Obsah

Kapitola 1

Úloha

1.1 Max-min algebra

Definícia 1 *Množinu* $\mathcal{E}(\max, \wedge) \subset R$ *nazveme* $(\max, \wedge)$*-algebrou, ak pre ľubovolné* $\alpha, \beta \in \mathcal{E}(\max, \wedge)$ *platí:*

$$\begin{array}{r} \alpha \wedge \beta \in \mathcal{E}(\max, \wedge) \\ \max(\alpha, \beta) \in \mathcal{E}(\max, \wedge) \end{array} \qquad \forall \alpha, \beta \in R$$

kde $\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$ *a* $\exists \underline{\epsilon}, \overline{\epsilon} \in \mathcal{E}(\max, \wedge)$ *také, že* $\underline{\epsilon} \leq \alpha \leq \overline{\epsilon} \quad \forall \alpha \in \mathcal{E}(\max, \wedge)$*.*

Pre jednoduchosť budeme používať $\mathcal{E}$ namiesto $\mathcal{E}(\max, \wedge)$.

Operácie $\max, \wedge$ sa používajú formálne rovnako ako v klasickej algebre, takže pre $x, y \in \mathcal{E}^n$

$$x^T \textcircled{\wedge}\, y = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j \wedge y_j)$$

Pre matice A, B rozmerov m $\times$ k, k $\times$ n, $a_{ij}, b_{ij} \in \mathcal{E}$

$$(A \textcircled{\wedge}\, B)_{ij} = \max_{1 \leq l \leq k} (a_{il} \wedge b_{lk}) \in \mathcal{E}(\max, \wedge) \qquad \forall i = 1, \dots m, \quad \forall j = 1, \dots n$$

Rovnicu $a^T \textcircled{\wedge}\, x = b^T \textcircled{\wedge}\, x$ nazveme $(\max, \wedge)$-lineárnou homogénnou rovnicou s koeficientmi $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ a neznámymi $x_1, \dots, x_n$. Rovnicu $\max((a^T \textcircled{\wedge}\, x), \alpha) = \max((b^T \textcircled{\wedge}\, x), \beta)$ nazveme $(\max, \wedge)$-lineárnou nehomogénnou rovnicou s koeficientmi $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ a neznámymi $x_1, \dots, x_n$, kde $\alpha, \beta \in \mathcal{E}$.

Príklady $(\max, \wedge)$ -algebier:

a) $\mathcal{E}(\max, \wedge) = \bar{R}$

b) $\mathcal{E}(\max, \wedge) = \{0, 1\}$

c) $\mathcal{E}(\max, \wedge) = \bar{Z}$

d) $\mathcal{E}(\max, \wedge) = \{\alpha \in R |\ \underline{\alpha} \leq \alpha \leq \overline{\alpha}\}$, kde $-\infty \leq \underline{\alpha} \leq \overline{\alpha} \leq \infty$

Poznámka 1 *Používame značenie:*
$R = (\infty, \infty)$, $\bar{R} = R \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$,
$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ *a* $\bar{Z} = Z \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$

1.2 Formulácia problému

Budeme sa zaoberať riešením sústavy m $(\max, \wedge)$-lineárnych rovníc o n neznámych tvaru:

$$A \textcircled{\wedge}\, x = B \textcircled{\wedge}\, x \tag{1.1}$$

kde

$$\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$$

a A, B, $\underline{x}$, $\overline{x}$, sú matice a vektory s konečnými prvkami z danej $(\max, \wedge)$-algebry $\mathcal{E}$ s naväčším prvkom $\overline{\alpha}$ a najmenším prvkom $\underline{\alpha}$.
Túto úlohu môžme po zložkách zapísať:

$$\begin{aligned} a_i(x) = b_i(x) \quad & \forall i = 1, \ldots, m \\ \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \quad & \end{aligned} \tag{1.2}$$

kde $a_i(x) = \max_{1 \leq j \leq n}(a_{ij} \wedge x_j)$ a $b_i(x) = \max_{1 \leq j \leq n}(b_{ij} \wedge x_j)$.

Definícia 2 *Množinu vektorov x, ktoré vyhovujú sústave 1.2 označíme symbolom M.*

$$M = \{\ x \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\ \&\ a_i(x) = b_i(x)\ \forall i = 1, \ldots, m\}$$

1.3 Postup riešenia

Lemma 1 *Ak* $\underline{x}_j \geq \max_{1 \leq i \leq m}(a_{ij}, b_{ij}) \quad \forall i = 1 \ldots n$, *potom* $M = \emptyset$, *alebo* $M = \{\ x \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$.

Dôkaz:
Podľa predpokladu platí:

$$\begin{array}{c} a_{ij} \wedge x_j = a_{ij} \\ b_{ij} \wedge x_j = b_{ij} \end{array} \quad \forall i = 1 \ldots m \; \forall j = 1 \ldots n \quad \forall x_j \in \left\langle \underline{x}_j, \overline{x}_j \right\rangle$$

Preto $\forall i$ a pre $x \in \left\langle \underline{x}_j, \overline{x}_j \right\rangle \quad a_i(x) = \max_j a_{ij}$ a $b_i(x) = \max_j b_{ij}$ Potom $a_i(x) = b_i(x) \quad \forall i$ a teda $M = \{ x \mid \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \}$, alebo $\exists i \quad a_i(x) \neq b_i(x)$ a úloha nemá riešenie pre žiadne $x \in \left\langle \underline{x}_j, \overline{x}_j \right\rangle$. $\boxtimes$

Lemma 2 *Ak* $\underline{x}_k \leq \min_{1 \leq i \leq m}(a_{ik}, b_{ik})$, *kde* $k = \arg\max_{1 \leq j \leq n} \underline{x}_j$, *potom je vždy* $M \neq \emptyset$.

