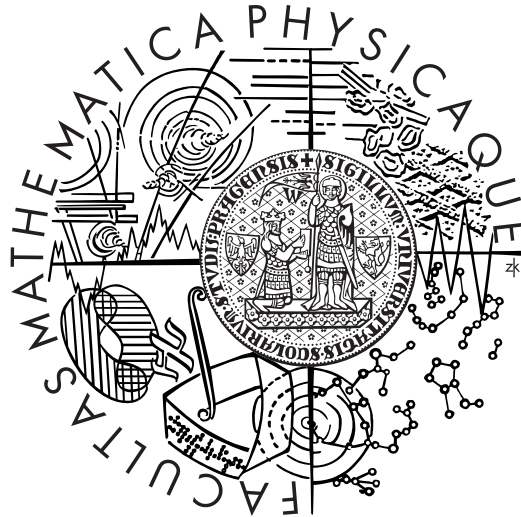


UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jakub Seidl

Anomální difuze elektronů v tokamaku při jejich interakci s dolně hybridní vlnou

Ústav teoretické fyziky

Vedoucí diplomové práce: Doc. Ing. Ladislav Krlín, DrSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Teoretická fyzika

Praha 2006

Poděkování

Chtěl bych poděkovat především Doc. Ing. Ladislavu Krlínovi, DrSc. za jeho trpělivé a podnětné vedení mé práce a za nadšení pro obor, které se mu na mne během našich konzultací podařilo přenést. Děkuji také RNDr. Radomíru Pánkovi, Ph.D. za poskytnutí kódu, který umožnil porovnání výpočtu nerelativistické interakce částic s LHW s dřívějšími pracemi. Rád bych poděkoval Michaele Radové za její užitečné připomínky v průběhu sepisování práce, své sestře Janě Seidlové za možnost užívání jejího notebooku a ze všeho nejvíce děkuji svým rodičům a všem svým blízkým za podporu, kterou mi během celého studia věnovali.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 6.8.2006

Jakub Seidl

Obsah

1	Úvod	4
2	Základní poznatky o interakci typu vlna-částice v plazmatu	6
2.1	Boltzmanova a Fokker-Planckova rovnice	6
2.2	Vlasovova rovnice a Landauovo tlumení	8
2.3	Kvazilineární teorie	10
3	Ohřev plazmatu dolně hybridní vlnou a její šíření v tokamaku	15
3.1	Základní geometrie a princip funkce tokamaku	15
3.2	Šíření dolněhybridní vlny v tokamaku	18
3.3	Interakce dolního hybridu s plazmatem	20
4	Chaos v hamiltonovských systémech	23
4.1	Integrabilní vs. neintegrabilní systémy	23
4.2	Ergodické systémy a systémy s mísením	25
4.3	Nestabilita, Ljapunovy exponenty a Kolmogorovova entropie	26
4.4	KAM teorém	28
4.5	Kritérium překryvu	30
4.6	Podivná dynamika a difuze typu random-walk a Lévy-walk	31
5	Rozšíření kvazilineární teorie pro případ nelineární interakce dolně hybridní vlny	33
5.1	Popis modelů a jejich práh stochasticity	33
5.1.1	Ostře definovaná obdélníková obálka	34
5.1.2	Gaussovský profil vlny	36
5.1.3	Zobecněný profil	38
5.2	Pohybové rovnice a integrály pohybu	40

5.2.1	Obdélníková obálka - nerelativistická aproximace	40
5.2.2	Obdélníková obálka - relativistické řešení	42
5.2.3	Ostatní obálky	44
5.3	Výsledky numerických simulací	45
5.3.1	Parametry	45
5.3.2	Difuzní koeficient	46
5.3.3	Difuze typu Lévy-walk	51
5.3.4	Oblast platnosti kvazilineární difuzní rovnice	52
5.3.5	Vývoj rozdělovací funkce	52
5.3.6	Difuze α -částic	57
6	Urychlení částic v těsné blízkosti LH grilu	59
7	Závěr	66
A	Řešení ODR metodou typu PECE	69

Abstrakt

Název práce : Anomální difuze elektronů v tokamaku při jejich interakci s dolně hybridní vlnou
Autor : Jakub Seidl
Katedra (ústav) : Ústav teoretické fyziky
Vedoucí diplomové práce : Doc. Ing. Ladislav Krlín, DrSc., Ústav fyziky plazmatu AV ČR
e-mail vedoucího : krlin@ipp.cas.cz

Abstrakt :

Interakce elektronů s dolně hybridní vlnou (LHW) se obvykle popisuje pomocí kvazilineární teorie. Již dříve bylo ukázáno, že kvazilineární popis nemusí být v určitých režimech interakce adekvátní. Tato práce zkoumá vliv prostorové geometrie LH spektra na difuzi rychlostí částic pomocí numerického výpočtu difuzního koeficientu pro různé případy obálky vlny a na jeho základě stanoví dlouhodobý vývoj rozdělovací funkce elektronů. Výpočty byly, na rozdíl od předchozích prací, prováděny pomocí plně relativistických pohybových rovnic. Výsledky potvrzují domněnku, že oblast rychlostí, kde dochází k silnému urychlování elektronů, je nejširší při vstupu vlny do plazmatu a při jejím postupu do hloubky se zužuje. Zároveň bylo prokázáno, že se při intenzitách vlny řádu 10^5 V/m objevuje výskyt difuze typu Lévy-walk. V druhé části práce byly srovnány a rozšířeny dva modely popisující anomální urychlení elektronů v těsné blízkosti LH grilu a bylo ukázáno, že použitý Fourierův rozvoj potenciálu dává pouze hrubý odhad tohoto urychlení.

Klíčová slova : interakce vln s plazmatem, dolně hybridní vlna, urychlení elektronů, tokamak, kvazilineární teorie, deterministický chaos

Abstract

Title : Anomalous Diffusion of Electrons in Tokamak by Their Interaction With Lower Hybrid Wave
Author : Jakub Seidl
Department : Institute of Theoretical Physics
Supervisor : Doc. Ing. Ladislav Krlín, DrSc., Institute of Plasma Physics AS CR
Supervisor's e-mail address : krlin@ipp.cas.cz

Abstract :

Interaction of electrons with a lower-hybrid wave (LHW) is usually described using a quasilinear theory. It was shown formerly that in some cases the quasilinear approach is not proper. This work deals with an effect of spatial geometry of LHW spectra on a particle velocity diffusion. Diffusion coefficient for various cases was computed and put to use to predict a long term evolution of an electron velocity distribution function. The computation was (on the contrary of previous papers) based on fully relativistic equations of motion. The results confirm that region of high electron acceleration is broadest just after the wave enters plasma and becomes narrower along its progress deeper into it. In the range of wave intensities over 10^5 V/m we found that the diffusion becomes Lévy-walk. In the second part predictions of electron acceleration in front of LH grill of two different approaches were compared. We showed that the approach based on usage of Fourier expansion of potential gives only a rough estimate of the acceleration.

Keywords : wave-plasma interaction, Lower Hybrid Wave, electron acceleration, tokamak, quasilinear theory, deterministic chaos

Kapitola 1

Úvod

Na konci dvacátých let 20. století publikovali Atkinson a Houtermans myšlenku, že slunce "hoří" v důsledku jaderných slučovacích reakcí, a již v roce 1934 se poprvé podařilo sloučit dvě jádra deuteria za současného uvolnění energie, což byl experimentální důkaz fúzní reakce. Vlna silného zájmu o problematiku termojaderného slučování vznikla po druhé světové válce jako součást vojenského jaderného programu a vyústila v roce 1952 v testy první vodíkové bomby. Po úspěšných zkouškách panoval poměrně silný optimismus v to, že cesta k mírovému využití termonukleárních reakcí bude stejně snadná, jako cesta od první atomové bomby ke konstrukci jaderných elektráren (první řízená reakce byla spuštěna r. 1942, první test atomové bomby proběhl v r. 1945 a první elektrárna byla napojena do sítě r.1954). Tento optimismus se však brzy ukázal jako planý a o obtížnosti vytyčeného úkolu svědčí i to, že ačkoliv již od té doby uběhlo více než 50 let (a od roku 1958 byl vojenský výzkum odtajněn a nadále probíhal v rámci mezinárodní spolupráce), první prototyp reaktoru s energeticky ziskovou reakcí ITER se začíná teprve stavět.

K tomu, aby mohlo dojít ke slučování jader, je nutné ohřát materiál na teplotu řádově stovek milionů kelvinů. Při takových teplotách se látka vyskytuje již jen v plně ionizovaném stavu nazývaném plazma, které se sestává z nabitých elektronů a iontů. Působením elektromagnetického pole je tedy možné chování plazmatu ovlivňovat, což umožnilo sovětským konstruktérům A. Sacharovovi a I. Tammovi navrhnout již v roce 1951 zařízení (později nazvané tokamak) sloužící k udržení horkého plazmatu. Tokamak se proslavil v roce 1968, kdy na něm v Ústavu Atomové Energie v Moskvě bylo dosaženo přelomové teploty plazmatu 1 keV, což vyvolalo silný zájem vědecké obce a postupně vedlo k opouštění výzkumu na jiných typech zařízení pro magnetické udržení plazmatu (např. stelátory) [41].

Konstrukce tokamaku a způsoby ohřevu plazmatu v něm jsou stručně popsány v kapitole 3.1. Jedním ze zmíněných způsobů je i ohřev pomocí interakce elektronů s dolně hybridní vlnou (LHW). Tato metoda má však v současné době dvě slabá místa. S vývojem technologických možností narostla energie, s kterou je LH gril schopen vlnu do plazmatu injektovat, k mezi, kde přestávají platit předpoklady kvazilineární teorie, pomocí které byl ohřev elektronů LH vlnou doposud popisován. Je tedy nutno hledat nové způsoby, jimiž lze kýžený proces popsat. Druhou a mnohem fatálnější vadou na použitelnosti dolněhybridního ohřevu je experimentální zjištění, že jeho použití

způsobuje silné rozžhavení komponent systému první stěny a divertoru důsledkem dopadajících částic až na technologicky únosnou mez.

Tato práce je příspěvkem ke studiu obou zmíněných problémů LHW a její struktura je následující. Kapitola 2 obsahuje teoretické základy popisu interakce částic s vlnou v plazmatu včetně aplikace kvazilineární teorie. V kapitole 3 je popsána konstrukce tokamaku a šíření LH vlny v něm a jsou zde uvedeny výsledky použití kvazilineární teorie na problém interakce dolního hybridu s plazmatem. Protože podstata jevů souvisejících s oběma studovanými oblastmi je nelineární a chaotická, přináší kapitola 4 úvod do problematiky deterministického chaosu. Kapitola 5 se již věnuje samotné nelineární difuzi elektronů působením LH vlny. Jsou zde představeny modely použité ve studiích [30] a [21], na něž především tato práce navazuje, a jejich pohybové rovnice jsou v dalších podkapitolách zobecněny (jednak co do tvaru profilu vlny a jednak na plně relativistický případ) a použity pro výpočet difuzního koeficientu, jeho vývoje v čase a určení dlouhodobého vývoje rozdělovací funkce elektronů. Konečně pak kapitola 6 pojednává o příčině vzniku horkých míst na součástech magneticky spojených s LH grilem a obsahuje návrh, jak by bylo možno tento jev omezit. V dodatku A je pak ještě popsána numerická metoda typu prediktor-korektor, která byla použita při všech numerických simulacích založených na řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic.

Kapitola 2

Základní poznatky o interakci typu vlna-částice v plazmatu

2.1 Boltzmanova a Fokker-Planckova rovnice

Plazma je kvazineutrální plyn tvořený soustavou nabitých a nenabitých částic, vyznačujících se kolektivním chováním. Typické hustoty se pohybují od 10^6 m^{-3} u plazmatu v meziplanetárním prostoru až po 10^{20} m^{-3} v tokamacích, či 10^{28} m^{-3} při laserové termonukleární fúzi. Ve většině úloh tedy jde o problém velmi mnoha částic vyžadující přechod ke statistickému popisu. Při něm je systém N částic jako celek určen bodem (fází) v abstraktním $6N$ rozměrném fázovém prostoru, v němž jsou souřadnicemi polohové vektory a hybnosti jeho částic. Protože přesná znalost stavu takového systému není možná, zavádí se hustota pravděpodobnosti f_N popisující pro každý bod fázového prostoru pravděpodobnost, že se systém vyskytuje v tomto stavu. Tato pravděpodobnost bývá přirozeně normována na 1 nebo na počet částic N .

Díky možnosti hamiltonovského popisu částic plazmatu a z něho vyplývající nestlačitelnosti fázového prostoru je v platnosti Liouvilleova rovnice udávající vývoj hustoty pravděpodobnosti v čase (dle hamiltoniánu H) [29]

$$\frac{df_N}{dt} \equiv \frac{\partial f_N}{\partial t} - [H, f] = 0. \quad (2.1)$$

Pro velký počet částic je f_N prakticky funkcí nekonečného počtu argumentů. Většina makroskopických veličin je však dána pouze jednočásticovými nebo dvoučásticovými operátory a je proto vhodné rozdělovací funkci celého systému rozložit na k -částicové rozdělovací funkce f_k , kde $k = 1..N$. f_k je pak funkcí pouze $6k$ argumentů a udává pravděpodobnost výskytu libovolné k -tice částic v zadaném stavu. Zúžíme-li třídu uvažovaných systémů na ty, které mají (stále ještě dosti obecný) hamiltonián

$$H_N(x_1, p_1, \dots, x_N, p_N) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i<j} \Phi(x_i, x_j, p_i, p_j), \quad (2.2)$$

potom pro f_k platí obdoba rovnice (2.1) :

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} - [H_k, f_k] = (N - k) \sum_{i=1}^k \int [\Phi_{i,k+1}, f_{k+1}] d^3 x_{k+1} d^3 p_{k+1}. \quad (2.3)$$

Každá z rovnic (2.3) má pro $k = 1..N - 1$ na pravé straně člen obsahující f_{k+1} , který svazuje rovnice pro různá k do tzv. BBGKY hierarchie. Tato hierarchie sama o sobě nijak nesnižuje obtížnost řešitelnosti problému. Lze ji však vhodnými aproximacemi uzavřít již pro nízká k a převést tak celý systém na soustavu několika (často pouze jediné) relativně jednoduchých parciálních diferenciálních rovnic.

Nejčastějším případem je zápis rovnice (2.3) pro jednočásticovou rozdělovací funkci v jednoduchém tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c, \quad (2.4)$$

kde F je celková síla působící na částici, f bude nadále pro zkrácení zápisu označovat f_1 , r a v značí polohu a rychlost částice a $\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c$ je tzv. srážkový člen popisující změnu rozdělovací funkce jedné částice interakcí s ostatními, tedy shrnující vliv dalších f_k pro $k > 1$.

Existují různé přístupy jak vyjádřit srážkový člen explicitně (i když vždy jde pouze o aproximace). Pro účely této práce je zřejmě nejdůležitější tzv. Fokker-Planckova rovnice. Označme $\Pi(v, \Delta v) d(\Delta v)$ pravděpodobnost, že se rychlost částice změní srážkami za čas Δt z v na $v + \Delta v$. Předpokládejme dále [28], že a) srážkové procesy mají markovský charakter, tj. že rozdělovací funkce závisí pouze na okamžitých hodnotách času a rychlosti, b) srážky mezi částicemi jsou pružné, c) ke změně rozdělovací funkce přispívá především velký počet malých odchylek rychlostí částice, které vznikají při interakci se vzdálenými částicemi. V takovém případě lze srážkový člen popsat pomocí difuzního členu D a třetího členu F [28] :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_c = - \frac{\partial (Ff)}{\partial v} + \frac{\partial^2 (Df)}{\partial v^2}, \quad (2.5)$$

$$F = \left\langle \frac{\Delta v}{\Delta t} \right\rangle = \int \frac{\Delta v}{\Delta t} \Pi(v, \Delta v) d(\Delta v), \quad (2.6)$$

$$D = \left\langle \frac{\Delta v \Delta v}{\Delta t} \right\rangle = \frac{1}{2} \int \frac{\Delta v \Delta v}{\Delta t} \Pi(v, \Delta v) d(\Delta v). \quad (2.7)$$

Koeficient tření udává střední změnu rychlosti částic za jednotku času, která je způsobená srážkami, koeficient difuze pak rychlost rozptylu (difuze) oblaku částic v rychlostním prostoru vlivem srážek. Splnění podmínky (c) není úplně samozřejmé. V případě vysokoteplotního plazmatu, na něž bude Fokker-Planckova rovnice v dalších kapitolách aplikována, ale vychází pravděpodobnost rozptylu částice o 90° malými srážkami zhruba 160x větší než pravděpodobnost rozptylu o stejný úhel pouze srážkou jedinou ($\sigma_{90^\circ M} / \sigma_{90^\circ S} \approx 160$) [9].

2.2 Vlasovova rovnice a Landauovo tlumení

Boltzmanova rovnice (2.4) popisuje chování plazmatu v širokém režimu parametrů. V mnoha případech však můžeme srážkový člen zanedbat a dostaneme tzv. Vlasovou rovnici, tedy rovnici (2.4) s nulou na pravé straně :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (2.8)$$

Studujeme-li interakci plazmatu s vlnou o frekvenci ω , pak jsou podmínky pro zanedbání srážkového členu dány nerovnostmi [9]

$$\omega \gg \nu_{ei}; \quad \omega_{pe} \gg \nu_{ei}, \quad (2.9)$$

kde ν_{ei} je elektron-iontová srážková frekvence a ω_{pe} plazmová frekvence daná vztahem

$$\omega_{pe} = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}, \quad (2.10)$$

kde n je hustota plazmatu a m_e hmotnost elektronu.

Spolu s Vlasovovou rovnicí je pro selfkonzistenci řešení nutné uvažovat i rovnice Maxwellovy. Tyto rovnice jsou nelineární a je tedy třeba nalézt řešení soustavy kaplovaných nelineárních parciálních diferenciálních rovnic. To představuje velmi obtížný problém. Proto se pro vysvětlení jevu nazývaného Landauův útlum nyní omezíme pouze na jednorozměrný případ ($x \parallel E$) prostorově homogenního plazmatu bez vnějšího elektrického a magnetického pole, ionty budou tvořit uniformní časově neproměnné pozadí a pod pojmem vlny v plazmatu budeme uvažovat nejjednodušší případ - vlnu elektrostatickou.

Linearizací výše zmíněných rovnic předpokladem

$$\begin{aligned} f(x, v, t) &= f_0(v) + f_1(v)e^{-i\omega t + ikx}, \\ E(x, t) &= Ee^{-i\omega t + ikx}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde f_1 a E jsou pouze malé perturbace, Landau v [32] odvodil asymptotický tvar intenzity elektrického pole

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E_1(k, t) = \sum_j R_j e^{p_j t}, \quad (2.12)$$

kde p_j jsou póly a R_j rezidua rovnice

$$D \equiv 1 - \frac{ie^2}{\epsilon_0 m k} \int \frac{\partial F_0}{\partial u} \frac{1}{p + ik u} du = 0. \quad (2.13)$$

D se nazývá plazmová dielektrická funkce a $F_0(u)$ je neperturovaná rozdělovací funkce v rychlostech elektronů. p_j je výhodné pro další rozbor rozložit na reálnou a imaginární část $p_j(k) = -i\omega_j(k) - \gamma_j(k)$.

Reálnou část p_j se povedlo explicitně vyjádřit již Vlasovovi [43], úplné řešení včetně důležité imaginární části však podal až Landau. Dispersní rovnici (2.13) lze po přeznačení $\omega = -ip$ a integraci po tzv. Landauově křivce přepsat do obvyklého tvaru [9]:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \left[P \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_0}{\partial u} \frac{1}{u - \frac{\omega}{k}} du \right) + i\pi \left(\frac{\partial F_0}{\partial u} \right)_{u=\frac{\omega}{k}} \right]. \quad (2.14)$$

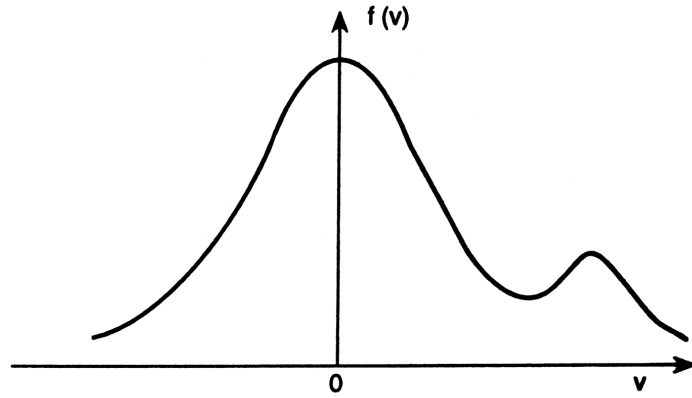
Zde P značí hlavní hodnotu integrálu. Z této rovnice již lze pro konkrétní rychlostní rozdělení vyjádřit jak reálnou tak imaginární část p_j .

Z (2.12) lze snadno nahlédnout, že pro $\gamma_j > 0$ jsou oscilace asymptoticky tlumeny a naopak pro $\gamma_j < 0$ dochází k jejich zesílení. Jednoduchým vysvětlením tohoto jevu je interakce vlny s rezonantními částicemi, pro něž platí $\omega - kv = 0$. Částice s rychlostí menší než je fázová rychlost vlny energii získají na úkor energie vlny a naopak. Je-li v oblasti fázové rychlosti více částic pod touto rychlostí, v celkové bilanci vlna energii ztrácí, v opačném případě získává a zároveň dochází k odpovídajícímu přerozdělení rychlostí částic. Koeficient útlumu tedy závisí na sklonu neperturované rozdělovací funkce $\frac{\partial F_0}{\partial u}$ v bodě fázové rychlosti vlny.

Případ nestabilního rozdělení elektronů lze demonstrovat na následujícím příkladu [23]. Uvažujme rozdělení rychlostí typu 'bump-on-the-tail' (obr. 2.1). Rozdělovací funkce je téměř maxwellovská, pouze v oblasti vysokých rychlostí obsahuje 'hrbol'. Toho lze v praxi dosáhnout například tak, že se do plazmatu vstříkne proud suprathermálních elektronů. Počítáme-li integrál v rovnici (2.14) jen do nejnižšího řádu a imaginární člen považujeme pouze za malou korekci, frekvence excitovaných vln vychází [23]

$$\omega = \omega_p + i \frac{\pi \omega_p^3}{2nk^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (2.15)$$

Prostřednictvím výše nastíněného mechanismu předávání energie mezi elektrony s rezonantní rychlostí a vlnou je tedy posílením náhodných perturbací generováno spektrum vln s frekvencí v prvním řádu rovnou frekvenci plazmové a s různě velkým exponenciálním růstem v čase. Lineární teorie však neumožňuje popsat celý problém selfkonzistentně a spolu s předpovědí spektra vln zároveň určit odpovídající změnu rozdělovací funkce. To byla jedna ze dvou hlavních motivací pro formulaci kvazilineární teorie popsané v následující kapitole.



Obr. 2.1 : Elektronová rozdělovací funkce typu 'bump-in-tail'. Převzato z [23].

2.3 Kvazilineární teorie

Pro mnoho případů šíření vln plazmatem je lineární teorie plně dostačující. Amplitudy vln jsou buď konstantní nebo dokonce exponenciálně klesající v čase a základní předpoklad (2.11) tak zůstává zachován. Na konci předchozí kapitoly 2.1 však byl uveden příklad nestabilního rychlostního rozdělení částic plazmatu, v jehož důsledku dochází ke generování nových (resp. exponenciálnímu zesilování již existujících) elektrostatických vln. Je zřejmé, že takovýto nárůst není donekonečna fyzikálně možný, a že se po určitém čase začnou projevovat nelineární efekty, které v konečném důsledku růst elektrické intenzity zastaví. Nejprve nabude na významu nelineární interakce částic s vlnou a pokud i nadále amplituda vln roste, začne se při dostatečně velkých hodnotách projevovat i vzájemná interakce vln mezi sebou.

Pro popis nelineární interakce typu vlna-částice byla vybudována tzv. kvazilineární teorie. Kvazilineární teorie stále předpokládá, že amplitudy jednotlivých vln jsou dostatečně malé na to, aby vývoj jednotlivých módů mohl probíhat dle popisu lineární teorie. Umožňuje však popsat přenos energie mezi částicemi a vlnou, a tedy v případě nestabilního rozdělení proces saturace této nestability.

Uvažujme opět jednorozměrný případ. Na rozdíl od předchozí kapitoly kvazilineární teorie nepovažuje funkci f_0 za neměnný počáteční stav, ale spíše za pomalu se vyvíjející pozadí ovlivňované působením přítomných vln. Podmínka (2.11) je pak zobecněna na případ působení více vln s různými vlnovými čísly:

$$\begin{aligned}
 f(x, v, t) &= f_0(v, t) + f_1(x, v, t), \\
 f_1(x, v, t) &= \sum_k f_{1k}(v) e^{-i\omega_k t + ikx}, \\
 E(x, t) &= \sum_k E_k e^{-i\omega_k t + ikx}.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Je důležité upozornit, že nezávislost pozadí f_0 na prostorové souřadnici je v této teorii docílena středováním. To ovšem předpokládá neexistenci významnějších pros-

torových struktur ve fázovém prostoru vyjma těch obsažených v lineárním členu f_{1k} . Jak bude popsáno v dalších kapitolách, tento předpoklad může učinit kvazilineární teorii nevhodnou například pro popis ohřevu plazmatu v režimu velmi vysokých intenzit elektrického pole.

Středování Vlasovovy rovnice (2.8) přes mnoho vlnových délek dává

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e}{m} \left\langle E \frac{\partial f_1}{\partial v} \right\rangle, \quad (2.17)$$

přičemž člen $\frac{\partial f_0}{\partial v}$ vymizí, protože všechny příspěvky k $E(x, t)$ harmonicky oscilují. Na pravé straně rovnice stojí součin dvou perturbací, tedy výraz druhého řádu, což ukazuje, že funkce f_0 se v čase vyvíjí velmi pomalu a lze ji vůči f_k považovat za konstantní.

Dále za použití předpokladů (2.16) ve Vlasovově rovnici a po rozkladu komplexní frekvence na reálnou a imaginární část ($\omega_k \rightarrow \omega_k + i\gamma_k$) dostaneme rovnici přímo určující závislost změny rychlostního pozadí v čase na spektru vln přítomných v plazmatu:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e^2}{2m^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum_k |E_k|^2 \frac{\gamma_k}{(\omega_k - kv)^2 + \gamma_k^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right). \quad (2.18)$$

Koeficienty γ_k jsou Landauovy koeficienty útlumu vypočtené dle klasické lineární teorie (2.14).

V mnoha případech (včetně obr. 2.1) jsou jednotlivé diskrétní hodnoty k u sebe natolik blízko, že lze spektrum považovat za spojitě. Uvažujeme-li hustotu energie elektrického pole středovanou v prostoru (je součtem hustot pro jednotlivé módy) a jako $\varepsilon(k)$ označíme hustotu této hustoty v k -prostoru (tzn. převedeme součet přes k na integrál přes dk), pak ještě za dalšího předpokladu, že jsou Landauovy koeficienty γ_k velmi malé, tj.

$$\frac{\gamma_k}{(\omega_k - kv) + \gamma_k^2} \approx \pi \delta(\omega_k - kv), \quad (2.19)$$

můžeme přepsat rovnici (2.18) do konečného tvaru

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 m^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(k) \delta(\omega_k - kv) \right) \frac{\partial f_0}{\partial v} \right]. \quad (2.20)$$

Tato kvazilineární rovnice evoluce f_0 má tvar difuzní rovnice v rychlostním prostoru :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left(D(v) \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \quad (2.21)$$

$$D(v) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 m^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(k) \delta(\omega_k - kv) dk = \frac{2\pi e^2}{\epsilon_0 m^2 v} \varepsilon(\omega/v) \quad (2.22)$$

Zde platí poslední rovnost za předpokladu, že frekvence všech vln v plazmatu ω_k jsou v prvním řádu přibližně stejné ($\omega_k \approx \omega \approx \omega_p$). $D(v)$ se nazývá kvazilineární difuzní koeficient (často se značí D_{QL}) a je vidět, že je nenulový pouze pro rychlosti v jimž odpovídají fázové rychlosti $\frac{\omega}{k}$ přítomných vln.

