

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Michal Šindler

Kvantované víry v supratekutém He II

Katedra fyziky nízkých teplot, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Ladislav Skrbek, DrSc.

Studijní program: Obecná fyzika

2006

Rád bych poděkoval Davidu Schmoranzerovi za spolupráci při měření a při tvorbě anglického abstraktu. Dále bych chtěl poděkovat Míše Blažkové za ochotnou spolupráci a za pomoc s grafy a schémata uvedenými v této práci.

Největší poděkování si zaslouží můj školitel Prof. RNDr. Ladislav Skrbek. Nejprve za zajímavé přednášky, které mne přivedly ke studiu problémů supratekutosti a dále za vedení při práci v laboratoři a psaní práce, což obnášelo diskuse problémů jak fyzikálních tak formálních.

Dále bych rád poděkoval všem, kteří se zasloužili o vznik a běh Společné laboratoře nízkých teplot.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne

Michal Šindler

Obsah

Úvod	5
1 Mechanika ideální a vazké tekutiny	7
1.1 Základy proudění ideální tekutiny	7
1.2 Vazká tekutina	10
1.2.1 Navierova-Stokesova rovnice	10
1.2.2 Disipace energie v kapalinách	11
1.2.3 Geometricky podobná proudění	12
1.2.4 Laminární a turbulentní proudění	13
2 Helium	14
2.1 Vlastnosti helia	14
2.2 ^4He	14
2.3 Boseova-Einsteinova kondenzace	18
2.4 Makroskopická vlnová funkce	20
2.5 Excitace v He II a kritická rychlost	21
3 Kvantované víry v He II	23
3.1 Termodynamika vírů	24
4 Experimentální aparatura	27
4.1 Kryostat	27
4.2 Ladička	28
5 Výsledky měření	31
Literatura	37

Název práce: Kvantované víry v supratekutém He II

Autor: Michal Šindler

Katedra (ústav): Katedra fyziky nízkých teplot, MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: Prof. RNDr. Ladislav Skrbek, DrSc.

e-mail vedoucího: Ladislav.Skrbek@mff.cuni.cz

Abstrakt: Předkládaná práce představuje úvod do supratekuté hydrodynamiky s důrazem na vířivé proudění helia II. Začínáme s prouděním ideální a klasické viskózní kapaliny, představujeme dvojkapalinový model helia II a popisujeme fyzikální procesy vedoucí ke vzniku kvantovaných vírů. Spojujeme tento popis s experimenty zkoumajícími kvantovou turbulenci prováděnými ve Společné laboratoři nízkých teplot a soustředili jsme se na výsledky získané pomocí vibrující křemenné ladičky. Kromě seznámení se s nezbytnými základy kryogenní techniky, jsem se zúčastnil na měření detekujícího přechod z laminárního do turbulentního proudění v klasických kapalinách – v plynném heliu a v normální kapalině He I a také v supratekutém He II.

Klíčová slova: kvantované víry, křemenná ladička, vlastnosti He II

Title: Quantized vortices in superfluid He II

Author: Michal Šindler

Department: Department of Low-Temperature Physics

Supervisor: Prof. RNDr. Ladislav Skrbek, DrSc.

Supervisor's e-mail address: e-mailová adresa vedoucího

Abstract: This work represents an introduction into superfluid hydrodynamics, emphasizing vortical flow of He II. First we discuss the flow of ideal and classical viscous fluids, introduce the two-fluid model for He II and describe the physical processes leading to the nucleation of quantized vorticity. We relate this description to experiments on quantum turbulence in the Joint Low Temperature Laboratory that exists between the Institute of Physics ASCR and the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague. We focus on our own results, obtained using vibrating quartz forks. Besides learning the necessary cryogenic skills, we have detected the transition from laminar to turbulent flow in classical fluids – helium gas and normal liquid He I as well as in superfluid He II.

Keywords: quantized vorticity , quartz fork, properties of He II

Úvod

Když otevřete tuto bakalářskou práci o kvantovaných vírech, najdete na úvod povídání o ideální a vazké kapalině, což může čtenáře čekajícího kvantovou mechaniku zaskočit. Co to v té bakalářské práci dělá? Na tuto otázku si brzy odpovíme, ale nejprve musíme začít s popisem kvantovaných vírů od začátku, přičemž budeme studovat jednodušší věci, které nás k tématice kvantovaných vírů dovedou.

Vír je obecně projevem turbulentního proudění. Zvláštní je, že lidstvo pozorovalo víry na řece už před tisíci lety a turbulenci začalo studovat před staletími, přesto nejenže nedokázalo problém turbulentního proudění vyřešit (je to vlastně poslední nevyřešený problém klasické fyziky), ale dodnes nedokáže řádně turbulenci obecně definovat, a přitom je znalost turbulentního proudění potřebná pro spoustu praktických věcí (např. předpověď počasí). Poznání zákonitostí turbulence je nejen zajímavým akademickým problémem, ale i praktickou záležitostí. Jedním z cílů zkoumání kvantovaných vírů je přispět k hlubšímu pochopení turbulence. Studium kvantovaných vírů by mohlo být jednou z cest k pochopení tohoto problému, neboť nestudujeme kontinuální problém, ale kvantovaný.

Turbulentní proudění je způsob pohybu kapaliny. Pro popis pohybu kapaliny používáme dva modely: model ideální kapaliny¹ a model vazké kapaliny².

Kvantované víry jsou pozorovány v tzv. supratekutých kapalinách, konkrétně v kapalném heliu, proto se budeme zabývat i vlastnostmi helia. Zjistíme, že helium při nízkých teplotách tvoří vlastně 2 kapaliny, neboť kapaliny složené vyhradně z atomů izotopu ^3He a ^4He mají odlišné vlastnosti³.

Po prostudování problému pohybu kapaliny a vlastností se budeme moci pustit přímo do problému kvantovaných vírů. Jak zjistíme v kapitole o vlastnostech helia, souvisí kvantované víry s makroskopickou vlnovou funkcí, která popisuje chování ne jedné částice, ale všech částic kapaliny, což dává do souvislosti makroskopickou a kvantovou fyziku a kvantované víry s pohybem kapaliny.

Výše popsané tvoří teoretickou část bakalářské práce. V další části se budeme zabývat částí výzkumu Společné laboratoře nízkých teplot, který vede prof. Ladislav Skrbek, studiem kvantovaných vírů v ^4He . Jelikož helium je při normálních podmínkách plyn, je třeba pokusy provádět v odpovídající nízkoteplotní aparatuře, v našem případě ve skleněném kryostat. Tuto aparaturu rovněž stručně popíšeme.

Pro studium kvantovaných vírů jsme zvolili křemennou ladičku, známou jako frekvenční standard používaný v digitálních hodinkách, kterou si podrobněji popíšeme v kapitole 4. Konečně v poslední části budou prezentovány

¹tento model se nám bude později hodit pro popis supratekuté složky He II

²popisuje dobře normální složku He II

³Nemluvě o ^3He - ^4He směsích

výsledky změřené pomocí křemenné ladičky. Výsledky těchto experimentů nejsou zdaleka konečné. Po vybudování nové laboratoře (2005/2006) se s těmito experimenty začíná. Nicméně měření v naší laboratoři už dávají publikovatelné výsledky a v experimentech se bude nadále pokračovat. Nutno dodat, že naše laboratoře spolupracuje s dalšími laboratořemi pracujícími s ladičkami (Helsinki, Košice).

Kapitola 1

Mechanika ideální a vazké tekutiny

1.1 Základy proudění ideální tekutiny

Model ideální kapaliny předpokládá, že kapalina je spojitá (tj. zanedbáme, že je složena z atomů) a má nulovou viskozitu. Pokud nás bude zajímat rychlost kapaliny, tak si představíme, že je složena z infinitizimálních částic („částice kapaliny“), které však obsahují dostatečné množství molekul, aby byly mikroskopické veličiny vystředovány. Při zkoumání rychlosti kapalin nás zajímá rychlost jedné zvolené „částice kapaliny“ (Langrangeův popis) nebo rychlost „částic kapaliny“, které v daný okamžik procházejí pevně zvoleným bodem (Eulerův popis). Většinou nás zajímá pole rychlostí „částic kapaliny“, pro jehož popis se hodí Eulerův formalismus, se kterým budeme dále pracovat.

Zajímáme-li se o pohyb tekutiny, musíme řešit Newtonovy rovnice pro jednotkový objem. Dále budeme uvažovat objemové a plošné síly působící na kapalinu. Plošné síly zastupuje tlak p a objemové síly \vec{U} se většinou omezují na gravitační sílu, přičemž se budeme řídit zvykem, že gravitační síla působí dolů ve směru osy z . Chceme-li vztáhnout tlak p na objem, můžeme použít integrální identitu

$$-\oint p \, dS = -\int \nabla p \, dV . \quad (1.1)$$

Po provedení všech výše popsaných úprav a vydělením obou stran hustotou ρ dostáváme Newtonovy pohybové rovnice ve tvaru

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}. \quad (1.2)$$

Musíme si zde uvědomit, že hledáme totální diferenciál funkce rychlosti \vec{v} . Protože pracujeme v Eulerově formalismu, je rychlost kromě času t závislá na souřadnicích, tj. $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y, z)$, takže budeme derivovat rychlost podle

času i souřadnic, což vede k Eulerově pohybové rovnici pro ideální kapalinu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}. \quad (1.3)$$

Z vektorové analýzy je známa identita:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \vec{v} \times \nabla \times \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (1.4)$$

kteřou použijeme na úpravu Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (1.5)$$

Dále budeme zkoumat kapalinu z pohledu zákona zachování hmotnosti, resp. budeme zkoumat změnu hmotnosti jednotkového objemu, tj. změnu hustoty kapaliny v daném objemu. Množství kapaliny můžeme měnit odtokem a přítokem kapaliny, což můžeme vyjádřit jako

$$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.6)$$

Vyjádříme celkový tok využitím Gaussovy věty

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right] dV = 0. \quad (1.7)$$

Jelikož můžeme volit objem libovolně, musí být výraz uvnitř integrálu roven nule. Dostáváme tedy zákon zachování hmotnosti pro kapalinu v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.8)$$

známý jako rovnice kontinuity. Při odvození rovnice kontinuity nebyl použit žádný speciální požadavek pro kapalinu, proto tato rovnice platí pro libovolnou kapalinu. Kapaliny bývají velmi těžko stlačitelné, tudíž můžeme zanedbat změnu hustoty, čímž se rovnice kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu zjednoduší

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (1.9)$$

Celkově máme tedy 4 rovnice: rovnice (1.5) pro 3 složky a rovnice kontinuity (1.9) pro 3 neznámé složky rychlosti \vec{v} a pro tlak p . Rovnice (1.5) je nelineární kvůli členu $\vec{v} \times \nabla \times \vec{v}$ a tudíž velmi těžko řešitelná. Budeme se zabývat prouděními, pro které lze tento člen zanedbat. Podmínka $\nabla \times \vec{v} = 0$ nám dá potenciální proudění (je známo z teorie potenciálu, že dostatečující podmínka pro existenci potenciálu je právě $\nabla \times \vec{v} = 0$).