Poznámka 2

$$\arg\max_j h(j) = k \quad \Leftrightarrow \quad h(k) = \max_j h(j)$$

Dôkaz:
Pre $\underline{x}$ podľa predpokladu vety $\forall i$ a pre $k \equiv \arg\max_j \underline{x}_j$ platí:

$$\begin{array}{r} a_{ik} \wedge \underline{x}_k = \underline{x}_k, \quad b_{ik} \wedge \underline{x}_k = \underline{x}_k \\ \forall j,\; j \neq k \quad a_{ij} \wedge \underline{x}_j \leq \underline{x}_j, \quad b_{ij} \wedge \underline{x}_j \leq \underline{x}_j \end{array}$$

Keďže $\underline{x}_j \leq \underline{x}_k \quad \forall j,\; j \neq k$, tak $\forall i \quad a_i(\underline{x}) = b_i(\underline{x}) = \underline{x}_k$. Takže $\underline{x} \in M$. $\boxtimes$

Lemma 3 *Ak* $\overline{x}_k \leq \min_{1 \leq i \leq m}(a_{ik}, b_{ik}) \quad \forall k = 1 \ldots n$, *potom* $M = \{x | \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$.

Dôkaz:
Z predpokladov je jasné, že $a_{ij} \wedge x_j = x_j$ a $b_{ij} \wedge x_j = x_j \quad \forall i, j \; \forall x \in \langle \underline{x}, \overline{x} \rangle$ a preto

$$\forall x \in \langle \underline{x}, \overline{x} \rangle \quad a_i(x) = b_i(x) = \max_j (x_j)$$

a teda $x \in M$. $\boxtimes$

Pre úlohy spĺňajúce predpokady jednej z predošlých liem máme hneď triviálne riešenie úlohy, poprípade vieme, že úloha riešenie nemá. Ďalej sa preto budeme zaoberať riešením úloh, ktoré nespĺňajú ani jeden z predpokladov lemmy 1 - 3. Riešenie úlohy 1.2 budeme hľadať pomocou optimalizačnej úlohy:

$$f(x) = \max_{1 \le i \le m} |a_i(x) - b_i(x)| \to \min \tag{1.3}$$
$$\underline{x} \le x \le \overline{x}$$

kde $\quad a_i(x) = \max_{1 \le j \le n}(a_{ij} \wedge x_j), \quad b_i(x) = \max_{1 \le j \le n}(b_{ij} \wedge x_j).$

Úloha 1.3 má vždy optimálne riešenie. Ak je $f(x_{opt}) = 0$, tak $\forall i = 1 \ldots m$ platí $a_i(x_{opt}) = b_i(x_{opt})$ a teda x_{opt} je riešením úlohy 1.2.
Ak je $f(x_{opt}) \neq 0$, tak x_{opt} predstavuje najmenší možný rozdiel medzi ľavou a pravou stranou v úlohe 1.2.

Kapitola 2

Riešenie úlohy

2.1 Popis algoritmu

V tejto kapitole popíšem bližšie algoritmus riešiaci úlohu 1.3. Najprv zavedieme pojmy a značenie, ktoré budeme ďalej používať.

Ak $x \notin M$, potom $a_i(x) > b_i(x)$, alebo $a_i(x) < b_i(x)$ pre nejaké i, a teda aj $f(x) \neq 0$. Bez ujmy na obecnosti môžme ďalej predpokladať, že nastávajú iba nerovnosti typu $a_i(x) > b_i(x)$.
Pre každú rovnicu i označíme:

$$f_i(x) = a_i(x) - b_i(x)$$

Množinu rovníc, v ktorých $f_i(x)$ nadobúda hodnotu maxima označíme:

$$D(x) = \{i \mid a_i(x) - b_i(x) = f(x)\}$$

Definícia 3 *Člen j je v rovnici i a bode x aktívny na ľavej (pravej) strane, ak platí: $a_{ij} \wedge x_j = a_i(x) \quad (b_{ij} \wedge x_j = b_i(x))$.*

Označme $\forall i \in 1 \ldots n$

$$F_i(x) = \{j \mid a_{ij} \wedge x_j = a_i(x)\}$$
$$G_i(x) = \{j \mid b_{ij} \wedge y_j = b_i(x)\}$$

$F_i(x)$ a $G_i(x)$ sú množinami aktívnych členov pre rovnicu i.