Pro selfkonzistentní řešení kvazilineárního problému je ještě třeba znát evoluční rovnici spektrální hustoty energie. Protože však $\varepsilon(k) \sim |E_k|^2$ a evoluce E_k je známa z (2.16), tak

$$\frac{d\varepsilon(k)}{dt} = 2\gamma_k\varepsilon(k). \quad (2.23)$$

I v případě, že nelze spektrum k považovat za spojitý, zůstávají rovnice (2.22) a (2.23) ve stejném tvaru, pouze je v nich formálně nahrazen integrál sumou :

$$\frac{2}{\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(k) dk \rightarrow \frac{1}{2} \sum_k |E_k|^2. \quad (2.24)$$

Vraťme se nyní ještě na chvíli k difuznímu koeficientu. Kromě výrazu (2.22) lze totiž zavést ještě jinou jeho definici, která je výhodnější pro popis ohřevu plazmatu. Předpokládejme vysokoteplotní plazma, tedy předpokládejme, že frekvence interakce částic s vlnou je mnohem častější než srážková frekvence částic navzájem. Na časové škále delší než je autokorelační čas τ_{ac} lze pak vývoj rozdělovací funkce popsat Fokker-Planckovou rovnicí (2.5). Částici totiž budeme uvažovat jako volnou a její interakci s vlnou zahrneme pouze do srážkového členu. Evoluční rovnice potom bude tvaru [21]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial(Ff)}{\partial v} + \frac{\partial^2(Df)}{\partial v^2}, \quad (2.25)$$

kde D a F jsou difuzní a třecí člen. V kvazilineárním přiblížení lze předpokládat, že D a F spolu souvisí vztahem

$$F = \frac{\partial D}{\partial v}. \quad (2.26)$$

V takovém případě totiž dostáváme z rovnice (2.25) kvazilineární difuzní rovnici (2.21). Na základě této úvahy lze pak formulovat D_{QL} pomocí (2.7) [21]:

$$D_{QL} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d \langle \delta v^2 \rangle}{dt} \frac{1}{2}, \quad (2.27)$$

$$\delta v = \int_0^t a(\tau) d\tau. \quad (2.28)$$

Taková definice D_{QL} je užitečná v případech, kdy známe spíše pohybové rovnice částic než spektrální hustotu energie vln. Lze ji také velmi dobře zobecnit na procesy rozptylového typu (např. nelineární případ ohřevu silným polem). Můžeme totiž

po vzoru (2.27) definovat [21]

$$F = \frac{\langle \Delta v \rangle}{t_0}; \quad D = \frac{\langle \Delta v^2 \rangle}{2t_0}. \quad (2.29)$$

t_0 je čas za nějž částice změní rychlost o Δv . V případě ohřevu toroidálního plazmatu má $t_0 = l/v_{in}$ význam driftového času, l je délka jednoho cyklu a v_{in} rychlost vstupu částice do interakční oblasti. Protože v případě silného pole $\tau_{ac} \ll l/v$ dochází k tomu, že ohříváný elektron po jednom průchodu vysokofrekvenční vlnou ztrácí korelaci na fázi, s níž do vlny vstupoval, zatímco korelaci na vstupní rychlosti si uchovává, je výraz $\langle \Delta v \rangle$ středováním přes fáze částic vstupujících do interakční oblasti. Při výpočtech v praxi se většinou nechá velké množství N částic se stejnou počáteční rychlostí v_0 a náhodně rozloženými fázemi projít vlnou právě jednou a výrazy $\Delta v = \langle v - v_0 \rangle$ a $\Delta v^2 = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ jsou pak prostým průměrem přes tyto částice [21]

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \sum v_n, \quad \langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum v_n^2. \quad (2.30)$$

Protože počáteční rychlost všech částic při výpočtu (2.29) je stejná a dostupný rychlostní prostor je většinou mnohem větší než ten, který mohou takové částice obsadit po jednom průletu interakční oblastí, je logické očekávat změnu $D(v)$ v čase. V případě, že je fázový prostor neomezený, může se stát, že částice budou unikat postupně stále dál a dál a hodnota $\langle \Delta v^2 \rangle$ bude v čase divergovat. Pokud však je fázový prostor omezený (např. relativistický prostor rychlostí), lze v chaotických systémech očekávat, že se střední hodnota $\langle \Delta v^2 \rangle$ začne po čase blížit určité střední hodnotě $\bar{\Delta v^2}$ nezávislé na počátečních podmínkách. To je dáno tím, že částice přestává být po mnohonásobném rozptylu korelována se svými počátečními podmínkami.

Typ vývoje $D(v, t) \sim \langle \Delta v^2 \rangle / t$ v čase může vypovídat hodně o procesech, které za difuzí stojí. Ačkoliv by na první pohled bylo přirozené očekávat hodnotu $D(v, t)$ konstantní v čase (tedy lineární rychlost růstu $\langle \Delta v^2 \rangle$), což odpovídá gaussovskému rozdělení pravděpodobnosti rozptylu, jsou dnes známy i případy rychlejšího růstu. Ukazuje se, že tato anomální difuze je silně spjata s generací chaosu v systému, a její problematikou se bude zabývat pozdější kapitola 4.6.

Shrňme nyní základní předpoklady, které vedly k odvození kvazilineárních rovnic [9]. Nejprve jsme předpokládali, že funkce f_k tvoří pouze slabou perturbaci v čase pomalu proměnného pozadí, tedy $f_0 \gg f_k$. Předpokládáme zároveň, že pozadí je nezávislé na prostorové souřadnici, tedy že prostředí je na škále srovnatelné s vlnovou délkou vln prostorově homogenní. Dalším, ne dosud plně vyřčeným, avšak podstatným požadavkem bylo zanedbání přímé interakce módů E_k a E_q , $k \neq q$. To znamená, že žádná z funkcí f_k není ovlivněna možnou rezonanční interakcí s jiným módem. Dále uvažujeme vliv excitovaného spektra pouze na prostorově nezávislou část rozdělovací funkce f_0 , změny E_k, f_k jsou plně popsány lineární Landauovou teorií. A konečně poslední požadavek klademe na fáze módů E_k , které musí být náhodné, aby jimi částice plazmatu nemohly být zachyceny.

Posledním z předpokladů kvazilineární teorie byla náhodnost fází různých módů. Jak bude popsáno v kapitole 4 věnované deterministickému chaosu v neintegrabil-

ních systémech, tento požadavek lze nahradit dostatečně nelineární interakcí vln s částicemi. V takovém případě totiž může dojít k překryvu rezonancí (viz. kap. 4.5) a k následnému míchání fází. Kritérium překryvu pak dle [11] dává odhad přechodu do stochastického režimu

$$A \equiv \frac{4\pi^2 e E_n}{m k_n \delta v_{\varphi n}^2} \geq 1. \quad (2.31)$$

E_n a k_n jsou zde amplituda a vlnové číslo n -tého módu, $\delta v_{\varphi n}$ vzdálenost fázových rychlostí sousedních módů a A je parametr překryvu úměrný poměru šířky stochastických ostrovů vůči jejich vzdálenosti. Hodnota $A \approx 1$ odpovídá přechodu ke globálnímu chaosu ve standardní mapě (o ostrovech viz. kapitola 4.4 a standardní mapa viz. např. [25]).

Za zmínku stojí, že pro spojitě spektrum je $\delta v_{\varphi n} = 0$, a tedy se systém ve stochastickém režimu nachází vždy, což je poměrně silný argument pro platnost kvazilineární teorie. I přesto jsou některé výchozí předpoklady stále dosti omezující a příkladem teorie, jež se snaží některé její rysy zobecnit, je tzv. Dupreeho teorie [16] zabývající se difuzním koeficientem v silném poli. Její úspěšné použití pro výpočet $D(v)$ ve vyšším řádu než dává kvazilineární teorie viz. [15]. Pro přehled různých přístupů k výpočtu difuzního koeficientu pak odkazují na [11]. Vliv nelinearit se projevuje v rozdílu skutečného a kvazilineárního difuzního koeficientu v zásadě dvěma způsoby. Za prvé je skutečný difuzní koeficient silného pole násobkem svého kvazilineárního protějšku a za druhé je nenulový v podstatně širší oblasti rychlostí.

Kapitola 3

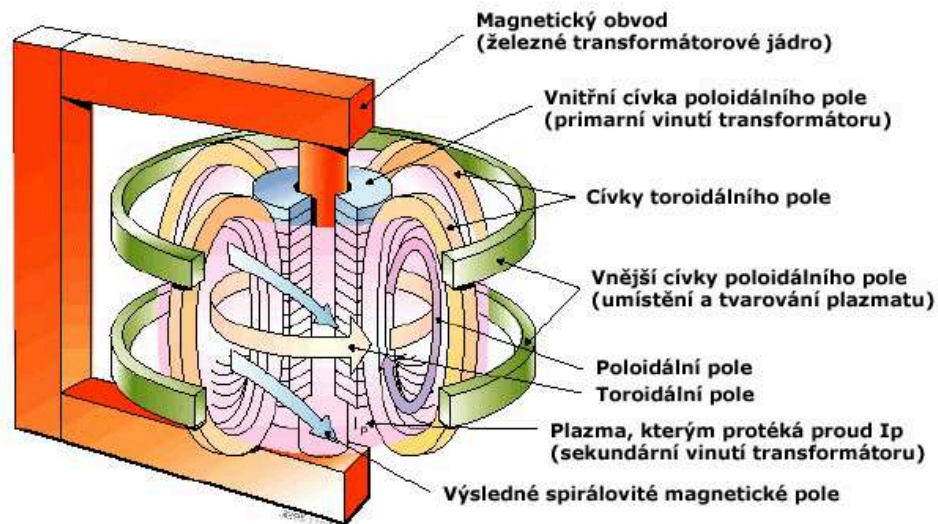
Ohřev plazmatu dolně hybridní vlnou a její šíření v tokamaku

3.1 Základní geometrie a princip funkce tokamaku

Název "tokamak" pochází z ruštiny. Je to zkratka pro "toroidalnaya kamera i magnitnaya katushka", což v překladu znamená "toroidální nádoba s magnetickým vinutím". Už sám název tedy popisuje základní konstrukční schéma tokamaku (viz. obr. 3.1). Jedná se o toroidální vakuovou nádobu, dříve kruhového průřezu, dnes spíše s průřezem tvaru fazole (pro ilustraci obr. 3.2). Ta je obklopena několika systémy cívek určených pro vytvoření odpovídajícího magnetického pole, které pak vhodným způsobem ovlivňuje pohyb plazmatu uvnitř trubice.

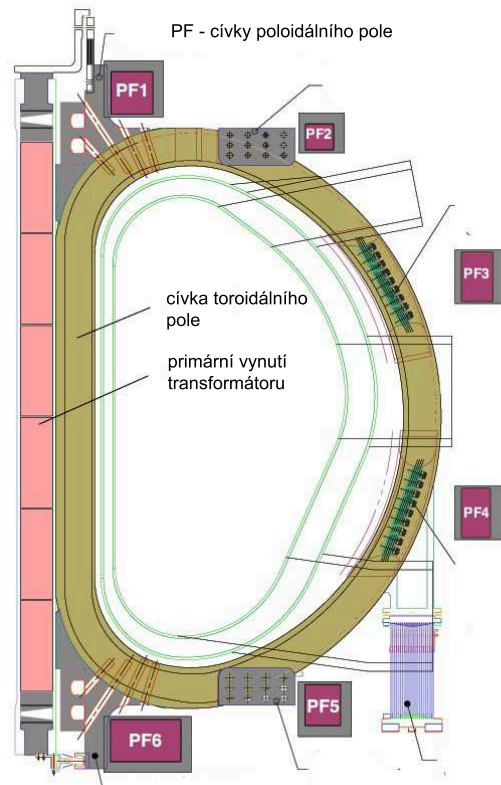
Silné toroidální pole vytvářené cívkami obklopujícími nádobu váže nabitě částice plazmatu a umožňuje jim pohyb pouze podél magnetických siločar. Důsledkem zakřivení těchto siločar (jsou uzavřeny do kruhu) je však odstředivá síla, kvůli níž částice rychle driftují v radiálním směru, což narušuje udržení plazmatu a znemožňuje tak dosažení potřebných parametrů pro začátek fúze. Tento negativní jev může být odstraněn zavedením dalšího magnetického pole v poloidálním směru. Vytvoření poloidálního pole je v tokamaku dosaženo elektromagnetickou indukcí proudu v plazmatu, kdy plazma funguje jako sekundární vynutí transformátoru. Výsledné pole pak má tvar šroubovice a udržuje plazma soustředěné na středu toroidu. To umožňuje dosažení potřebných termionukleárních parametrů a zároveň snižuje zatížení vnějších stěn tím, že zmenšuje počet částic na ně dopadajících. Další magnetické systémy pak kontrolují, resp. ještě dále upravují výsledný tvar magnetického pole.

Při průchodu elektrického proudu plazmatem se zároveň Coloumbovskými srážkami částic uvolňuje i Jouleovo teplo, takže tato metoda je současně používána pro ohřev plazmatu zhruba na teplotu 10^6 K. Při vyšších teplotách však její účinnost klesá a k překonání teplot mezi 10^6 a 10^8 K je nutno použít jiných postupů. Historicky první byly pokusy o použití neutrálních svazků a Alfvénovských vln. Později k nim přistoupilo například užití dolně-hybridní vlny. Následující odstavec obsahuje stručný přehled a popis metod generování proud spolu s metodami používanými pro ohřev plazmatu [8],[18].



Obr. 3.1 : Základní schéma tokamaku.

- *Ohmický ohřev* je základní způsobem ohřevu ve všech tokamacích působením toroidálního proudu generovaného primárním vynutím. Při nízkých teplotách (v řádu keV) je velmi účinný, při vyšších teplotách však klesá odpor i srážková frekvence, a tak i účinnost tohoto způsobu ohřevu.
- *Neutrální svazek* je svazek neutrálních částic, které se po překonání magnetického pole (díky své neutralitě) a vstupu do horkého plazmatu ionizují, a tak vytvářejí kladně nabitý proud iontů, který obíhá tokamakem. Poté se Coulombovskými srážkami 'termalizuje' a zároveň vytváří usměrněný tok elektronů vůči iontům (více viz. [23], [18]). Energie vstřikovaného svazku se dnes pohybuje v řádu 100keV, což je zhruba 10-20 krát více než teplota experimentálního plazmatu.
- *Radiofrekvenční ohřev*. RF vlny jsou během svého šíření plazmatem postupně pohlcovány a předávají tak svoji energii částicím plazmatu.
 - Alfvénovské vlny s frekvencemi v řádu MHz byly navrženy pro urychlení termálních elektronů. Urychlit termální elektrony vyžaduje poměrně málo energie, na druhou stranu je ale při nízkých rychlostech ($v_{\parallel} \rightarrow 0, v_{\perp} \rightarrow v_T$, kde paralelní a kolmá složka značí orientaci vůči šíření vlny a v_T termální rychlost elektronů) poměrně vysoká srážková frekvence $\nu \sim konst$. Alfvénovské vlny by po započtení obou těchto efektů měly mít poměrně vysokou efektivitu, neboť v této limitě se poměr generovaného toroidálního proudu J vůči nutnému příkonu P_d chová jako $J/P_d \sim 1/v_{\parallel}$. Bohužel kvůli konečnému rozměru tokamaku dochází k jevu zachycení elektronů, který mimo magnetickou osu účinnost této metody rapidně snižuje.
 - Iontový cyklotronový ohřev (ICRH) pracuje na frekvencích řádu cyklotronových frekvencí (řádu desítek MHz) a je často používaným způsobem ohřevu. Mimo jiné proto, že v tomto frekvenčním rozsahu jsou dostupné výkonné zdroje a i antény samotné jsou konstrukčně poměrně jednoduché. Tato metoda dosahuje výkonu 10-20 MW.

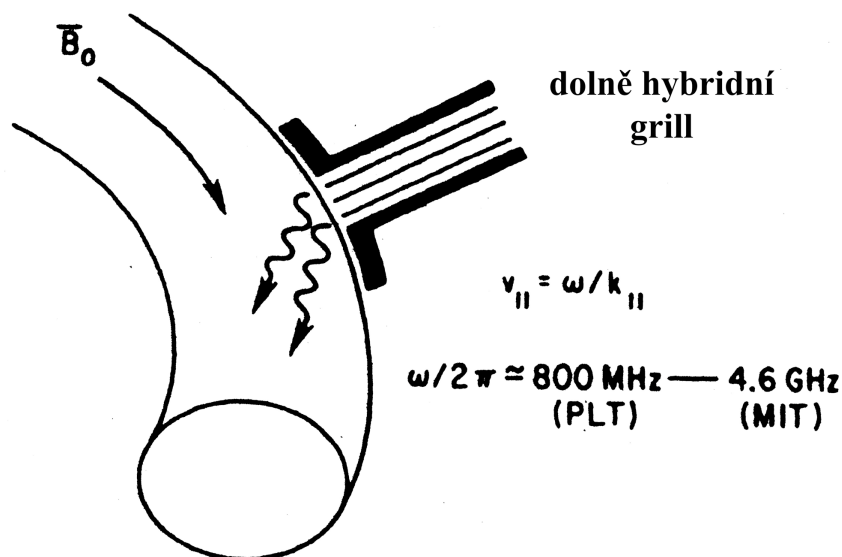


Obr. 3.2 : Řez poloidální rovinou tokamaku ITER. Převzato z propagačních materiálů projektu ITER.

- Dolně hybridní vlny (Lower hybrid waves - LHW) jsou vlny o frekvencích cca. 1-10 GHz. Na rozdíl od Alfvénovských vln se dolněhybridními vlnami urychlují především supratermální elektrony, což je sice energeticky náročnější, ale na druhou stranu v této oblasti rychlostí ($v_{\parallel} \gg v_T$) rychle klesá srážková frekvence $\nu \sim 1/v_{\parallel}^3$. Odhad účinnosti této metody pak je $J/P_d \sim v_{\parallel}^2$. Oproti vlnám s nízkou fázovou rychlostí u LHW nenastává efekt zachycení, a proto jsou účinným způsobem ohřevu plazmatu a generování toroidálního proudu.
- Elektronový cyklotronový ohřev (ECRH) používá ze zmíněných metod nejvyšší frekvence 30-150 GHz. I přes technologickou náročnost na konstrukci zdrojů, dosahujících dostatečného výkonu na tak vysokých frekvencích, má ECRH řadu výhod, např. možnost použití jednoduché antény, která může být umístěna do oblastí mnohem méně zatěžovaných dopadajícími částicemi.
- *Sebeudržující reakce.* Při termojaderné reakci deuteria s tritiem v tokamaku vznikají ionty helia (alfa- částice) s energií cca. 3,5 MeV, což je zhruba 200x více než teplota plazmatu na pozadí. Rychlostní rozdělení vzniklých částic je izotropní. Zpomalují se a předávají energii plazmatu stejně jako v případě ohřevu neutrálním svazkem, a tak je zajištěno udržení termonukleárních parametrů.

3.2 Šíření dolněhybridní vlny v tokamaku

Jak už bylo řečeno výše, dolně hybridní vlny jsou vlny v plazmatu o frekvencích 1-10 GHz s vlnovými délkami řádu $10^{-2}m$ a jsou úspěšně používány pro jeho ohřev v tokamacích a jako zdroj toroidálního proudu. Jsou generovány soustavou vlnodů se vzájemně posunutou fází (viz. obr 3.3 a kap. 6), nejprve jako vakuová elektromagnetická vlna, která po průchodu úzkou oblastí při okraji trubice dá vzniknout vlně v plazmatu.



Obr. 3.3 : Aparatura pro vytvoření dolně hybridní vlny v tokamaku - dolně hybridní grill. Převzato z [18].

LHW se plazmatem pohybuje v poměrně ostře ohraničeném útvaru (LH cone), jehož šíření je (v případě rozměrů tokamaku mnohem větších než vlnová délka vlny) popsáno eikonálovou aproximací [6], [5], [36]

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{X}}{d\tau} &= \frac{\partial D}{\partial \vec{K}} \\
 \frac{d\vec{K}}{d\tau} &= -\frac{\partial D}{\partial \vec{X}} \\
 \frac{dt}{d\tau} &= -\frac{\partial D}{\partial \omega},
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde $\vec{X} = (r, \theta, \varphi)$, přičemž r a θ jsou souřadnice poloidálního průřezu a φ toroidální úhel; $\vec{K} = (k_r, m, n_\varphi)$, kde k_r je radiální část vlnového čísla a $m = rk_\theta, n = Rk_\varphi$. R_0 je hlavní a r_0 vedlejší poloměr toroidální trubice a $R = R_0 + r \cos \theta$. Frekvenci vlny značíme ω a $D(\vec{k}, \vec{r}, \omega)$ je disperzní relace viz. [40]

$$D = k_{\perp}^2 - k_{\parallel}^2 \frac{\omega_{pe}}{\omega^2} \frac{1}{S} \left[1 - \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 c^2} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + S \right) + \frac{\omega_{pe}^2 k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} \frac{\alpha_T}{S} \right], \quad (3.2)$$

kde

$$S = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \quad (3.3)$$

$$\alpha_T = 3 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{T_e}{m_e c^2} \left[\frac{\omega^4}{4\omega_{ce}^4} + \frac{T_i}{T_e} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^2 \right]$$

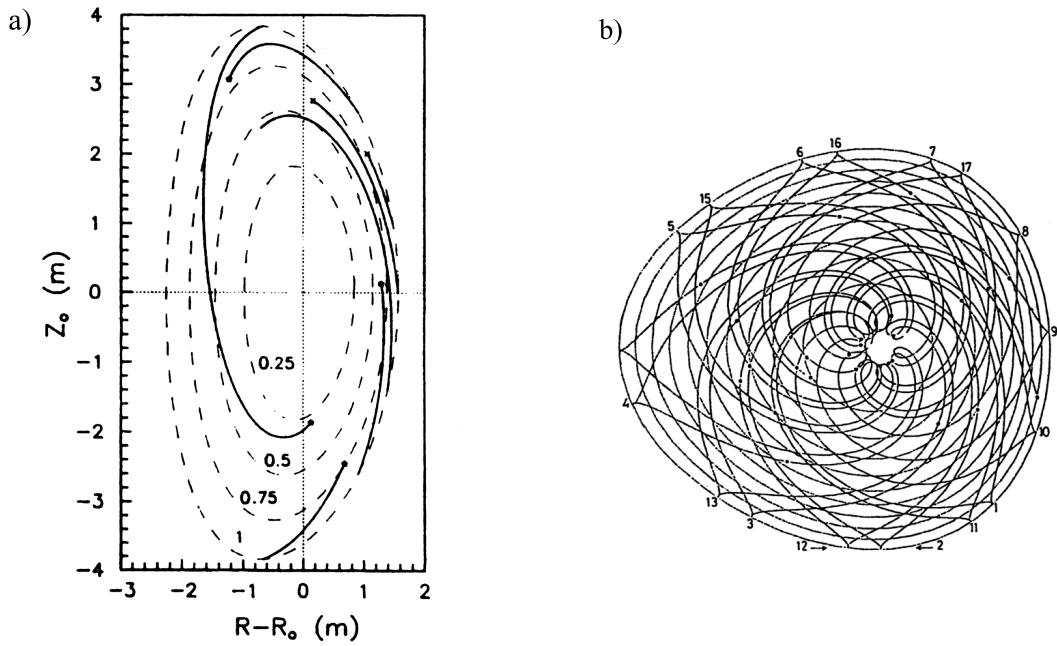
a index e , resp. i vždy vztahuje veličinu buď k (e)lektronům nebo (i)ontům. m , T , ω_p a ω_c pak jsou hmotnost, teplota, plazmová frekvence a cyklotronová frekvence příslušných částic. c značí rychlost světla. Dále pak

$$k_{\perp}^2 = k^2 - k_{\parallel}^2 = k_r^2 + \left(\frac{m}{r} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 - k_{\parallel}^2, \quad (3.4)$$

$$k_{\parallel} = \frac{\vec{k} \vec{B}}{|B|} = \frac{1}{|B|} \left[k_r B_r + \frac{m}{r} B_{\theta} + \frac{n}{R} B_{\varphi} \right].$$

Simulace šíření paprsku dolního hybridu reaktorem dle těchto rovnic pro parametry ITERu, založená na Solovevově ekvilibriu, je zobrazena na obr. 3.4a. Trajektorie paprsku je ovlivněna výraznou nehomogenitou plazmatu v tokamaku a pro plazma s dostatečně vysokou teplotou dochází k absorpci vlny. To je na obr. 3.4a označeno ukončením trajektorie. Pokud se tato absorpce zanedbá, vykonává paprsek v toroidu poměrně komplikovaný pohyb (obr. 3.4b).

Zajímavým poznatkem je, že rovnice (3.1) mají formálně stejný tvar jako Hamiltonovy kanonické rovnice. Jak bude ukázáno v kapitole 4, dynamika popsaná Hamiltonovými rovnicemi může být pro určitý režim parametrů chaotická. Vzhledem k formální podobnosti obou soustav by se tedy dalo předpokládat, že i při šíření paprsku dolně hybridní vlny může ke stochastizaci dojít, a tento chaotický režim byl opravdu numericky simulován [4].



Obr. 3.4 : a) Průchod LHW horkým plazmatem podle eikonálových rovnic pro geometrii ITERu pro různá místa vpuštění; $f = 4.5GHz$, $N_{\parallel} = 1.725$. Čárkované křivky představují magnetické plochy. Převzato z [36]. b) Mnohoperiodický charakter dráhy paprsku LHW v nízkoteplotním plazmatu dle [19]. Čísla vyjadřují pořadí odrazů vlny od kovové stěny tokamaku.

3.3 Interakce dolního hybridu s plazmatem

Interakce LH vlny s plazmatem se v tokamacích používá především jako metody ohřevu plazmatu. V takovém případě proti sobě působí dva jevy - Coulombovské srážky a kvazilineární difuze. Coulombovské srážky mají tendenci rychlostní rozdělovací funkci maxwelizovat, působení vlny naopak vytváří v oblasti fázových rychlostí svých složek jakési 'plató'. Je důležité si uvědomit, že během interakce částice nezískávají energii na úkor vlny kontinuálně. Právě naopak. To jestli získá částice energii z vlny nebo vlna získá energii zpomalením částice, závisí na fázi, ve které částice do vlny vstupuje. V průběhu času tak elektron může opakovaně energii získávat i ztrácet. Taková difuze v rychlostním prostoru pak má charakter náhodného procesu, typicky random-walk (viz. kap. 4.6) [8].

Elektrony v trubici tokamaku vykonávají cyklotronovou rotaci o frekvenci ω_{ce} a pohybují se při tom po magnetických plochách, které jsou v určitém místě šikmo prořaty LH paprskem. K výměně energie s vlnou dojde v prvním přiblížení pouze tehdy, je-li splněna rezonanční podmínka

$$\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_{ce} = 0. \quad (3.5)$$

To je dáno tím, že elektrické pole působící na elektron v poli vlny lze zapsat následujícím způsobem [8]:

$$E = E_0 \sum_n J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{ce}}\right) \exp(it(n\omega_{ce} + k_\parallel v_\parallel - \omega)). \quad (3.6)$$

Podmínka (3.5) pak je jednoduše podmínkou konstantnosti (3.6). V takovém případě totiž na částici působí konstantní síla, která ji kontinuálně urychluje.