Zavedeme zde nyní potenciál rychlosti φ

$$\vec{v} = \nabla \varphi. \quad (1.10)$$

Pomocí potenciálu vyjádříme Eulerovu pohybovou rovnici potenciálního proudění nestlačitelné kapaliny

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = f(t), \quad (1.11)$$

což vede při stacionárním proudění k Bernoulliho rovnici.

Vyjádříme-li rovnici kontinuity pro nestlačitelnou kapalinu pomocí potenciálu φ , přejde v Laplaceovu úlohu s hraniční podmínkou nulové normálové složky rychlosti (tj. kapalina neproudí stěnou)

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1.12)$$

a

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right|_{na\ hrani\ ci} = 0, \quad (1.13)$$

kde \vec{n} je normálový vektor ke stěně. Těmito dvěma vzorci je úloha plně určena.

Pro měření v heliu používáme v laboratoři křemennou ladičku. Přesné řešení Laplaceovy úlohy pro tvar nohy ladičky je velmi obtížné a analyticky nemožné, proto aproximujeme nohu ladičky válcem. Podíváme se tedy na zjednodušenou úlohu proudění kolem válce o rychlosti \vec{u} , přičemž zanedbáme gravitaci a okrajové jevy, neboť budeme válec považovat za nekonečně dlouhý. Proudění nezávisí na souřadnici směru osy válce (volíme jako osu z), tudíž budeme řešit dvojrozměrnou Laplaceovu rovnici v rovině xy . V nekonečnu je rychlost nulová, tj. musíme hledat řešení ve tvaru, které respektuje tuto okrajovou podmínku. Zvolíme-li v rovině xy polární souřadnice s počátkem na ose válce je možné hledat řešení Laplaceovy rce ve tvaru

$$\varphi = \vec{A} \cdot \nabla \ln r = \frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{r} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{r}}{r^2}, \quad (1.14)$$

kde \vec{A} je konstatní vektor, který určíme z okrajové podmínky na povrchu válce a \vec{n} je jednotkový vektor ve směru \vec{r} . Rychlost dostaneme jako gradient potenciálu φ a dále uvážíme, že potenciál nezávisí na úhlu ϕ :

$$\vec{v} = \nabla \frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{r} \right) \vec{n} = -\frac{\vec{A} \cdot \vec{n}}{r^2} \vec{n}. \quad (1.15)$$

Okrajovou podmínku zvolím na povrchu válce ($r = R$) ve tvaru :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{(\vec{A} \cdot \vec{n}) \vec{n} \cdot \vec{n}}{R^2} \rightarrow \vec{A} = -R^2 \vec{u}. \quad (1.16)$$

Celkově tedy dostávám pro rychlost vyjádření

$$\vec{v} = \frac{R^2}{r^2} [2\vec{n}(\vec{u} \cdot \vec{n}) - \vec{u}]. \quad (1.17)$$

Toto analytické řešení dává náhled do obtékání křemenné ladičky.

1.2 Vazká tekutina

V minulé kapitole jsme řešili vlastnosti ideální kapaliny. Tato první aproximace platí nejlépe pro supratekuté helium, pro ostatní kapaliny je třeba k přesnějšímu popisu proudění vzít v úvahu další okrajové podmínky (disipaci energie vnitřním třením a nulová rychlost vůči stěně v kapalině).

1.2.1 Navierova-Stokesova rovnice

Rovnice kontinuity platí pro libovolnou kapalinu, takže bude jednou z rovnic pro určení proudění vazké kapaliny. Z odvozování Eulerovy pohybové rovnice je rovněž jasné, že levá strana rovnice (1.3) zůstane stejná a na pravé straně je třeba přidat členy, které vezmou v úvahu disipaci energie v kapalině. Pro určení těchto členů si nejprve definujeme tenzor impulsu

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (1.18)$$

Tenzor

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \quad (1.19)$$

se nazývá tenzorem napětí a tenzor σ'_{ik} je tenzor vazkého napětí.

Tření v tekoucí kapalině vzniká, pokud se jednotlivé vrstvy kapaliny pohybují různými rychlostmi. Vnitřní tření bude záviset na $\partial v_i / \partial x_k$. Pro většinu kapalin postačuje lineární závislost. Pro $\vec{v} = konst.$ se vazký člen anuluje. Dále se člen anuluje, pokud se kapalina jako celek rovnoměrně otáčí. Tyto dvě podmínky splňuje kombinace

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \quad (1.20)$$

a proto tenzor σ'_{ik} je lineárně závislý na této derivaci. Nejobecněji lze tento tenzor zapsat ve tvaru (viz [3], str. 71)

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \quad (1.21)$$

s koeficienty η a ζ , které nezávisí na rychlosti kapaliny, ale závisí na teplotě a tlaku. Koeficient η se nazývá dynamická viskozita a méně používaný (viz dále) koeficient ζ se nazývá druhá viskozita. Nyní můžeme napsat pohybovou rovnici pro vazkou kapalinu

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\zeta \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) \quad (1.22)$$

s okrajovou podmínkou

$$\vec{v} = 0 \quad \text{na hranici.} \quad (1.23)$$

Koeficienty vazkosti často závisí na T a p velmi málo nebo jsou pro dané podmínky konstantní. Potom můžeme napsat

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \cdot \vec{v}. \quad (1.24)$$

Tato rovnice nese pojmenování *Navierova-Stokesova*. Velmi často se píše pro nestlačitelné kapaliny, tj. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (1.25)$$

Člen η/ρ se často značí ν a nazývá se kinematická viskozita.

I přes zjednodušení je tato nelineární rovnice velmi složitá na řešení a dodnes se neumí obecně řešit a je předmětem bádání matematiků.

V mnoha jednoduchých příkladech se dá však řešit či přibližně řešit, případně určovat kvalitativní řešení. Všimněme si, že v nulové limitě koeficientu vazkosti, nedostaneme limitou Eulerovu pohybovou rovnici pro dokonalou kapalinu, neboť pro vazkou kapalinu máme jiné okrajové podmínky. Zdánlivě tedy musíme naprosto zavrhnout model ideální kapaliny, neboť nebude popisovat dobře ani kapaliny s nulovou viskozitou kvůli špatné okrajové podmínce. Hlubším porovnáním však zjistíme, že okrajová podmínka ovlivní proudění kapaliny jen v tenké vrstvě na hranici a dále proudění dle Navierovy-Stokesovy rovnice a Eulerovy rovnice jsou prakticky totožné. I v dalších případech (než je limita nulové viskozity) je proudění vazké a dokonalé kapaliny podobné.

1.2.2 Disipace energie v kapalinách

Nyní si ukážeme, jak disipace energie souvisí s viskozitou. Pro jednoduchost budeme uvažovat nestlačitelnou kapalinu. Kinetická energie kapaliny je dána

$$E_{kin} = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV \quad (1.26)$$

a její změna

$$\dot{E}_{kin} = \rho \int \vec{v} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV. \quad (1.27)$$

Z Navierovy-Stokesovy rovnice pro nestlačitelnou kapalinu vyjádříme

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1.28)$$

Upravíme ještě do výhodnějšího tvaru uvážením $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) - (\vec{v} \sigma') \right] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (1.29)$$

Tento výraz integrujeme přes kouli o nekonečném poloměru R ($R \rightarrow \infty$). Okrajová podmínka pro rychlost v nekonečnu nám dává nulovou rychlost, čímž se integrál zjednoduší

$$\dot{E}_{kin} = - \int \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = -\frac{1}{2} \int \sigma'_{ik} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dV. \quad (1.30)$$

Poslední úpravu jsme mohli udělat díky symetrii tenzoru σ'_{ik} . Vyjádříme-li vazký tenzor napětí pomocí dynamické viskozity

$$\dot{E}_{kin} = -\frac{\eta}{2} \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad (1.31)$$

je změna kinetické energie záporná, $\dot{E}_{kin} < 0$, tj. viskozita je zodpovědná za disipaci energie. Pokud může kapalina za použitých předpokladů disipovat energii, pak má nenulovou viskozitu.

1.2.3 Geometricky podobná proudění

Geometricky podobná proudění jsou taková, která můžeme jedno v druhé převést změnou všech lineárních rozměrů ve stejném poměru. Budeme se nyní zabývat stacionárním prouděním ($\partial \vec{v} / \partial t = 0$) vazké nestlačitelné kapaliny popsaným Navierovou-Stokesovou rovnicí (1.25). V této rovnici jsou pouze 3 nezávislé parametry: kinematická viskozita ν , parametr charakteristické délky l , který charakterizuje rozměry, a rychlost proudění u . Fyzikální rozměry těchto parametrů jsou

$$[\nu] = \frac{m^2}{s} \quad [l] = m \quad [u] = \frac{m}{s}. \quad (1.32)$$

Z těchto parametrů můžeme sestavit jeden bezrozměrný parametr takový, že ostatní bezrozměrné parametry budou funkcí tohoto parametru. Bylo zavedeno tzv. Reynoldsovo číslo :

$$Re = \frac{ul}{\nu}. \quad (1.33)$$

Platí, že stejné Reynoldsovo číslo mají geometricky podobná proudění. Pokud uvážíme i nestacionární proudění, musíme uvážit další nezávislý parametr – charakteristický časový interval τ . Nyní můžeme najít dva bezrozměrné parametry charakterizující proudění. Kromě Reynoldsova čísla je to např. Strouhalovo ¹ číslo S :

$$S = \frac{u\tau}{l}. \quad (1.34)$$

Pokud dvě nestacionární proudění mají stejné Strouhalovo a Reynoldsovo číslo, pak jsou geometricky podobná. To má praktický význam při pokusech na zmenšených modelech.

¹Č.Strouhal – český fyzik, působil na UK

1.2.4 Laminární a turbulentní proudění

Přepíšeme Navierovu-Stokesovu rovnici(1.25) pomocí vektorové identity (1.4)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\omega} + \nabla \frac{v^2}{2} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} , \quad (1.35)$$

kde $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ je vířivost. Pro malá Reynoldsova čísla můžeme vířivost zanedbat a proudění bude laminární. S vzrůstajícím Reynoldsovým číslem se vířivost $\vec{\omega}$ zvětšuje a proudění se stává turbulentním. Proces přechodu od laminárního proudění k turbulentnímu bývá složitý a není jasná hranice mezi laminárním a turbulentním prouděním. Téměř každé laminární proudění je částečně turbulentní. Turbulentní proudění je plně rozvinuto, pokud Reynoldsovo číslo je dostatečně velké (např. $Re > 4000$ pro proudění trubici).

Nyní nás budou zajímat vlastnosti nejprve laminárního a poté i turbulentního proudění. Laminární proudění je charakterizováno jako proudění, při kterém kapalina proudí v rovnoběžných vrstvách. Tlak i rychlost mohou být pro stacionární případ časově nezávislé. Takové proudění se podobá proudění ideální kapaliny, pokud zanedbáme oblasti poblíž stěn, kde se tyto proudění liší v důsledku jiných okrajových podmínek.

