcal{F} = e\,d\eta \wedge d\tau \quad \text{(H.11)}$$

Limita $a \to 0$ dává

$$ds^2 = -(1+2m\eta+e^2\eta^2)d\tau^2 + \frac{d\eta^2}{\eta^4(1+2m\eta+e^2\eta^2)}+\frac{dx^2}{\eta^2(1-x^2)}+\frac{1-x^2}{\eta^2}d\varphi^2) \quad \text{(H.12)}$$

$$\mathcal{A} = e\eta\,d\tau \quad \text{(H.13)}$$
$$\mathcal{F} = e\,d\eta \wedge d\tau \quad \text{(H.14)}$$

a u« důvěrně známou transformací souřadnic

$$\eta = -\frac{1}{r}$$
$$d\eta = \frac{1}{r^2}dr$$
$$x = \cos\vartheta$$
$$dx = -\sin\vartheta d\vartheta \quad \text{(H.15)}$$

dostaneme Reisner-Nordströmovu černou díru:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2})d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \tag{H.16}$$

$$\mathcal{A} = -\frac{e}{r} d\tau \tag{H.17}$$

$$\mathcal{F} = \frac{e}{r^2} dr \wedge d\tau \tag{H.18}$$

To je radiální elektrostatické pole přesně odpovídající Reisner-Nordströmově černé díře.

Nyní přistoupíme k limitě na akceleračním horizontu. Vzhledem k analogii s popsanou transformací Ernstovy metriky napíeme vechny substituce naráz:

$$\begin{aligned} m &= \frac{\mu}{A} \\ e &= \frac{q}{A} \end{aligned} \tag{H.19}$$

aby byla zachována struktura Reisner-Nordströmových černých děr se dvěma horizonty a nevznikaly nahé singularity, musí být splněna pdmínka $\mu > q$.

Nepřítomnost kónické singularity v místě rozvoje zajistíme transformací

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\phi}{1 - 2\mu + q^2} \\ t &= \frac{\tau}{1 + 2\mu + q^2} \end{aligned} \tag{H.20}$$

a vlastní rozvoj

$$\begin{aligned} y &= 1 + \frac{A^2 \eta^2}{2} \\ dy &= A^2 \eta d\eta \\ x &= -1 + \frac{A^2 \xi^2}{2} \\ dx &= A^2 \eta d\eta \end{aligned} \tag{H.21}$$

Po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4(1 + \frac{A^2}{2}(\eta^2 - \xi^2))^2} (- &\frac{\eta^2 (2 + \frac{A^2\eta^2}{2})(1 + 2\mu + q^2 + A^2\eta^2(\mu + q^2))}{2(1 + 2\mu + q^2)} d\tau^2 + \\ &+ \frac{2 d\eta^2}{(2 + \frac{A^2\eta^2}{2})(1 + 2\mu + q^2 + A^2\eta^2(\mu + q^2))} + \end{aligned}$$

$$+\frac{2d\xi^2}{(2-\frac{A^2\xi^2}{2})(1-2\mu+q^2+A^2\xi^2(\mu-q^2))}+$$
$$+\frac{\xi^2(2-\frac{A^2\xi^2}{2})(1-2\mu+q^2+A^2\xi^2(\mu-q^2))}{2(1-2\mu+q^2)}d\phi^2) \quad \text{(H.22)}$$

$$\mathcal{A}=\frac{\frac{q}{A}(1+\frac{A^2\eta^2}{2})}{(1+2\mu+q^2)}d\tau \quad \text{(H.23)}$$
$$\mathcal{F}=\frac{Aq\eta}{1+2\mu+q^2}d\eta\wedge d\tau \quad \text{(H.24)}$$

Berme A jako malý parametr, zanedbáme členy úměrné A^2 a vyí, A ponecháme. Zůstane

$$ds^2=\frac{1}{4}(-\frac{\eta^2}{1+2\mu+q^2}d\tau^2+\frac{d\eta^2}{1+2\mu+q^2}+\frac{d\xi^2}{1-2\mu+q^2}+\frac{\xi^2}{1-2\mu+q^2}d\phi^2) \quad \text{(H.25)}$$

$$\mathcal{A}=\frac{\frac{q}{A}(1+\frac{A^2\eta^2}{2})}{(1+2\mu+q^2)}d\tau \quad \text{(H.26)}$$
$$\mathcal{F}=\frac{Aq\eta}{1+2\mu+q^2}d\eta\wedge d\tau \quad \text{(H.27)}$$