Definícia 4 *Premenná x_j je aktivovaná v rovnici i na ľavej (pravej) strane, ak platí: $a_{ij} \geq x_j$ $(b_{ij} \geq x_j)$.*

Množiny členov j, ktoré sú aktivované v danej rovnici budeme značiť $F_{A_i}(x)$ a $G_{A_i}(x)$.

$$F_{A_i}(x) = \{\, j \mid x_j \leq a_{ij}\}$$
$$G_{A_i}(x) = \{\, j \mid x_j \leq b_{ij}\}$$

Pri hľadaní riešenia začneme z bodu $\overline{x}$. Tento bod budeme postupne po zložkách znižovať tak, aby sa znížila hodnota účelovej funkcie. Zložky x_j, ktoré nie je nutné meniť ponecháme nezmenené. Znížime $a_i(x)$ pre všetky $i \in D(x)$ tak, aby sa znížila hodnota $f_i(x)$.

Množinu indexov premenných, ktoré je potrebné znížiť označíme:

$$F(x) = \bigcup F_i(x) \qquad \text{pre } i \in D(x)$$

Budeme rozlišovať 2 prípady:

A) ak platí podmienka:

$$\forall i \in D(x) \qquad F_i(x) \subseteq F_{A_i}(x) \tag{C1}$$

B) ak podmienka (C1) neplatí

A)
Keďže platí C1 vieme, že znížením x_j pre $j \in F(x)$ o vhodné δ sa zníži $a_i(x)$ pre $\forall i \in D(x)$ o δ. V prípade, že platí:

$$\forall i \in D(x) \quad G_i(x) \nsubseteq F(x) \text{ alebo } G_i(x) \nsubseteq G_{A_i}(x) \tag{C2}$$

sa znížením x_j pre $j \in F(x)$ o δ hodnoty $b_i(x)$ pre $i \in D(x)$ zachovajú, a preto sa $f(x)$ zníži o δ. Zadefinujeme $x(\delta) = (x_1(\delta), \ldots, x_n(\delta))$, kde:

$$x_j(\delta) = x_j - k_j\delta \quad \text{pre} \quad k_j = \begin{cases} 1 & j \in F(x) \\ 0 & j \notin F(x) \end{cases}$$

Ak platí (C2), tak pre takto definované $x(\delta)$ pre vhodné $d > 0$ platí:

$$f(x(\delta)) = f(x) - \delta$$

Samotnú hodnotu δ určíme neskôr. V prípade, že (C2) neplatí, tak sa hodnota $f(x(\delta)) = f(x)$ a to práve v rovniciach, ktoré porušujú (C2). Hodnoty k_j musíme pre tento prípad upraviť tak, aby sa hodnota $f(x)$ tiež znížila o δ. Množinu rovníc ktoré porušujú (C2) označíme:

$$D_{=}(x) = \{\, i \mid i \in D(x) \;\&\; G_i(x) \in F(x) \;\&\; G_i(x) \subseteq G_{A_i}(x)\}$$

Poznámka 3 *Pre prípad, že C2 platí je* $D_=(x) = \emptyset$

Chceme, aby pre $i \in D_=(x)$ platilo:

$$a_i(x(\delta)) - b_i(x(\delta)) = \delta$$

preto postupne budeme meniť koeficienty k_j pre $j \in F_i(x)$ tak, aby platilo:

$$\min_{j \in F_i(x)} k_j \geq (\min_{j \in G_j(x)} k_j) + 1$$

Koeficienty k_j budeme postupne nastavovať pre rovnice $i \in D_=(x)$, kde vieme, že k_l pre $l \in G_i(x)$ sa už nebudú meniť. To platí pre rovnice s najmenšou hodnotou $b_i(x)$. Koeficienty upravíme nasledujúcim algoritmom.

Algoritmus D1

1. $S = D_=(x)$;
2. **while** $S \neq \emptyset$
   $i = k : \quad k \in S \quad b_k(x) = \min_{j \in S} b_j(x)$
   $S = S \backslash \{i\}$;
   for $j \in F_i(x)$
   $k_j = \max(\min_{l \in G_i(x)} k_l + 1, k_j)$;

Počas ďalšieho behu algoritmu nás budú zaujímať množiny $F_i(x)$, $G_i(x)$, $D(x)$ a $D_=(x)$, ktoré ostanú nezmenené aj pre $x(\epsilon)$ pre $\epsilon > 0$ ľubovoľne malé. Preto označíme:

$$D^{'}(x) = \{\, i \mid i \in D(x) \ \& \ \min_{j \in F_i(x)} k_j - \min_{l \in G_i(x)} k_l = 1\}$$

$$D^{'}_=(x) = \{\, i \mid i \in D_=(x) \ \& \ \min_{j \in F_i(x)} k_j - \min_{l \in G_i(x)} k_l = 1\}$$

$$F^{'}_i(x) = \{\, j \mid j \in F_i(x) \ \& \ k_j = \min_{l \in F_i(x)} k_l\}$$

$$G^{'}_i(x) = \{\, j \mid j \in G_i(x) \ \& \ k_j = \min_{l \in G_i(x)} k_l\}$$

Zmenou k_j podľa kroku 2 algoritmu D1 pre rovnicu i môže nastať situácia, že j prestane byť aktívnym členom na ľavej strane pre nejaké $k \in D^{'}(x)$. Touto úpravou ale zabezpečíme, že $j \in F^{'}_i(x)$ pre i z algoritmu. Preto:

$$F(x) = \bigcup_i F^{'}_i(x) \qquad \text{pre } i \in D^{'}(x)$$

Rovnako ako $F(x)$ ani množiny $F_{A_i}(x)$ a $G_{A_i}(x)$ sa úpravou k_j nemenia.