Turbulentní proudění je typické zdánlivě chaotickými změnami vlastností. Lze zde pozorovat náhlé změny tlaku a rychlosti v závislosti na poloze a času. Pro jeho popis lze však volit pravděpodobnostní popis (Kolmogorova teorie, viz [5]).

Kapitola 2

Helium

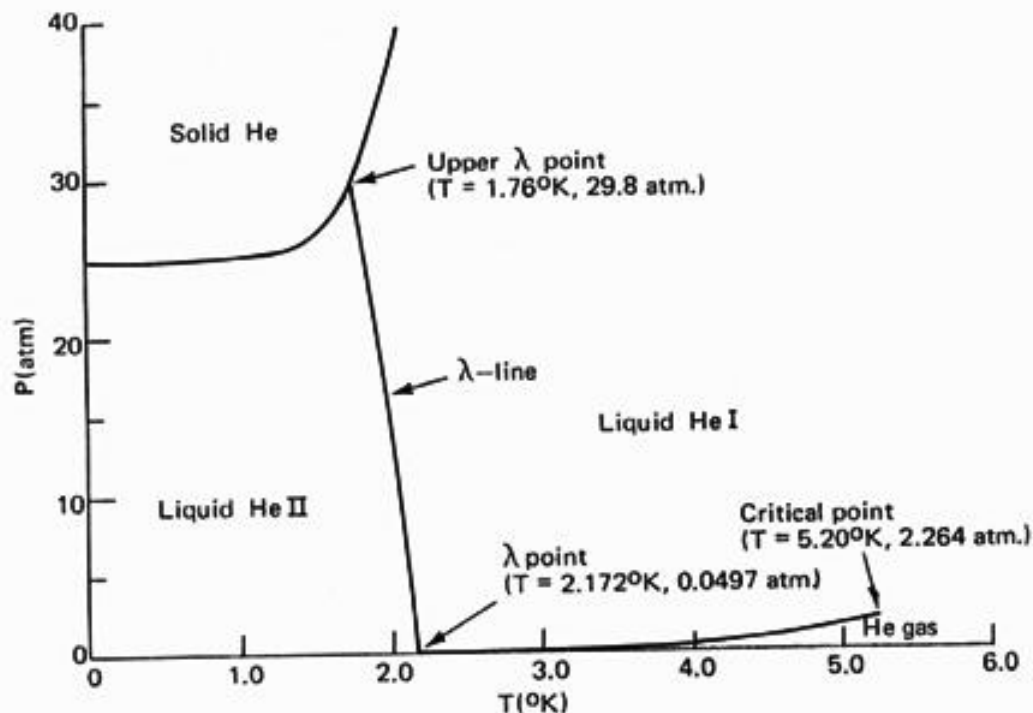
2.1 Vlastnosti helia

Helium je prvek s protonovým číslem $Z = 2$ a řadí se v periodické tabulce mezi vzácné plyny. Helium má plně zaplněnou kulově symetrickou valenční elektronovou slupku $1s^2$. Díky ní helium netvoří chemické vazby (nejstabilnější prvek, není známá žádná sloučenina helia) a interaguje jen velmi slabě pomocí van der Waalsových vazeb. Tyto vazby jsou dokonce tak slabé, že pouhá energie nulových kmitů atomů dokáže zabránit vytvoření pevné látky. Helium tak může být kapalné i při absolutní nule. Pevné helium pak můžeme získat až při vyšších tlacích.

Vlastnosti helia závisí na izotopu helia. Helium totiž tvoří dva stabilní izotopy ${}^3\text{He}$ a ${}^4\text{He}$ s různými vlastnostmi. Izotop ${}^3\text{He}$ obsahuje v jádře 2 protony a 1 neutron, což vede k celkovému spinu jádra $\frac{1}{2}$. To má za nízkých teplot vážné důsledky, neboť v důsledku vymrznutí tepelného Maxwellova rozdělení se ${}^3\text{He}$ řídí Fermi-Diracovým rozdělením. Naopak ${}^4\text{He}$ je složeno ze 2 protonů a 2 neutronů a celkový spin jádra je tedy nulový. Za nízkých teplot se tedy ${}^4\text{He}$ se řídí Bose-Einsteinovým rozdělením. Rozdíl v chování fermionů a bosonů vede k odlišnému chování izotopu helia ${}^3\text{He}$ a ${}^4\text{He}$. Dále se budeme zabývat pouze izotopem helia ${}^4\text{He}$.

2.2 ${}^4\text{He}$

Nejprve se podíváme na fázový diagram helia (obrázek 2.1), který je na první pohled neobvyklý. Pevné helium ${}^4\text{He}$ lze získat při teplotách blízkých absolutní nule a při vysokých tlacích ($p > 25$ atmosfér), kdy tvoří tzv. kvantový krystal. Všimněme si dále, že helium má dvě kapalné fáze, tzv. He I a He II, které jsou ve fázovém diagramu odděleny lambda čarou (při teplotě 2,17 K na křivce nasycených par). Helium I se chová jako normální kapalina s malou viskozitou, naopak He II je velmi výjimečná kapalina. Je téměř tepelně supravodivá. Tepelná vodivost při fázovém přechodu mezi He I a He II vzroste o několik řádů. Experimentální důkaz tohoto jevu lze



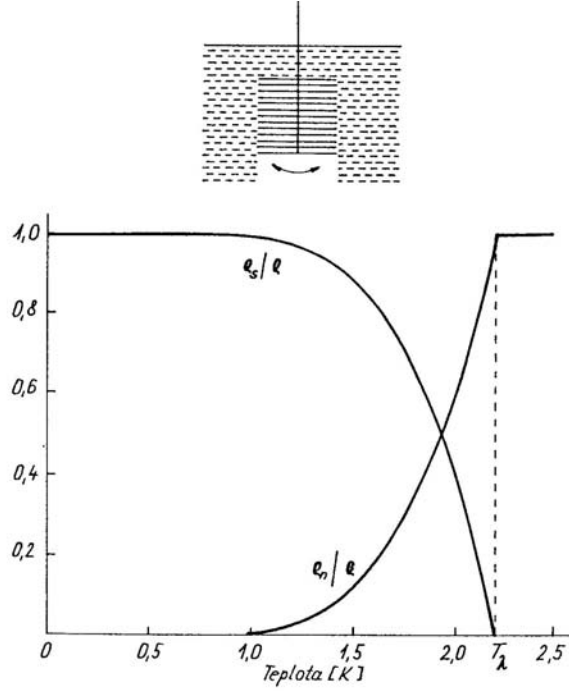
The phase diagram of ^4He .

Obrázek 2.1: Fázový diagram ^4He

pozorovat i v našem skleněném kryostatu. Helium I se chová jako normálně vroucí kapalina, z jejíhož objemu se vypařuje plynné helium ve formě bublin. Při snížení teploty pod λ -bod var náhle ustane, teplota v celém objemu se díky obrovské tepelné vodivosti vyrovná (tj. teplota nikde v objemu kapaliny nemůže být lokálně vyšší), dojde k vymizení bublin a helium se vypařuje pouze z povrchu.

Další „podivnou“ vlastností He II je supratekutost, tj. zdánlivě nulová viskozita, resp. některé pokusy poukazují na nulovou viskozitu a jiné poukazují na konečnou viskozitu. Nejprve se budeme zabývat pokusem P. L. Kapicy z roku 1938. Do helia v kryostatu byla umístěna experimentální komůrka s heliem a s topením. Helium v komůrce bylo odděleno od helia v kryostatu velmi tenkou štěrbinou mezi zabroušenými disky. Vlivem teplotního gradientu se helium z kryostatu snaží ochladit helium v komůrce, ale díky viskozitě by nemělo natéci dovnitř. Nicméně pokus ukázal opak, což se dá vysvětlit protékáním helia s nulovou viskozitou dovnitř komůrky.

Dalším velmi zajímavým pokusem k zjištění viskozity helia je pokus Andronikašviliho, viz obrázek 2.2 nahoře. Na obrázku je vidět torzní kyvadlo, které kmitá v heliu. Pokud by kmitalo kyvadlo v ideální kapalně, kapalina by nebrzdila kyvadlo a efektivní hmotnost kyvadla by se rovnala skutečné hmotnosti kyvadla. Viskózní kapalina přilne na povrchu kyvadla a kmitá



Obrázek 2.2: Andronikasviliho pokus a graf hustoty [6]

s ním, což vede ke zvýšení efektivní hmotnosti oscilátoru. Andronikašvili naměřil efektivní hmotnost torzního kyvadla větší než skutečnou hmotnost a dále zjistil, že efektivní hmotnost klesá s klesající teplotou až při teplotě přibližně 1K, což odpovídá případu s dokonalou kapalinou. Tento pokus zdánlivě odporuje Kápicově pokusu, neboť z něho plyne nenulová viskozita, která by měla v Kápicově pokusu zabránit natékání helia do komůrky. Tento paradox řeší fenomenologický Landaův dvojkapalinový model.

Landaův dvojkapalinový model předpokládá, že helium pod λ -bodem se chová jako by bylo složené se ze dvou složek: normální a supratekuté. V Kápicově pokusu do komůrky tedy nateče jen supratekutá složka kapaliny a Andronikašviliho pokus nádherně poukazuje na poměr mezi supratekutou a normální složkou a na závislost tohoto poměru na teplotě (viz obrázek 2.2), neboť do efektivní hmotnosti bude započítána jen normální část kapaliny.

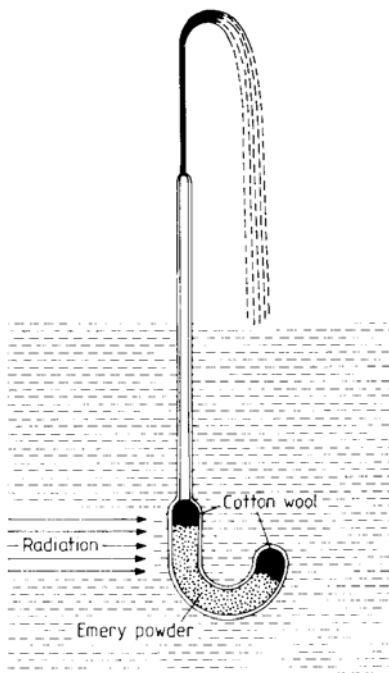
Hustota v dvojkapalinovém modelu je dána

$$\rho = \rho_s + \rho_n, \quad (2.1)$$

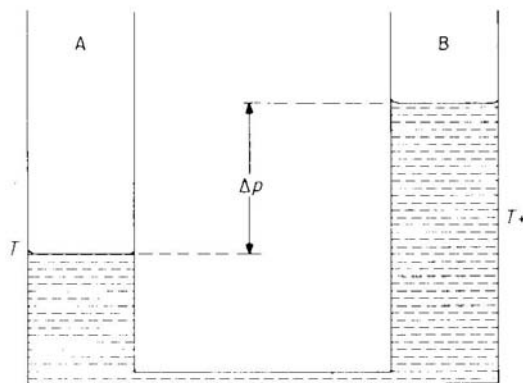
kde index n , resp. s se vztahuje k normální složce He II, resp. k supratekuté složce. Tok He II v dvojsložkovém modelu můžeme napsat ve tvaru

$$\vec{j} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n, \quad (2.2)$$

neboť rychlost supratekuté složky může být odlišná od rychlosti normální složky (viz dříve zmíněný Andronikašviliho experiment).