Ve stacionárním případě je výsledné rozdělení dáno rovnováhou Coulombovských srážek a působení vlny. Jejich vzájemné působení lze popsat aproximací Fokker-Planckovy rovnice (2.5). Zde bude dle [9] uveden výsledek Leonard-Bernsteinova modelu doplněný o kvazilineární difuzní člen :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left[\nu \left(v f + \frac{KT_e}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial v} D_{QL} \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (3.7)$$

kde ν je opět srážková frekvence, K Boltzmannova konstanta a D_{QL} značí kvazilineární difuzní koeficient.

Označíme-li $P(k_\parallel)$ hustotu výkonu rovnoběžné složky vlny a odhadneme-li hustotu energie $W_k \approx P(k_\parallel)/v_{gr}$, kde v_{gr} je grupová rychlost, lze D_{QL} vyjádřit vztahem (např. [9])

$$D_{QL} = \frac{\pi e^2 \omega^2}{\epsilon_0 m_e^2 \omega_p^2 |v_\parallel|} W_k|_{k_\parallel v_\parallel = \omega}. \quad (3.8)$$

Stacionární řešení rovnice (3.7) pak lze hledat ve tvaru [17]

$$f(v) = konst. \exp \left[- \int \frac{mv}{KT_{eff}(v)} \right], \quad (3.9)$$

$$KT_{eff} \equiv KT_e + \frac{mD_{QL}(v)}{\nu(v)}. \quad (3.10)$$

Ze znalosti difuzního koeficientu a rozdělovací funkce můžeme odhadnout energii P_d absorbovanou plazmatem, či proudovou hustotu vyvolanou šířením vlny (v případě nesymetrického šíření [9]) :

$$P_d = \frac{1}{2} \int m v^2 \frac{\partial}{\partial v} D_{QL} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (3.11)$$

$$i = -e \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) v dv. \quad (3.12)$$

Absorbci LH vlny lze vyvolat proudy velmi velkých amplitud. Při příkonu v řádu $\approx 100MW$ lze dosáhnout proudů až $\approx 10MA$.

Elektrony ale bohužel nejsou jediné částice, které s dolním hybridem mohou interagovat. Při termonukleární reakci vznikají alfa-částice a i pro ně může být splněna rezonanční podmínka

$$\omega - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_{c\alpha} = 0, \quad (3.13)$$

kde $\omega_{c\alpha}$ je cyklotronová frekvence alfa-částic. To je poměrně velký problém, neboť interakce vlny s alfa-částicemi značně snižuje účinnost ohřevu plazmatu touto metodou. Z prací na toto téma uvedu např. [36]. Celý proces lze opět popsat variantou Fokker-Planckovy rovnice pro rozdělení alfa-částic

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{\beta \neq \alpha} L_{\alpha\beta}[f_{\alpha}] + L_{QL}[f_{\alpha}] + p_{\alpha}\delta(v - v_{\alpha}) - \nu f_{\alpha}, \quad (3.14)$$

kde $L_{\alpha\beta}$ je srážkový operátor alfa-částic s ostatními přítomnými částicemi, L_{QL} kvazi-lineární operátor (viz. [36]), $p_{\alpha}\delta(v - v_{\alpha})$ reprezentuje termonukleární generování alfa-částic a poslední člen modeluje jejich únik.

Kapitola 4

Chaos v hamiltonovských systémech

Ačkoliv to na přelomu 19. a 20. století ještě nebylo patrné, otevírá se v této době v pracích Poincarého, Gibbse či Boltzmannova nová a významná oblast na pomezí fyziky, matematiky a částečně i filosofie - deterministický chaos. Poincaré byl jedním z prvních, který poukázal na nesmírně komplikované chování trajektorií některých systémů, popsateelných soustavou autonomních diferenciálních rovnic. Z jeho úvah je zřejmě nejznámější formulace "problému tří těles". O něco později dávají Gibbs a Boltzman základ pojmu zdánlivě nesouvisejícímu - ergodické teorii. Ačkoliv ve své době obsahovala fatální rozpor mezi regularitou výchozích podmínek a jejich následným evolučním chováním, byl to právě tento problém, který vedl k jejímu propojení s úvahami o chaosu, který vlastně leží v samém jejím srdci. Hlubší rozbor tohoto tématu je možno nalézt v [24].

Celý fenomén chaosu zůstal poněkud opomíjen až do poloviny 20. století, kdy se znovu dostává do centra zájmu fyziků a matematiků. V této době byl formulován slavný KAM teorém, vyšetřující stabilitu mnohoperiodických soustav, či probíhalo intenzivní studium homoklinických soustav.

V následujících kapitolách bude postupně stručně probrán jak vznik chaosu v hamiltonovských, tak ergodických systémech.

4.1 Integrabilní vs. neintegrabilní systémy

Během 19. století se povedlo přeformulovat klasickou newtonovskou mechaniku do pojmů variačního počtu. Výsledkem pak byly Hamiltonovy kanonické rovnice, umožňující poměrně jednoduchým způsobem (je to soustava diferenciálních rovnic 1. řádu) popsat vývoj systému ve fázovém prostoru (viz. např [22]) a jednoduše přecházet mezi dvěma různými systémy kanonických proměnných pomocí tzv. vytvářející funkce. Jednou z nejdůležitějších rovnic tohoto formalismu je rovnice Hamilton-Jacobiho, jež má pro systém s N stupni volnosti a s hamiltoniánem $H(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ tvar

$$H\left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (4.1)$$

q_i jsou zde zobecněné souřadnice, p_i k nim kanonicky sdružené zobecněné hybnosti a $S(q_j, Q_j, t)$ je vytvářející funkce, tzv. akční funkcionál, pro který platí

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i; \quad \frac{\partial S}{\partial Q_i} = P_i \quad (4.2)$$

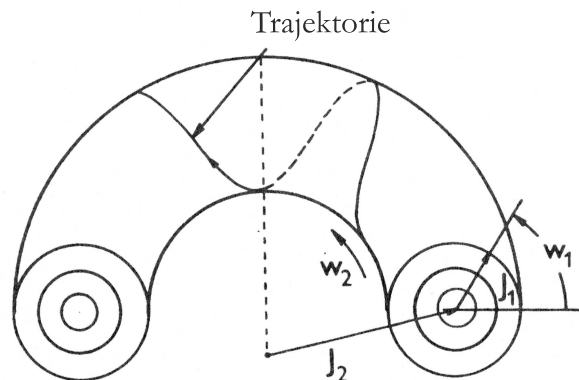
a nové souřadnice a hybnosti Q_i, P_i jsou voleny tak, že jsou v čase konstantní.

Pro řadu úloh je vhodné přejít k souřadnicím akce-úhel, které jsou v případě na čase nezávislého separabilního hamiltoniánu definovány

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial S_i(q_i, Q_i)}{\partial q_i}, \quad (4.3)$$

$$w_i = \frac{\partial S_i}{\partial J_i}, \quad (4.4)$$

kde S_i je vytvářející funkce daná Hamilton-Jacobihovými rovnicemi (4.1). Jejich fyzikální význam demonstruje obr. 4.1. Vícerozměrný periodický systém si lze totiž ve správných souřadnicích představit jako N -rozměrný toroid, po jehož plášti obíhá trajektorie systému. Akce definovaná vztahem (4.3) v takovém případě udává i -tý poloměr toroidu a úhel dle (4.4) pozici na něm. Protože J_i jsou zároveň integrály pohybu, nazývá se tento útvar invariantní torus.



Obr. 4.1 : Invariantní torus. Převzato z [33].

Je-li nový hamiltonián po přechodu k souřadnicím akce-úhel funkcí závislou pouze na J_i , říkáme že je cyklický. Integrabilní systém je pak takový, pro který lze nalézt vytvářející funkci, která převede jeho hamiltonián do cyklického tvaru

$$H(q_i, p_i) = H'(J_i). \quad (4.5)$$

V případě integrabilního hamiltoniánu existuje stejný počet integrálů pohybu jako stupňů volnosti a jsou jimi právě nové souřadnice Q_i (respektive J_i). V opačném

případě se systém nazývá neintegrabilní a v určitém režimu svých parametrů může vykazovat chaotické chování.

Poměrně často se studují ještě tzv. slabě neintegrabilní systémy s hamiltoniánem ve formě

$$H = H_0(J_i) + \varepsilon H_1(J_i, w_i), \quad (4.6)$$

kde člen εH_1 je pouze malou necyklickou perturbací integrabilního H_0 . Stojí za zmínku, že všechny systémy s jedním stupněm volnosti jsou integrabilní, obecný test na integrabilitu však podle [33] neexistuje.

4.2 Ergodické systémy a systémy s mísením

Ergodičnost funkce $f(x)$ se pro případ kontinuálního vývoje obvykle definuje následujícím způsobem [25]:

Nechť x je bod ve fázovém prostoru a $T(x)$ transformace reprezentující dynamický vývoj systému. Jestliže platí, že

- systém je ve fázovém prostoru ohraničený,
- transformace $T(x)$ zachovává míru (tj. hustota ve fázovém prostoru zůstává při transformacích invariantní),
- systém je metricky tranzitivní (nerozložitelný na podsystemy),

pak řekneme, že dynamický systém je ergodický, když pro libovolnou funkci f platí

$$\frac{1}{V} \int_V f(x) dV = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f(T(x)) dt. \quad (4.7)$$

Ergodické systémy tedy podle této rovnice zaručují ekvivalenci středování v prostoru a v čase. Problémem ovšem zůstává, jak ergodické systémy identifikovat. Hlavní překážkou totiž je podmínka na metrickou nerozložitelnost systému na podsystemy. O té lze však rozhodnout až ze znalosti dynamiky a ta může být známa pouze pro systémy integrabilní. Proto lze ergodičnost definovat pouze u těch nejjednodušších systémů [31].

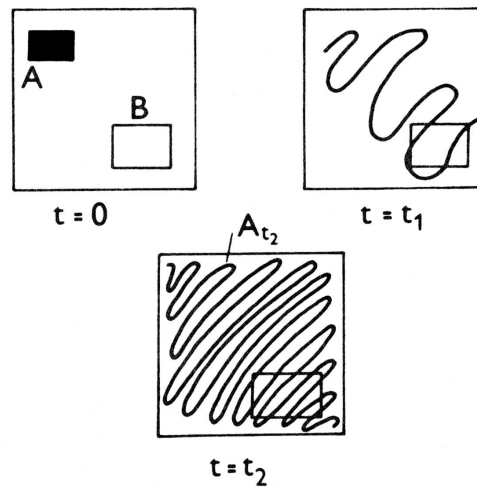
Jedním z důsledků ergodičnosti je Poincarého rekurentní teorém. Zvolíme-li ve fázovém prostoru ergodického systému malou podoblast $\Delta\sigma$ a v ní bod, z něhož bude vycházet fázová trajektorie určená dynamikou soustavy, potom podle rekurentního teorému tato trajektorie po určité době znovu protne oblast $\Delta\sigma$.

Obecný ergodický systém nemusí být příliš vhodný pro popis fyzikálních dějů. Příkladem uváděným např. v [25], je způsob rastrování obrazovky. Ten splňuje podmínky ergodičnosti, avšak k chování reálných systémů má zřejmě daleko. Proto je k podmínkám ergodičnosti dodáván ještě jeden požadavek a je tak definována podtřída

systemů s mísením. Mějme dvě podmnožiny A a B množiny C a podrobme A transformací T . Necht' μ je míra na C a $\mu(C) = 1$. T je transformací s mísením, pokud je ergodická a zároveň platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^n(A) \cup B) = \mu(A)\mu(B). \quad (4.8)$$

Jinými slovy požadujeme, aby se oblast podrobená transformaci rovnoměrně rozprostřela po celé množině C . To názorně demonstruje obr. 4.2. Oblast A se začne roztahovat do tenkého vlákna a zároveň se kvůli nutnosti zachování míry začne zužovat a s tím je spojena nutná nestabilita systému. V ergodických systémech je naproti tomu zaručeno pouze to, že A určitě někdy projde libovolnou oblastí B .



Obr. 4.2 : Vývoj systému s mísením dle [3].

Typickými příklady transformací s mísením jsou dvě geometrické transformace - pekařská a Arnoldova. Obě jsou popsány např. v [25]. Zajímavým je příklad uvedený v [25] převzatý z [14], kde byl digitální obrázek podroben Arnoldově transformaci. Velmi ojedinělý a zřejmě první svého druhu je v tom, že po zdánlivém zničení jakékoliv informace transformací došlo zhruba po 240 iteracích k téměř přesné rekonstrukci původního obrazu. Jde o velmi názornou demonstraci Poincarého rekurence.

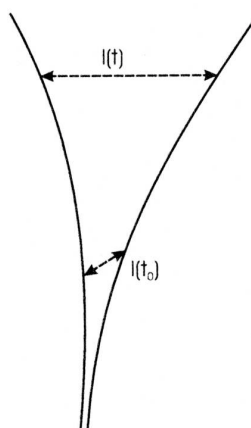
4.3 Nestabilita, Ljapunovy exponenty a Kolmogorovova entropie

Jak už bylo v kapitole 4.2 zmíněno, mezi vlastnosti systémů s mísením patří také nestabilita jejich dynamiky. A právě nestabilita je klíčovou vlastností pro vznik chaosu i v plně deterministických systémech. Podle obr. 4.2 si lze velmi dobře představit, že pro čas $t \gg \tau_0$, kde τ_0 bude ještě přesněji definován a odpovídá času, kdy se oblast A rozprostře přes celou množinou C , tak tedy pro takto dostatečně velké časy se jeví závislost stavu systému na počátečních podmínkách jako náhodná. Nestabilitou

systemu máme na mysli nestabilitu vůči rozdílným počátečním podmínkám. Jejich jakkoliv malá změna vede po čase k separaci trajektorií (obr. 4.3). Rychlost této separace pak vyjadřuje Ljapunův exponent, který je v případě jedné dimenze definován pro transformační funkci $x_{n+1} = f(x_n)$ předpisem

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx_0} \right|. \quad (4.9)$$

Ljapunův exponent závisí na počátečních podmínkách a je to tedy lokální veličina. Průkopnickou myšlenkou Kolmogorovova bylo zavést globální charakteristiku celého systému, tzv. Kolmogorovovu entropii. Ta charakterizuje dynamiku systému ne pomocí rozdělovací funkce, tak jako klasická Boltzmannova entropie, nýbrž pomocí trajektorií ve fázovém prostoru, daných pohybovými rovnicemi.



Obr. 4.3 : Znázornění exponenciální nestability (z [37]).

Nechť jsou dvě blízké trajektorie systému exponenciálně nestabilní. Tedy dle značení na obr. 4.3

$$l(t) \sim l_0 e^{\lambda t}; \quad \lambda > 0. \quad (4.10)$$

Pak je K-entropie definována jako střední hodnota Ljapunova exponentu λ přes celý fázový prostor

$$h = \langle \lambda \rangle. \quad (4.11)$$

K-entropii lze velmi dobře použít pro odhad času τ_0 , po který je možno sledovat stav systému. Nechť systému dostupný objem je normován na 1, objem oblasti počátečních podmínek je ε a dynamika systému je lokálně nestabilní s K-entropií h . Pak charakteristický časový interval, za který se oblast počátečních podmínek rozprostře po celém dostupném prostoru, je dán výrazem

$$\tau_0 = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (4.12)$$

4.4 KAM teorém

KAM teorie je název pro teorii stability slabě neintegrabilních mnohoperiodických hamiltonovských systémů. Teorie byla postupně formulována a dokazována v 50. a 60. letech Kolmogorovem, Arnoldem a Moserem a po svých tvůrcích je také pojmenována. Je to teorie, díky které bylo možno se vypořádat s problémem malých jmenovatelů (bude nastíněn v následujících odstavcích) a umožnila hlubší náhled do procesu generace chaosu. Ačkoliv je s teorií deterministického chaosu nerozlučně spjata, zabývá se právě opačným jevem. Vymezuje totiž podmínky, za nichž bude dynamika slabě neintegrabilních systémů tvaru (4.6) blízká regulární dynamice neporušeného hamiltoniánu. Jinak řečeno - vymezuje podmínky, za nichž chaotický režim jistě nemůže nastat.

Pro nastínění takzvaného 'problému malých jmenovatelů' uvažujme kvaziperiodický systém s N stupni volnosti, s hamiltoniánem vyjádřeným v souřadnicích akce-úhel ve tvaru

$$H(\vec{J}, \vec{w}) = H_0(J) + \varepsilon \sum_m H_{1,m}(\vec{J}) e^{i\vec{m}\vec{w}}, \quad (4.13)$$

kde \vec{m} je libovolný N -dimenzionální vektor. Nyní budeme pomocí perturbační metody hledat vytvářející funkci S takovou, aby po přechodu k novým souřadnicím \vec{J}', \vec{w}' byl nový hamiltonián cyklický. Funkce S pak je v prvním řádu tvaru [33]

$$S(\vec{J}', \vec{w}') = \vec{J}' \vec{w}' + \varepsilon i \sum_{m \neq 0} \frac{H_{1,m}(\vec{J}')}{\vec{m}\vec{\omega}(\vec{J}')} e^{i\vec{m}\vec{w}'}, \quad (4.14)$$

$$\omega(\vec{J}') = \frac{\partial H_0(\vec{J}')}{\partial \vec{J}'}. \quad (4.15)$$

V případě, že

$$\vec{m}\vec{\omega} \equiv m_1\omega_1 + \dots + m_N\omega_N = 0 \quad (4.16)$$

pak zřejmě rovnice (4.14) vede na singularitu a perturbační metoda selhává. V obecném případě sice lze v blízkosti jedné rezonance odstranit pomocí nekonečné série transformací souřadnic všechny ostatní nerezonantní členy, jde však pouze o formální matematickou transformaci, která problém neřeší. Stabilita systému totiž ve skutečnosti závisí na tom, zda je taková řada transformací konvergentní, tedy jestli existuje její limita, v níž je pak pohyb již stabilní.

Vlastní KAM teorém formulující nutné podmínky stability zní takto [2]:

Nechť

- systém (4.6) je slabě neintegrabilní (tj. $\varepsilon \ll 1$),

- frekvence neporušeného hamiltoniánu $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial J_i}$ jsou lineárně nezávislé

$$\sum_i m_i \omega_i \neq 0; \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad (4.17)$$

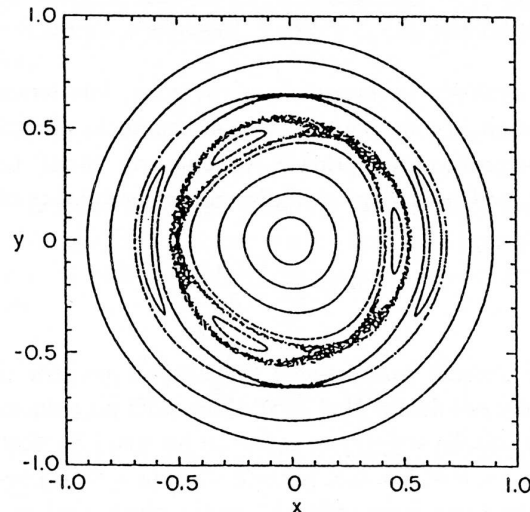
- perturbace H_1 má dostatečný počet derivací
- a nechť jsou počáteční podmínky zvoleny dostatečně daleko od rezonance, tj.

$$|\vec{m}\vec{\omega}| \geq \gamma |\vec{m}|^{-\tau}, \quad (4.18)$$

kde τ závisí na počtu stupňů volnosti a na hladkosti H_1 a koeficient γ na velikosti ϵ a nelineárnosti H_0 .

Potom je invariantní torus daný neperturovanou částí H_0 pouze nepatrně zdeformovaný, tj. (4.6) je stabilní.

Velmi názorně lze dynamiku systému znázornit pomocí Poincarého řezu. Na obr. 4.4 je Poincarého řez magnetickými siločarami v tokamaku vedený jeho poloidální rovinou. Systém je na počátku generace chaosu. Kromě oblastí s regulární dynamikou (průsečíky s rovinou řezu tvoří uzavřené křivky) a stochastických oblastí, kde je chování trajektorií chaotické, jsou zde přítomny i nové topologické útvary, tzv. cantory. Cantorus je fraktál, jenž je tvořen uzavřenou křivkou ohraničující ostrov regularity, která ovšem v sobě obsahuje nekonečný počet mezer. Míra cantoru je nulová. Výskyt cantorů ve fázovém prostoru pak způsobuje existenci podivné (strange) dynamiky, která bude diskutována v kapitole 4.6. Cantory totiž leží na pomezí mezi oblastmi 'stochastického moře', kde je pohyb částic chaotický, a 'ostrovů', kde je pohyb regulární, a s určitou pravděpodobností umožňují částicím přejít z jednoho typu dynamiky do druhého.



Obr. 4.4 : Deformovaný invariantní torus na počátku generace chaosu v systému [26].

4.5 Kritérium překryvu

KAM teorém je větou, která určuje podmínky regulárního chování systému. O tom, za jakých podmínek systém přechází do chaotického režimu, však neříká nic. Ačkoliv existují dnes již přesnější postupy, jednou z intuitivně nejnázornějších metod, jak určit podmínky vzniku chaotického chování, je Chirikovovo kritérium překryvu (podrobně vysvětleno v [13]).

Představme si hamiltonián s potenciálem ve tvaru Fourierova rozvoje s prakticky libovolnými koeficienty a_n :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \sum a_n \cos(k_n x - \omega t). \quad (4.19)$$

Každá z harmonických složek vymezuje v prostoru rychlostí oblast, v níž vyskytující se částice jsou touto složkou (vlnou) zachyceny. Pokud pro určitou rychlost v existuje více vln, jejichž oblasti zachycení se ve v překrývají, částice mezi těmito vlnami může přeskakovat a dynamika se stává stochastickou. Překryv je tedy postačující podmínkou pro vznik chaosu v systému. Je nutno upozornit, že opačné tvrzení obecně neplatí. Z intuitivní představy o překryvu dvou vln lze snadno určit podmínku, kdy dojde k překrytí dvou vln s fázovými rychlostmi $v_{ph,N} = \omega/k_N$ a $v_{ph,M} = \omega/k_M$:

$$v_{ph,M} - v_{ph,N} < v_{sep,M}/2 + v_{sep,N}/2. \quad (4.20)$$

Člen $v_{sep,N}$ udává šířku oblasti rychlostí, v níž jsou částice zachyceny vlnou N . Tu lze snadno odvodit z hamiltoniánu harmonického oscilátoru s amplitudou a_n a vlnovým číslem k_n . Dostáváme pak jednoduchý vztah

$$v_{sep,n} = 4\sqrt{\frac{a_n}{m}}. \quad (4.21)$$

Kritérium překryvu lze použít i pro relativistické zobecnění hamiltoniánu 4.19. U toho lze přechodem do soustavy $P = p$ a $Q = x - t\frac{\omega}{k}$ odstranit závislost na čase a zapsat ho jako

$$H_{rel} = c\sqrt{m^2c^2 + P^2} - P\frac{\omega}{k} + \sum a_n \cos(k_n Q). \quad (4.22)$$

Budeme-li opět zkoumat případ jediného nenulového a_n , energie separatristy v tomto hamiltoniánu je

$$E_{tr} = a_n + mc\sqrt{c^2 - \frac{\omega^2}{k^2}} \quad (4.23)$$

a jí odpovídající mezní rychlosti (tj. rychlosti zachycených částic nejdále od ω/k) jsou

$$v_{+/-,n} = \frac{c(\omega(a_n + E_{tr}) \pm 2ck_n\sqrt{a_n E_{tr}})}{\sqrt{(4a_n E_{tr}(c^2 k_n^2 + \omega^2) \pm 4c\omega k_n\sqrt{a_n E_{tr}}(a_n + E_{tr}) + m^2 c^4 (c^2 k_n^2 - \omega^2))}}. \quad (4.24)$$

Znaménko +, resp. - odpovídá horní, resp. dolní mezní rychlosti zachycení. Když máme takto explicitně vyjádřeny rychlosti zachycení jednotlivých módů, a protože i po přechodu do nové soustavy platilo $p = P$, podmínku překryvu dvou módů M a N již lze snadno vyjádřit

$$v_{+,M} < v_{-,N}, \quad v_{ph,M} < v_{ph,N}. \quad (4.25)$$

4.6 Podivná dynamika a difuze typu random-walk a Lévy-walk

Jedním z důsledků vzniku Newtonovské mechaniky bylo chápání světa jakožto striktně deterministického hodinového stroje. Tento názor dominoval fyzice po velice dlouhou dobu, a tak se pravděpodobnostní přístup rozvíjel poměrně pomalu a z počátku byly zkoumány pouze pravděpodobnostní rozdělení s dobře definovanými momenty. Na přelomu 19. a 20. století dochází navíc s příchodem např. Maxwell-Boltzmanova či Planckova rozdělení k dalšímu myšlenkovému posunu, kdy rozdělení pravděpodobnosti přestává být nutně spojeno s rozdělením chyb měření, ale začíná mít svůj vlastní fyzikální význam a začíná být samo chápáno jako predikce [27]. Velmi známým příkladem je Brownův pohyb. Experimentální měření byla publikována holanďanem Ingenhauszem již v roce 1785, ale teprve v roce 1905 (a to bez znalostí předchozích experimentů) přichází Einstein s teoretickým vysvětlením Brownova pohybu jako náhodného termálního pohybu molekul kapaliny, které pak srážkami s mikroskopickými částicemi vyvolávají jejich náhodný pohyb - difuzi typu random-walk.

Difuze se uplatňuje v mnoha odvětvích fyziky, jedním z mnoha příkladů budiž kvazilineární difuzní rovnice (2.21). Velice dlouho byl typ difuze random-walk pokládán za jediný možný a základní poznatky o něm shrnuje článek [12]. Název random-walk pochází od jeho původní jednorozměrné formulace - problému náhodného chodce. Uvažujme částici (chodce), která podstoupí sérii posunů shodné délky, každý buď dopředu nebo zpět se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Úkolem je najít pravděpodobnost $W(m, N)$, že se částice bude nacházet v bodě m po vykonání N kroků. Zobecníme-li tuto úlohu do tří dimenzí a předpokládáme-li, že bude počet kroků N velký, čas jeho trvání t , $\langle r^2 \rangle$ střední kvadratické posunutí a D difuzní koeficient, pak lze pravděpodobnost výskytu chodce v prostoru mezi \vec{R} a $\vec{R} + d\vec{R}$ v závislosti na čase vyjádřit [12]

$$W(\vec{R})d\vec{R} = \frac{1}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{|\vec{R}|^2}{4Dt}\right) d\vec{R}, \quad (4.26)$$

a v limitě $\Delta t \rightarrow 0$ platí pro W klasická difuzní rovnice

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right), \quad (4.27)$$

$$D = \frac{\langle (r - r_0)^2 \rangle}{6t}. \quad (4.28)$$

Základní vlastností pohybu typu random-walk je fakt, že pozice náhodného chodce po čase t je dána gaussovským rozdělením (4.26) s variancí úměrnou t . To znamená, že rozdělení pravděpodobnosti je pro různé počty kroků (resp. různé časy) soběpodobné (tzn. po přeškálování stejné). Francouzský matematik Paul Lévy si v první polovině 20. století položil poněkud obecnější otázku. Jakého tvaru musí být rozdělení pravděpodobnosti délky jednoho každého kroku $p(x)$, aby byla s pravděpodobností uražené vzdálenosti po N krocích $P_N(X)$ (kde $X = X_1 + \dots + X_N$) soběpodobné?