Metrika evidentně odpovídá plochému prostoru v rindlerovských souřadnicích, interpretace elektromagnetického pole tak jasná není. Provedeme převod do Minkowského souřadnic a uvidíme, co vyjde. Začneme transformací

$$\zeta=\frac{\eta}{2\sqrt{1+2\mu+q^2}}$$
$$\rho=\frac{\xi}{2\sqrt{1-2\mu+q^2}} \quad \text{(H.28)}$$

To dává

$$ds^2=-\zeta^2d\tau^2+d\zeta^2+d\rho^2+\rho^2d\phi^2 \quad \text{(H.29)}$$

$$\mathcal{A}=\frac{q}{A}(\frac{1}{1+2\mu+q^2}+2A^2\zeta^2)d\tau \quad \text{(H.30)}$$
$$\mathcal{F}=4Aq\zeta\, d\zeta\wedge d\tau \quad \text{(H.31)}$$

Druhá transformace je

$$T=\zeta\sinh\tau$$
$$Z=\zeta\cosh\tau$$
$$Y=\rho\sin\phi$$
$$X=\rho\cos\phi \quad \text{(H.32)}$$

co« u« vede přímo na metriku v Minkowského tvaru A.1

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2 \tag{H.33}$$

Elektromagnetické pole přejde do tvaru

$$\mathcal{A} = \frac{q}{A}\left(\frac{1}{(Z^2 - T^2)(1 + 2\mu + q^2)} + 2A\right)(ZdT - TdZ) \tag{H.34}$$

$$\mathcal{F} = 4Aq\, dZ \wedge dT \tag{H.35}$$

Jedná se tedy o homogenní elektrické pole ve směru Z, s klesajícím A jde k 0, ale dvakrát pomaleji ne« zakřivení prostoročasu, je to plochý prostor s testovacím polem.

Příloha I

Násada pro limitní přechod do zakřiveného prostoročasu

Zde rozebereme, jak musí vypadat výsledek limitního přechodu z C-metriky, má-li připomínat Melvinův magnetický vesmír. Provedeme celý postup obecně i pro nenulovou kosmologickou konstantu. Výsledek následujícího postupu je platný pro vechny hodnoty Λ, při hledání Melvinova magnetického vesmíru stačí prostě ve výsledné metrice polo«it $\Lambda = 0$.

V kapitole 3.2 jsme probrali limity, při nich« jsou x a y kálovány stejným faktorem a přesvědčili jsme se, «e «ádná z nich na Melvinův vesmír nevede. Je tedy potřeba překálovat ka«dou ze souřadnic jinak. Výsledek pak nabude jedné ze dvou mo«ných podob:

Je-li y kálováno řádově větím faktorem ne« x, potom se z metriky stane

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}\left(-\widetilde{F}(y)dt^2 + \frac{dy^2}{\widetilde{F}(y)} + \frac{dx^2}{\widetilde{G}(x)} + \widetilde{G}(x)d\varphi^2\right) \tag{I.1}$$

kde $\widetilde{F}$ a $\widetilde{G}$ jsou to, na co v limitě přejdou $F(y)$ a $G(x)$. Bude-li $x \gg y$, pak v metrice zůstane

$$ds^2 = \frac{1}{x^2}\left(-\widetilde{F}(y)dt^2 + \frac{dy^2}{\widetilde{F}(y)} + \frac{dx^2}{\widetilde{G}(x)} + \widetilde{G}(x)d\varphi^2\right) \tag{I.2}$$

Podívejme se na dvourozměrnou metriku ve tvaru

$$ds^2 = -H(y)dt^2 + \frac{dy^2}{H(y)} \tag{I.3}$$

zajímá nás, pro jaká $H(y)$ je tato metrika plochá. Jak je známo, plochost metriky je ekvivalentní nulovosti Riemannova tenzoru. Této metrice odpovídá