Obrázek 2.3: Fontánový jev



Obrázek 2.4: Mechanokalorický jev [6]

Rovnici kontinuity splňuje každá složka zvlášť. Navierova-Stokesova rovnice pro He II

$$\rho_s \left[\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \nabla) \vec{v}_s \right] + \rho_n \left[\frac{\partial \vec{v}_n}{\partial t} + (\vec{v}_n \nabla) \vec{v}_n \right] = -\nabla p + \eta \Delta v_n^2. \quad (2.3)$$

Dalšími zajímavými jevy spojenými s He II, které umíme vysvětlit pomocí dvoukapalinového modelu, jsou termomechanický a mechanokalorický jev. Příkladem termomechanického jevu je fontánový jev, viz obrázek 2.3. Skleněná trubka je naplněna brusným práškem, jehož pórovitá struktura tvoří tzv. supratekutou díru, tj. pouze kapalina s nulovou viskozitou může protékat takovou strukturou. Vlivem radiačního ohřevu se helium v skleněné trubce ohřívá, brusným práškem může protékat pouze supratekutá složka, která se bude snažit kompenzovat teplotní gradient. Atomy helia přitom získají hybnost vedoucí díky setrvačnosti k vytvoření fontány nad ústím kapiláry. Obdobným pokusem jsou nádoby spojené supratekutou dírou, viz obrázek 2.4. Působení tlaku na hladinu helia v nádobě A vede k protlačení supratekuté složky do nádoby B. Tím se změní v nádobách koncentrace supratekuté složky a tedy i teplota.

Seznámíme se ještě s jedním podivuhodným jevem helia, se supratekutým filmem. Adsorbce kapalin ke stěnám nádob je běžný fyzikální jev, např. v případě vody v kádince říkáme, že voda smáčí stěny kádinky. U supratekutého helia je však tato adsorbce obrovská a helium dokonale smáčí libovol-

nou stěnu¹, přičemž vytváří silnou vrstvu supratekutého filmu (typicky 100 atomových vrstev). Důsledkem toho je třeba vytečení helia ze zkumavky. V kryostatu se helium „šplhá“ po stěně, dokud ho nezastaví vyšší teplota, která zruší supratekutost.

2.3 Boseova-Einsteinova kondenzace

Ukážeme si nyní jeden základní fyzikální model, který se snaží vysvětlit supratekutost. Dokáže vysvětlit vznik supratekutosti a je schopen předpovídat některé vlastnosti helia II, ale nepodává mikroskopickou teorii a výsledky získané tímto modelem nejsou dostatečně přesné. Nicméně se zdá být tento model rozumným a může být východiskem pro další přesnější modely.

Budeme se nyní zabývat ideálním bosonovým plynem. Jak bylo řečeno, atomy ⁴He se při nižších teplotách chovají jako částice s celočíselným spinem – bosony. Řídí se Boseho-Einsteinovou statistikou. Při vyšších teplotách přechází tato kvantová statistika v klasickou Boltzmannovu statistiku.

Pokusme se nyní o porovnání vlastností ideálního Boseova plynu s kapalným heliem. Představme si rozdělovací funkci počtu částic při teplotě T :

$$\langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = \frac{1}{\left(\exp \frac{\varepsilon_i - \mu}{k_B T} - 1 \right)}, \quad (2.4)$$

kde ε_i jsou energetické hladiny a μ je chemický potenciál. Vysčítáním přes všechny energetické hladiny ε_i dostaneme celkový počet částic

$$\sum_{i=0}^{\infty} \langle n(\varepsilon_i, T) \rangle = N. \quad (2.5)$$

Celkový počet částic je znám, takže rovnice (2.5) je rovnicí pro určení chemického potenciálu μ . Při velmi nízkých teplotách se částice shlukují do nejnižšího energetického stavu ε_0 a Bose-Einsteinovu statistiku (2.4) lze pro tento případ aproximovat jednoduchým výrazem

$$\langle n(\varepsilon_0, T \rightarrow 0) \rangle = \left\{ \exp \frac{\varepsilon_0 - \mu}{k_B T} - 1 \right\}^{-1} \approx \frac{k_B T}{\varepsilon_0 - \mu} \approx N. \quad (2.6)$$

Protože je počet částic v prvním vzbuzeném stavu $\langle n(\varepsilon_1, T) \rangle \ll N$, platí $(\varepsilon_1 - \mu) \gg (\varepsilon_0 - \mu)$ a rozdíl mezi ε_1 a ε_0 je mnohem větší než rozdíl mezi ε_0 a μ .

Budeme nyní uvažovat makroskopický systém a předpokládáme, že systém hladin ε_i je dostatečně hustý, takže může považovat ε za spojitou veličinu a od sumy v rovnici (2.5) přejdeme k integrálu

$$N = \langle n(0, T) \rangle + \int_0^{\infty} D(\varepsilon) \langle n(\varepsilon, T) \rangle d\varepsilon = N_0(T) + N'(T). \quad (2.7)$$

¹kromě cesia

Hustota stavů ideálního plynu ([6], str. 94) je

$$D(\varepsilon) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_4}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (2.8)$$

kde m_4 je hmotnost jednoho atomu ${}^4\text{He}$.

Hustota excitovaných stavů je dána z rovnice (2.7) integrálem, zatímco základní stav je dán $\langle n(0, T) \rangle$. Počet částic v excitovaných stavech určuje integrál vzniklý dosazením výrazu (2.8) do integrálu v (2.7)

$$N'(T) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_4}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon}{\exp\left[\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}\right] - 1}. \quad (2.9)$$

Maximum pro $N'(T)$ pro danou teplotu nastává při $\mu = 0$. Substitucí $u = \varepsilon/k_B T$ dostaneme integrál typu

$$\int_0^\infty \frac{u^{1/2} du}{e^u - 1} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \quad (2.10)$$

kde $\Gamma(3/2) = \pi^{1/2}$ je gama-funkce a $\zeta(3/2) = 2,612$ je Riemannova ζ -funkce. Maximální počet částic v excitovaných stavech je dán

$$N'_{max}(T) = 2,612V \frac{m_4 k_B T^{\frac{3}{2}}}{2\pi \hbar^2}. \quad (2.11)$$

Při snižování teploty začínají převládat excitované stavy s nižší energií a při kritické teplotě T_B nebude $N'_{max}(T)$ již dost veliké, aby obsahlo všechny částice a částice plynu budou kondenzovat do stavu s nejnižší energií. Kritická teplota T_B definovaná vztahem $N'_{max}(T) = N$, a proto

$$T_B = \frac{2\pi \hbar^2}{m_4 k_B} \left(\frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.12)$$

Při absolutní nule obsadí všechny částice ideálního Boseova plynu stav s nejnižší energií, při $T > T_B$ jsou téměř všechny částice v excitovaných stavech a v oblasti $0 < T < T_B$ je možné rozdělit částice na dvě skupiny (v základním a v excitovaném stavu).

Porovnejme nyní vlastnosti kapalného helia s výše popsaným modelem ideálního Boseova plynu. Model vysvětluje přechod do supratekutého stavu jako kondenzaci molekula helia do základního stavu a přiřazuje molekulám helia Bose-Einstenovu statistiku. Vypočítáme-li kritickou teplotu T_B ze vztah (2.12) dostáváme pro ${}^4\text{He}$ $T_B = 3,1$ K, což se příliš neliší od teploty pozorované v heliu, $T_\lambda = 2,17$ K. Nedostatkem modelu je zanedbání interakcí mezi atomy helia, jež u kapaliny nelze zanedbat, a předpoklad nulové hybnosti v základním stavu.

2.4 Makroskopická vlnová funkce

Z kvantové mechaniky je známo ([4], str. 99), že hmotné částice mají i vlnové vlastnosti. Délka vlny příslušející částici je dána de Broglieovým vztahem

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (2.13)$$

kde p je hybnost částice.

Střední kinetická energie plynu je dle ekvipartičního teorému dána $\langle E \rangle = 3k_B T/2$, kde k_B je Boltzmannova konstanta. Porovnáme-li tuto energii se střední kinetickou energií částice, dostaneme střední velikosti rychlost $\bar{v} = (3k_B T/m)^{\frac{1}{2}}$. Odtud pak dostaneme tepelnou vlnovou délku

$$\lambda_T = \frac{h}{m\bar{v}} = \frac{h}{(3k_B Tm)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.14)$$

Při nízkých teplotách dostáváme delší vlnové délky. Je-li vlnová délka větší či srovnatelná s vzdáleností mezi částicemi d , projeví se kvantové vlastnosti částic. V našem případě se při nízkých teplotách překryjí vlnové délky jednotlivých částic a začnou soustavě vnucovat koherentní dynamiku, což vede k popisu celého objemu kapaliny makroskopickou vlnovou funkcí známou z kvantové mechaniky pro popis jednotlivých částic. Pro supratekuté helium, jak o tom vypovídá řada experimentálních důkazů, lze makroskopickou vlnovou funkci napsat ve tvaru

$$\psi = \psi_0 \exp[iS(\vec{r})], \quad (2.15)$$

kde ψ_0 je amplituda vlnové funkce a makroskopická fáze $S(\vec{r})$ je reálnou funkcí polohy \vec{r} . Aplikací operátoru impulsu $\hat{p}\psi = -i\hbar\nabla\psi$ odvodíme hybnost $\vec{p} = \hbar\nabla S(\vec{r}) = m_4 v_s$. Odtud je dána rychlost supratekuté složky

$$v_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S(\vec{r}). \quad (2.16)$$

Je-li supratekutá fáze v klidu, je makroskopická fáze S konstantní v celém objemu.

Zbývá nám určit amplitudu makroskopické vlnové funkce ψ_0 . V kvantové fyzice představuje kvadrát vlnové funkce hustotu pravděpodobnosti nalezení částice, z čehož vyplývá, že při integrování pře celým prostor dostaneme jedničku díky normalizaci pravděpodobnosti. Kvadrát makroskopické vlnové funkce má podobnou interpretaci, ale protože popisuje velké množství částic, je normalizována na počet částic v daném objemu. Kvadrát makroskopické vlnové funkce interpretujeme jako hustotu částic

$$\psi^*(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) = \psi_0^2(\vec{r}, t) = \frac{\rho_s}{m_4}. \quad (2.17)$$

Nyní je interpretace amplitudy vlnové funkce zřejmá. Pomineme-li oblasti těsně u stěn či poblíž kvantovaných vírů je hustota supratekuté složky téměř konstantní.