Nejjednodušší odpovědí je samozřejmě rozdělení Gaussovo. Lévy však určil celou třídu takových řešení, které mají ve fourierovském k -prostoru tvar

$$p_N(k) = \exp(-N|k|^\beta); \quad \beta \in \langle 0, 2 \rangle. \quad (4.29)$$

Tyto pravděpodobnosti se dnes nazývají Lévyho. Pro případ $\beta = 2$ jde o gaussovské rozdělení s konečnou variancí, pro všechny ostatní hodnoty β je variance nekonečná. Právě to může vést na dosti neočekávané chování, nazývané obecně podivná dynamika (strange dynamics). Jednoduchým příkladem je známý St. Petěrburgský paradox (viz. [42]). Právě kvůli divergenci svých momentů byla Lévyho rozdělení dlouhou dobu mimo oblast zájmu fyziků. Později však bylo ukázáno, že divergenci lze předejít zavedením času trvání jednoho skoku [42]. Pak, ačkoliv je průměrná délka skoku nekonečná, každý skok sám o sobě má konečnou délku a růst vzdálenosti v čase bude charakterizován funkcí typu t^μ . Obecně lze tedy uvažovat tři druhy dynamiky [25]. Uvažujme $\langle R^2 \rangle \propto t^\alpha$. Pokud $\alpha = 1$, pak jde o difuzi typu random walk. V případě $\alpha = 2$ probíhá balistický pohyb a $\alpha \in (1, 2)$ je dynamika Lévy walk.

Protože jsou momenty rozdělení pravděpodobnosti při Lévyho difuzi nekonečné, chybí takové dynamice jakákoliv charakteristická škála a ve fázovém prostoru mohou vzniknout soběpodobné fraktální útvary. To je umožněno navíc také tím, že ani difuzní exponent α není v prostoru homogenní. Fraktální topologie fázového prostoru pak také většinou silně ovlivňuje dynamiku systému. Kromě v předchozí kapitole zmíněných cantorů uvedu ještě existenci 'jetů' (viz. [42]). Jsou to svazky částic, které v systému existují po extrémně dlouhou dobu, což je umožněno oblastmi fázového prostoru s velmi malými Ljapunovými exponenty.

Kapitola 5

Rozšíření kvazilineární teorie pro případ nelineární interakce dolně hybridní vlny

Výsledky kvazilineární teorie (viz. kap. 2.3 a 3.3) jsou postaveny na několika základních předpokladech, jejichž splnění není zas až tak samozřejmé. Jedním z nich je požadavek prostorové homogenity, který umožňuje středování rozdělovací funkce přes prostor. To znamená, že se v uvažované oblasti nesmí na škále, jakou je vlnová délka vln, vyskytovat výrazné prostorové struktury. V případě, že se vyskytnou, může totiž nastat situace, kdy budou splněny podmínky kritéria překryvu, v systému dojde k interakci vyšších harmonických a celý problém se stane nelineárním.

Takový případ nastává právě při ohřevu plazmatu pomocí LH vlny. Injektovaná vlna se v prostředí šíří pouze v rámci ostře ohraničené oblasti a vytváří tím kýžovou prostorovou nehomogenitu. Pokud jsou amplitudy vlny malé, překryv sousedních harmonických ještě nenastává a urychlení částic plazmatu lze poměrně přesně popsat kvazilineární teorií. Je-li však energie vlny dostatečně velká, dochází k překryvu rezonancí a nelineárním efektům a předpovědi kvazilineární teorie selhávají. Důsledkem pak je anomální difuze interagujících částic v rychlostním prostoru, nalezená i v případě ryze monochromatické vlny [30]. Oproti kvazilineární teorii, která vymezuje difuzi elektronů pouze do odpovídající šíře dolně hybridního spektra, tak dochází k difuzi v podstatně širší oblasti rychlostí částic.

5.1 Popis modelů a jejich práh stochasticity

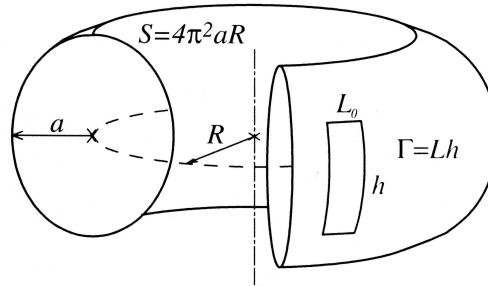
Šíření LHW toroidálním plazmatem se modeluje v rámci eikonálové aproximace, která zanedbává tloušťku paprsku. Obálka LH vlny není však během šíření konstantní. Na počátku, těsně po vstupu do plazmatu, je ještě poměrně ostře ohraničená, během postupu do hloubky plazmatu se ale čím dál tím více "rozplývá". Tomu také odpovídají dva rozdílné přístupy prací [21] a [30] (resp. [37]). Každá z nich předpokládá ad hoc jiný tvar obálky. Ačkoliv jsou již připravovány numerické experimenty, od nichž se očekává určení realistického profilu LH vlny a jeho vývoje podél paprsku, v současné době stále

není úplně jasné, jak takový profil vypadá. V této práci proto k již publikovaným případům přibývá jejich rozšíření. V následujících třech kapitolách jsou jednotlivé profily popsány a je pro ně vyjádřena podmínka překryvu.

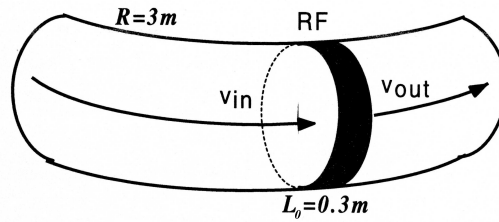
5.1.1 Ostře definovaná obdélníková obálka

Případem vlny těsně po vstupu do plazmatu se zabývá práce [30]. Autor vychází ze zjednodušené geometrie dle obr. 5.1a, kde toroid představuje magnetickou plochu, po níž se částice pohybují a Γ je oblast průniku LH vlny s touto plochou. Oblast Γ je typicky velmi malá oproti celému povrchu S . Předpokládá se, že částice postupují interakční oblastí paralelně s osou z a že během interakce nemění svůj poloidální poloměr oběhu (obr. 5.1b).

a)



b)



Obr. 5.1: Geometrie interakce pro případ obdélníkové obálky LH vlny.
Převzato z [35].

V souladu s obr. 5.1 nyní předpokládejme působení jediné LH vlny o úhlové frekvenci ω a vlnovém čísle k s obdélníkovou obálkou. Tedy

$$\begin{aligned} E(z, t) &= E_0 \cos(k_{\parallel} z - \omega t); & -L_0/2 > z < +L_0/2 \\ E(z, t) &= 0; & \text{jinak.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Fourierovský rozvoj (5.1) je

$$E(z, t) = E_0 \sum_{n=-\frac{kL}{2\pi}}^{\infty} \frac{\sin(n\pi L_0/L)}{\pi n} \cos\left(\left(k_{\parallel} + n\frac{2\pi}{L}\right)z - \omega t\right). \quad (5.2)$$

Po zavedení čísla módu $\mu = 2\pi n/(Lk)$ lze vyjádřit kritérium překryvu (4.20) pro velká L (tj. v řádu rozvoje $O(\frac{1}{L^2})$) podmínkou

$$E_0 \geq \frac{m\pi^2\omega^2\mu}{8k^2Le(\mu+1)^3|\sin(\mu kL_0/2)|} \equiv f_{rect}(\mu). \quad (5.3)$$

Použijeme-li relativistické vztahy (4.24) pro vyjádření kritéria překryvu (4.25), dostáváme po dosazení odpovídajících a_n modifikovaný výraz pro přechod do chaotického režimu:

$$E_0 \geq f_{rect}(\mu) \frac{c^3}{(c(1+\mu) + \frac{\omega}{k})^{3/2}(c(1+\mu) - \frac{\omega}{k})^{3/2}} \equiv f_{rect}(\mu)R(\mu). \quad (5.4)$$

Přechodu do stochastického režimu odpovídají v předchozích vztazích rovnosti. Rovnice $E_0 = f_{rect}(\mu)$, resp. $E_0 = f_{rect}(\mu)R(\mu)$ pak buď nemá žádné řešení (pro malá E_0) a nebo naopak (pro E_0 dostatečně velká) má řešení nekonečně mnoho. Funkce $f_{rect}(\mu)$ v bodech $\mu = 2\pi N/(kl)$, $N \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ diverguje do nekonečna a dělí tak reálnou osu na intervaly typu

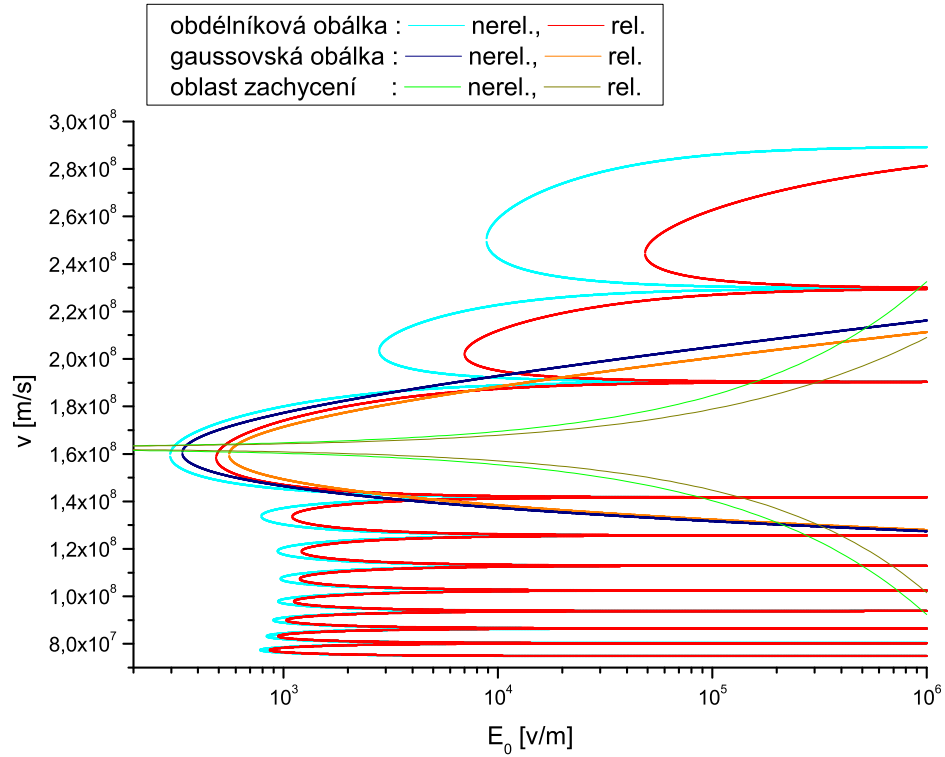
$$\left\langle \frac{2\pi N'}{kl}, \frac{2\pi(N'+1/2)}{kl} \right\rangle.$$

Pokud řešení existují, vyskytují se vždy na takovém intervalu dvě $(\mu_{1,2N'})$ a nerovnost (5.3), resp. (5.4) je splněna pro μ ležící mezi nimi. V prostoru rychlostí tak pro velké intenzity E_0 vzniká množství stochastických pásů, každý z nich o šířce

$$\Delta v_{stochN'} = \frac{\omega}{k} \left(\frac{1}{1+\mu_{1N'}} - \frac{1}{1+\mu_{2N'}} \right). \quad (5.5)$$

Vznik těchto pásů s narůstajícím E_0 demonstruje obr. 5.2. K výpočtu byly použity stejné parametry jako v simulacích kapitoly (5.3), tj. $k = 143.1 \text{ m}^{-1}$, $L = 3 \cdot 2\pi \text{ m}$, $L_0 = 0.3 \text{ m}$. Pásky pro rychlosti menší než $8 \times 10^7 \text{ m/s}$ už jsou příliš úzké a příliš hustě u sebe, a proto pro přehlednost nejsou zobrazeny. V nerelativistické aproximaci existují i pásy pro rychlosti vyšší než c , opět však pro přehlednost nejsou zobrazeny. Pásky v relativistickém výpočtu jsou zřetelně posunuty směrem k vyšším intenzitám. To je dáno tím, že hmotnost částice s rychlostí roste a při stejné změně energie tak klesá změna rychlosti oproti nerelativistické aproximaci. Protože se částice v rámci jednoho stochastického pásu mohou pohybovat naprosto volně, a protože mezery mezi nimi jsou poměrně malé (a s rostoucí amplitudou vlny se zmenšují až do momentu, kdy se dva pásy protnou), důsledkem vzniku pásů a jejich přibližování je nárůst difuzního koeficientu a následná silná difuze částic v rychlostním prostoru. Z grafu je také vidět, že rychlosti vyšší než $2, 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ jsou pro relativistické částice snadno dostupné teprve u intenzit větších než cca. 700 kV/m , kdy se mezera mezi posledními dvěma zobrazenými pásy stává snadno překonatelnou. Spojitost parametru μ v rovnici (5.3) je jistou idealizací. Právě kvůli spojitosti diverguje její pravá strana v sérii bodů do nekonečna a vznikají mezery mezi pásy, které zabraňují jakémukoliv jejich protnutí pro libovolně velkou intenzitu. Ve skutečnosti je však parametr μ diskrétní stejně jako N , z něhož byl odvozen. Pokud tedy nenastane právě případ, kdy

$(NL_0)/(2L) \in \mathbb{Z}$, pak existuje pro dva sousední pásy jisté E_0 , při němž se dotknou, a pro vyšší energie již pro difuzi částic představují pás jen jeden.

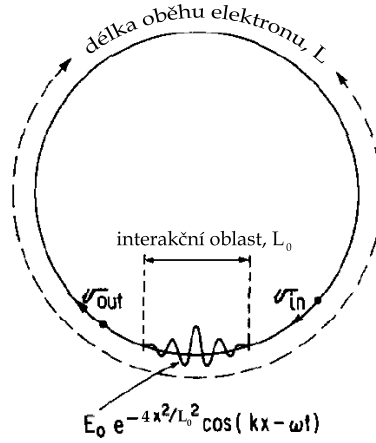


Obr. 5.2: Stochastické pásy v prostoru rychlostí pro relativistické/nerelativistické částice a pro obdélníkovou obálku (červená/azurová) a obálku gaussovského typu (oranžová/modrá). Fázová rychlost vlny je $v_{ph} = 1.62 \times 10^8$ m/s, oblast částic zachycených vlnou bez obálky (dle rovnice (4.21)) je vyznačena tmavě žlutě/zeleně.

5.1.2 Gaussovský profil vlny

Druhý případ [21] se zabývá tvarem vlny hluboko v plazmatu. U takové vlny je předpokládána obálka exponenciálního tvaru. Zjednodušený model celé geometrie interakce v tokamaku ukazuje obr. 5.3. Jedině ve vyznačené oblasti délky L_0 interagují elektrony s vlnou, po zbytek svého oběhu jsou považovány za volné částice. Je-li střed interakce v 0, pak zrychlení v interakční oblasti je

$$a \equiv \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eE_0}{m} e^{-4x^2/L_0^2} \cos(kx - \omega t), \quad (5.6)$$



Obr. 5.3: Geometrie interakce pro případ exponenciální obálky LH vlny [21].

což lze po rozvoji do Fourierovy řady psát jako

$$a = \frac{eE_0L_0\sqrt{\pi}}{2mL} \sum_{n=-\frac{kL}{2\pi}}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2 L_0^2}{4L^2}} \cos\left(\left(k + \frac{2\pi n}{L}\right)x - \omega t\right). \quad (5.7)$$

Zde e a m jsou náboj a hmotnost urychlovaných částic, E_0 intenzita elektrického pole, k a ω vlnové číslo a úhlová frekvence dolně hybridní vlny.

Po zavedení čísla módu $\mu = 2\pi n/(Lk)$, jako v případě obdélníkové obálky, lze vyjádřit kritérium překryvu (4.20) pro velká L podmínkou

$$S \equiv \frac{2eE_0L_0Lk^3}{\omega^2 m \pi^{3/2}} \geq \frac{\exp(\mu^2 k^2 L_0^2/16)}{(1 + \mu)^3} \equiv f(\mu), \quad (5.8)$$

v relativistickém případě, stejně jako u obdélníkové obálky, vynásobenou faktorem $R(\mu)$, tedy $S \geq f(\mu)R(\mu)$.

Minimum funkce $f(\mu)$ se nachází v okolí 1 (závisí na konkrétních hodnotách součinu kL_0), takže práh stochasticity je zhruba

$$S \simeq 1, \quad \text{resp.} \quad S \simeq R(0). \quad (5.9)$$

Rovnice $S = f(\mu)$ má pro $S > 1$ (resp. $S = f(\mu)R(\mu)$ pro $S > R(0)$) dvě řešení $\mu_{1,2}$. V prostoru rychlostí, na rozdíl od obdélníkové obálky, tedy existuje pouze jeden stochastický pás daný pro odpovídající excitační parametr S rovnicí (5.5). Tento pás je spolu s pásy obdélníkové obálky znázorněn na obr. 5.2. Je z něho zřejmé, že u vlny s gaussovskou obálkou je stochastická difuze částic silně omezena pouze na nejbližší okolí fázové rychlosti vlny. V kapitole 5.3.2 bude zřejmé, že tomu také velmi dobře odpovídá tvar difuzních koeficientů v obou případech.

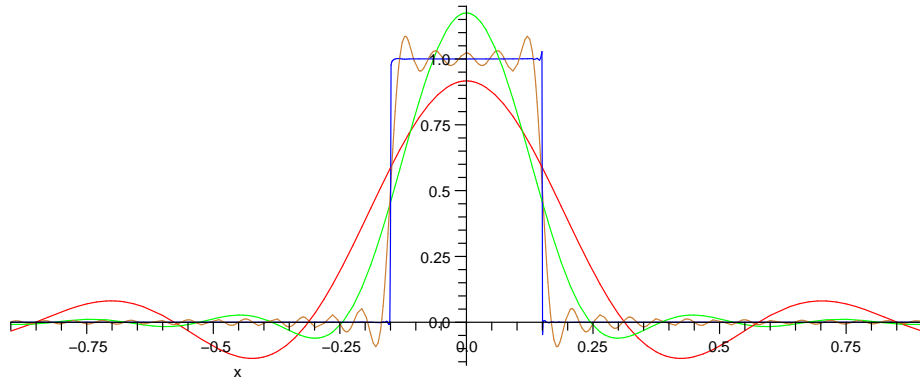
5.1.3 Zobecněný profil

V kapitole o difuzním koeficientu 5.3.2 uvidíme, že na tvaru obálky silně závisí následné chování plazmatu. Je proto otázkou, jaký účinek bude vlna mít na plazma ve fázi, kdy její profil nelze popsat ani jedním z modelů [30] či [21]. V rámci této práce byly zkoumány 2 typy zobecněných obálek.

První přístup vychází z plně obdélníkového tvaru elektrické intenzity vlny, který lze ve Fourierově rozvoji reprezentovat rovnicí (5.2). Protože při průniku vlny hlouběji do plazmatu dochází primárně k absorpci vyšších harmonických, byly z rovnice (5.2) postupně odebrány vyšší frekvence (tzn. snižována horní mez sumace). Byl tedy zkoumán potenciál ve tvaru

$$E(z, t) = E_0 \sum_{n=-\frac{kL}{2\pi}}^M \frac{\sin(n\pi L_0/L)}{n\pi} \cos\left(\left(k_{\parallel} + n\frac{2\pi}{L}\right)z - \omega t\right). \quad (5.10)$$

Tvar takových obálek pro různá M ukazuje obr. 5.4. Pro přehlednost a zdůraznění symetrie jsou všechny posunuty svým středem do 0. Délka interakční oblasti byla zvolena $L = 0.3$ m. Je vidět, že se taková obálka pro malá M sice v jistých oblastech exponenciálně podobá, obsahuje však oproti ní tlumené oscilace (kdežto exponenciála přechází do 0 monotónně). Ačkoliv takový rozdíl může být na první pohled zanedbatelný, v kapitole 5.3.2 bude vidět, že difuzní koeficient, a následně vývoj rozdělovací funkce, je jím ovlivněn značně. I přes to, že takováto posloupnost obálek nekonverguje k exponenciálnímu profilu, má tento přístup svůj význam. Ukazuje totiž, jak moc (resp. málo) závisí interakce plazmatu na vyšších harmonických prostorové struktury LH vlny, tedy na tom, zda je obálka přesně obdélníková.



Obr. 5.4: Obdélníkový profil bez vyšších harmonických dle (5.10). $M = 50$ (červená), $M = 100$ (zelená), $M = 500$ (zlatá), $M = 50000$ (modrá).

První náhled na šířku oblasti, v níž bude difuze probíhat nám dává již graf 5.4. V případě nepřítomnosti vyšších harmonických (tj. $n < M$ u plně obdélníkové obálky) jsou totiž stochastické pásy pro rychlosti vyšší než $v_{min} = \frac{\omega}{k+2\pi M/L}$ shodné s obdélníkovou obálkou, pro rychlosti nižší než v_{min} nejsou žádné.

Druhý postup byl navržen tak, aby vytvářel posloupnost obálek s okrajovými podmínkami takovými, že na počátku se jedná o obdélníkový profil, který se postupně transformuje do profilu gaussovského. Výhodou takové posloupnosti pak je možnost sledovat plynulý přechod parametrů mezi oběma okrajovými podmínkami. Nasnadě je nyní otázka, jakou transformaci vybrat, aby vhodně popisovala rozplývání LHW. Vzhledem k dosavadní neexistenci prací na toto téma byl zvolen nejjednodušší přístup. Profily (5.1) a (5.6) lze totiž vyjádřit jako limity funkce

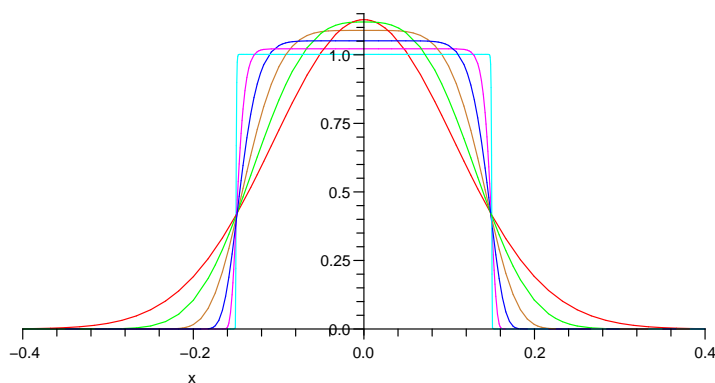
$$E'_N(x) = \frac{N}{\Gamma(1/N)} \exp\left(-\left|\frac{x}{d}\right|^N\right) \quad (5.11)$$

a to konkrétně

$$E_{gauss}(x) = E'_2(x) \quad (5.12)$$

$$E_{rect}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} E'_N(x). \quad (5.13)$$

Symbol Γ zde značí standardní gamma funkci. Normování profilů je zvoleno tak, aby limita $N \rightarrow \infty$ byl obdélník s výškou 1 (tzn. měl plochu L) a integrál přes ostatní křivky tuto plochu zachovával. Protože je x v rovnici (5.11) v absolutní hodnotě, nehrozí divergence funkčních hodnot pro záporná nebo neceločíselná x a parametr N lze chápat jako reálný. Postupný přechod obdélníkového profilu na gaussovský demonstruje obrázek 5.5. Opět je vše centrováno kolem 0 a délka interakční oblasti zůstává stejná jako u obr. 5.1 - $L = 0.3$ m.



Obr. 5.5: Přechod profilů vlny mezi gaussovským a obdélníkovým dle (5.11). $N=2$ (červená), $N=3$ (zelená), $N=5$ (žlutá), $N=10$ (modrá), $N=25$ (fialová), $N=350$ (azurová).

5.2 Pohybové rovnice a integrály pohybu

5.2.1 Obdélníková obálka - nerelativistická aproximace

V pracích [30] a [37] byl studován případ ohřevu elektronů vlnou s ostře definovaným obdélníkovým profilem. Shrnutí geometrie a základních vlastností obsahuje předchozí kapitola 5.1. Velkou výhodou takového modelu je existence integrálů pohybu pro interakční i volnou část. Znamená to, že obě části systému jsou samy o sobě integrabilní, dohromady jako celek však již integrabilní nejsou. Díky tomu lze průchod částice rozdělit na dvě části a výstupní rychlosti a souřadnice v každé z nich počítat s prakticky libovolnou přesností.

Jedním z výsledků [30] a [37] bylo zjištění, že v oblasti fázové rychlosti vlny vzniká v rozdělovací funkci elektronů významná mezera (viz. obr. 5.14). Během snahy o zopakování těchto výpočtů byla však (při spolupráci s autory prací) objevena chyba v jejich numerické části (jejímž důsledkem mezera byla), a proto zde uvádím opravené rovnice a přepočítané některé grafy. Postup odvození byl převzat z [37].

Uvažujme tedy hamiltonián tvaru

$$H_0 = \begin{cases} \frac{p_z^2}{2m} - e\Phi_0 \cos(k_{\parallel}x - \omega t + \Psi_0) & 0 < z < L \\ \frac{p_z^2}{2m} & L < z < 2\pi(R + a). \end{cases} \quad (5.14)$$

Po transformaci souřadnic a hybností

$$P = p_z - m\frac{\omega}{k_{\parallel}}, \quad z = Q + \frac{\omega}{k_{\parallel}}t, \quad (5.15)$$

má H_0 v zobecněných souřadnicích P a Q popisujících interakci elektronu s LH vlnou v souřadném systému vlny tvar

$$H = \begin{cases} \frac{P^2}{2m} - e\Phi_0 \cos(k_{\parallel}Q + \Psi_0) & 0 < z < L \\ \frac{P^2}{2m} & L < z < 2\pi(R + a). \end{cases} \quad (5.16)$$

Rozdělme celý problém (hamiltonián) na dvě naznačené části. V obou je hamiltonián integrabilní, po jejich sloučení však už integrabilní není. Zabývejme se nyní první částí - tj. oblastí interakce částice s vlnou. Parametr zachycení částice κ je

$$\kappa^2 = \frac{H + e\Phi_0}{2e\Phi_0} \quad (5.17)$$

a platí, že částice je zachycena vlnou pokud $\kappa < 1$ a nezachycena v opačném případě. V souladu s [37] budou veličiny odpovídající zachyceným částicím značeny dolním indexem t (trapped) a pro nezachycené částice indexem unt (untrapped).

Přechodem k souřadnicím akce-úhel získáme vyjádření úhlu w

$$w_t = \pm \frac{\pi}{2} \frac{F(\sin(k_{\parallel}Q/2)/\kappa, |\kappa|)}{K(|\kappa|)}, \quad (5.18)$$

$$w_{unt} = \pm \pi \frac{F(\sin(k_{\parallel}Q/2), |1/\kappa|)}{K(|1/\kappa|)} \quad (5.19)$$

a pro periodu T

$$T_t = 2\pi \frac{\partial J_t}{\partial H} = \frac{4}{k_{\parallel}} \sqrt{\frac{m}{e\Phi_0}} K(|\kappa|), \quad (5.20)$$

$$T_{unt} = 2\pi \frac{\partial J_u}{\partial H} = \frac{1}{k_{\parallel}|\kappa|} \sqrt{\frac{m}{e\Phi_0}} K(|1/\kappa|). \quad (5.21)$$

Funkce 'K(k)' a 'F(u,k)' zde i v dalších kapitolách budou značit úplný a neúplný eliptický integrál 1. druhu a 'Pi(u,n,k)', 'E(u,k)' další eliptické integrály (použitá notace (viz. [1])), [,] pak standardně dolní celou část reálného čísla.