Teraz budeme hľadať maximálne δ, pre ktoré sa ešte bude hodnota účelovej funkcie znižovať. Budeme postupne prechádzať všetky prípady, v ktorých sa zmení aspoň jedna z množín $F^{'}(x)$, $G^{'}(x)$, $F_{A_i}(x)$, $G_{A_i}(x)$ alebo $D^{'}(x)$. Pre jednotlivé možnosti budeme označovať maximálne δ premennými $t_1, \ldots, t_6$. Výsledné δ bude minimom z týchto hodnôt, preto každý prípad môžme rozoberať nezávisle na ostatných. Môžu nastať nasledujúce prípady:

1. dosiahneme minimum definičného oboru pre nejaké x_j

$$t_1 = \min_{j \in F(x)} \frac{x_j - \underline{x}_j}{k_j}$$

2. Zmení sa $F_i^{'}(x)$ pre ľubovoľné i

   Pre každú rovnicu i nájdeme t_2^i, pre ktoré sa zmení $F_i^{'}(x)$. Množina $F_i^{'}(x)$ sa môže zmeniť iba ak $a_i(x(\delta))$ s rastúcim δ klesá. To nastane ak platí:

$$F_i^{'}(x) \subseteq F(x) \;\&\; F_i^{'}(x) \subseteq F_{A_i}(x)$$

   Pre i pre ktoré neplatí táto podmienka definujme $t_2^i = \infty$. Pre i spĺňajúce podmienku do $F_i^{'}(x)$ môže pribudnúť člen:

   - Ak je jeho hodnota nižšia ako $a_i(x)$ a neklesá. Množinu indexov spĺňajúcich túto podmienku označme $T_i^1(x)$.

$$T_i^1(x) = \{j | \, (a_{ij} \wedge x_j < a_i(x)) \;\&\; (j \notin F(x) \text{ alebo } j \in F(x) \backslash F_{A_i}(x))\}$$

     Hodnota, pri ktorej sa $j \in T_i^1(x)$ stane aktívnym členom na ľavej strane je

$$\frac{a_i(x) - (a_{ij} \wedge x_j)}{\min_{l \in F_i^{'}(x)} k_l}$$

   - Ak je jeho hodnota nižšia ako $a_i(x)$ a klesá pomalšie ako $a_i(x)$. Táto možnosť môže nastať iba v prípade, že neplatí (C2) a k_j boli upravené algoritmom D1. Množinu indexov spĺňajúcich túto podmienku označme $T_i^2(x)$.

$$T_i^2(x) = \{\, j \mid (a_{ij} \wedge x_j < a_i(x)) \;\&\; j \in F(x) \backslash F_i^{'}(x) \;\& \\ \&\;\; j \in F_{A_i}(x) \;\&\; k_j < \min_{l \in F_i^{'}(x)} k_l\}$$

Hodnota, pri ktorej sa $j \in T_i^1(x)$ stane aktívnym členom na ľavej strane je

$$\frac{a_i(x) - x_j}{\min_{l \in F_i'(x)} k_l - k_j}$$

Potom

$$t_2^i = \min(\min_{j \in T_i^1(x)} \frac{a_i(x) - (a_{ij} \wedge x_j)}{\min_{l \in F_i'(x)} k_l}, \min_{j \in T_i^2(x)} \frac{a_i(x) - x_j}{\min_{l \in F_i'(x)} k_l - k_j})$$

Hodnotu t_2 určíme ako:

$$t_2 = \min_{1 \le i \le m} t_2^i$$

3. Zmení sa $G_i^{'}(x)$ pre ľubovoľné i

   Tu je situácia obdobná ako v predchádzajúcom prípade. Pre i nespĺňajúce

   $$G_i^{'}(x) \subseteq F(x) \ \& \ G_i^{'}(x) \subseteq G_{A_i}(x)$$

   definujme $t_3^i = \infty$ inak

   $$t_3^i = \min(\min_{j \in T_i^{1'}(x)} \frac{b_i(x) - (b_{ij} \wedge x_j)}{\min_{l \in G_i'(x)} k_l}, \min_{j \in T_i^{2'}(x)} \frac{b_i(x) - x_j}{\min_{l \in G_i'(x)} k_l - k_j})$$

   kde

   $$\begin{aligned} T_i^{1'}(x) &= \{ \, j \mid (b_{ij} \wedge x_j < b_i(x)) \ \& \ (j \notin F(x) \text{ alebo } j \in F(x) \backslash G_{A_i}(x)) \} \\ T_i^{2'}(x) &= \{ \, j \mid (b_{ij} \wedge x_j < b_i(x)) \ \& \ j \in F(x) \backslash G_i^{'}(x) \ \& \\ &\qquad \& \ j \in G_{A_i}(x) \ \& \ k_j < \min_{l \in G_i'(x)} k_l \} \end{aligned}$$

   a

   $$t_3 = \min_{1 \le i \le m} t_3^i$$

4. Pribudne nová premenná do $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$ pre ľubovoľnú rovnicu i

   $$t_4 = \min_i (\min_{j \notin F_{A_i}(x)} \frac{x_j - a_{ij}}{k_j}, \min_{j \notin G_{A_i}(x)} \frac{x_j - b_{ij}}{k_j})$$