2.5 Excitace v He II a kritická rychlost

Pro excitace v heliu hraje určující roli disperzní relace, tj. tvar závislosti energie na hybnosti. V kapalině v důsledku interakce mezi atomy vzniká kolektivní pohyb částic, a proto uvažujeme normální módy pohybu kapalinu jako celku, podobně jako v případě krystalu. Módy můžeme popsat soustavou kvantových harmonických oscilátorů s energií $\varepsilon = (n + 1/2)\hbar\omega$. Alternativní popis přiřazuje n -tému excitovanému stavu oscilátoru n kvazičástic o energii $\hbar\omega$.

Disperzní relaci pro He II (viz obrázek 2.5) uhodl ruský fyzik L. D. Landau a experimenty (např. rozptyl tepelných elektronů) platnost této relace potvrzují. Pro nejnižší energie je disperzní relace lineární. Odpovídá to tepelným excitacím. Pro malé rychlosti má disperzní vztah fononový charakter

$$\varepsilon = C_1 p, \quad (2.18)$$

kde $C_1 \cong 239$ m/s je rychlost zvuku. Při vyšších teplotách se spektrum odklání od přímky, prochází maximem a poté minimem. Elementární excitace v okolí minima dostaly název rotony a platí pro ně disperzní vztah

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu_r}, \quad (2.19)$$

kde Δ je energetická mezera a $\mu_r = 0,16m_4$ je efektivní hmotnost rotonu.

Odvodíme nyní Landauovo kritérium supratekutosti. Při vyšších rychlostech supratekuté složky se tato složka bude pohybovat tak rychle, že bude schopna „vyzářit“ kvantum energie ve formě tepelných interakcí, tj. dochází k disipaci energie, což vede k efektivní vazkosti (viz kapitola o vazké tekutině) a rozrušení supratekuté složky. Budeme se zabývat energií a hybností supratekuté složky při pohybu tělesa o hmotnosti M kapalinou

$$\frac{1}{2}Mv_i^2 = \frac{1}{2}Mv_f^2 + \varepsilon(p) \quad (2.20)$$

a

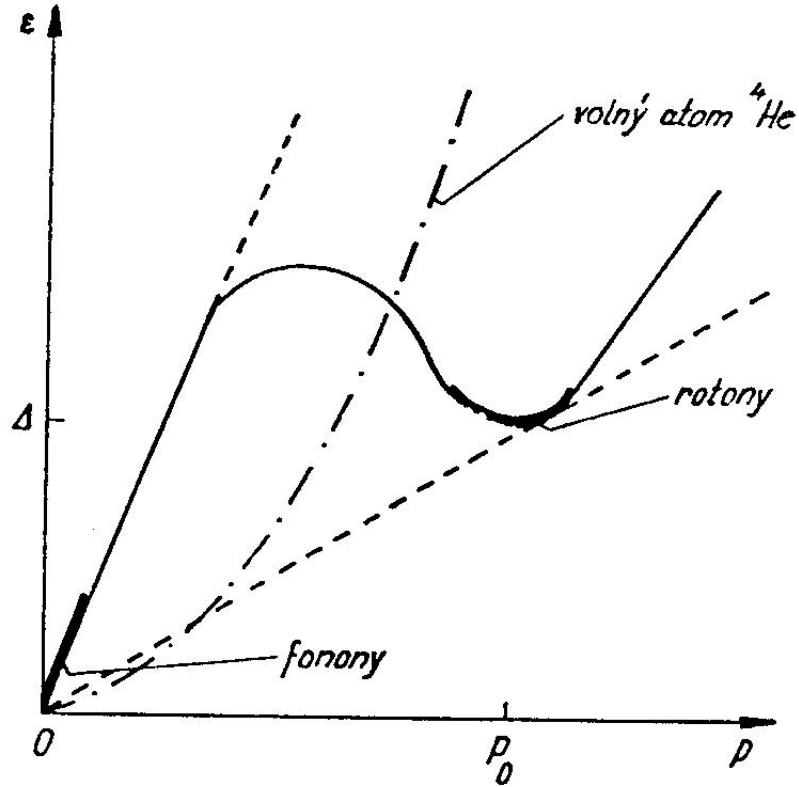
$$M\vec{v}_i = M\vec{v}_f + \vec{p}, \quad (2.21)$$

kde index i (f) označuje rychlost před(po) generaci kvanta o hybnosti \vec{p} a energii $\varepsilon(p)$. Vyjádříme z rovnice (2.21) \vec{v}_f

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i - \frac{\vec{p}}{M} \quad (2.22)$$

a dosadíme do rovnice (2.20). Po menší úpravě dostaneme

$$\varepsilon(p) - \vec{p} \cdot \vec{v}_i + \frac{p^2}{2M} = 0. \quad (2.23)$$



Obrázek 2.5: Energetické spektrum He II [6]

Budeme uvažovat, že M je velké a poslední člen tedy můžeme zanedbat. Hledáme nejmenší kritickou rychlost, která nastane při maximálním skalárním součinu $\vec{p} \cdot \vec{v}_i$ tj. úhel φ mezi hybností a rychlostí kvanta bude nulový. Minimální kritická rychlost

$$v_{krit} = \left[\frac{\varepsilon(p)}{p} \right]_{min} \quad (2.24)$$

Dokud bude rychlost v_i malá, nebude se v heliu disipovat energie a supratekutá složka bude téci bez tření. Po překročení kritické rychlosti se bude disipovat energie a na supratekutou složku začne působit třecí síla jako v normální kapalině. Minimum z rovnice (2.24) určíme z nulové derivace

$$\frac{d \left(\frac{\varepsilon(p)}{p} \right)}{dp} = 0 \rightarrow \frac{d\varepsilon(p)}{dp} = \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.25)$$

Tato podmínka je splněna jednak v lineární části spektra pro fonony, odkud vyplývá kritická rychlost $v_{krit} = C = 239$ m/s a jednak pro rotony, kde podmínka (2.25) dává kritickou rychlost $v_{krit} = \Delta/p_0 = 58$ m/s. Model volného Boseova plynu je v tomto případě nepoužitelný. Pro částice volného plynu platí disperzní relace $E = p^2/(2m)$ a z podmínky (2.25) plyne kritická rychlost $v = 0$, tj. takový plyn není supratekutý. Důvodem selhání modelu pro tento případ je zanedbání interakcí mezi částicemi helia.

Kapitola 3

Kvantované víry v He II

V předchozím výkladu jsme zjistili, že rychlost supratekuté složky He II je dána gradientem fáze makroskopické vlnové funkce

$$\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S , \quad (3.1)$$

z čehož použitím vektorové identity $\nabla \times \nabla = 0$ dostaneme

$$\nabla \times \vec{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} [\nabla \times (\nabla S)] = 0 \quad (3.2)$$

Víry v supratekutém heliu by tedy neměly existovat, ale byly experimentálně pozorovány a skupině vedené R. Packardem se povedlo kvantované víry vyfotografovat [7]. Tento paradox je způsoben tím, že známá vektorová identita $\nabla \times \nabla = 0$ platí pro jednoduše souvislé oblasti. Jednoduše souvislou oblast si můžeme představit jako prostor vymezený smyčkou, kterou můžeme stáhnout do bodu. Pokud je v oblasti, kterou zaujímá smyčka, díra či překážka, smyčku nelze stáhnout do bodu, neboť ji nelze stahovat přes překážku či přes díru a oblast není jednoduše souvislá. Pokud je ve smyčce právě jedna překážka nazveme oblast dvojnásobně souvislou ([4], str. 156), apod. Čtenář se může více dozvědět o tomto matematickém tématu v topologii.

Uvažujme nyní čistě supratekutou složku, čili předpokládáme, že teplota helia se blíží k absolutní nule. Zkoumejme veličinu zvanou cirkulace, definovanou jako integrál podél uzavřené křivky

$$\Gamma = \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{v}_s) \cdot d\vec{S}. \quad (3.3)$$

Použitím vztahu pro rychlost supratekuté složky vyjádřeného z makroskopické vlnové funkce můžeme cirkulaci napsat

$$\Gamma = \frac{\hbar}{m_4} \oint \nabla S \cdot d\vec{l} = \frac{\hbar}{m_4} \Delta S , \quad (3.4)$$

kde ΔS znamená rozdíl fází koncových bodů. Pro vlnovou funkci $\psi = \sqrt{\rho/m_4} e^{iS}$ požadujeme, aby byla spojitá při oběhu jakékoliv spojitě křivky,

jinými slovy při oběhu po uzavřené křivce může změna fáze nabývat pouze celých násobků $2\pi(e^{2\pi n} = 1)$ a cirkulace je kvantována

$$\Gamma = \frac{nh}{m_4} = n\kappa \quad , \text{ kde } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (3.5)$$

kde κ je kvantum cirkulace.

V kvantovaném víru se částice pohybují po koncentrických kružnicích v rovině kolmé na osu víru.

$$\kappa = \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = 2\pi r |\vec{v}_s|. \quad (3.6)$$

Vyjadříme-li $|\vec{v}_s|$ jednoduše jako v_s

$$v_s = \frac{\kappa}{2\pi r}. \quad (3.7)$$

S použitím rovnic (3.5) a (3.7) můžeme napsat

$$m_4 r v_s = \frac{nh}{2\pi}, \quad (3.8)$$

čímž získáme kvantovací podmínku pro moment hybnosti. Z rovnice (3.8) je vidět, že pokud $r \rightarrow 0$, pak rychlost supratekuté kapaliny v_s diverguje. To samozřejmě není možné. V našem případě bude limitujícím faktorem kritická rychlost pro supratekutou složku (viz kapitola o vlastnostech dvojkapalinového modelu). V okolí osy víru bude helium v normální stavu (myšleno nesupratekuté). Poloměr tohoto jádra byl experimentálně určen $\approx 1 \text{ \AA}$. Tento rozbor teď využijeme pro určení energie víru. Poloměr jádra označíme r_0 . Energie kvantovaného víru je určena převážně jeho kinetickou energií, ostatní příspěvky můžeme zanedbat

$$\varepsilon_v = \int_{r_0}^R \pi \rho_s v_s^2 r dr \quad (3.9)$$

a použitím rovnice (3.7) dostáváme energii na jednotkovou délku víru cirkulace κ

$$\varepsilon_v = \frac{\rho_s \kappa^2}{4\pi} \ln \left(\frac{R}{r_0} \right). \quad (3.10)$$

3.1 Termodynamika vírů

V této části budeme studovat vznik vírů a objasníme, co znamená, že vznik vírů je výhodný z termodynamického hlediska. Začneme příkladem kapaliny v rotujícím válci. Normální kapalina se zformuje do tvaru válce s meniskem ve tvaru paraboloidu. Tento útvar je známý z běžného života: při míchání čaje ve válcové skleničce se vytvoří popisovaný útvar. Supratekutá kapalina by však neměla na pohyb nádoby reagovat v důsledku okrajové podmínky na

stěnách válce. Nicméně pro tekutinu je termodynamicky výhodnější vytvořit síť malých $1 \times$ kvantovaných vírů.