Riemannův tenzor s jedinou symetriemi danou skupinou slo«ek, které nejsou identicky nulové, ale mají hodnotu

$$R_{tyty} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H(y)}{\partial y^2} \tag{I.4}$$

Ty vymizí, pokud je $H(y)$ lineární funkce. Najdeme-li tedy takový limitní přechod, při něm« $F(y) \to \widetilde{F}(y) = ay^2 + b$, pak mů«eme metriku I.2 převést na tvar

$$ds^2 = \frac{1}{x^2}(-dT^2 + dz^2 + \frac{dx^2}{G(x)} + G(x)d\varphi^2) \tag{I.5}$$

Tato metrika je závislá pouze na radiální souřadnici x a má tři Killingovy vektory: $\frac{\partial}{\partial T}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ a $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. To je velmi nadějné, nebo ̧ Melvinův magnetický vesmír splňuje stejné vlastnosti. Zbývá u« jen zjistit, jak musí vypadat $G(x)$, aby metrika I.5 splňovala Einsteinovy rovnice. Předpokládáme tensor elektromagnetického pole ve tvaru

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & e_z & e_x & 0 \\ -e_z & 0 & b_\varphi & 0 \\ -e_x & -b_\varphi & 0 & b_z \\ 0 & 0 & -b_z & 0 \end{pmatrix} \tag{I.6}$$

kde e_z, e_x, b_z, b_φ jsou obecně funkce závislé na x a ničem jiném. Je to velice obecný předpoklad vycházející ze symetrií prostoru, vylučuje pouze radiální magnetické a vířivé elektrické pole. Mů«e se zdát a« zbytečně obecný, proto«e v původní C-metrice má elektromagnetické pole pouze slo«ku E_y, která by v naí limitě měla přejít na E_z. To je sice pravda, ale tě«ko mů«eme něco tvrdit o chování elektromagnetického pole během limitního přechodu, jeho« průběh zatím neznáme. Navíc tímto postupem zjistíme, jaké jsou vechny mo«né tvary elektromagnetického pole v takovémto vesmíru bez ohledu na to, jakým způsobem jsme se k němu dopracovali. Teď u« se ale vrátíme k výpočtu. Einsteinův tensor přísluný metrice I.5 má tvar

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2x^2}(x^2G'' - 4xG' + 6G) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2x^2}(x^2G'' - 4xG' + 6G) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2G}(xG' - 3G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{G}{x^2}(xG' - 3G) \end{pmatrix}$$

tenzor energie a hybnosti přísluející elektromagnetickému tenzoru I.6 (pro velké rozměry uvedený na samostatné stránce)

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(\begin{array}{cccc} \frac{x^2}{2}(e_z^2 + Ge_x^2 + Gb_\varphi^2 + b_z^2) & x^2 Ge_x b_\varphi & -x^2 e_z b_\varphi & \\ x^2 Ge_x b_\varphi & -\frac{x^2}{2}(e_z^2 - Ge_x^2 - Gb_\varphi^2 + b_z^2) & -x^2 e_x e_z & \\ -x^2 e_z b_\varphi & x^2 e_x e_z & -\frac{x^2}{2G}(e_z^2 - Ge_x^2 + gb_\varphi^2 + b_z^2) & \\ -x^2 Ge_x b_z & -x^2 Gb_\varphi b_z & 0 & \frac{x^2 G}{2}(e \end{array}\right. \tag{I.7}$$

Einsteinovy rovnice s nenulovou kosmologickou konstantou mají tvar $Ein_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Sečtením rovnic přisluejících tt a zz dostaneme

$$2x^2 G(e_x^2 + b_\varphi^2) = 0 \tag{I.8}$$

Proto«e součet dvou kladných čísel nemů«e být nikdy záporný, musí být $e_x = b_\varphi = 0$. Nediagonální rovnice jsou tím identicky splněny, z diagonálních zůstanou dvě nezávislé:

$$\frac{1}{2x^2}(x^2 G'' - 4xG' + 6G) + \frac{\Lambda}{x^2} = -x^2(e_z^2 + b_z^2) \tag{I.9}$$

$$\frac{1}{x^2}(xG' - 3G) - \frac{\Lambda}{x^2} = -x^2(e_z^2 + b_z^2) \tag{I.10}$$