5. Zmení sa množina $D^{'}(x)$

   Táto možnosť nastane, ak sa hodnota účelovej funkcie nadobudne v ďalšej rovnici. Pre každú rovnicu i určíme t_5^i, pri ktorej bude platiť $f_i(x(t_5^i) = f(x(t_5^i)$. Pri znižovaní premenných x_j pre $j \in F(x)$ v rovniciach, kde je $f_i(x) < f(x)$ môžu nastať nasledujúce situácie.

   i So zväčšujúcim sa δ $f_i(x(\delta))$ rastie. To nastane pre rovnice, v ktorých platí :

$$(F_i^{'}(x) \nsubseteq F(x) \text{ alebo } F_i^{'}(x) \nsubseteq F_{A_i}) \; \& \\ \& \; G_i^{'}(x) \subseteq F(x) \; \& \; G_i^{'}(x) \subseteq G_{A_i}(x) \qquad (Ci)$$

   Tieto rovnice nadobudnú hodnotu účelovej funkcie pre

$$t_5^i = \frac{f(x) - f_i(x)}{1 + \min_{j \in G_i^{'}(x)} k_j}$$

   Môže tiež platiť:

$$F_i^{'}(x) \subseteq F(x) \; \& \; F_i^{'}(x) \subseteq F_{A_i}(x) \; \& \; G_i^{'}(x) \subseteq F(x) \& \\ \& \; G_i^{'}(x) \subseteq G_{A_i}(x) \; \& \min_{j \in F_i^{'}(x)} k_j < \min_{j \in G_i^{'}(x)} k_j \quad (Ci')$$

   potom

$$t_5^i = \frac{f(x) - f_i(x)}{1 + \min_{j \in G_i^{'}(x)} k_j - \min_{j \in F_i^{'}(x)} k_j}$$

   ii S rastúcim δ $f_i(x)$ najprv klesá, a potom stúpa. Táto možnosť nastane pre rovnice, v ktorých:

$$F_i^{'}(x) \subseteq F(x) \;\; \& \;\; F_i^{'}(x) \subseteq F_{A_i}(x) \; \& \\ \& \;\; (G_i^{'}(x) \nsubseteq F(x) \text{ alebo } G_i^{'}(x) \nsubseteq G_{A_i}(x)) \quad (Cii)$$

   Pre tieto rovnice je

$$t_5^i = \frac{f(x,y) + f_i(x)}{1 + \min_{j \in F_i^{'}(x)} k_j}$$

   Alebo ak platí:

$$F_i^{'}(x) \subseteq F(x) \; \& \; F_i^{'}(x) \subseteq F_{A_i}(x) \; \& \; G_i^{'}(x) \subseteq F(x) \& \\ \& \; G_i^{'}(x) \subseteq G_{A_i}(x) \; \& \min_{j \in F_i^{'}(x)} k_j > \min_{j \in G_i^{'}(x)} k_j \quad (Cii')$$

potom

$$t_5^i = \frac{f(x) + f_i(x)}{1 + \min_{j \in F_i'(x)} k_j - \min_{j \in G_i'(x)} k_j}$$

iii $f_i(x)$ je konštantná. To platí pre rovnice $i \notin D^{'}(x)$, ktoré nespĺňajú ani jednu z podmienok Ci, Ci', Cii alebo Cii'. Tieto rovnice nadobudnú hodnotu účelovej funkcie pre

$$t_5^i = f(x) - f_i(x)$$

iv Pre $i \in D^{'}(x)$ zadefinujme $t_5^i = \infty$.

Hodnotu t_5 vyberieme ako minimum z týchto hodnôt, pretože nás zaujíma prvá rovnica, ktorá nadobudne maxima účelovej funkcie.

$$t_5 = \min_i t_5^i$$

6. Zájdeme optimálne riešenie úlohy

$$t_6 = f(x)$$

Hodnotu δ určíme:

$$\delta = \min(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$$

Získané $x(\delta)$ použijeme ako východzí bod ďalšej iterácie algoritmu pričom $f(x(\delta)) < f(x)$.

B)

Na to aby sme znížili $a_i(x)$ pre $i \in D(x)$ je potrebné aktivovať premenné v rovniciach, ktoré porušujú (C1). Množinu indexov premenných, ktoré je potrebné aktivovať aspoň v jednej rovnici označíme $A(x)$.

$$A(x) = \{j|\ j \in \bigcup (F_i(x) \backslash F_{A_i}(x)),\ i \in D(x)\}$$

x_j pre $j \in A(x)$ potom upravíme:

$$x_j = \max(\min_i a_{ij}, \underline{x}_j) \quad \text{pre} \quad i \in D(x) \text{ ak } j \in F_i(x)$$

Tým ale môže nastať situácia, že sa hodnota účelovej funkcie zvýši, čo je ale pre ďalší postup nevyhnutné. Tieto body je potrebné si pamätať, pretože jeden z nich môže byť bodom optima v prípade, že nenájdeme bod, kde $f(x) = 0$.