Dále budeme uvažovat zjednodušený případ, tedy s lehkou újmou na obecnosti. Předpokládáme, že všechny víry mají osu rovnoběžnou s osou válce a všechny mají stejnou cirkulaci κ a jsou pozorovány v aparatuře tvaru válce. Označíme nyní n_v plošnou hustotu vírů a ω_t je celková cirkulace:

$$\omega_t = \pi R^2 n_v \kappa, \quad (3.11)$$

kde R je poloměr válce. Supratekuté He II napodobuje chování rotace pevného tělesa a celková cirkulace je též rovna odpovídající rotaci tuhého válce

$$\omega_t = 2\pi R(\Omega R), \quad (3.12)$$

kde Ω je úhlová rychlost.

Odtud plyne podmínka pro vířivost jednotkové plochy

$$n_v = \frac{2\Omega}{\kappa}. \quad (3.13)$$

Nyní konečně provedeme slibovaný termodynamický rozbor. Ukážeme si, že je výhodnější hodně malých vírů spíš než jeden obrovský. Začneme s termodynamickou veličinou volné energie F . V rovnováze platí pro volnou energii, že výraz

$$F' = F - L\Omega \quad (3.14)$$

je minimální. L značí absolutní hodnotu momentu hybnosti. Ve válci je dán celkový počet vírů N :

$$N = \frac{2\pi R^2 \Omega}{\kappa}. \quad (3.15)$$

Volná energie F' závisí na formě vírové mřížky pouze přes κ a N . Vzpomeňme si na předpoklad, že všechny víry jsou stejné a mají stejnou cirkulaci¹. Moment hybnosti jednoho víru je

$$l_v = \frac{\rho_s \kappa^2}{8\pi \Omega}. \quad (3.16)$$

Minimalizace F' koresponduje s minimalizací volné energie

$$F'' = N(\varepsilon - l_v \Omega) = \frac{1}{2} \rho_s R^2 \Omega \kappa \left[\ln \left(\frac{R}{r_0} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (3.17)$$

Jedinou veličinou, kterou můžeme minimalizovat ve vztahu (3.17), je cirkulace jednotlivého víru. V základním stavu rotujícího supratekutého ⁴He jsou všechny víry uspořádány do pravidelné mřížky vírů o jednotkové cirkulaci κ . Pozorováním této situace [7] bylo zjištěno, že víry tvoří hexagonální mřížku.

¹Tento předpoklad vede k zjednodušení výpočtu. Kdybychom počítali cirkulaci každého víru zvlášť, dostali bychom stejný výsledek ([8], str. 185)

Při nulové rychlosti otáčení válce se kvantované víry samozřejmě neobjeví. Zvýšíme-li nepatrně rychlost otáčení válce, kvantované víry se rovněž nebudou vyskytovat, neboť soustava nemá dostatečnou energii pro vytvoření alespoň jediného víru. Bude tedy existovat hodnota úhlové rychlosti, tzv. kritická úhlová rychlost Ω_{krit} , po jejímž překročení začne být pro soustavu termodynamicky výhodnější vytvářet víry. Kritickou rychlost Ω_{krit} určíme minimalizací volné energie F' . Vír se bude moci objevit, pokud stav bez vírů je méně výhodný než stav s víry. To nastane, když hodnota výrazu $\varepsilon - l_v \Omega$ se stane zápornou. Energie je dána rovnicí (3.10) a moment hybnosti udává integrál:

$$l_v = \int_{a_0}^R \varrho_s r v_s (2\pi r) dr. \quad (3.18)$$

Výpočtem integrálu (3.18), přičemž předpoklad $R \gg a_0$ nám umožní zanedbat člen s a_0 , dostaneme

$$l_v = \frac{1}{2} \varrho_s \kappa R^2. \quad (3.19)$$

Kritickou rychlost pro vytvoření jednoho víru s minimální cirkulací je

$$\Omega_{krit} = \frac{h}{2\pi m_A R^2} \ln \left(\frac{R}{a_0} \right). \quad (3.20)$$

Toto kritérium pouze říká, od jaké úhlové rychlosti je tvorba kvantovaných vírů termodynamicky výhodná. Nezajímá se o vlastní vznik víru. Při nadkritické úhlové rychlosti Ω se víry nemusí objevit, neboť vznik víru je spojen s energetickou bariérou. Kvantované víry se budou objevovat při vyšších úhlových rychlostech než Ω_{krit} . Pokud by byly stěny válce dokonale hladké a helium neobsahovalo žádné anomálie, tak by víry vznikaly tzv. intristicky. Tohoto případu je velmi obtížné dosáhnout. Častější je vznik vírů extrinistický, tj. ze zárodečné vírové smyčky. Kvantovaný vír se vytvoří na stěně aparatury, která je vzhledem k typické velikosti kvantovaného víru ($\approx 1 \text{ \AA}$) vždy hrubá. Víry se vytvoří a časem se odpoutají od místa svého vzniku a vytvoří mřížku. Tento případ je předmětem našich pokusů týkajících se přechodu do turbulentního proudění.

Kapitola 4

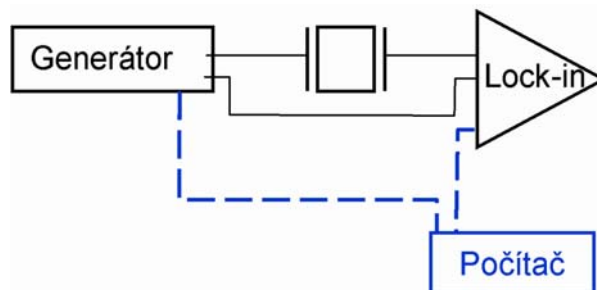
Experimentální aparatura

V této sekci si popíšeme základní části aparatury. Zaměříme se na popis křemenné ladičky, která je pro výsledky popsané dále v této práci ústředním experimentálním instrumentem.

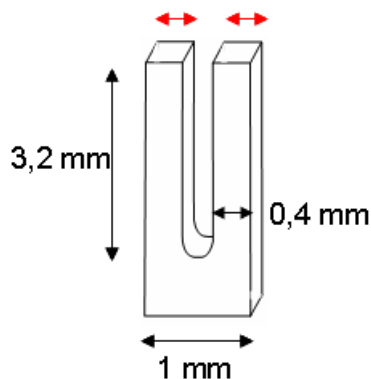
4.1 Kryostat

Popsané experimenty jsou prováděny ve skleněném kryostatu. Ten se skládá ze dvou Dewarových nádob. První je naplněna kapalným dusíkem a tvoří první izolační vrstvu proti přítoku tepla. Druhá nádoba se plní kapalným ^4He . Povrch druhé nádoby je pokryt napařenou stříbrnou zrcadlicí vrstvou, která omezuje přítok tepla radiací. Úzká štěrbina umožňuje pozorovat vnitřek kryostatu. Pro snižování teploty helia v kryostatu jsou připojeny seriově vývěvy, které snižují tlak par nad hladinou helia, což vede ke snížení teploty. Dále je připojen manometr, který určuje tlak par. Používali jsme jej jako teploměr (kromě polovodičových odporových teploměrů).

V této aparatuře probíhají experimenty s křemennou ladičkou. Kryostat nám umožňuje měřit závislosti vlastnosti ladičky na tlaku a na teplotě (použitím vývěvy měníme tlak par nad kapalinou). Do křemenné ladičky se přivádí z generátoru střídavý proud o frekvenci ω , která je proměnnou v našich experimentech. Proměřujeme rezonanční závislosti ladičky za různých pod-



Obrázek 4.1: Schéma aparatury



Obrázek 4.2: Schéma křemenné ladičky

mínek. Obvykle měníme frekvenci automaticky pomocí programů napsaných v LabView, které zprostředkovávají komunikaci s generátorem a s fázově citlivým zesilovačem (lock-in). Naměřená data jsou automaticky ukládána do řídicího počítače. Schéma (viz obrázek 4.1) shrnuje výše popsané.

4.2 Ladička

Turbulentní proudění bylo zkoumáno tenkým drátkem, mřížkou či tzv. metodou druhého zvuku [5]. Dalším kmitajícím objektem v kapalném ^4He s funkcí senzoru byla po vibrujících mřížkách a drátcích zvolena křemenná ladička (viz obrázek 4.2).

Ladička je piezoelektrický oscilátor, který se používá v hodinkách díky své schopnosti kmitat s přesnou frekvencí $2^{15} \text{ Hz} = 32\,768 \text{ Hz}$ při pokojové teplotě. Ladička dosahuje vyšších frekvencí než dříve používané drátky či kmitají mřížky. Ladičky jsou relativně levné a lehce se zapojují do experimentů. Jsou k dostání zapouzdřené, což nám umožnilo pro měření testovat tři různé varianty. První v původním stavu, tj. kompletně zapouzdřené, druhou s částečně odstraněným pouzdrům a třetí bez pouzdra. Ladičky se chovají velmi individuálně a různé ladičky stejného typu mají mírně různé charakteristiky.

Ladička v tekutině se chová jako dva v protifázi kmitající oscilátory. Pohyb každé nohy ladičky lze popsat diferenciální rovnicí pro pohyb tlumeného oscilátoru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}. \quad (4.1)$$

Popišme si parametry našeho tlumeného oscilátoru: m je efektivní hmotnost nohy, γ je koeficient tlumení, k je tuhost oscilátoru a F je síla, v našem případě $F = F_0 \cos(\omega t)$, kde F_0 je její amplituda. Koeficient tlumení a efektivní hmotnost závisí na prostředí.

Řešení tlumeného oscilátoru můžeme napsat ve tvaru

$$x(t) = x_a(\omega) \sin(\omega t) + x_d(\omega) \cos(\omega t), \quad (4.2)$$

kde x_d a x_a jsou disperze a absorpce.

Rezonanční frekvence je určena výrazem

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.3)$$

a činitel jakosti

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}. \quad (4.4)$$

Koeficient tlumení γ zde vyjadřuje pološířku¹ rezonanční čáry $\Delta\omega$ [1].

Pro zkoumané vidličky jsou typické parametry: $f_0 = 2^{15}$ Hz = 32768 Hz, $\Delta f \approx 1,2$ Hz a $Q \approx 2,7 \cdot 10^4$.

Dále se budeme zabývat elektrickými vlastnostmi vidličky a vyjádříme diferenciální rovnici tlumeného mechanického oscilátoru (4.1) pomocí rovnice pro analogický elektrický oscilátor.