Pohyb v souřadnicích akce-úhel po invariantním toru je periodický. Délka poslední nedokončené periody Δz je

$$\Delta z_t = L - \left[\frac{Lk_{\parallel}}{T_t\omega} \right] T_t \frac{\omega}{k_{\parallel}}, \quad (5.22)$$

$$\Delta z_{unt} = L - \left[\frac{Lk_{\parallel}}{T_{unt}\omega \pm 2\pi} \right] \frac{T_{unt}\omega \pm 2\pi}{k_{\parallel}}. \quad (5.23)$$

\pm v rovnici (5.23) značí znaménko výrazu $v - \omega/k$. Z rovnic (5.18) a (5.19) lze jednoduše spočítat rozdíl počátečního a koncového úhlu. A protože pohyb v těchto souřadnicích je rovnoměrný, je čas, za který částice proběhne poslední neúplnou periodu, prostě $T\Delta w$. Po dosazení odpovídajících indexů t nebo unt namísto i tak dostáváme implicitní rovnice pro změnu $\Delta Q = Q_{out} - Q_{in}$ zobecněné souřadnice Q :

$$\frac{\omega}{k_{\parallel}} \frac{T_i}{2\pi} (w_i|_{Q=Q_{out}} - w_i|_{Q=Q_{in}}) + Q_{out} - Q_{in} = \Delta z_i. \quad (5.24)$$

Znalost energie E a výstupní souřadnice Q_m pak stačí k určení výstupní rychlosti v_{out} ze zákona zachování energie:

$$v_{out} = \frac{1}{m} \sqrt{2m(E + e\Phi_0 \cos(k_{\parallel}Q_m))}. \quad (5.25)$$

Výpočet dané úlohy se nyní sestává pouze z postupného řešení rovnice (5.24), dopočtení rychlosti dle (5.25) a triviálního průchodu vlnou oblastí. Rovnice (5.24)

je implicitní rovnicí, k jejímuž řešení jsem použil standardní Newtonovy metody (viz. např. [39]). K výpočtu není třeba žádné numerické integrace, a je proto možné dosáhnout libovolné požadované přesnosti (v rámci možností použitých datových typů). Stejně jako v [30] byla zvolena přesnost 10^{-14} m v Q , což dle (5.15) odpovídá přesnosti 10^{-23} s v čase t . Použité algoritmy pro výpočet eliptických integrálů lze najít v [1] a [10].

5.2.2 Obdélníková obálka - relativistické řešení

Pro určení difuzního koeficientu či podmínek přechodu systému k deterministickému chaosu je nerelativistická aproximace kapitoly 5.2.1 plně dostačující. Pokud však chceme sledovat například dlouhodobý vývoj rozdělovací funkce v čase nebo určit přesnější hodnoty $D(v)$ pro velké rychlosti, je potřeba přejít k plně relativistickému popisu dané úlohy. Přepíšme tedy relativisticky hamiltonián (5.14) pohybu částice s nábojem e a klidovou hmotností m v poli dolně hybridní vlny :

$$H_{0rel} = \begin{cases} c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2} + e\Phi_0 \cos(k_{\parallel}x - \omega t) & 0 < z < L \\ c\sqrt{m^2c^2 + p_z^2} & L < z < 2\pi(R + a). \end{cases} \quad (5.26)$$

Kanonickou transformací lze přejít k novým souřadnicím

$$x = Q + \frac{\omega}{k}t; \quad P = p_z \quad (5.27)$$

a v nich vyjádřit (5.26) v časově nezávislé podobě

$$H_{rel} = \begin{cases} c\sqrt{m^2c^2 + P^2} + e\Phi_0 \cos(k_{\parallel}Q) - P\frac{\omega}{k} & 0 < z < L \\ c\sqrt{m^2c^2 + P^2} - P\frac{\omega}{k} & L < z < 2\pi(R + a). \end{cases} \quad (5.28)$$

Nezávislost H_{rel} na čase nám tak dává první integrál pohybu $E = H_{rel}$. Maximální možná energie zachycené částice ε_{tr} a minimální možná energie ε_{min} jsou

$$\varepsilon_{tr} = \frac{mc}{k} \sqrt{c^2k^2 - \omega^2} + e\Phi_0, \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_{min} = \frac{mc}{k} \sqrt{c^2k^2 - \omega^2} - e\Phi_0, \quad (5.30)$$

takže v případě $E > \varepsilon_{tr}$ jde o nezachycenou částici, opačně je částice zachycena. Pro větší kompaktnost zápisu ještě zavedeme $\varepsilon = (\varepsilon_{min} + \varepsilon_{tr})/2$. Akční funkcionál daný Hamilton-Jacobiho rovnicí (4.1) má tvar

$$S(E, Q) = \int P(E, Q) dQ \quad (5.31)$$

a díky časové nezávislosti platí

$$t \equiv \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{m^2 c^2}{\varepsilon^2} \int \left(\frac{\omega}{k} + \frac{c(E - e\Phi_0 \cos(kQ))}{\sqrt{(E - e\Phi_0 \cos(kQ))^2 - \varepsilon^2}} \right) dQ. \quad (5.32)$$

Řešení takového integrálu je ve formě Legenderyových eliptických integrálů a má opět dvě větve dle podílu E/ε_{tr} - zachycené (t) a nezachycené (unt) částice.

$$t_t = \frac{c^2 m^2 \omega Q}{k \varepsilon^2} \pm \frac{c^3 m^2}{k \sqrt{e\Phi_0}} \frac{\text{sgn}(\sin(kQ))}{\varepsilon^{\frac{5}{2}}} \times \quad (5.33)$$

$$\times \left[\varepsilon F \left(\frac{\sqrt{\cos(kQ) + 1} \sqrt{2e\Phi_0 \varepsilon}}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon - e\Phi_0 \cos(kQ)}}, \frac{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}}{2\sqrt{\varepsilon e\Phi_0}} \right) - (E + \varepsilon_{tr}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{Pi} \left(\frac{\sqrt{\cos(kQ) + 1} \sqrt{2e\Phi_0 \varepsilon}}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon - e\Phi_0 \cos(kQ)}}, -\frac{E - \varepsilon_{min}}{2\varepsilon}, \frac{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}}{2\sqrt{\varepsilon e\Phi_0}} \right) \right],$$

$$t_{unt} = \frac{c^2 m^2 \omega Q}{k \varepsilon^2} \pm \frac{c^3 m^2}{k \varepsilon^2} \frac{\text{sgn}(\sin(kQ))}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}} \times \quad (5.34)$$

$$\times \left[\varepsilon F \left(\frac{\sqrt{\cos(kQ) + 1} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}}{\sqrt{2} \sqrt{E + \varepsilon - e\Phi_0 \cos(kQ)}}, \frac{2\sqrt{\varepsilon e\Phi_0}}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}} \right) - (E + \varepsilon_{tr}) \times \right.$$

$$\left. \times \text{Pi} \left(\frac{\sqrt{\cos(kQ) + 1} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}}{\sqrt{2} \sqrt{E + \varepsilon - e\Phi_0 \cos(kQ)}}, -\frac{2e\Phi_0}{E + \varepsilon_{min}}, \frac{2\sqrt{\varepsilon e\Phi_0}}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}} \right) \right].$$

Znaménko \pm opět značí, zda se částice pohybuje s rychlostí větší nebo menší než je fázová rychlost vlny $v_{ph} = \omega/k$. Předchozí dva výrazy nejsou periodické v Q , jak by tomu bylo v nerelativistickém případě. Přesto hybnosti vyjádřené ze zákona zachování energie

$$P = \frac{m^2 c^2}{k \varepsilon^2} \left(\omega(E - e\Phi_0 \cos(kQ)) \pm ck \sqrt{(E - e\Phi_0 \cos(kQ))^2 - \varepsilon^2} \right) \quad (5.35)$$

v Q periodické jsou, a proto lze výpočet výstupní hybnosti omezit pouze na poslední část, která nevykoná periodu celou. Čas trvání jedné takové periody je pro $E > \varepsilon_{tr}$ jednoduše $T_t = \lim_{Q \rightarrow 0^+} t(E, Q) - \lim_{Q \rightarrow \frac{2\pi}{k}^-} t(E, Q)$, tj. po dosažení :

$$T_{unt} = \frac{4c^3 m^2}{k \varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}} \left[\text{K} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon e\Phi_0}}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}} \right) - \quad (5.36) \right.$$

$$\left. - (E + \varepsilon_{tr}) \text{Pi} \left(1, \frac{-2e\Phi_0}{\sqrt{E + \varepsilon_{min}}}, \frac{2\sqrt{\varepsilon e\Phi_0}}{\sqrt{E - \varepsilon_{min}} \sqrt{E + \varepsilon_{min}}} \right) \right].$$

Pro zachycené částice se takový pohyb skládá ze čtyř částí s různým znaménkem ΔQ a rychlostí jednou $v > v_{ph}$ a podruhé $v < v_{ph}$. Sečteme-li všechny čtyři příspěvky dané limitami (5.33) v bodech obratu

$$Q_{obrat} = 2\pi n \pm \frac{1}{k} \arccos \left(\frac{E - \varepsilon}{e\Phi_0} \right), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.37)$$

dostaneme výraz pro periodu zachycené částice

$$T_t = 4 \frac{c^3 m^2}{k \varepsilon^2} \sqrt{\varepsilon e \Phi_0} \left[\varepsilon K \left(\frac{\sqrt{E + \varepsilon_{min}} \sqrt{E - \varepsilon_{min}}}{2\sqrt{\varepsilon e \Phi_0}} \right) - (E + \varepsilon_{tr}) \text{Pi} \left(1, -\frac{E - \varepsilon_{min}}{2\varepsilon}, \frac{\sqrt{E + \varepsilon_{min}} \sqrt{E - \varepsilon_{min}}}{2\sqrt{\varepsilon e \Phi_0}} \right) \right]. \quad (5.38)$$

Nyní jsme již schopni zkonstruovat plně relativistické ekvivalenty rovnic (5.24). Výrazy pro Δz_t a Δz_{unt} jsou stejné, tj. dány vztahy (5.22) a (5.22), v nichž je T_i nahrazeno svým relativistickým protějškem (5.38) nebo (5.38). Ze vztahu mezi původními a novými souřadnicemi (5.27) snadno určíme požadovanou rovnici :

$$\frac{\omega}{k} (t_i|_{Q=Q_{out}} - t_i|_{Q=Q_{in}}) + Q_{out} - Q_{in} = \Delta z_i. \quad (5.39)$$

Protože platí zákon zachování energie, je vztah výstupní hybností P_{out} a výstupní souřadnicí Q_{out} dán (5.35).

K výpočtu opět není třeba žádné numerické integrace a meze přesnosti byly zvoleny jako v kapitole 5.2.1, tj. 10^{-14} m v Q . Právě možnost výpočtu s libovolnou přesností daná existencí jednoduchých integrálů pohybu v případě obdélníkové obálky je velkou výhodou při zkoumání chaotické dynamiky a byla hlavní motivací pro zavedení takto idealizovaného modelu.

5.2.3 Ostatní obálky

Pro jiný než obdélníkový tvar obálky již není možné nalézt jednoduché konstanty, které by se zachovávaly podél trajektorie. Proto bylo nutno přistoupit na numerickou integraci interakční části. Ačkoliv intenzita elektrického pole pro vlnu danou neobdélníkovou obálkou je nenulová po celé délce oběhu, díky tomu, že všechny profily klesají podél x poměrně rychle k 0, lze opět oběh rozdělit na interakční a volnou část. A to tím způsobem, že částici považujeme za volnou v oblasti, kde intenzita vlny klesá pod hodnotu $10^{-10} E_0$ (v případě oscilující intenzity rozumějme, že během jedné oscilace nevystoupí nad tuto mezní hodnotu).

Pro správné chování částic při vysokých rychlostech byly, na rozdíl od předchozích prací, uvažovány relativistické pohybové rovnice. To umožnilo správné vyhodnocení difuzního koeficientu při rychlostech větších než $0.6c$ a zároveň bylo možno tyto výsledky srovnat jak s nerelativistickými aproximacemi tak s relativistickým obdélníkovým

profilem. Označme $\Phi_{ob}(x)$ obecně jakýkoliv profil obálky (pro výpočet volné částice $\Phi_{ob} = 0$). Pak nám hamiltonovy kanonické rovnice dávají soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Pc}{\sqrt{m^2c^2 + P^2}} - \frac{\omega}{k}, \quad (5.40)$$

$$\frac{dP}{dt} = \Phi_{ob}k \sin(kx - \omega t). \quad (5.41)$$

K jejich řešení byla ve všech případech použita metoda PECEn, tedy metoda prediktor-korektor n-tého stupně (více viz. dodatek A). Jako prediktor byla zvolena Adams-Bashfordova metoda, jako korektor metoda Adams-Moultonova. Počet iterací byl zvolen $n = 3$.

5.3 Výsledky numerických simulací

5.3.1 Parametry

V předchozích kapitolách byly popsány rovnice, s jejichž pomocí je možné sledovat dynamiku částic plazmatu postupně průlet za průletem interakční oblastí. Jejich tvar je poměrně obecný a obsahuje několik volných parametrů. Jednak je možno volbou e a m určit typ částic, jejichž chování sledujeme, a za druhé je nutno určit parametry zařízení (tokamaku), v němž se sledovaný děj bude odehrávat.

Pro ohřev plazmatu LH vlnou jsou podstatné dva typy částic. Především se jedná o samotné elektrony, které vlna ohřívá

$$\begin{aligned} m_e &= 9.1093897 \times 10^{-31} \text{ kg}, \\ e_e &= -1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

Dle některých prací ale kromě elektronů s vlnou poměrně silně interagují i α -částice vznikající během fúze. Jejich působení na proces ohřevu plazmatu je negativní, neboť odebírají vlně energii, a tak ji tlumí. Parametry α -částic použité v simulacích jsou

$$\begin{aligned} m_\alpha &= 6.6446565 \times 10^{-27} \text{ kg}, \\ e_\alpha &= 3.20434466 \times 10^{-19} \text{ C}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Kvůli zachování možnosti porovnání výsledků s prací [37] byly ve většině simulací

použity stejné parametry :

$$\begin{aligned}
N_{\parallel} &= 1.85 \\
f &= 3.7 \text{ GHz} \\
k_{\parallel} &= 143.1 \text{ m}^{-1} \\
L &= 0.3 \text{ m} \\
h &= 0.3 \text{ m} \\
R &= 3 \text{ m},
\end{aligned} \tag{5.44}$$

kde R představuje hlavní poloměr toroidální trubice, L délku interakční oblasti, $f = \omega/(2\pi)$ frekvenci injektované vlny a N_{\parallel} rovnoběžný (se směrem šíření vlny) index lomu prostředí.

Mluvíme-li o poloměrech tokamaku a v souvislosti s tím i o délce oblasti, kde jsou částice považovány za volné, je třeba ještě uvážit dvě věci. Jednak to, že LH vlna protíná pouze velmi malou oblast magnetické plochy, po níž se částice pohybují. Znamená to, že částice typicky vykoná několik oběhů jako volná a teprve poté prolétne interakční oblastí. Za druhé je nutno brát v potaz fakt, že se částice pohybuje po magnetické ploše podél siločar, které tuto plochu "ovíjí". Urazí tak během jednoho oběhu délku větší než je obvod kružnice $2\pi R$. Počet otáček magnetické siločáry v poloidálním směru připadajících na jeden oběh ve směru toroidálním vyjadřuje tzv. bezpečnostní faktor q . Pohyb částice pak lze vyjádřit zavedením periodické délky L' , kterou lze definovat pomocí q tak [21], že $L' = 2\pi q(r)R$ a $q(r) \equiv rB_T/(RB_\rho)$, kde r je radiální pozice v toru a B_T a B_ρ jsou toroidální a poloidální magnetické pole. Tím se tedy v našich úvahách efektivně zvětšuje hlavní poloměr tokamaku.

5.3.2 Difuzní koeficient

Význam difuzního (D) a třecího (F) koeficientu pro sledování dynamiky částic při procesech typu rozptylu byl probrán v kapitolách 2.3 a 3.3. Ve všech následujících případech byl průběh F i D počítán obdobou vzorců (2.29). Na poloidálním řezu magnetickou plochou o poloměru r zabírá oblast průniku LHW poměrnou část danou $h/(2\pi r)$. Pro započtení správného podílu částic, které s vlnou interagují, byl difuzní i třecí koeficient vynásoben touto hodnotou. Pro možnost vzájemného porovnání byla ve všech případech zvolena magnetická plocha s $r = 1.5$ m, stejně jako v [37]. Následující grafy tedy zobrazují veličiny počítané dle vzorců

$$F = \frac{\langle v - v_0 \rangle hv_0}{4\pi^2 Rr}, \quad D = \frac{\langle (v - v_0)^2 \rangle hv_0}{8\pi^2 Rr}. \tag{5.45}$$

Z nich je zřejmé, že F , resp. D jsou úměrné prvnímu, resp. druhému momentu rozdělení pravděpodobnosti, které určuje změnu rychlosti částice po interakci s vlnou $\Delta v = v - v_0$.

Graf difuzního koeficientu pro různé intenzity elektrického pole v nerelativistické aproximaci obdélníkové obálky lze najít v práci [37]. $D(v)$ pro různé intenzity pole obdélníkové obálky v relativistickém přístupu ukazuje obr. 5.6 a totéž pro gaussovskou

obálku obr. 5.7. D_{QL} vyznačený pro srovnání v grafu 5.6 byl odvozen v práci [35] ze vzorce (3.8) za předpokladu obdélníkového tvaru spektra vln. Je-li ΔN_{\parallel} šířka tohoto spektra, \bar{N}_{\parallel} jeho střed a $\Gamma/S \equiv (hL_0)/(4\pi^2 rR)$ je část magnetické plochy, ve které se interakce odehrává, pak

$$D_{QL,rect}(v) = \frac{ce^2}{2m_e^2} \frac{1}{v} \frac{E_0^2}{f \Delta N_{\parallel}} \frac{\Gamma}{S}, \quad \frac{c}{N_{max}} < v < \frac{c}{N_{min}}. \quad (5.46)$$

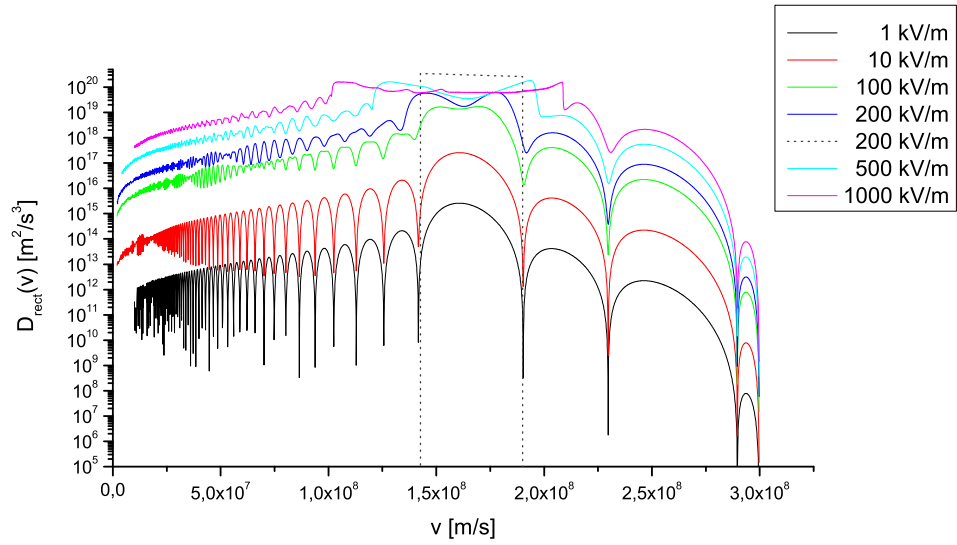
D_{QL} zobrazený v grafu gaussovské obálky (5.7) byl převzat z [21] a vynásoben koeficientem udávajícím podíl interagujících částic $h/(2\pi r)$. Zobrazené křivky jsou tedy dány vztahem

$$D_{QL,gauss}(v) = \frac{e^2 E_0^2 L_0^2 h}{32m^2 L r v} \exp(-L_0^2(\omega/v - k)/8). \quad (5.47)$$

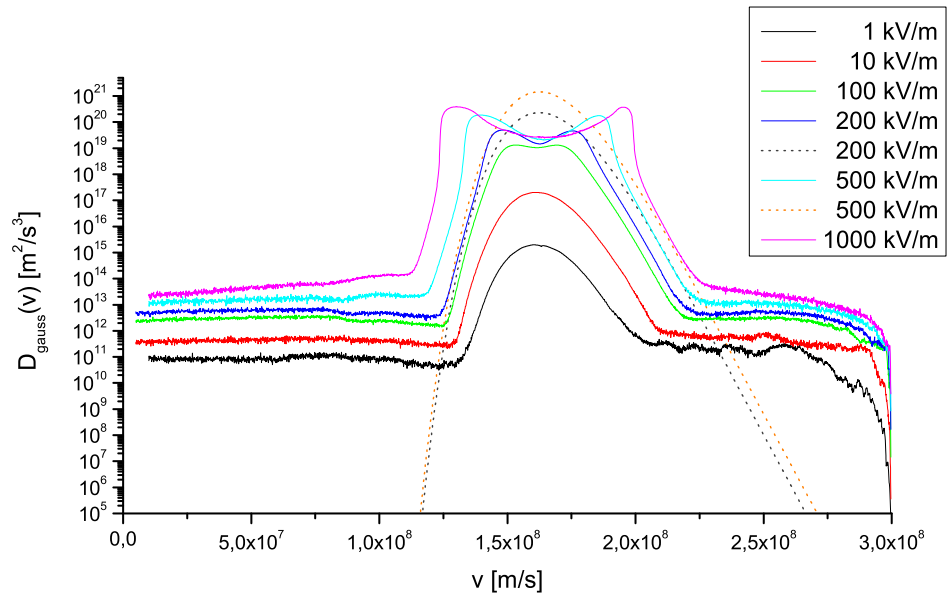
U obdélníkové obálky rozdíl mezi hodnotou D_{QL} a difuzním koeficientem spočteným numericky odpovídá předchozím pracím [35] či [30]. Kvazilineární hodnota difuzního koeficientu je vyšší než hodnota numericky spočtená a především omezená pouze na přítomné spektrum LH vln. Je nutno zdůraznit, že v grafu zobrazený D_{QL} odpovídá spektru vln o určité šířce, jejichž účinek je středovaný přes celou magnetickou plochu, kdežto numerická hodnota D popisuje interakci částic s vlnou jedinou, ovšem s prostorově lokalizovanou obálkou. U gaussovské obálky je kvazilineární předpověď poměrně dobře platná ještě u intenzity $E = 2 \times 10^5$ kV/m, u intenzit vyšších je však již oblast urychlení u numericky spočteného koeficientu širší.

Grafy 5.8 a 5.9 ukazují difuzní koeficient pro obdélníkovou obálku bez vyšších harmonických a pro zobecněný tvar podle vzorce 5.11. Při odebrání vyšších harmonických se difuzní koeficient chová tak, jak bylo očekáváno. V oblasti fázových rychlostí složek, které v sumě 5.10 zůstaly, odpovídá difuznímu koeficientu obdélníkové obálky $D_{rect}(v)$, v druhé části velmi prudce klesá (na hodnotu, která však je stále o 2-4 řády vyšší než odpovídající $D_{gauss}(v)$) a dále klesá monotónně. Pro $M = 10^3$ již zcela odpovídá difuznímu koeficientu obdélníkové obálky. Naproti tomu v případě $E \sim e^{-x^N}$ není pokles $D_{prechod}(v)$ tolik náhlý, odehrává se v postupných skocích a v malých a velkých rychlostech klesá pro nízká N až na hodnotu $D_{gauss}(v)$. Za zmínku také stojí, že v oblasti nízkých rychlostí (cca. $v < 7.5 \times 10^8$ m/s) je pro $N \geq 10$ hodnota $D_{prechod}(v)$ v úzkých pruzích dokonce vyšší než $D_{rect}(v)$. Jedná se o oblast rychlostí, v níž se vyskytuje většina elektronů na počátku ohřívání, a je proto tedy možné, že v určitých fázích rozplývání obálky bude docházet k ještě intenzivnější difuzi, než jaká byla určena na základě obdélníkového modelu. Takto vysoká hodnota difuzního koeficientu je zřejmě dána velkými amplitudami u vyšších harmonických složek takové obálky. Při průniku vlny do plazmatu jsou to však právě tyto složky, které jsou nejsilněji absorbovány, a proto je nepravděpodobné, že by se tak vysoký difuzní koeficient v malých rychlostech v reálném případě vyskytl.

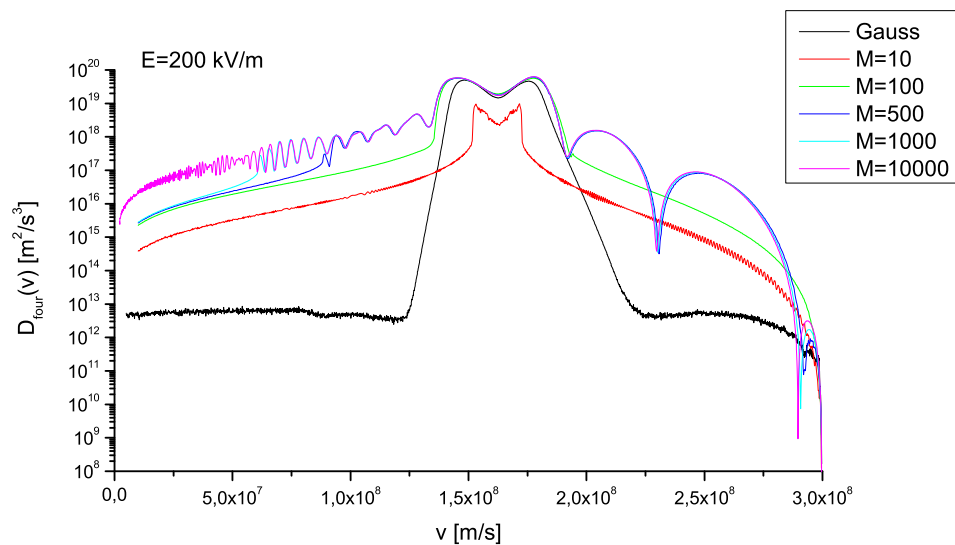
Tvar všech tří grafů 5.6-5.8 vykazuje velmi dobrou shodu s výpočtem šířky stochastických pásů (viz. obr. 5.2). I při intenzitách příliš malých na vznik takového pásu nastává u obdélníkové obálky v jemu odpovídající oblasti rychlostí lokální maximum. To je snadno vysvětlitelné tím, že překryv sousedních harmonických vzniká přednostně tam, kde jsou jejich amplitudy vysoké. Proto i v případě, že k překryvu nedochází,



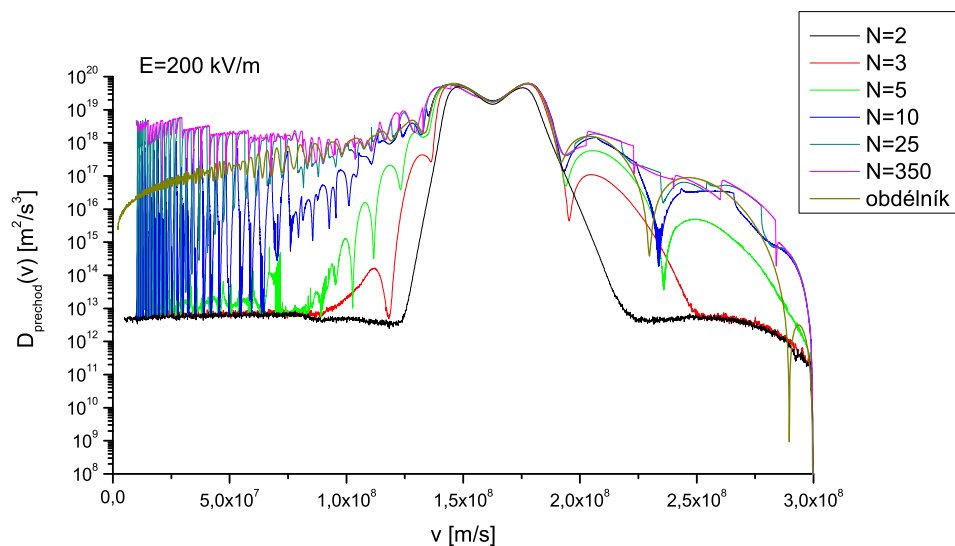
Obr. 5.6: Difuzní koeficient pro různé intenzity vlny s obdélníkovou obálkou. Plně relativistický výpočet. Tečkovaně je vyznačen D_{QL} počítaný v práci [35] podle vzorce (5.46) pro $\Delta N_{\parallel} = 0.52$ a $\bar{N}_{\parallel} = 1.85$.