2.2 Algoritmus D2

Kvôli prípadu, že (C1) neplatí si budeme v premennej $\tilde{x}$ pamätať doterajšie najlepšie nájdené riešenie úlohy.

1. $k = 0$; $(x^0) = \overline{x}$; $\tilde{x} = \overline{x}$;

2. **if** $f(x^k) == 0$ **then** **return** x^k;
   if $x^k == x^{k-1}$ **then** **return** $\arg\min(f(\tilde{x}),\ f(x^k))$;

3. **if** C1 **then goto** 4
   else goto 5

4. **if** not C2 **then** uprav k_j algoritmom D1;
   $\delta = \min(t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5,\ t_6)$;
   $x_j^{k+1} = x^k(\delta)$;
   $k = k + 1$;
   goto 2

5. **if** $f(\tilde{x}) > f(x^k)$ **then** $(\tilde{x}) = (x^k)$;
   $x_j^{k+1} = \begin{cases} \max(\min_i a_{ij}, \underline{x}_j) & j \in A(x), \quad i \in D(x) \text{ kde } j \in F_i(x) \\ x_j^k & j \notin A(x) \end{cases}$
   $k = k + 1$;
   goto 2

2.3 Dôkaz správnosti algoritmu D2

Veta 1 *Nech x^0 je súčasný bod algortimu D2 a x^1 je bod definovaný v kroku 4. Potom pre $\tilde{x} \leq x^0$ a $\tilde{x} \not\leq x^1$ platí: $f(\tilde{x}) > f(x^1)$.*

Dôkaz:
Označme:

$$P = \{\ j \mid \tilde{x}_j > x_j^1\}$$
$$\epsilon = \min_j \frac{x_j^0 - \tilde{x}_j}{k_j}$$

Z algoritmu vieme: $\forall j \notin F(x) \quad x_j^0 = x_j^1$ z čoho plynie $\tilde{x}_j = x_j^1$ a preto $P \subseteq F(x^0)$. Zadefinujme si $x^0(\epsilon)$ rovnako ako v algoritme a teda:

$$x_j^0(\epsilon) = x_j^0 - k_j\epsilon$$

Kedže $\epsilon < \delta$, tak:

$$x^0(\epsilon) \geq \ x^0(\delta) = \ x^1$$
$$f(x^0(\epsilon)) = f(x^0) - \ \epsilon > f(x^0) \ -\delta = f(x^1)$$

Ďalej označme:

$$Q = \{ \ j \mid j \in P \ \& \ \tilde{x}_j = x^0(\epsilon)\}$$

Množina Q obsahuje práve indexy j pre ktoré $\frac{x_j^0 - \tilde{x}_j}{k_j} = \epsilon$, preto je neprázdna a tiež platí, že $Q \subseteq F(x^0)$. Z definície $F(x^0)$ plynie:

$$\forall k \in Q \quad \exists r \in D^{'}(x^0): \ k \in F_r^{'}(x^0)$$

Pre ľubovoľné $k \in Q$ a jemu prislúchajúce $r \in D^{'}(x^0)$ platí:

$$a_r(x^0(\epsilon)) = x_k = a_r(\tilde{x})$$

Kedže $x^0(\epsilon) \geq \tilde{x}$ tak $b_r(x^0(\epsilon)) \geq b_r(\tilde{x})$. Potom ale:

$$f_r(x^0(\epsilon)) = a_r(x^0(\epsilon) - b_r(x^0(\epsilon) \leq a_r(\tilde{x}) - b_r(\tilde{x}) = f_r(\tilde{x})$$

Takže:

$$f(x^1) < f(x^0(\epsilon)) = f_r(x^0(\epsilon)) \leq f_r(\tilde{x}) \leq f(\tilde{x})$$

$\boxtimes$

Veta 2 *Nech x^0 je súčasný bod algortimu a x^1 je bod definovaný v kroku 5. Potom pre $\tilde{x} \leq x^0$ a $\tilde{x} \nleq x^1$ platí: $f(\tilde{x}) \geq f(x^0)$.*

Dôkaz:
Z algoritmu vieme:

$$\begin{array}{ll} x^0 = x^1 & \quad j \notin A(x) \\ x^0 > x^1 & \quad j \in A(x) \end{array}$$

Označme:

$$P = \{ \ j \mid \tilde{x}_j > x_j^1\}$$

Vieme, že pre $j \in A(x)$ je $x_j^1 = \min_i a_{ij}$ pre $i \in D(x)$ a ak $j \in F_i(x)$, preto pre ľubovoľné $k \in P$ platí:

$$\exists r \in D(x^0): \quad k \in F_r(x^0) \backslash F_{A_r}(x^0) \quad a_{rk} < \tilde{x}_k$$

a teda aj

$$a_r(\tilde{x}) = a_r(x^0)$$

Keďže $x^0 \geq \tilde{x}$, tak

$$b_r(x^0) \geq b_r(\tilde{x})$$

z čoho plynie:

$$f(x^0) = f_r(x^0) = a_r(x^0) - b_r(x^0) \leq a_r(\tilde{x}) - b_r(\tilde{x}) = f_r(\tilde{x}) \leq f(\tilde{x})$$

⊠

Veta 3 *Nech x_{opt} je riešenie úlohy 1.3 nájdené algoritmom D2. Ak $f(x_{opt}) = 0$ potom x_{opt} je maximálny prvok M.*

Dôkaz:
Keďže $f(x_{opt}) = 0$, tak

$$a_i(x_{opt}) = b_i(x_{opt}) \qquad \forall i = 1 \ldots m$$

a teda $x_{opt} \in M$.