Ladička je buzena napětím $U = U_0 \cos(\omega t)$. V průběhu pokusu měníme frekvenci ω a měříme elektrický proud I způsobený piezoelektrickým jevem. Oscilace způsobují napětí v ladičce, které je příčinou piezoelektrického jevu a souvisí s proudem lineárně na rychlosti

$$I(t) = a \frac{dx(t)}{dt}, \quad (4.5)$$

kde a je konstantou ladičky, pro použité vidličky $a = 2,47 \cdot 10^{-5}$ C/m. V kryostatu je měření konstanty a komplikované. Volíme zde alternativní postup, tj. kalibraci našich křemenných ladiček porovnáním mechanického oscilátoru s elektrickým RLC seriovým rezonančním obvodem. Odpovídající diferenciální rovnice určující proud je

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L} \frac{dU}{dt}, \quad (4.6)$$

kde veličiny odpor, indukance a kapacita mají své obvyklé označení (R, L, C). Porovnáním rovnice mechanického oscilátoru (4.1) a rovnice seriového RLC rezonančního obvodu (4.6) dostaneme vztahy mezi elektrickými a mechanickými veličinami: $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $\gamma = R/L$ a s použitím rovnice (4.5), $1/L = (F_0/U_0)a/m$. Ještě použijeme rovnici pro disipaci energie v rezonanci: $U_0^2/(2R) = 2F_0^2/(2m\gamma)$. Máme nyní 4 rovnice spojující 4 mechanické veličiny s odpovídajícím počtem elektrických veličin přes konstantu ladičky a :

$$F_0 = \frac{a}{2} U_0, \quad (4.7)$$

$$R = \frac{2m\gamma}{a^2}, \quad (4.8)$$

$$L = \frac{2m}{a^2}, \quad (4.9)$$

¹šířka v polovině maxima daného píku

$$C = \frac{a^2}{2k}. \quad (4.10)$$

Experimentálně můžeme určit konstantu a užitím rovnice (4.8), kterou přepíšeme do tvaru

$$a = \sqrt{\frac{2m\omega_0}{QR}}. \quad (4.11)$$

Veličiny ω_0 a Q určíme z rezonanční křivky a R je konstanta lineární závislosti $I_0(U_0)$. Jediný parametr, který nemůžeme určit z experimentu, je efektivní hmotnost m . Naštěstí je možné efektivní hmotnost určit teoreticky [1].

V našem pokusu měříme absorpci I_a a disperzi I_d proudu $I(t) = I_a \sin(\omega t) + I_d \cos(\omega t)$ fázově citlivým zesilovačem (lock-in). Teoretické křivky absorpce a disperze [1]:

$$I_a = \frac{a^2 U_0}{2} \frac{m\gamma\omega^2}{(m\gamma\omega)^2 + (m\omega^2 - k)^2} = \frac{I_0(\Delta\omega)^2\omega^2}{(\Delta\omega)^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad (4.12)$$

a

$$I_d = \frac{a^2 U_0}{2} \frac{\omega(m\omega^2 - k)}{(m\gamma\omega)^2 + (m\omega^2 - k)^2} = \frac{I_0\Delta\omega \omega(\omega^2 - \omega_0^2)}{(\Delta\omega)^2\omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}, \quad (4.13)$$

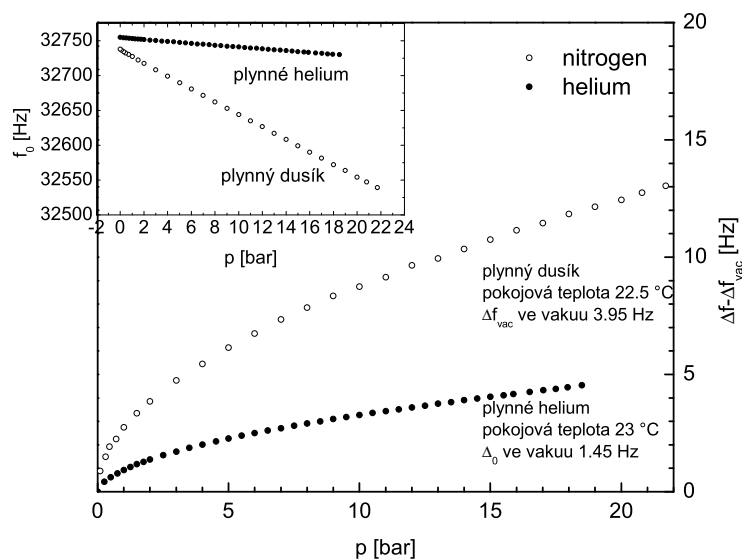
použijeme k fitování veličin, konkrétně f_0 a Δf . Tvar křivek je vykreslen dále při fitování naměřených dat (viz obrázek 5.2) .

Kapitola 5

Výsledky měření

V této části budeme prezentovat výsledky měření naší laboratoře, na kterých jsem se podílel.

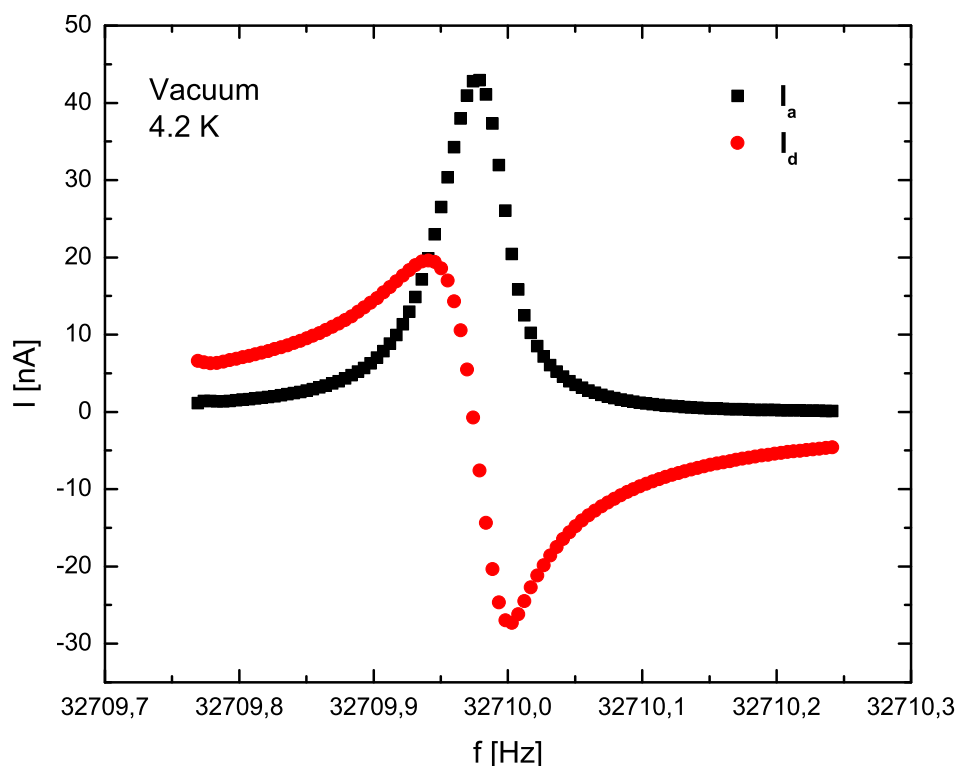
Jelikož křemenné ladičky byly uvedeny do měření v kapalném heliu teprve nedávno, bylo prvním úkolem poznat blíže vlastnosti tohoto detektoru. Nejprve byly měřeny rezonanční křivky v plynném dusíku a v heliu při pokojových teplotách. Hledali jsme závislosti rezonanční frekvence f_0 , resp. pološířky rezonanční křivky Δf na tlaku. Pro měření jsme použili všechny varianty vidličky (viz dříve). V rámci odchylek jednotlivých křemenných ladiček nebyl pozorován žádný rozdíl mezi jednotlivými verzemi ladiček. Měření ukázala lineární závislost rezonanční frekvence na tlaku a odmocninovou závislost pološířky Δf na tlaku, viz obrázek 5.1.



Obrázek 5.1: Závislost pološířky Δf a rezonanční frekvence na tlaku.

Obdobně jsme postupovali při měření v kryostatu v kapalném heliu při teplotě 4,2 K. Měření při teplotě 4,2 K odhalila jeden další nedostatek našeho detektoru. Měřené hodnoty závisely na historii ladičky. Po několika cyklech z kapalného dusíku (77 K) do pokojových teplot se měnili měřené vlastnosti ladičky, ale po 20-ti až 50-ti cyklech z kapalného dusíku do pokojových teplot a opačně se vlastnosti ladiček ustálily. Tato podivná „hystereze“ nebyla pozorována u všech ladiček a její příčina nebyla plně objasněna.

Vrátíme se nyní k dvěma neuzavřeným problémům minulé kapitoly. Prvním je kalibrace ladičky aneb určení jejích charakteristik a druhá je zobrazení absorpce (4.12) a disperze (4.13). Kalibraci vidličky jsme prováděli při teplotě 4,2K ve vakuu, graf 5.2. Měřením rezonanční křivky za různých budících napětí nám umožnilo určit odpor R a rovněž i konstantu ladičky a z rovnice (4.11).

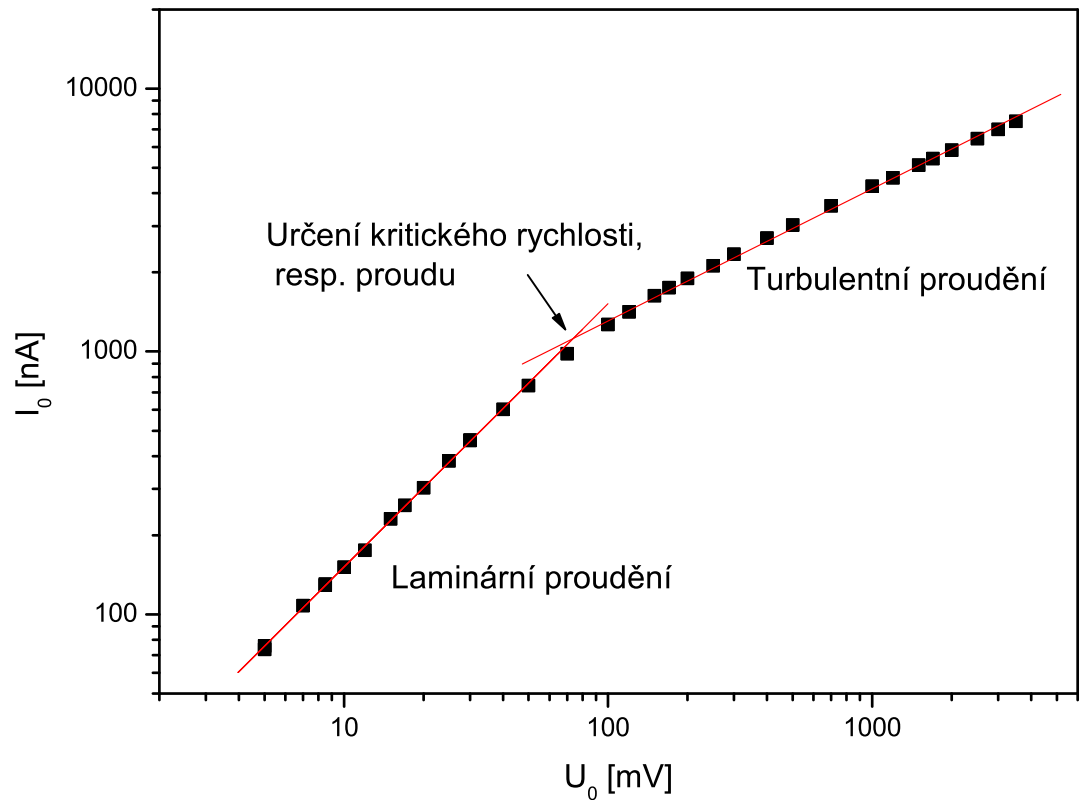


Obrázek 5.2: Absorpce a disperze ladičky ve vakuu

Nyní jsme se již seznámili s vlastnostmi křemenných ladiček a můžeme využít tento nástroj pro zkoumání turbulence v heliu. Zajímaly nás podmínky pro vznik turbulence. Jelikož se hydrodynamické vlastnosti helia II mění výrazně s teplotou (dvojkapalinový model-změna poměru supratekutě

a normální složky helia), je přirozené zkoumat přechod k turbulentnímu proudění při různých teplotách.