Z nich dostaneme podmínku na $G(x)$:

$$12G - 6xG' + x^2 G'' + 4\Lambda = 0 \tag{I.11}$$

Je to lineární diferenciální rovnice druhého stupně a má tedy dvě lineárně nezávislá řeení homogenní, k nim« se v«dy přičte partikulární řeení rovnice s pravou stranou. Celkově se řeení dá zapsat ve tvaru

$$G(x) = -\frac{\Lambda}{3} + kx^3 + lx^4 \tag{I.12}$$

Dosazením do I.9 získáme podmínku $e_z^2 + b_z^2 = -l$. Metrika má tvar

$$ds^2 = -\frac{1}{x^2}dT^2 + \frac{1}{x^2}dz^2 + \frac{dx^2}{x^2(lx^4 + kx^3 - \frac{\Lambda}{3})} + \frac{lx^4 + kx^3 - \frac{\Lambda}{3}}{x^2}d\varphi^2 \tag{I.13}$$

Rozebereme si důkladněji případ $\Lambda = 0$. Ten by měl odpovídat Melvinovu magnetickému vesmíru, zbývá najít transformace, které by ho do ký«ené podoby 2.41 převedly. Jsou to tyto:

$$x = \frac{1}{\frac{k}{l} + r^2}$$

$$dx = -\frac{2r}{(\frac{k}{l} + r^2)^2}dr \tag{I.14}$$

Dostaneme

$$ds^2 = -(\frac{k}{l} + r^2)^2 dT^2 + (\frac{k}{l} + r^2)^2 dz^2 + \frac{4}{k}(\frac{k}{l} + r^2)^2 dr^2 + \frac{kr^2}{(\frac{k}{l} + r^2)^2} d\varphi^2 \quad (I.15)$$

V této podobě u« je podobnost vidět, chybí u« jen poslední kosmetická úprava. Tu provedeme jednoduchou lineární transformací

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{-\frac{k}{l}}\rho \\ T &= \frac{2}{\sqrt{-kl}}\tau \\ Z &= \frac{2}{\sqrt{-kl}}\zeta \end{aligned} \quad (I.16)$$

a získáme obvyklý tvar Melvinova magnetického vesmíru

$$ds^2 = -\frac{4}{kl}((1 + \rho^2)^2(-d\tau^2 + d\zeta^2 + d\rho^2) + \frac{k^2 l^2 \rho^2}{(1 + \rho^2)^2} d\varphi^2) \quad (I.17)$$

Objevila se tam sice kónická singularita, ale to nepředstavuje vá«nější problém. Nebyl učiněn «ádný předpoklad o rozsahu úhlové souřadnice φ. Tím je mo«né případné nesrovnalosti vyrovnat.

Proberme nyní vakuový případ, tedy $e_z = b_z = 0$. To implikuje $l = 0$. Vimněme si, «e limitní přechod $l \to 0$ posílá kořen $\frac{k}{l}$ do nekonečna. To bude mít význam pro pochopení limitního přechodu z vakuové C-metriky do Levi-Civitovy metriky. Transformace I.14 tak přechází na $x = \frac{1}{r^2}$ a metrika má tvar

$$ds^2 = -r^4 dT^2 + r^4 dz^2 + \frac{4r^4}{k} dr^2 + \frac{k}{r^2} d\varphi^2 \quad (I.18)$$

To lze snadno upravit pomocí

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{4}{k}\right)^{1/6} R \\ z &= \left(\frac{k}{4}\right)^{1/3} Z \\ T &= \left(\frac{k}{4}\right)^{1/3} \bar{T} \end{aligned} \quad (I.19)$$

na tvar

$$ds^2 = -R^4 d\bar{T}^2 + R^4 dZ^2 + R^4 dR^2 + \frac{k(\frac{k}{4})^{1/3}}{R^2} d\varphi^2 \quad (I.20)$$

To podle (Odkaz) odpovídá Levi-Civitově metrice se $\sigma = 1$.