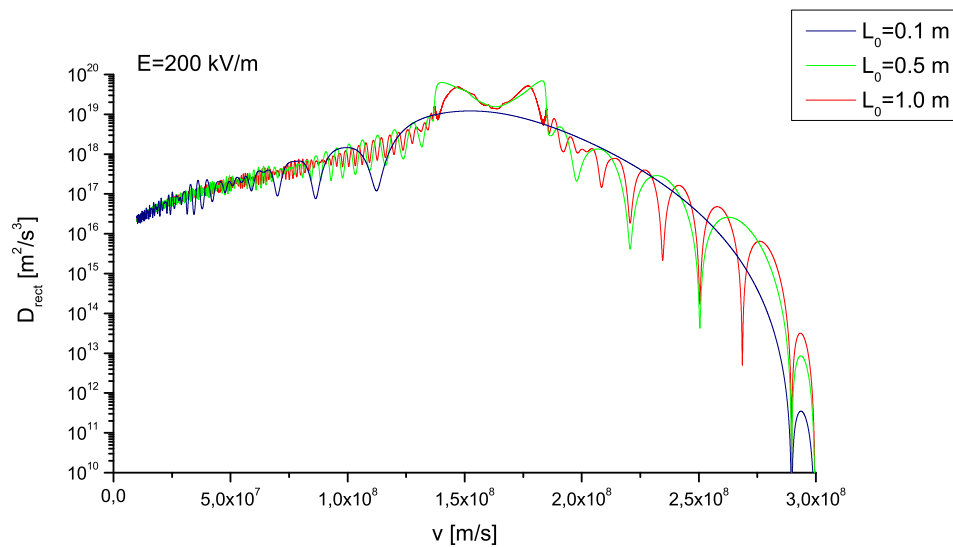
Obr. 5.7: Difuzní koeficient pro různé intenzity vlny s gaussovskou obálkou. Plně relativistický výpočet. Tečkovaně je vyznačena teoretická předpověď D_{QL} dle (5.47).



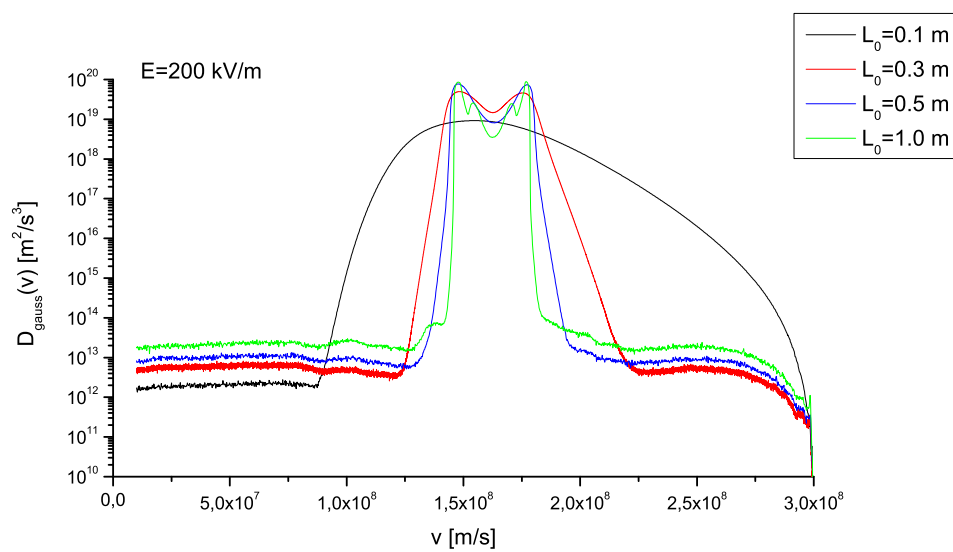
Obr. 5.8: Difuzní koeficient pro obdélníkovou obálku bez vyšších harmonických (různý parametr M v (5.10)). Plně relativistický výpočet, $E_0 = 200 \text{ kV/m}$.



Obr. 5.9: Difuzní koeficient pro různé tvary zobecněné obálky (různý parametr N v (5.11)). Plně relativistický výpočet, $E_0 = 200 \text{ kV/m}$.



Obr. 5.10: Difuzní koeficient obdélníkového profilu vlny pro různou délku interakční oblasti $L_0 = 0.1; 0.5$ a 1 m.



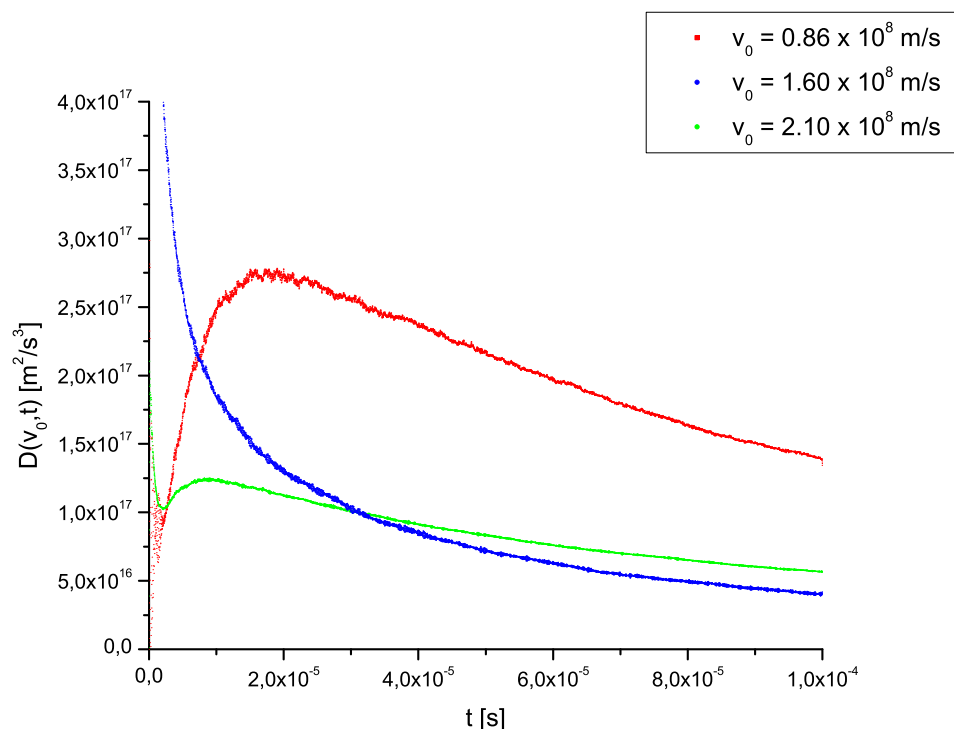
Obr. 5.11: Difuzní koeficient gaussovského profilu vlny pro různou délku interakční oblasti $L_0 = 0.1; 0.3; 0.5$ a 1 m.

mají částice v této oblasti dostupnou širší oblast rychlostí, a tedy i vyšší $D(v)$. Naopak velmi výrazná minima se vykytují v rychlostech, ve kterých amplituda harmonické s odpovídající fázovou rychlostí klesá dle (5.2) na nulu. U gaussovské obálky se prudké kolísání difuzního koeficientu neprojevuje. Důvodem je fakt, že amplitudy složek klesají s rostoucím číslem módu (a tedy s rostoucí vzdáleností od fázové rychlosti LH vlny) exponenciálně.

Pokud bychom uvažovali celý dvourozměrný pohyb částice po magnetické ploše dle obr. 5.1, bezpečnostní faktor by efektivně ovlivňoval kromě R také dráhu L_0 , po kterou se částice vyskytuje v poli vlny. Difuzní koeficient pro $E = 200$ kV/m a různé hodnoty L_0 zobrazuje graf 5.10. Podle očekávání daného vzorcem (5.4) se s rostoucím L_0 zmenšuje šířka stochastických pásů, což se projevuje zvětšením frekvence oscilací difuzního koeficientu. Zároveň s tím však dochází ke zmenšování velikosti výkyvů. To lze snadno vysvětlit tím, že jelikož platí $L_0 \ll L$, s narůstáním L_0 narůstá i amplituda jednotlivých harmonických ve Fourierově rozvoji obálky (5.2) a dochází rychleji k překryvu a splynutí jednotlivých pásů a k zániku (nebo alespoň zúžení) mezer mezi nimi, které způsobovaly kýžený prudký propad $D(v)$. Význam těchto prudkých poklesů difuzního koeficientu je zřejmý v kapitole 5.3.5, která se zabývá dlouhodobým vývojem rozdělovací funkce elektronů. Právě mezera mezi dvěma stochastickými pásy zde silně omezuje (téměř znemožňuje) přechod částic do rychlostí vyšších než 2.25×10^8 m/s. V případě gaussovské obálky způsobí změna délky interakční oblasti mnohem podstatnější změnu difuzního koeficientu (viz. obr. 5.11) odpovídající rovnici (5.8). Čím menší L_0 je, tím vyšší sice je energie nutná pro vznik chaotickému režimu, ale tím širší pás poté vzniká. Proto by v případě prostorově velmi omezené vlny nebo v případě vysokého bezpečnostního faktoru, bylo možné, oproti dříve zkoumanému případu $L_0 = 0.3$ m, i anomální urychlení elektronů s rychlostmi nižšími než 1×10^8 a současně by bylo možno urychlit tyto částice až do rychlostí vyšších než 2.5^8 .

5.3.3 Difuze typu Lévy-walk

Protože po jedné interakci s vlnou může částice změnit svoji rychlost pouze o zlomek celého dostupného rychlostního prostoru, lze očekávat vývoj střední změny rychlosti $\langle (v(t) - v(t_0))^2 \rangle$ v čase. Jak už bylo řečeno v kapitole 3.3, protože částice interakcí může energii při jednom průletu vlnou jak ztratit tak získat, má difuze charakter náhodné procházky. Při nízkých intenzitách má tento proces charakter random-walk, ale pro intezity vlny v řádu 10^5 V/m byla kromě běžného typu random-walk zaznamenána i difuze typu Lévy-walk. Ta se projevila u všech částic kromě těch, jejichž počáteční rychlosti leží v oblasti zachycení. Změnu difuzního koeficientu v čase pro různé počáteční podmínky při $E = 200$ kV/m demonstruje obr. 5.12. Protože platí $D(v) \sim \langle \Delta v^2 \rangle / t$, lokálního maxima křivka dosahuje ve chvíli, kdy se růst $\langle \Delta v^2 \rangle$ zpomalí na lineární v čase. Graf lze tedy interpretovat tak, že difuze typu Lévy-walk probíhá v oblastech, kde křivka narůstá. Celý proces lze přirovnat k případu zmiňovanému v [25], kde byla uváděna difuze typu Lévy-walk u částice v prostorově periodickém potenciálu. Ve zde zkoumaném případě lze obdobnou strukturu v prostoru rychlostí pozorovat na kolísání difuzního koeficientu.



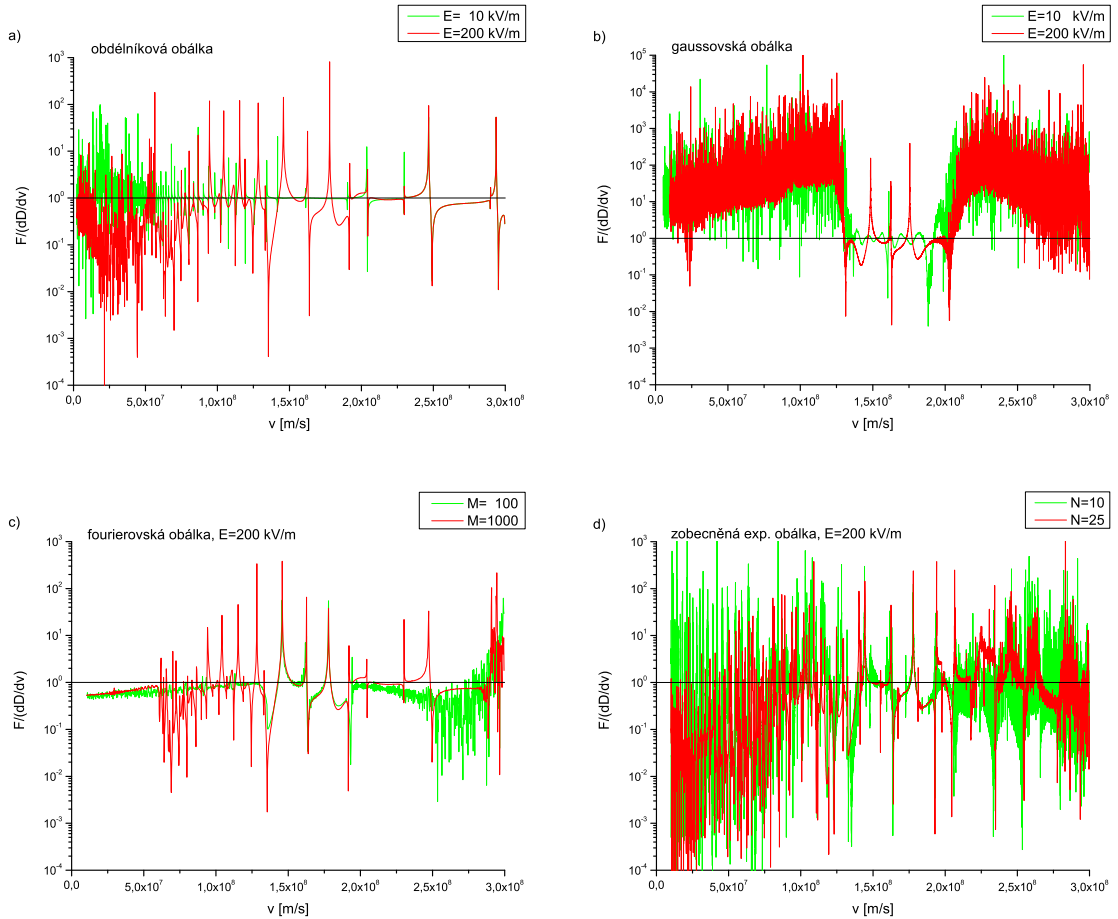
Obr. 5.12: Vývoj difuzního koeficientu v čase.

5.3.4 Oblast platnosti kvazilineární difuzní rovnice

V kvazilineárním případě je difuzní koeficient jediným parametrem určujícím vývoj rozdělovací funkce částic. Srovnáním kvazilineární difuzní rovnice s rovnicí Fokker-Planckovou bylo v kap. 2.3 ukázáno, že to odpovídá předpokladu (2.26). Následující grafy 5.13a-d ukazují podíl vypočtených hodnot $F/(\partial D/\partial v)$ pro zkoumané typy obálek. Oblast, kde je tento podíl přibližně roven jedné, odpovídá oblasti rychlostí, ve které se vývoj rozdělovací funkce řídí kvazilineární difuzní rovnicí 2.21, v ostatních částech je nutno použít rovnici 2.25 či její zobecnění pro ještě více momentů. V místech, kde difuzní a třecí koeficient prudce kolísá (s periodou srovnatelnou s krokem dv při jejich výpočtu) ovšem hodnota $F/(\partial D/\partial v)$ není příliš reprezentativní. Příkladem je případ gaussovské obálky, kde nebylo možno v časově únosném horizontu vypočítat koeficienty D a F přesněji. To je dáno tím, že výpočet je (na rozdíl od obdélníkového profilu) prováděn numerickou integrací, která do něj vnáší jistou chybu.

5.3.5 Vývoj rozdělovací funkce

Zatímco difuzní koeficient $D(v)$ je pouze jedním (byť nejdůležitějším) z parametrů určujících rozdělení rychlostí částice po interakci s LHW, k popisu ohřevu jako takového je nutno vyjádřit změnu rozdělovací funkce elektronů v čase. K tomu lze snadno využít obdobného kódu simulujícího průchod částice interakční oblastí, jako pro výpočet F a D , a popsaného v kapitolách 5.2.1 a 5.2.2. Hledáme stav rozdělovací funkce v čase,

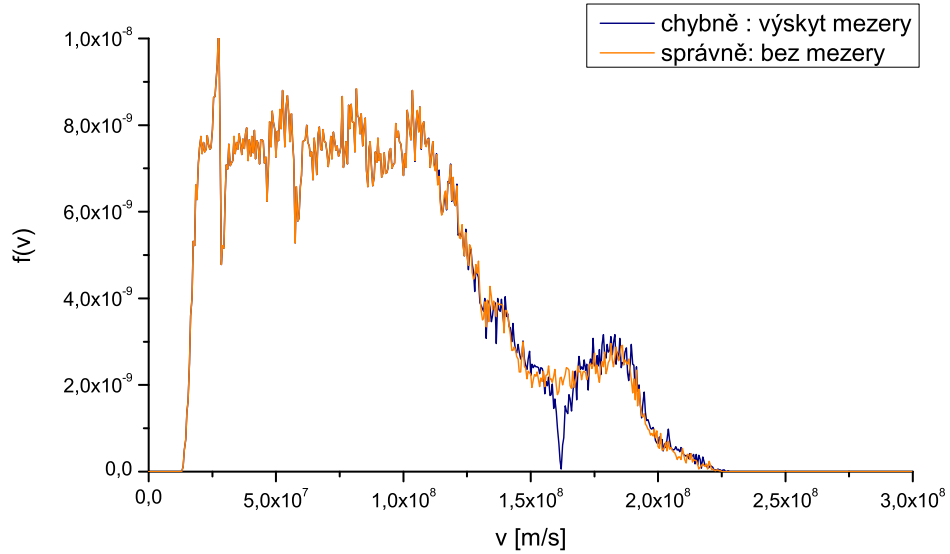


Obr. 5.13: Podíl $F/\frac{\partial D}{\partial v}$ pro různé typy obálek a intenzit pole. a) obdélníkový profil, b) gaussovský profil, c) obdélníkový profil bez vyšších harmonických, d) zobecněná exponenciální obálka.

a proto opakujeme průlet interakční a následně volnou oblastí až po dosažení času t .

Ve [37] byl zkoumán krátkodobý ($t = 1 \times 10^{-6}$ s) vývoj rozdělovací funkce daný nerelativistickými pohybovými rovnicemi (viz. kap. 5.2.1). Byl při něm zjištěn vznik výrazné mezery v oblasti fázové rychlosti vlny. Ta byla, jak bylo v rámci této práce zjištěno, pouze důsledkem drobné chyby v programovém kódu a změnu v této rozdělovací funkci po jejím opravení ukazuje graf 5.14. Výpočet proběhl pro intenzitu $E_0 = 200$ kV/m a pro 1000 počátečních rychlostí rovnoměrně rozložených v intervalu $0.5 - 1.5 \times 10^8$ m/s. Pro každou rychlost existovalo 100 částic s fázemi opět rovnoměrně rozloženými mezi $0 - 2\pi/k$.

Nutnost přejít v této práci k plně relativistickému popisu byla dána především nemožností sledovat dlouhodobě vývoj rozdělovací funkce v nerelativistické aproximaci. V ní totiž nejsou stochastické pásy (viz. obr. 5.2) v rychlostech ze shora omezeny (a i při vysokých rychlostech jsou mezery mezi nimi malé) a to umožňuje částicím poměrně snadno difundovat i do rychlostí vyšších než c . Pokud se pro zamezení tohoto jevu umístí poblíž rychlosti c umělá bariéra, která znemožní částicím její rychlost překročit a namísto toho se od ní částice "odrazí" (tj. rychlost nad bariérou se sy-



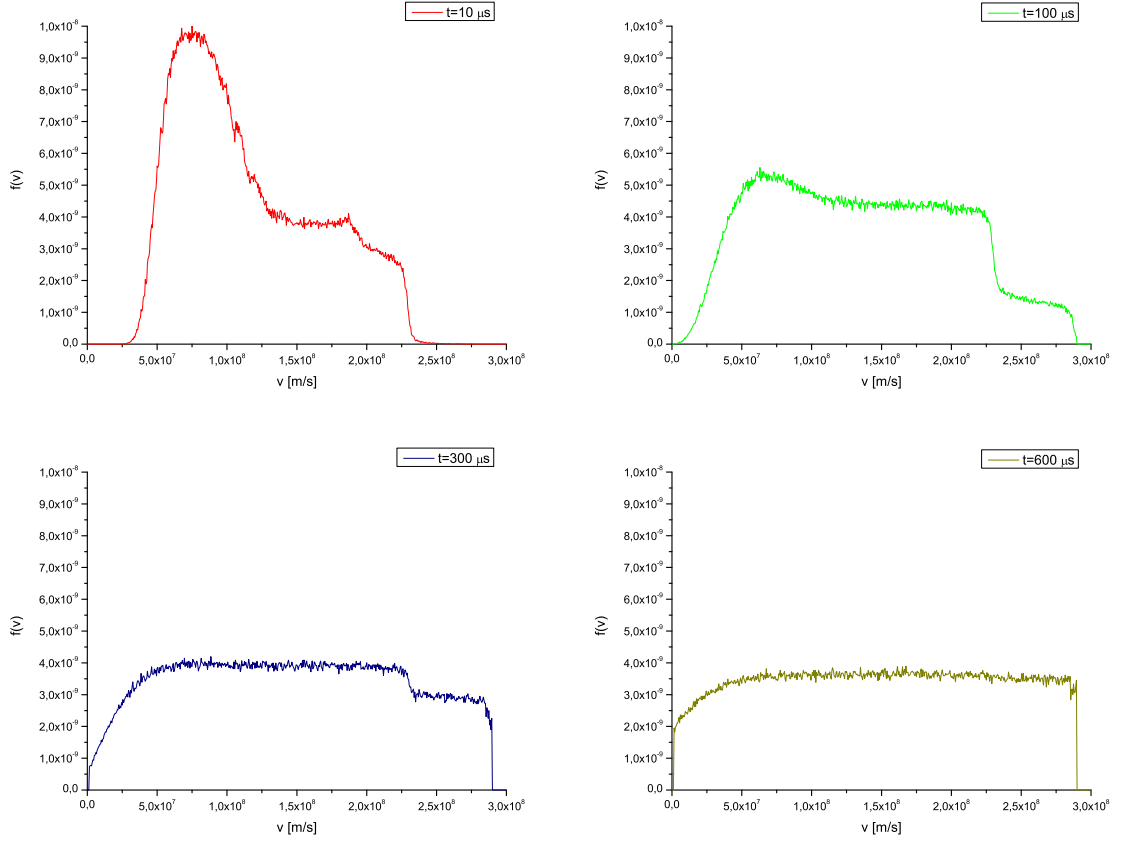
Obr. 5.14: Rozdělovací funkce elektronů po čase $t = 1 \times 10^6$ s při intenzitě vlny $E_0 = 200$ kV/m. Částice na počátku rozloženy rovnoměrně mezi $0.5 - 1.5 \times 10^8$ m/s.

metricky zobrazí na rychlost pod ní), pak se rozdělovací funkce v čase začne blížit rovnoměrnému rozdělení. To demonstruje obr. 5.15, kde byly použity bariéry dvě. První z nich byla umístěna do rychlosti $v_{b1} = 2.9 \times 10^8$ m/s, která odpovídá mezeře mezi dvěma stochastickými pásy nejbliže rychlosti světla, a druhá bariéra byla nastavena do $v_{b2} = 1 \times 10^6$, aby zamezila úniku částic do záporných rychlostí. Počáteční parametry částic i intenzita vlny byly stejné jako u grafu 5.14.

Opakujeme-li stejný postup, ovšem již pro plně relativistické pohybové rovnice (čímž odpadá nutnost omezení rychlostí shora), konverguje rozdělovací funkce po jistém čase k poměrně stacionárnímu tvaru. Pro $E = 200$ kV/m a částice rovnoměrně rozdělené v počátečních rychlostech $0.5 - 1 \times 10^8$ m/s zobrazuje tento stacionární stav graf 5.16e. Zobrazované výpočty byly prováděny se zanedbáním rotační transformace dané bezpečnostním koeficientem. Jeho vliv by pouze změnil délku dráhy, ve které je částice považována za volnou, a tak by v odpovídajícím poměru změnil i čas nutný k dosažení tohoto stavu. Pokud by platila kvazilineární difuzní rovnice (což pro vypočtené koeficienty D a F ve většině případů neplatí-viz. graf 5.13), bylo by možné toto rozdělení určit jednoduše položením $\partial f(v)/\partial t = 0$ v (2.21). Protože zanedbáváme změnu rozdělovací funkce srážkami částic, řešením kvazilineární difuzní rovnice s okrajovou podmínkou $f(c) = 0$ pak je bezsrážková obdoba rovnice (3.9):

$$f_{QL,\infty}(v) = \text{konst.} \int_v^c -\frac{1}{D(v')} dv'. \quad (5.48)$$

Obecněji lze rovnici (2.21) nahradit Fokker-Planckovou rovnicí (2.5). Její stacionární řešení s jednou stejnou okrajovou podmínkou a druhou podmínkou $f(v_{min}) = A$, kde A je volené dle normalizace a v_{min} je minimální rychlost pro níž jsou F a D



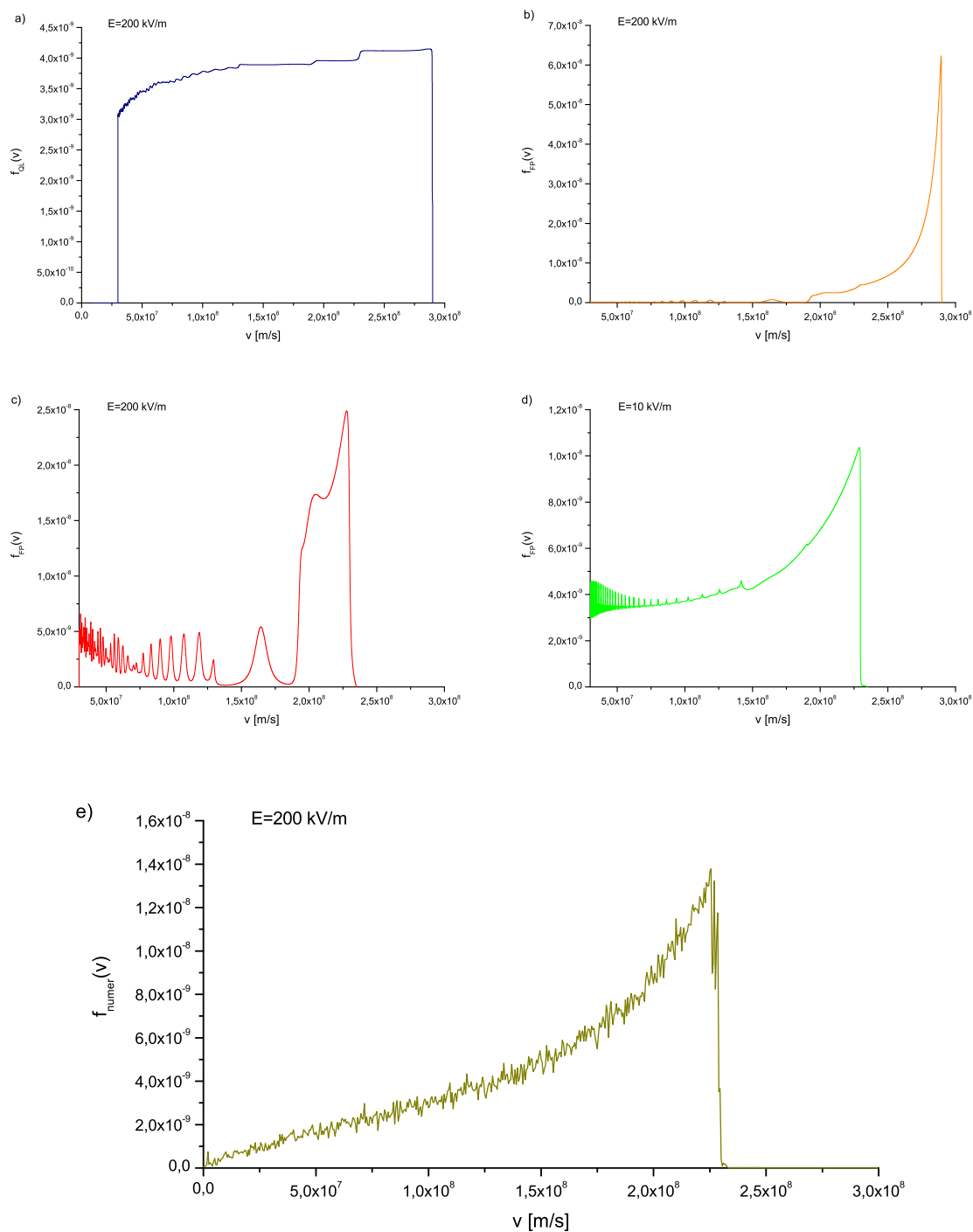
Obr. 5.15: Dlouhodobý vývoj rozdělovací funkce elektronů v nerelativistické aproximaci. Parametry stejné jako u obr. 5.14.