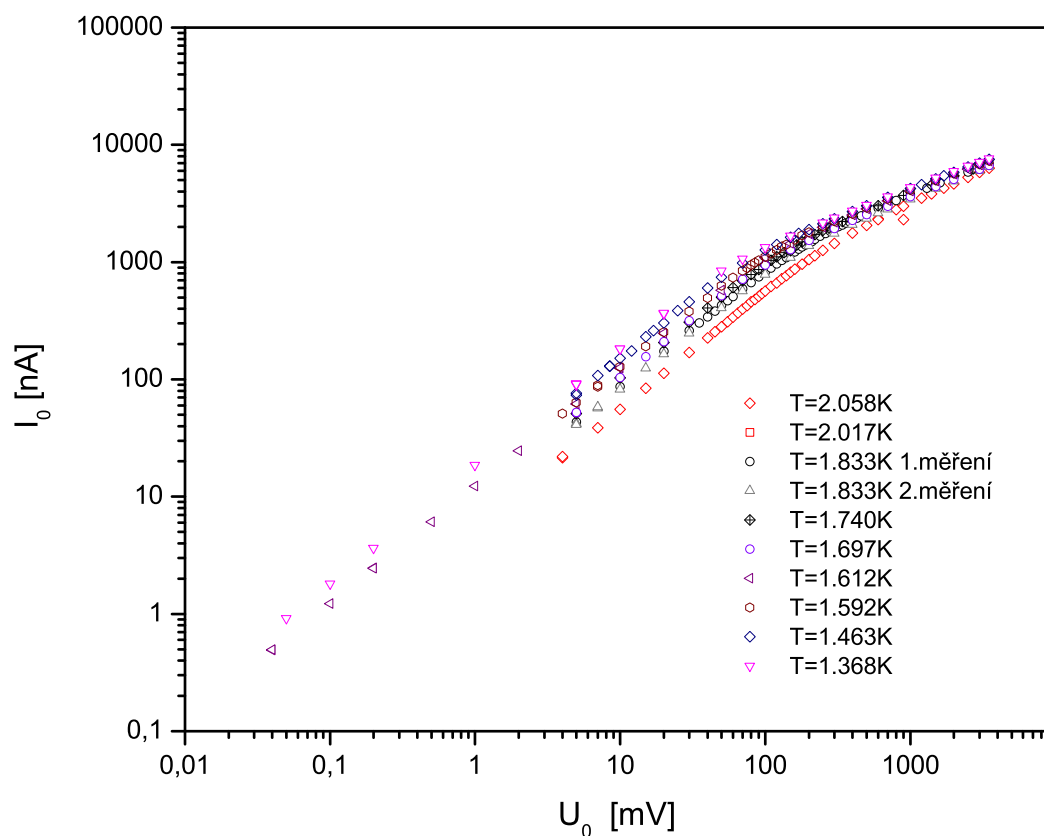
Proudění v kapalině je vyvoláno oscilující vidličkou, jak víme z hydrodynamické části. Laminární proudění přechází v turbulentní při vyšších rychlostech. Rychlost oscilací je určena amplitudou excitačního proudu. Měřili jsme vlastnosti rezonančních křivek při konstantní teplotě v závislosti na amplitudě excitačního napětí. V závislosti proudu I_0 na excitaci U_0 (viz graf 5) je vidět změna proudění z laminárního na turbulentní. Naměřené hodnoty v grafu 5 lze rozdělit do dvou skupin: jedna odpovídá laminárnímu proudění a druhá turbulentnímu. Oběma skupinami hodnot lze proložit lineární závislost, přičemž sklony obou přímk se liší a průsečíku těchto dvou přímk se pracovně¹ říká "koleno". To zachycuje změnu laminárního proudění na turbulentní, přičemž dochází ke skokové změně v důsledku rozdílnosti těchto proudění.



Obrázek 5.3: Závislost proudu I_0 na excitaci U_0

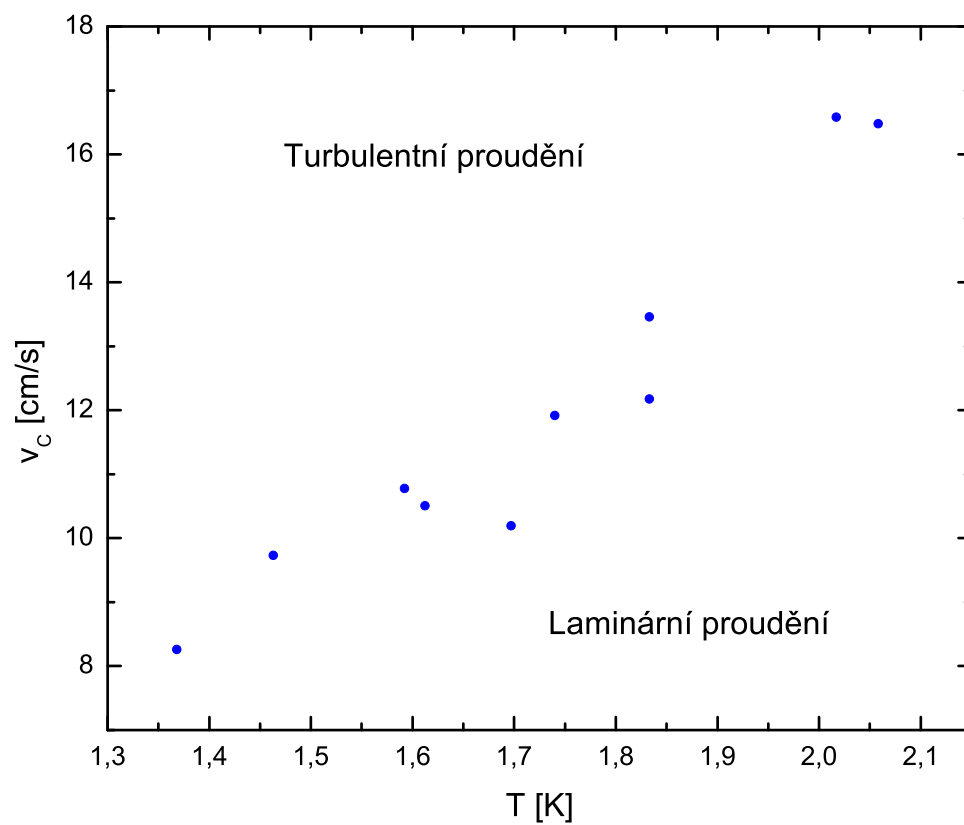
Výše popsaný experiment byl prováděn pro různé teploty (viz obrázek

¹přesné odborné označení v češtině zatím chybí



Obrázek 5.4: Závislost rezonanční frekvence na excitaci U_0

5.4) , což umožnilo zkonstruovat graf 5.5 zachycující kritické rychlosti přechodu do turbulentního proudění. Oblast pod přímkou přísluší laminárnímu proudění, vyšší rychlosti v oblasti nad přímkou přísluší turbulenci. Naměřená data nejsou ještě kompletní a bude se pokračovat v měření v teplotách i nad λ -bodem.



Obrázek 5.5: Kritické rychlosti přechodu do turbulentního proudění

Závěr

Cílem našeho snažení bylo vytvořit práci, která by měla čtenáře uvést do problematiky proudění supratekutého helia, přičemž byl kladen důraz na studium kvantovaných vírů. Zabývali jsme se zejména podmínkami jejich vzniku, což bylo předmětem našeho experimentu. I když je He II kvantová kapalina, nelze při jejím popisu vynechat popis proudění klasických kapalin, což je v této práci obsaženo popisem dvou modelů kapalin: ideální a vazké kapaliny. Dále nás zkoumání vlastností kapalného helia ${}^4\text{He}$ dovedlo ke dvěma jeho fázím: klasické kapalině He-I a kvantové kapalině He-II, jejíž chování lze popsat pomocí fenomenologického dvoukapalinového modelu. Pro dostatečně malé rychlosti proudění představuje dvoukapalinový model He-II jako neinteragující směs dvou složek: normální, pro jejíž popis používáme model vazké kapaliny a supratekuté složky, pro kterou se hodí popis pomocí ideální kapaliny. Vzniknou-li v kapalině kvantované víry, budou však jejich rychlostní pole vázána tzv. silou vnitřního tření, která vzniká v důsledku rozptylu fononů a rotonů na jádrech těchto kvantovaných vírů a He-II se v některých případech chová jako vazká tekutina mající jistou efektivní vazkost.

Ověření těchto teoretických představ a studium podmínek vzniku kvantovaných vírů v proudění vyvolaném oscilacemi křemenné ladičky byly předmětem naší experimentální práce. V jejím průběhu jsem se seznámil se základy kryogenního experimentu a naučil se pracovat s kapalným heliem. Obdržené výsledky jsou součástí širšího projektu, který se zabývá podmínkami přechodu laminárního proudění do turbulentního v širokém spektru pracovních látek (včetně He-II), teplot a tlaků a získané výsledky již byly částečně publikovány ve vědeckém časopise *Journal of Low Temperature Physics* [1] a budou prezentovány na mezinárodní konferenci QFS 2006 v Kyótu.

Studium kvantovaných vírů přispívá k hlubšímu pochopení turbulentního proudění a makroskopických kvantových jevů.

Literatura

- [1] Blaauwgeers *et al*: *Quartz Tuning Fork: Thermometer, Pressure- and Viscometer for Helium Liquids*, submitted to Journal of Low Temperature Physics.
- [2] Brdička M., Samek L., Sopko B. : *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000.
- [3] Landau L., Lifšic M. : *Hydrodynamika*, Fizmatlit, Moskva, 2003.
- [4] Odehnal M. : *Supravodivost a jiné kvantové jevy*, Academia, Praha, 1992.
- [5] Šindelář J. : *Study of flow and quantum turbulence in He II*, Masters Thesis, MFF UK Praha, 2005.
- [6] Šafrata R.S. a kolektiv: *Fyzika nízkých teplot*, Matfyzpress, Praha, 1998.
- [7] Yarmchuk E.J., Packard R.E.: Journal of Low Temperature Physics **46** (1982) 479.
- [8] Tilley D.R., Tilley J. : *Superfluidity and Superconductivity*, Adam Hilger Ltd, Bristol, 1986.