[nova]Kenneth Hong, Edward Teo: A new form of the C-metric, Class. Quantum Grav. 20 (2003) 3269-3277 [Melvin]M. A. Melvin, J. S. Wallingfort: Orbits in a magnetic universe, 1965 [Melvin2]Kip S. Thorne: Absolute Stability of Melvin's Magnetic Universe, PhysRev 139, B244, (1965) [Ernst]Frederick J. Ernst: Removal of the nodal singularity of the C-metric, J. Math. Phys, Vol.17, No.4, April 1976 [Ernst2]Frederick J.Ernst: Black holes in a magnetic universe, J. Math. Phys., Vol. 17, No. 1, January 1976 [genC]Frederick J. Ernst: Generalized C-metric, J. Math. Phys., Vol. 19,No.9, September 1978 [Bicak]J. Bičák: The Motion of a Charged Black Hole in an Elektromagnetic Field, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. Volume 371, Issue 1746, (Jun 30, 1980), 429-438 [BHS]J. Bičák, C. Hoenselaers, B. G. Schmidt: The Solutions of Einstein Equations for Uniformly Accelerated Particles without nodal singularities. I. Freely Falling Particles in External Fields, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. Volume 390, Issue 1799 (Dec.8,1983), 397-409 [BHS]J. Bičák, C. Hoenselaers, B. G. Schmidt: The Solutions of Einstein Equations for Uniformly Accelerated Particles without nodal singularities. II. Self-Accelerating Particles. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. Volume 390, Issue 1799 (Dec.8,1983), 411-419 [BdS]Jiří Bičák, Pavel Krtou: Fields of Accelerated sources: Born in de Sitter, J. Math. Phys. 46, 102504 (2005), gr-qc/050326 [UABH]Patricio S. Letelier, Samuel R. Oliveira: On Uniformly Accelerated Black Holes, gr-qc/9809089 [dip]Pavel Sládek: Globální struktura rotačně a boost-rotačně symetrických prostoročasů, Praha, 2002 [KW]William Kinnersly, Martin Walker: Uniformly Accelerating Charged Mass in General Relativity, PhysRev D,Vol. 2. No. 8, 1970, 1359-1370 [hor]Brendan B. Godfrey: Horizons in Weyl metrics exhibiting extra symmetries, GRG Vol. 3, No. 1 (1972), pp. 3-16 [PD]J. F. Plebanski, M. Demianski: Rotating, Charged and Uniformly Accelerating Mass in General Relativity, Annals of Physics 98,98-127 (1976) [AD]Abhay Ashtekar, Tevian Dray: On the Existence of Solutions to Einstein Equation With Non-Zero Bondi News, Commun. Math. Phys. 79,581-589 (1981) [Bonnor]W. B. Bonnor: The Sources of the Vacuum C-Metric, 1982 [BS]Jiří Bičák, Bernd Schmidt: Asymptotically flat radiative space-times with boost-rotation symmetry: The general structure, Phys. Rev. D, Vol. 40, No. 6, (1989) [magstrAdS]Óscar J. C. Dias, José P. S. Lemos: Magnetic strings in anti-de Sitter General Relativity, arXiv: hep-th/0110202 v1, 2001 [CAdS]Pavel Krtou: Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe, arXiv: gr-qc/0510101v1, 2005 [RABHAS]Jiří Podolský, Marcello Ortaggio, Pavel Krtou: Radiation from Accelerated black holes in an anti-de Sitter universe, PhysRev D 68, 124004 (2003) [RABHDS]Pavel Krtou, Jiří Podolský: Radiation from Accel-

eratedblack holes in a de Sitter universe, PhysRev D 68, 024005 (2003) [LC]L. Richterek, J. Novotný, J. Horský: New Einstein-Maxwell Fields of Levi-Civita's type, arXiv: gr-qc/0003004 v1, 2000 [dis]Alena Pravdová: symmetries of asymptotically flat spacetimes and radiation, Praha, 1999 [Pod]Jiří Podolský: Accelerating black holes in anti-de Sitter universe, gr-qc/0202033v1