spočteny, je

$$f_{FP,\infty}(v) = -A \frac{\int_{v_{min}}^v \frac{E(v')}{D(v')} dv' - \int_{v_{min}}^c \frac{E(v')}{D(v')} dv'}{E(v) \int_{v_{min}}^c \frac{E(v')}{D(v')} dv'} \quad (5.49)$$

$$E(v) = \exp \left[- \int_{v_{min}}^v \left(F(v') - \frac{dD(v')}{dv'} \right) / D(v') dv' \right].$$

Obě stacionární řešení spočtená z difuzních koeficientů kapitoly 5.3.2 pro obdélníkovou obálku a $E = 200$ kV/m ukazuje graf 5.16a,b. Kvazilineární případ evidentně vůbec neodpovídá výsledku dosaženému numerickou simulací, což je v souladu s předchozím odstavcem. Fokker-Planckova stacionární funkce sice má správný tvar, je však posunuta do mnohem vyšších rychlostí. To lze vysvětlit poměrně snadno. V oblasti rychlostí $\sim 2.3 \times 10^8$ m/s existuje hluboká mezeru mezi dvěma sousedními stochastickými pásy, která silně omezuje transport částic do vyšších rychlostí. Na grafech kap. 5.3.2 ji lze pozorovat jako prudký propad difuzního koeficientu v odpovídající rychlosti. Pro elektron je tedy velmi nepravděpodobné (ne však nemožné), přes tuto mezeru přejít. Po celou dobu trvání simulací bylo zaznamenáno pouze velmi malé procento částic, které do oblasti nad 2.3×10^8 m/s přešly. Tvar rozdělovací



Obr. 5.16: Dlouhodobý vývoj rozdělovací funkce elektronů - relativistický výpočet. Stacionární řešení a) kvazilineární difuzní rovnice, b) Fokker-Planckovy rovnice, c),d) Fokker-Planckovy rovnice s okrajovou podmínkou $f(2.3 \times 10^8 \text{m/s}) = 0$, e) stacionární stav získaný numerickou simulací.

funkce 5.16e tedy vydrží po velmi dlouhou dobu, dokud odpovídající část elektronů neprodifunduje přes tuto mezeru a nevytvoří již plně stacionární rozdělení 5.16b. Toto vysvětlení podporují i grafy 5.16c,d stacionárního stavu počítané z rovnice (5.49) pro $E = 10$ kV/m a $E = 200$ kV/m, v nichž byla horní okrajová podmínka stanovena jako $f(2.3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 0$, tedy simulující předpoklad, že částice přes bariéru pronikají pomaleji, než je čas potřebný na ustavení rovnováhy v rychlostech pod 2.3×10^8 m/s. Příklad 10 kV/m pak velmi dobře odpovídá rozdělení, které vzniklo jako výsledek numerických simulací pro 200 kV/m, kdežto teoretická předpověď pro 200 kV/m obsahuje (oproti simulacím) v oblasti zachycení výrazný propad. Členy Fokker-Planckovy rovnice jsou prvními dvěma koeficienty Taylorova rozvoje (podle Δv) změny rozdělovací funkce za čas Δt (viz. kap. 2.1 a odvození v [9]). Možným vysvětlením tohoto rozdílu proto je silná nelinearita interakce při intenzitách řádu 10^5 V/m (především právě v oblasti zachycení částic vlnou), která neumožňuje zanedbat v tomto rozvoji členy vyšších řádů (tedy vyšší gaussovské momenty rozdělení výstupních rychlostí).

Ve všech případech užití rovnice (2.5), i v případě numericky simulovaném, byl výsledný stav rozdělovací funkce ve vysokých rychlostech charakterizován kladnou směrnicí. To je podle kap. 2.2 stav nestabilní, udržovaný pouze přísunem energie z vlny do plazmatu. Po přerušení ohřevu tedy lze očekávat přerozdělení elektronů zpět do nižších rychlostí provázené vyzářením odpovídajícího spektra elektrostatických vln.

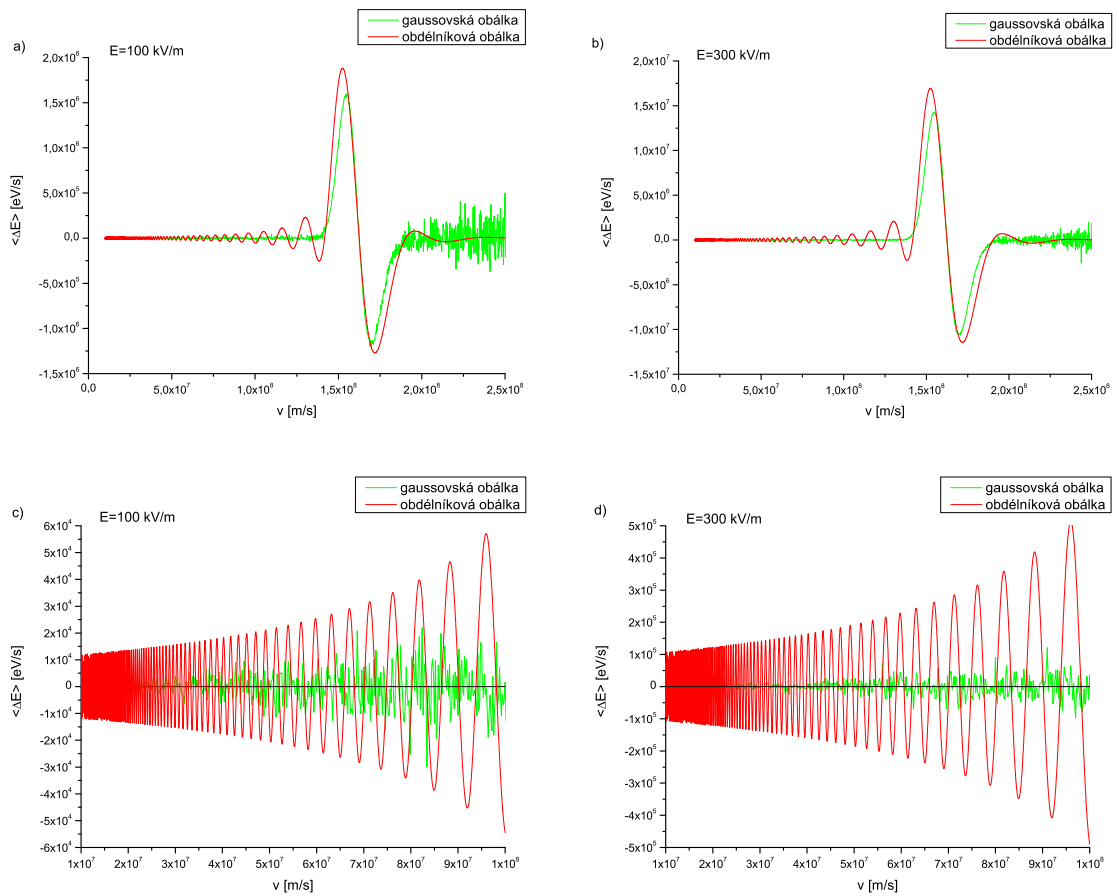
Při úvahách nad výsledky simulací je nutno mít stále na paměti, že byly dosaženy za předpokladu plně bezsrážkového plazmatu. Otázkou pro další studium tedy zůstává, nakolik je tvar reálného stacionárního řešení rovnice (2.5) ovlivněn vyššími momenty, jak bude ovlivněn započtením srážek částic a také jaký je čas nutný pro jeho ustavení (zda není nereálně dlouhý).

5.3.6 Difuze α -částic

Během tohoto výpočtu byl prozkoumán vliv gaussovské a obdélníkové obálky na urychlení α -částic vznikajících jako produkt termonukleární fúze. V grafech 5.17a-d je vynesena střední změna energie na jednu α -částici za čas jako funkce počáteční rychlosti částic. K výpočtu byla použita obdoba vzorců 5.45 odvozená stejným způsobem:

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{\langle E - E_0 \rangle h v_0}{4\pi^2 R r}. \quad (5.50)$$

V oblasti rychlostí 1.3×10^7 m/s (3.5MeV), která odpovídá energii částic vznikajících během fúze, je maximum této střední změny pro vlnu u $E = 300$ kV/m u obdélníkové obálky cca. ± 10 keV, u gaussovské do ± 1 keV a obě v rychlostech velmi rychle oscilují.



Obr. 5.17: Změna energie α -částice urychlením LH vlnou připadající na jednu částici na jednotku času.

Kapitola 6

Urychlení částic v těsné blízkosti LH grilu

Ačkoliv je princip ohřevu plazmatu užitím LHW dobře popsán teoreticky, existují problémy, které brání jeho účinnému použití v praxi. Během experimentů byla totiž zjištěna silná asymetrie rozložení energie částic dopadajících na divertor a první stěnu tokamaku, přičemž hodnoty tepelné zátěže místy přesahují 10 MW/m^2 , což je na hranici technologické únosnosti. To je také důvodem, proč se v prvních fázích experimentů na zařízení ITER s použitím LHW ohřevu nepočítá.

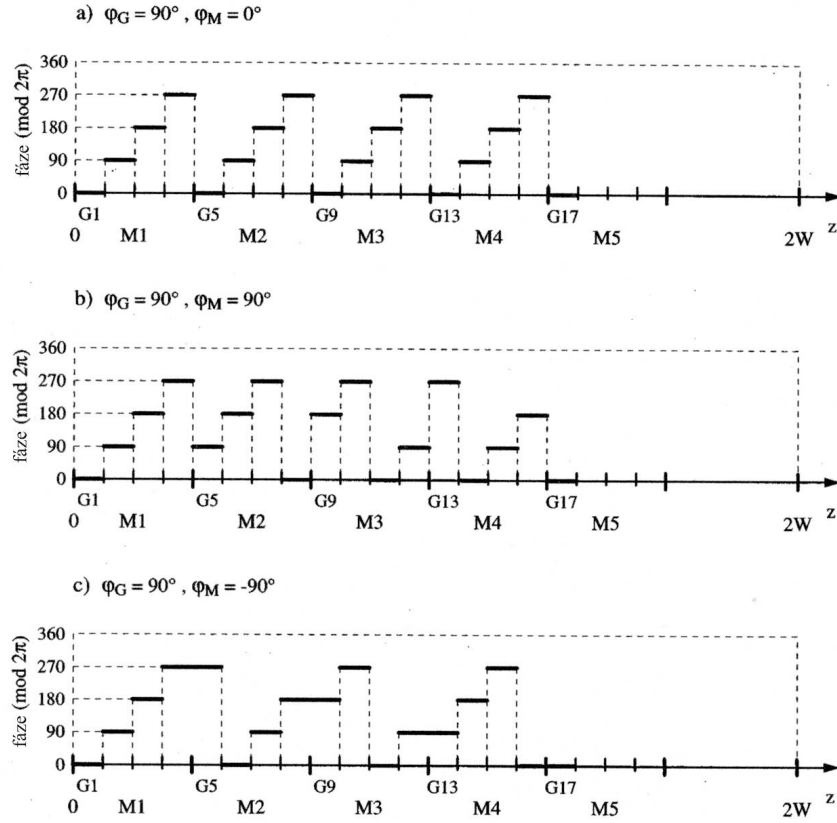
Před tím, než se LH vlna po vyzáření z grilu transformuje do vlny v plazmatu, existuje na jeho okraji těsně před anténou úzká oblast, kde je vlna stále ještě elektromagnetickou vlnou ve vakuu. Experimentální zjištění [34] i teoretické modely [20] naznačují, že problém přílišného tepelného zatížení zařízení tokamaku magneticky spojeného s LH grilem je způsoben silnou akcelerací okrajových elektronů v této vrstvě. Jejich energie je podle měření Langmuirovskými sondami v rozmezí $200 - 5000 \text{ eV}$, částice jsou akcelerovány v obou směrech (po směru i proti směru šíření vlny) a akcelerací těchto elektronů dochází k měřitelné ztrátě výkonu vlny ($P_{ztrata}/P_{LHW} \sim 1 - 10 \%$ dle parametrů plazmatu) [34].

K vyzáření LH vlny se používá zařízení (tzv. gril), které lze popsat [20] jako sadu modulů, z nichž každý obsahuje určitý počet vlnovodů. Fáze vyzařované vlny se v sousedních vlnovodech skokově liší o φ_G (typicky $\varphi_G = \frac{\pi}{4}$), mezi sousedními moduly dochází ke změně fáze o $\varphi_M \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Průběh fáze $\varphi(z)$ je pro moduly obsahující 4 vlnovody, $\varphi_G = \frac{\pi}{2}$ a $\varphi_M = -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{\pi}{2}$ znázorněn na obr. 6.1.

Vyzářená vlna má v těsné blízkosti grilu idealizovaný tvar stojaté vlny

$$E = E_0 \cos(\omega t - \varphi(z)). \quad (6.1)$$

K silné akceleraci elektronů dochází opět proto, že v rychlostním prostoru vznikají stochastické pásy, obdobně jako v případě interakce již plně transformované LHW s částicemi plazmatu. Pro určení kriteria překryvu je proto vhodné rozvinout (6.1) do Fourierovy řady. Takový postup byl již v [20] aplikován na speciální případy $\varphi_G = \pi/2$, $\varphi_M = 0$ a $\varphi_G = \pi, \varphi_M = 0$. Provedme nyní rozvoj obecně pro případ, kdy je poten-



Obr. 6.1: Znázornění fáze elektrického pole grilu (ve směru rovnoběžném s průletem elektronů) pro tři různá fázování mezi moduly. Skoky fáze odpovídají rozhraní mezi vlnovody G_i , M_i čísluje moduly. Převzato z [20].

ciál periodický - a to po M modulech, kdy každý obsahuje G vlnovodů o šířce g_d . Periodická délka bude označena $d \equiv MGg_d$. Nejprve převedeme intenzitu do komplexní formy $E = E_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi(z)}$. Poté při výpočtu Fourierových koeficientů $c_n = 1/d \int_0^d E(z) e^{i2\pi n z/d} dz$ rozložíme integrál na sumu integrálů přes části, v nichž je fáze konstantní. Pořadí části v modulu je dáno indexem j , přes kolikátý modul sčítáme určuje index l a fáze v lj -tém úseku je $\varphi_{lj} = l(G\varphi_G + \varphi_M) + j\varphi_G$. Pak dostaneme

$$E = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} [S_n \sin(\omega t - k_n z) + C_n \cos(\omega t - k_n z)], \quad (6.2)$$

kde $k_n = \frac{2\pi n}{d}$ a

$$S_n = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{G-1} \left[\cos\left(\frac{2\pi n}{MG}(lG + j + 1) - j\varphi_G - l(G\varphi_G + \varphi_M)\right) - \cos\left(\frac{2\pi n}{MG}(lG + j) - j\varphi_G - l(G\varphi_G + \varphi_M)\right) \right] \quad (6.3)$$

$$C_n = \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{G-1} \left[\sin\left(\frac{2\pi n}{MG}(lG + j + 1) - j\varphi_G - l(G\varphi_G + \varphi_M)\right) - \sin\left(\frac{2\pi n}{MG}(lG + j) - j\varphi_G - l(G\varphi_G + \varphi_M)\right) \right]. \quad (6.4)$$

Rovnici (6.2) lze ještě dále převést do formy řady

$$E = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi n} \operatorname{sgn}(C_n) \sqrt{C_n^2 + S_n^2} \cos(k_n z - \omega t + \varphi'), \quad (6.5)$$

kde fáze $\varphi' = \text{konst.}$ není pro šířku stochastických pásů podstatná. Sumaci v (6.3) a (6.4) lze provést explicitně a amplituda $a_n = E_0/(2\pi n) \operatorname{sgn}(C_n) \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$ poté vyjde

$$a_n = E_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{MG}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{M} - \frac{G\varphi_G}{2}\right) \sin\left(\pi n - \frac{M}{2}(G\varphi_G + \varphi_M)\right)}{\pi n \sin\left(\frac{\pi n}{M} - \frac{G\varphi_G + \varphi_M}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{MG} - \frac{\varphi_G}{2}\right)}. \quad (6.6)$$

Protože M bylo určeno jako počet modulů odpovídajících délce periody potenciálu $\varphi(z)$, platí spolu s (6.6) ještě vztah

$$M(G\varphi_G + \varphi_M) = 2\pi m; \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (6.7)$$

V případě $\frac{n-m}{M} \in \mathbb{Z}$ tedy lze v (6.6) spolu zkrátit dva členy obsahující φ_M a a_n na něm již dále nezávisí. V opačném případě je podíl členů obsahujících φ_M (a tedy i a_n) roven nule. Součin zbylých členů (neobsahujících φ_M) je nulový, je-li splněna buď podmínka $\frac{n}{M} - \frac{G\varphi_G}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ a zároveň $\frac{n}{MG} - \frac{\varphi_G}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$ nebo podmínka $\frac{n}{MG} \in \mathbb{Z}$.

Je tedy vidět, že volba posunutí fáze mezi vlnovody a moduly ovlivňuje šířku zachycení elektronů jednotlivými harmonickými. Rozvojem do Fourierovy řady jsme ovšem implicitně předpokládali nekonečně periodický tvar potenciálu. To například u zařízení CASTOR, u nějž se LH gril sestává z pouhých 3 vlnovodů, zřejmě není oprávněný předpoklad. Ke zkoumání akcelerace elektronů v takových případech byla v práci [37] odvozena nerelativistická rovnice pro koncový stav elektronu po průchodu jedním vlnovodem. Vstupuje-li elektron rychlostí $v(0)$ do pole vlny (6.1) s fází $\Psi = \text{konst.}$, pak čas $\Delta t = t - t_0$, za nějž urazí vzdálenost d_g , lze určit vyřešením rovnice

$$d_g = -\frac{eE_0}{m\omega^2} (\cos(\omega\Delta t + \Psi) - \cos(\omega t_0 + \Psi)) + \left(v(0) - \frac{eE_0}{m\omega} \sin(\omega t_0 + \Psi) \right) \Delta t \quad (6.8)$$

a rychlost elektronu v v čase t je dána vzorcem

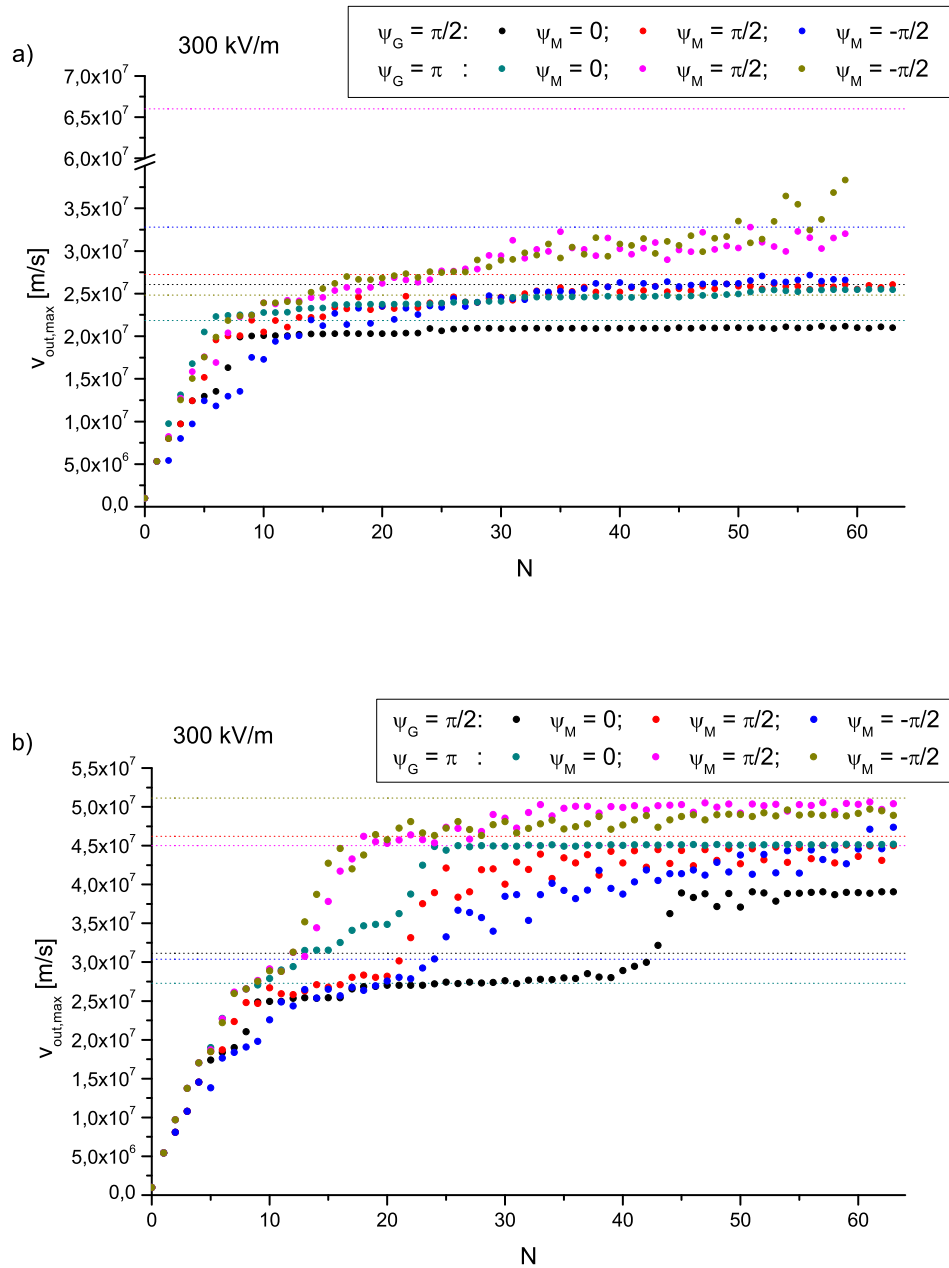
$$v(t) = v(0) + \frac{eE_0}{m\omega} (\sin(\omega t + \Psi) - \sin(\omega t_0 + \Psi)). \quad (6.9)$$

Průchod elektronu celým grilem je simulován postupným řešením rovnice (6.8) pro každý vlnovod zvlášť a odpovídajícím skokem ve fázi φ_G mezi každými dvěma vlnovody a skokem φ_M po projití G vlnovodů obsažených v jednom modulu. Takovýmto postupem lze určit stav elektronu po průchodu polem grilu s libovolnou přesností a ve všech následujících výpočtech byla zvolena přesnost $\Delta x = 10^{-13}$ m. Vstupní rychlosti byly zvoleny rovnoměrně rozložené v intervalu $(0.2 - 1) \times 10^6$ m/s a šířka jednoho grilu buď $d_g = 7$ mm (dle [20]) nebo $d_g = 15$ mm (dle [37]). Počet vlnovodů v modulu byl $G = 4$ a intenzita elektrického pole $E_0 = 300$ kV/m. Aby bylo možno srovnat předpovědi prvního postupu s výsledky postupu druhého, grafy 6.2a a 6.2b ukazují maximální dosaženou výstupní rychlost elektronů v závislosti na počtu použitých vlnovodů. Zároveň je v grafech vyznačena horní hranice (tj. maximální dosažitelná rychlost) stochastického pásu daného podmínkou překryvu v rozvoji (6.5).

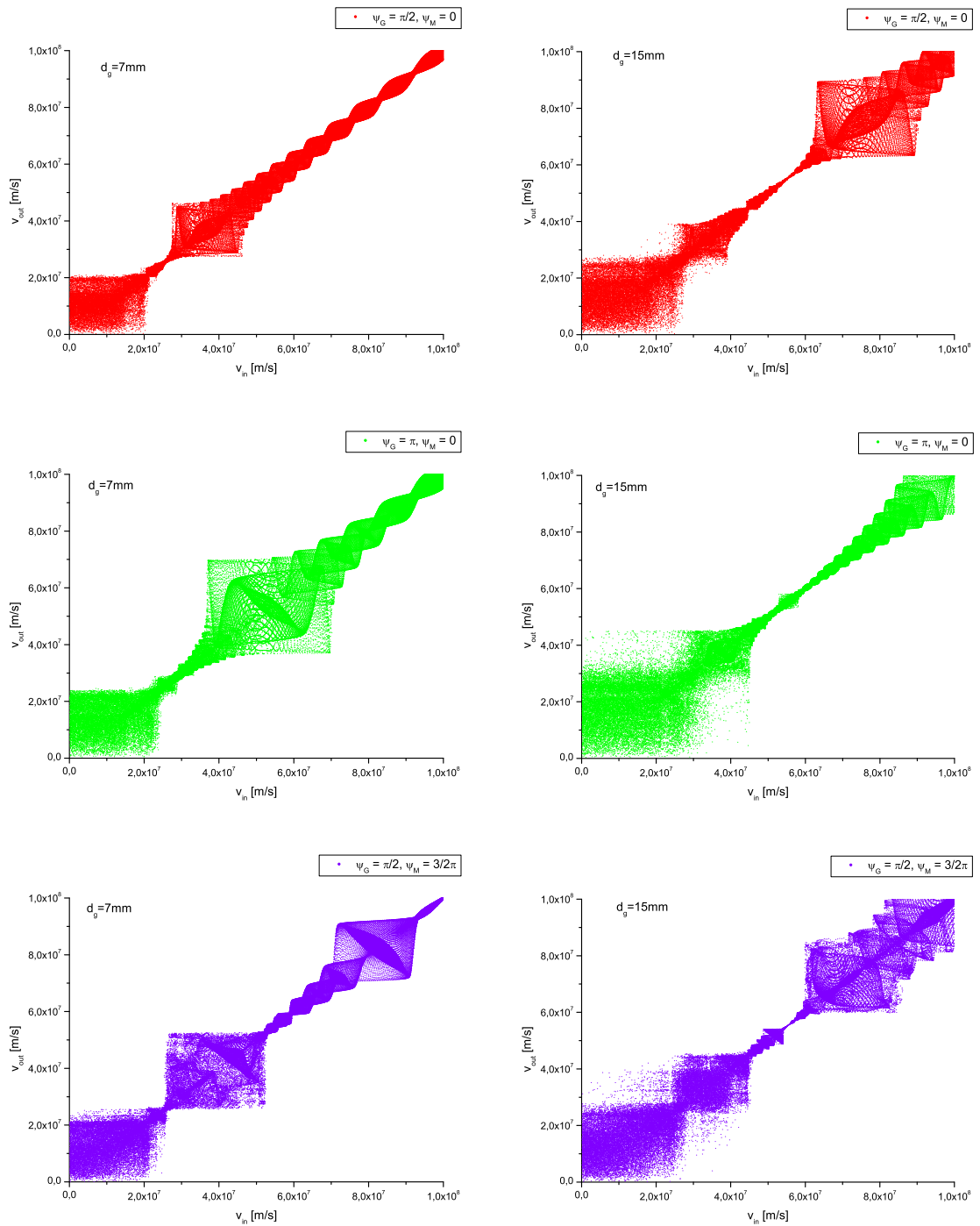
Z grafů je názorně vidět, že Chirikovova podmínka překryvu odvozená z nekonečného periodického prodloužení potenciálu sice dává řádový odhad a ukazuje, že k prudkému urychlení okrajových elektronů opravdu dojde, pro přesné určení maximální rychlosti (resp. energie), kterou mohou elektrony získat však vhodná není. Vinou konečného rozměru grilu a potenciálu totiž dochází ke změně koeficientů a_n v rozvoji (6.5). To je také příčinou, proč v grafu 6.2b je většina odhadů oproti numerickým simulacím podhodnocena. V idealizovaném případě totiž existuje nad určenou maximální rychlostí úzká mezera, oddělující částici od zachycení další harmonickou složkou, kdežto v případě konečného potenciálu tato mezera zaniká a elektronům je umožněno pronikat i do vyšších rychlostí. Zároveň je nutno brát v úvahu, že Chirikovovo kritérium překryvu je pouze odhadem a že částice mohou přejít do zachycení vyšší harmonickou i v případě, že toto kritérium splněno není.