Nech x_{opt} je získané algoritmom D2 v kroku $k+1$. Potom x_{k+1} bolo získané z x_k krokom 4 algoritmu, lebo inak by podľa vety 2 platilo:

$$f(x_k) \leq f(x_{k+1}) = 0$$

a teda x_k by bolo riešenie vrátené algoritmom.

Nech existuje $x'_{opt} \geq x_{opt}$ pre ktoré $f(x'_{opt}) = 0$. Označme x_l najmenší z bodov algoritmu, ktoré sme získali krokom 5 a ktoré sú väčšie ako x'_{opt}. Ak taký bod nie je, tak označme ako x_l bod $\overline{x}$. Algoritmus D2 postupuje ďalej z bodu x_l krokom 4 postupne do bodov $x_{l+1}, \ldots, x_{l+i}$ kým platí $x_{l+i} \geq x'_{opt}$. Nech x_{l+i} je posledný bod algoritmu pre ktorý platí $x_{l+i} \geq x'_{opt}$. Potom pre x_{l+i+1} platí

$$x_{l+i+1} \ngeq x'_{opt}$$

Ak bol x_{l+i+1} vytvorený v kroku 4, tak podľa vety 1 platí:

$$f(x_{l+i+1}) < f(x'_{opt}) = 0$$

čo je spor s tým, že $f(x) \geq 0$.

Ak bol x_{l+i+1} vytvorený v kroku 5, tak podľa vety 2 platí:

$$f(x_{l+i}) \leq f(x'_{opt}) = 0$$

z čoho plynie, že $f(x_{l+i}) = 0$, potom ale $x_{l+i} = x_{opt}$ a teda $x_{opt} \geq x'_{opt}$, čo je spor. ⊠

Veta 4 *Nech x_{opt} je riešenie úlohy 1.3 nájdené algoritmom D2. Ak $f(x_{opt}) \neq 0$ potom x_{opt} je optimálne riešenie úlohy 1.3.*

Dôkaz:
Nech x_k a x_l sú dva po sebe nasledujúce body algoritmu, ktoré vznikli krokom 5. Bod $\overline{x}$ môžme považovať za prvý takýto bod. Podľa vety 1 vieme:

$$f(x_{l-1}) < f(\tilde{x}) \quad \text{pre } \tilde{x} \leq x_k \;\&\; \tilde{x} \nleq x_{l-1}$$

Z vety 2 vieme:

$$f(x_{l-1}) \leq f(\tilde{x}) \quad \text{pre } \tilde{x} \leq x_{l-1} \;\&\; \tilde{x} \nleq x_l$$

Z toho dostávame:

$$f(x_{l-1}) \leq f(\tilde{x}) \quad \text{pre } \tilde{x} \leq x_k \;\&\; \tilde{x} \nleq x_l$$

a teda x_{l-1} je optimálne riešenie úlohy pre $x \in \langle x_l, x_k \rangle$.

Pre dva po sebe nasledujúce intervaly $\langle x_m, x_l \rangle, \langle x_l, x_k \rangle$ a ich optimálne hodnoty x_{l-1} a x_{j-1} označme

$$x_{min} = \arg\min(f(x_{l-1}), f(x_{m-1}))$$

potom platí:

$$\begin{aligned} f(x_{min}) \leq f(x_{l-1}) \leq f(\tilde{x}) &\quad \text{pre } \tilde{x} \leq x_k \;\&\; \tilde{x} \nleq x_l \\ f(x_{min}) \leq f(x_{m-1}) \leq f(\tilde{x}) &\quad \text{pre } \tilde{x} \leq x_l \;\&\; \tilde{x} \nleq x_m \end{aligned}$$

preto x_{min} je optimálne riešenie úlohy 1.3 na intervale $\langle x_m, x_k \rangle$.

Postupne zjednotením všetkých intervalov dostávame optimálne riešenie úlohy 1.3 na intervale $\langle \underline{x}, \overline{x} \rangle$, čo je práve hodnota vrátená algoritmom D2. ⊠

2.4 Zložitosť algoritmu D2

Zhora odhadneme zložitosť algoritmu D2, čím ukážeme, že algoritmus D2 je polynomiály.

Hodnota x^k sa počas jednej iterácie nemení, preto jednotlivé množiny a hodnoty funkcií pre toto x^k stačí vyhodnotiť iba raz. Nech sa to udeje v kroku 2. Ďalej môžme považovať vyčíslenie týchto funkcií za konštantnú operáciu. Týka sa to napríklad hodnoty funkcie $f(x^k)$. Pre jej vyhodnotenie je potrebných mn operácií. Na určenie všetkých spomínaných množín je potrebné $O(mn)$ operácií, preto zložitosť kroku 2 je $O(mn)$.