Detailnější náhled na výstupní rychlosti elektronů dává graf 6.3 znázorňující rozptyl rychlostí elektronů při průletu polem blízko grilu. Pro každé fázování jsou uvedeny dva grafy odpovídající různé šířce vlnovodu ($d_g = 7$ mm, resp. $d_g = 15$ mm). Je dobře pozorovatelné, že oba obrazce pro stejné fázování jsou si tvarově velmi podobné, pouze měřítko je jiné (bylo ověřeno i pro jiné rozměry d_g). Ukazuje se tak, že změna šířky d_g může ovlivnit urychlení elektronů před ústím LH grilu dané nelineární interakcí fourierovských složek pole. Použitím vlnovodů co nejmenší velikosti by tedy bylo urychlení elektronů možno snížit.

Urychlené elektrony dopadají na stěnu tokamaku v úzce prostorově lokalizovaných oblastech. Možností, která ovšem vyžaduje další a hlubší prozkoumání, jak docílit rozložení tepelné zátěže na větší plochu, je vyvolání perturbace poloidálního magnetického pole, jehož siločáry elektrony sledují, k rozostření jejich úzce kolimovaného svazku. Příkladem možné perturbace může být změna magnetického pole na principu divertoru, vyvolaná proudem tekoucím v toroidální rovině těsně za okrajem plazmatu. Poloidální řez takovými magnetickými plochami pro parametry tokamaku CASTOR a parabolický profil plazmatu dle [7] zobrazuje obr. 6.4. Vektorový potenciál vytvářený toroidálním proudem v plazmatu byl také převzat z [7] a potenciál odpovídající nově



Obr. 6.2: Maximální výstupní rychlost elektronů z pole grilu pro různá fázování v závislosti na počtu vlnodů. Její odhad na základě Fourierova rozvoje je vyznačen čárkovanou čarou, body představují numerický výpočet řešením 6.8. Počáteční rychlosti $v_0 \in \langle 0.2 \times 10^6; 1 \times 10^6 \rangle$, $E_0 = 300$ kV/m. a) $d_g = 7$ mm b) $d_g = 15$ mm.

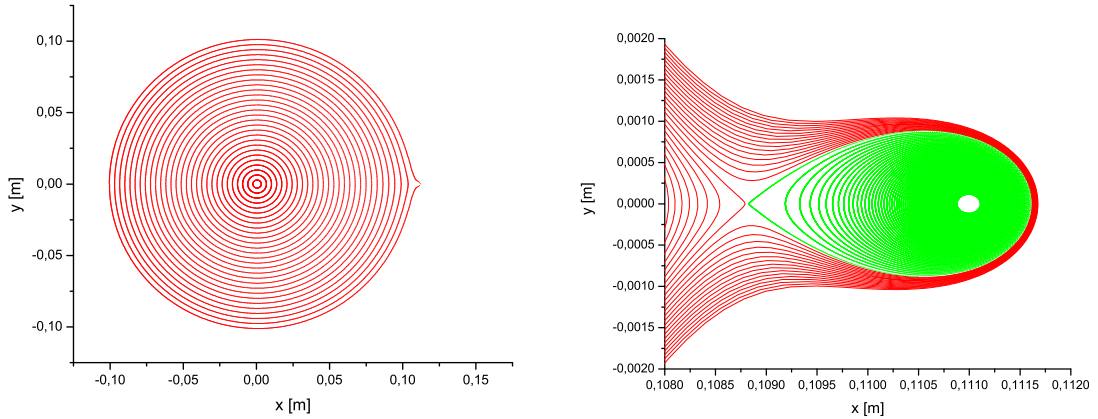


Obr. 6.3: Rozptylový diagram rychlostí po průletu elektronu polem v blízkosti grilu. Počet vlnodů $N = 32$, intenzita pole $E_0 = 300$ kV/m.

zavedenému proudu za okrajem plazmatu má v toroidálních souřadnicích jedinou složku A_ξ , danou jednoduchou aplikací Biot-Savartova zákona,

$$A_\xi = 4A_0 \frac{K\left(\frac{2R_0}{\sqrt{R_d^2 + r^2 + 2rR_d \sin(\theta) + 4R_0^2}}\right)}{\sqrt{R_d^2 + r^2 + 2rR_d \sin(\theta) + 4R_0^2}}, \quad (6.10)$$

kde R_0 je hlavní poloměr tokamaku, r , ξ a θ jsou toroidální souřadnice, R_d je vzdálenost zavedeného proudu od středu toroidu a $A_0 = \frac{\mu}{4\pi} I_0$. Při jednočásticových simulacích v poli daném součtem obou potenciálů se elektrony s počátečními energiemi 10 eV držely siločar, kolem nichž vykonávaly cyklotronovou rotaci. Obr. 6.4 tedy dává dobrý náhled i na rozptyl elektronů v okolí X-bodu. Pokud by se tento X-bod umístil do těsné blízkosti LH grilu, došlo by zřejmě k rozostření svazku prolétávajících elektronů, jak naznačují zobrazené siločáry. Ze svazku pohybujícího se v blízkosti separatrixy by část elektronů (ještě však neurychlených) zřejmě dopadala na stěnu přímo v blízkosti grilu, druhá část by byla průletem X-bodem rozostřena. Podrobnější zkoumání takového uspořádání však nebylo v této práci provedeno, a tak je tento návrh především příspěvkem do diskuze o zamezení nadměrného zahřívání součástí tokamaku v blízkosti LH grilu.



Obr. 6.4: Vznik X-bodu perturbací magnetického pole v tokamaku s $I_0 = 50$ A a $R_d = 0.111$ m. a) poloidální řez magnetickými plochami, b) detail v oblasti perturbace. Siločáry červeně vyznačených magnetických ploch je opisují ve směru proti hodinovým ručičkám, zeleně vyznačené naopak. Bílý kruh znázorňuje umístění vodiče s proudem I_0 .

Kapitola 7

Závěr

Výsledky této práce plně potvrzují domněnku, že nejsilnější urychlení částic při interakci LHW s plazmatem nastává na jeho okraji, těsně po vstupu vlny do plazmatu. Tato silná difuze v rychlostním prostoru je dána především interakcí harmonických složek fourierovského rozvoje prostorového profilu vlny. Proto se s průnikem vlny hlouběji do plazmatu (a se současnou absorbcí vyšších harmonických) postupně zužuje oblast rychlostí, v nichž jsou elektrony anomálně urychlovány, a v případě předpokládaného konečného stadia obálky vlny - profilu gaussovského tvaru - již dochází k silnému urychlení pouze v oblasti zachycení částic vlnou.

Na rozdíl od předchozích prací byly pro všechny výpočty týkající se interakce LHW s plazmatem použity plně relativistické pohybové rovnice. V důsledku toho bylo nutné nalézt pro obdélníkový profil zcela nové integrály pohybu a sestavit na jejich základě nový programový kód, který je použitelný pro výpočet difuzního a třecího koeficientu s libovolnou přesností pro jakoukoliv intenzitu vlny. Výpočty týkající se ostatních tvarů obálek byly provedeny numerickou integrací soustavy ODR užitím metody $PE(CE)_n$ s řízením chyby pomocí proměnlivého časového kroku. Jen díky použití relativistických rovnic bylo možno správně vyhodnotit charakter difuze i pro vysoké rychlosti elektronů a sledovat její reálný vývoj v delším časovém horizontu.

Po provedení výpočtu difuzního koeficientu $D(v)$ byla při porovnání tvaru závislosti $D(v)$ na rychlosti s Chirikovovým kritériem překryvu harmonických složek obálky vlny nalezena vysoká shoda mezi lokálními maximy, resp. minimy $D(v)$ a splněním, resp. nesplněním této podmínky. Mechanismus difuze tedy lze tímto postupem vysvětlit a kritérium překryvu je možno použít k dobrému odhadu šířky intervalu rychlostí, v nichž bude difuze probíhat. Společně se vznikem stochastických pásů dochází také ke změně typu difuze a pro intenzity řádu 10^5 V/m přechází běžný proces random-walk na difuzi typu Lévy-walk.

Při odebrání vyšších harmonických z obdélníkové obálky, což simuluje jejich absorpci při průchodu plazmatem, se zužuje oblast, v níž dochází k silné difuzi. V oblasti fázových rychlostí přítomných harmonických jsou si oba difuzní koeficienty rovny, jinde je koeficient obálky bez vyšších harmonických 10x (u obálky s pouze $M = 5$ dokonce 100x) nižší a směrem k nízkým rychlostem a směrem k rychlosti světla monotónně klesá. U vlny s $M = 100$ zůstává shodná právě pouze oblast hlavního maxima ($(1.35 - 1.9) \times 10^8$ m/s pro $E = 200$ kV/m). Porovnáme-li $D(v)$ pro tyto obálky

s hodnotou D_{QL} pro spektrum vln, které odpovídá šířce tohoto hlavního maxima, pro $E = 200$ kV/m vychází D_{QL} 10x větší. Tím srovnáváme účinek monochromatické prostorově lokalizované vlny s kvazilineární předpovědí pro celé spektrum vln o šířce ΔN takové, že k nejsilnějšímu urychlování částic dochází ve stejné oblasti rychlostí. Zjištěný desetinásobný rozdíl mezi kvazilineární a numerickou hodnotou ale zároveň odpovídá výsledkům práce [35], kde byl difuzní koeficient numericky počítán pro celé spektrum prostorově omezených LH vln. D_{QL} vyjádřený pro monochromatickou vlnu s gaussovskou obálkou při intenzitě 200 kV/m dává také ve svém maximu 10x vyšší hodnotu, než je hodnota numericky simulovaná. Oproti předchozímu případu však umožňuje gaussovské D_{QL} i odhad šířky rychlostí, v nichž bude k silné difuzi docházet. Tato předpověď je platná do intenzity cca. 200 kV/m, poté již numericky zjištěnou šířku podhodnocuje - tedy dochází k difuzi v širší oblasti rychlostí, než kvazilineární teorie předpovídá.

Ačkoliv je oblast urychlení u obálky gaussovského typu poměrně úzká v porovnání s ostatními modely obálek, dochází k jejímu významnému rozšiřování společně se zmenšováním délky interakční oblasti L_0 . I LHW s intenzitou $\sim 10^5$ V/m a gaussovskou obálkou (ovšem pouze úzce prostorově lokalizovanou), je tedy navzdory předchozímu očekávání schopná urychlení elektronů s počáteční rychlostí nižší než 10^8 m/s.

Dalším z cílů práce bylo určení dlouhodobého vývoje rozdělovací funkce elektronů během interakce s vlnou. K tomuto účelu nelze použít nerelativistické aproximace, protože elektrony v takovém případě konvergují k rovnoměrnému rozdělení po celém dostupném rychlostním prostoru. Použití relativistických pohybových rovnic tak získává smysl. Hlavním výsledkem v této oblasti je pak kromě určení samotného stacionárního rozdělení také zjištění, že prudké propady difuzního koeficientu (tj. jeho výrazná lokální minima) je možno ztotožnit s oblastmi, kde existuje bariéra silně omezující průchod částic do vyšších rychlostí. Ve sledovaných případech se rovnovážný stav pod bariérou ustanovil mnohem rychleji, než skrze ni prodifundovalo dostatečně významné množství částic, a časový vývoj tak probíhal po částech. Podobný vývoj lze očekávat i v případech, kdy se (při odlišných parametrech vlny) vyskytuje v difuzním koeficientu více takto výrazných minim. Naopak při jejich nepřítomnosti (např. obdélníková obálka s $L_0 = 0.1$ m nebo obdélníková obálka bez vyšších harmonických s $M = 100$) mohou částice volně difundovat až do rychlostí blízkých c . Pro případ analytického výpočtu vývoje rozdělovací funkce tato práce také demonstruje, že pro intenzity pole v řádu 10^5 V/m již není možné použít kvazilineární difuzní rovnici, protože není splněn předpoklad $F = dD/dv$. I při užití jejího zobecnění - Fokker-Planckovy rovnice - výsledek pro případ obdélníkové obálky přesně neodpovídá stacionárnímu tvaru dosaženému simulací. Do budoucna by tedy bylo vhodné společně s vyčíslením vlivu srážek (v této práci je předpokládáno bezesrážkové plazma) studovat i vliv vyšších momentů rozdělení výstupní rychlosti částic (F , resp. D je úměrný jeho prvnímu, resp. druhému gaussovskému moment) na evoluční rovnici a její stacionární řešení.

V práci [30] byla v případě nerelativistické aproximace obdélníkové obálky nalezena v oblasti fázové rychlosti vlny mezera v rozdělovací funkci, která měla za následek vznik rozdělení typu bump-in-tail. Při ověřování tohoto výsledku však byla objevena chyba v jejím programovém kódu, která vznik mezery způsobovala. Ačkoliv po opravení chyby a následném novém provedení simulací lze vznik této mezery vyloučit, výsled-

kem plně relativistického vývoje rozdělovací funkce je ještě mnohem nestabilnější rozdělení s kladnou směrnicí téměř v celé oblasti rychlostí, ve které se elektrony vyskytují.

Do budoucna jsou v Ústavu fyziky plazmatu AV ČR připravovány numerické experimenty mající za cíl určit přesný vývoj profilu LH vlny v čase. Výsledky získané v této práci bude poté možno použít k určení charakteru difuze a k odhadu časového vývoje rychlostní rozdělovací funkce elektronů.

V kapitole zabývající se urychlením elektronů v těsné blízkosti LH grilu byl zobecněn Fourierův rozvoj periodického potenciálu provedený pro speciální případy v práci [20] a byl porovnán s přesným numerickým řešením navrženým v [37]. Výsledkem je zjištění, že podmínka překryvu vycházející z Fourierova rozvoje sice předpovídá urychlení elektronů v blízkosti grilu, zároveň však je pouze řádovým odhadem. To je způsobeno nesplněným předpokladem nekonečné periodicity potenciálu. Dále bylo ukázáno, že nastavení skoků fáze mezi vlnovody a mezi moduly ovlivňuje maximální dosažitelnou rychlost (a tedy i energii) zkoumaných elektronů, v některých případech se lišila až o dvojnásobek. Bylo také demonstrováno, že horní mez urychlení elektronů závisí na šířce jednotlivých vlnovodů. Ačkoliv nejde o obecné pravidlo, byl ve zkoumaných případech zjištěn pokles maximální výstupní rychlosti společně se zmenšením šířky vlnovodu. Nakonec, jako příspěvek do diskuze, byla navržena možnost, jak rozostřit urychlovaný svazek elektronů, a docílit tak rozložení tepelné zátěže na větší plochu nebo alespoň její částečné převedení na oblasti k tomu speciálně upravené.

Dodatek A

Řešení ODR metodou typu PECE

Mějme diferenciální rovnici prvního řádu (pro soustavu takových rovnic lze následující snadno zobecnit) tvaru:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (\text{A.1})$$

Když označíme $Y_i = Y(x_i)$ přesné řešení této rovnice, $y_i = y(x_i)$ přibližné numerické řešení a horním indexem derivaci ($y^{(1)} = y' = f(x_i, y_i)$ apod.), lze rovnici pro numerické řešení integrací zapsat vztahem :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij} y^{(i)}(x_{ij}) = 0, \quad (\text{A.2})$$

kde požadujeme nenulovost alespoň dvou A_{0j} (aby počítaná hodnota závisela alespoň na jedné předchozí hodnotě y) a aby alespoň jedno A_{ij} bylo nenulové (aby skutečně šlo o diferenciální rovnici). Předpokládáme-li, že derivace vyčíslujeme pouze v bodech $[x_i, y_i]$ a k výpočtu je použito $p+1$ předchozích hodnot, můžeme pro $m = 1$ zjednodušit (A.2) do tvaru

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p a_i y_{n-i} + h \sum_{i=-1}^p b_i y'_{n-i}. \quad (\text{A.3})$$

Pokud je koeficient $b_{-1} = 0$, pak je y_{n+1} vyjádřeno jako lineární kombinace hodnot známých z předchozího výpočtu a hovoří se o explicitním vzorci. V opačném případě je vzorec implicitní a lze ho obecně řešit pouze pomocí iterací. Nejprve nějakým způsobem určíme první přiblížení y_{n+1} a označíme ho $y_{n+1}^{(0)}$. Poté vypočteme hodnotu $f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$, dosadíme do rovnice (A.3), čímž získáme hodnotu $y_{n+1}^{(1)}$ a postup opakujeme dokud nedosáhneme požadované přesnosti nebo po předem určený počet opakování. Takový postup podle [38] konverguje k přesnému řešení v případě, že je splněna podmínka

$$hb_{-1}K < 1, \quad (\text{A.4})$$

kde K shora omezuje velikost $f(x, y)$ na nějakém okolí U obsahujícím všechny body $[x_{n+1}, y_{n+1}^{(j)}]$, tedy

$$|f(x, y)| < K, \quad [x, y] \in U. \quad (\text{A.5})$$

Absolutní hodnota levé strany (A.4) zároveň udává rychlost této konvergence. Nejčastějším způsobem určení hodnoty $y_{n+1}^{(0)}$ je použití nějakého explicitního vzorce. Ten se pak nazývá prediktor, vlastní implicitní metodě se říká korektor a celá tato metoda se nazývá metodou typu prediktor-korektor nebo PECE, respektive $\text{PE}(\text{CE})_n$, kde P značí prediktor, E evaluaci funkce $f(x, y)$, C korektor a n je pevně stanovený počet iterací.

K určení lokální chyby výpočtu při konkrétní volbě a_i a b_i slouží tzv. účinková funkce, jejíž tvar je při délce kroku $h = x_n - x_{n-1}$ dán v řádu přesnosti $O(h^{r+1})$ vzorcem [38]

$$G(s) = (x_{n+1} - s)^r - r h b_{-1} (x_{n+1} - s)^{r-1} + \sum_{i=1}^p (a_i (x_{n-i} - s)^r + r h b_i (x_{n-i} - s)^{r-1}), \quad (\text{A.6})$$

kde

$$(x_{n-i} - s) = \begin{cases} x_{n-i} - s & \text{když } x_{n-i} \leq s \leq x_n, \quad i \neq -1, \\ x_{n-i} - s & \text{když } x_n \leq s, \quad i = -1 \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Pomocí $G(s)$ lze určit lokální chybu T_n v kroku od x_n k x_{n-1} takto. Má-li $G(s)$ stále znaménko v $\langle x_{n-p}, x_{n+1} \rangle$, pak existuje η taková, že

$$T_n = \frac{Y^{(r+1)}(\eta)}{r!} \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} G(s) ds = c_{r+1} h^{r+1} Y^{(r+1)}(\eta), \quad x_{n-p} < \eta < x_{n+1}. \quad (\text{A.8})$$

Pro odhad lokální chyby celé metody prediktor-korektor lze použít Milneho odhad chyby [38]

$$T_n \approx \frac{c_{r+1}}{c_{r+1}^* - c_{r+1}} (y_{n+1}^{(m)} - y_{n+1}^{(0)}), \quad (\text{A.9})$$

kde c_{r+1} je konstanta chyby ve vztahu pro odhad lokální chyby prediktoru (A.8) a c_{r+1}^* totéž pro korektor. Vzorec (A.9) lze snadno použít pro změnu kroku metody h tak, aby neustále dosahovala požadované přesnosti za cenu co nejmenší výpočetní náročnosti.

Pro numerické řešení diferenciálních rovnic v kap. 5.3 byl jako prediktor použit Adams-Bashfordův vzorec 5. řádu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720} (1901y'_n - 2774y'_{n-1} + 2616y'_{n-2} - 1274y'_{n-3} + 251y'_{n-4}). \quad (\text{A.10})$$

Pro úspěšné použití tohoto vzorce potřebujeme znát prvních pět hodnot y_0, \dots, y_4 . K tomu je třeba použít některé jednokrokové (neboli samostartovací) metody. Ve výpočtech v této práci byla zvolena Runge-Kuttova metoda 4. řádu. Za korektor byl vzat Adams-Moultonův vzorec (opět 5.řádu):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{720}(251y'_{n+1} + 646y'_n - 264y'_{n-1} + 106y'_{n-2} - 19y'_{n-3}). \quad (\text{A.11})$$

Výpočtem podle vzorce (A.8) lze určit hodnoty konstanty chyby pro obě metody:

$$c_{k+1} = \frac{95}{288}, \quad c_{k+1}^* = -\frac{3}{160}. \quad (\text{A.12})$$

Literatura

- [1] Abramowitz, A., Stegun, I. A.: Handbook of mathematical functions. Dover Publications, New York, 1972.
- [2] Arnold, V.I., Avéz, A.: Mahtemactical methods of classical mechanics. Pergamon Press, Oxford, Londýn, New York, Paříž, 1968.
- [3] Balescu, R.: Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics. Wiley-Interscience Publication John Wiley and Sons, New York, Londýn, Sydney, Toronto, 1975.
- [4] Bizarro, J.P., Moreau, D.: On ray stochasticity during lower-hybrid current drive in tokamaks. *Physics of Fluids B*, 5(4):1227–1238, 1993.
- [5] Bonoli, P.T., Englade, R.C.: Simulation model for lower hybrid current drive. *Physics of Fluids*, 29(9):2937–2950, 1986.
- [6] Brambilla, M., Cardinali, A.: Eikonal description of h.f. waves in toroidal plasmas. *Plasma Physics*, 24(10):1187–1218, 1982.
- [7] Cahyna, P., Krlín, L.: Full hamiltonian description of the interaction of particles with magnetic islands in tokamak. *Czechoslovak Journal of Physics*, 56(4):367–380, 2006.
- [8] Cairns, R.A.: Radiofrequency heating of plasmas. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia a New York, 1991.
- [9] Cap., F.: Waves and plasma instabilities in plasmas. Springer-Verlag, Vídeň a New York, 1994.
- [10] Carlson, B.C.: Numerical computation of real or complex elliptic integrals. *Numerical Algorithms*, 10(1):13–26, 1995.
- [11] Cary, J.R., Doxas, I., Escande, D.F, Varga, A.D.: Enhacement of the velocity diffusion in longitudinal plasma turbulence. *Physics of Fluids B*, 7(4):2062–2069, 1992.
- [12] Chandrasekhar, S.: Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics*, 15(1):1–89, 1943.
- [13] Chirikov, B.V.: A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5):263–379, 1979.

- [14] Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Packard, N.H., Shaw, R.S.: Chaos. *Scientific American*, 255(6):46–57, 1986.
- [15] Doveil, F., Grésillon, D.: Statistics of charged particles in external random longitudinal electric fields. *Physics of Fluids*, 25(8):1396–1402, 1982.
- [16] Dupree, T.H.: A perturbation theory for strong plasma turbulence. *Physics of Fluids*, 9(9):1773–1782, 1966.
- [17] Fisch, N. J.: Confining a tokamak plasma with rf-driven currents. *Physical Review Letters*, 41(13):873–876, 1978.
- [18] Fisch, N. J.: Theory of current drive in plasmas. *Reviews of Modern Physics*, 59(1):175–234, 1987.
- [19] Fivaz, M., Appert, K., Krlín, L.: Propagation d'une onde hybride-inférieure dans un plasma axisymétrique. Rep. LRP 400/90, Centre de recherches en physique des plasmas, Lausanne, 1990.
- [20] Fuchs, V., Goniche, M., Demers, Y., Jacquet, P., Mailloux, J.: Acceleration of electrons in the vicinity of lower hybrid waveguide array. *Physics of Plasmas*, 3(11):4023–4035, 1996.
- [21] Fuchs, V., Krapchev, V., Ram, A., Bers, A.: Diffusion of electrons by coherent wavepackets. *Physica. D*, 14(2):141–160, 1985.
- [22] Goldstein, H.: Classical mechanics. Addison-Wesley, Reading, 1951.
- [23] Goldston, R.J., Rutherford, P.H.: Introduction to plasma physics. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol, 2000.
- [24] Horák, J., Krlín, L.: Vratnost a nevratnost dynamických systémů. Academia, Praha, 2004.
- [25] Horák, J., Krlín, L., Raidl, A.: Deterministický chaos a jeho fyzikální aplikace. Academia, Praha, 2003.
- [26] Horton, W., Ichikawa, Y.H.: Chaos and structures in nonlinear plasmas. World Scientific, Singapur, New Jersey, Londýn, Hong Kong, 1996.
- [27] Klafter, J., Shlesinger, M.F., Zumofen, G.: Beyond brownian motion. *Physics Today*, 49(2):33–39, 1996.
- [28] Kracík, J., Šesták, B., Aubrecht, L.: Základy klasické a kvantové fyziky plazmatu. Academia, Praha, 1974.
- [29] Kracík, J., Tobiáš, J.: Fyzika plazmatu. Academia, Praha, 1966.
- [30] Krlín, L., Pavlo, P., Pánek, R., Klíma, R., Petržílka, V.: Nonlinear effects in the wave-plasma interaction. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 44(2):159–170, 2002.
- [31] Kvasnica, J.: Statistická fyzika. Academia, Praha, 1983.

- [32] Landau, L.D.: On the vibrations of the electronic plasma. *Journal of Physics (USSR)*, 10:1–25, 1946.
- [33] Lichtenberg, A.J., Lieberman, M.A.: Regular and chaotic dynamics. Springer-Verlag, Berlín, 1992.
- [34] Mailloux, J., Brunet, F., et al.: Strong toroidal asymmetries in power deposition on divertor and first wall components during LHCD on TdeV and Tore Supra. *Journal of Nuclear Materials*, 241-243:745–749, 1997.
- [35] Pavlo, P., Krlín, L.: Limits of applicability of the quasilinear approximation to the lower hybrid wave-plasma interaction. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 41(4):541–550, 1999.
- [36] Pavlo, P., Krlín, L., Tluchoř, Z.: Effect of magnetized alpha particles on lower hybrid heating and current drive in a reactor grade plasma. *Nuclear Fusion*, 31(4):711–726, 1991.
- [37] Pánek, R.: Nonlinear and stochastic interaction of waves with plasma. Doktorská disertační práce, Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha, 2002.
- [38] Ralston, A.: Základy numerické matematiky. Academia, Praha, 1978.
- [39] Rektorys, K.: Přehled užití matematiky I,II. Prometheus, Praha, 2000.
- [40] Santini, F.: Developments in lower hybrid theory. Rep. RT/FUS/85/6, ENEA, Dipartimento Fusione, Centro Ricerche Energia Frascati, Frascati, Řím, 1985.
- [41] Shafranov, V.D. , Bondarenko, B. D., Goncharov, G. A.: On the history of the research into controlled thermonuclear fusion. *Physics-Uspekhi*, 44(8):835–865, 2001.
- [42] Shlesinger, M.F., Zaslavsky, G.M., Klafter, J.: Strange kinetics. *Nature*, 363:31–37, 1993.
- [43] Vlasov, A.A.: *Journal of Physics (USSR)*, 8:25, 1938.