V kroku 4 algoritmu D2 beží algoritmus D1, preto určíme jeho zložitosť. Zložitosť kroku 1 algoritmu D1 považujeme za jednotkovú. Krok 2 sa cyklicky opakuje, pričom pri každom opakovaní sa veľkosť množiny $D_=(x)$ zníži o 1. Takže sa môže opakovať najviac m-1 krát. Samotný krok 2 má zložitosť $O(n)$, takže zložitosť algoritmu D1 je $O(mn)$.

Na vyhodnotenie podmienok C1 a C2 je potrebné vykonať mn operácií. Taktiež pre určenie $\delta_1 - \delta_6$ je potrebné nanajvýš $O(mn)$ operácií. Preto zložitosť krokov 3 a 4 je tiež $O(mn)$.

V kroku 5 je na určenie hodnoty x_j^{k+1} pre $j \in A(x^k)$ potrebných najviac m operácií a teda aj zložitosť kroku 5 je $O(mn)$.

Algoritmus D2 beží v cykle medzi krokmi 2 a 4 alebo 5. Ako sme ukázali každý z krokov 2, 3, 4 a 5 má zložitosť $O(mn)$. Teraz musíme spočítať maximálny počet cyklov. Vzhľadom k tomu, že žiadne x_j sa počas behu nezvyšuje, tak množiny $F_{A_i}(x)$ a $G_{A_i}(x)$ sa zväčšujú, čo znamená, že sa môžu zmeniť najviac mn krát. Zistíme maximálny počet iterácií t medzi dvoma iteráciami, ktoré pridajú prvok do $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$. Potom maximálny počet iterácií bude mnt a zložitosť algoritum D2 bude $O(m^2n^2t)$. Beh algoritmu závisí na podmienkach C1 a C2, preto budeme rozlišovať 3 typy iterácií:

A) neplatí podmienka C1, a teda prebehne krok 5

B) platí C1 a platí C2, takže prebehne krok 4

C) platí C1 a neplatí C2, preto prebehne krok 4 a k_j upraví algoritmus D1

Ako neskôr ukážeme, zmena iterácie typu C na B a samotná iterácia typu A určite zvačšuje množinu $F_{A_i}(x)$. Teda nie je možné aby sa typy iterácií cyklicky menili bez toho, aby sa zmenila množina $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$. Preto zistíme pre každý typ iterácie, aký je maximálny počet iterácií tohto typu za sebou bez znemy týchto množín.

A)

V kroku 5 algoritmu pribudnú do $F_{A_i}(x)$ práve členy, ktoré porušujú C1. V každom cykle sa preto $F_{A_i}(x)$ zväčší aspoň o 1, a preto cyklov v ktorých neplatí C1 je najviac mn. Po každej iterácii typu A môže nasledovať ľubovolná iná, čo znamená, že zmien z iterácie A na B alebo C je najviac mn.

B)

Budeme rozlišovať, ktoré z $t_1, \ldots, t_6$ je najmenšie a teda, ktorá z množín $F(x)$, $F_i^{'}(x)$, $G_i^{'}(x)$, $F_{A_i}(x), G_{A_i}(x)$ alebo $D^{'}(x)$ sa zmenila. Iteráciu typu B kde $t_i = \delta$ budeme značiť B_i.

Ak nastane iterácia B_1 alebo B_6 znamená to, že sme našli riešenie, alebo, že sme prešli celý definičný obor x čo znamená, že bude nasledovať najviac jedna ďalšia iterácia.

Iterácie B_4 počítať nebudeme, pretože zväčšia množinu $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$ a nás zaujíma maximálny počet iterácií bez zmeny týchto množín.

Vieme, že vrámci za sebou nasledujúcich iterácií typu B sa veľkosť množín $F(x)$ a $D^{'}(x)$ nezmenšuje. Preto iterácií B_5 môže byť najviac n.

Iterácia B_3 môže nastať iba pre $i \notin D^{'}(x)$, pretože platí C2. Táto iterácia môže byť pre každú rovnicu $i \notin D^{'}(x)$ najviac jedna, lebo do $F_i^{'}(x)$ môže pribudnúť iba $j \notin F_{A_i}(x)$ alebo $j \notin F(x)$. Týchto iterácií môže byť preto najviac $m - |D^{'}(x)|$, pokiaľ sa nezmenila množina $F(x)$. Po každej zmene $F(x)$ môže nasledovať ďalších $m - |D^{'}(x)|$ iterácií B_3. Čo znamená, že ich môže nastať rádovo mn.

Pre iterácie B_2 kde $i \notin D^{'}(x)$ platí to isté ako pre B_3. Iterácie B_2 kde $i \in D^{'}(x)$ spôsobia zväčšenie $F(x)$. Preto ich môže byť najviac m.

Iterácií typu B teda môže byť za sebou $O(mn)$ bez toho aby sa zväčšili množiny $F_{A_i}(x)$ a $G_{A_i}(x)$. Iterácia B_2 môže zmeniť typ nasledujúcej iterácie na typ A. Ako sme vyššie spomínali tá určite hneď v nasledujúcom kroku zväčší $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$. Iterácia B_3 pre $i \in D(x)$ môže zmeniť typ iterácie na C, preto hľadaný maximálny počet iterácií bez zmeny $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$ bude súčtom maximálneho počtu iterácií typu B a C.

C)

Pre iterácie typu C platí, že veľkosť množiny $F(x)$ sa nezmenšuje a teda sa môže zmeniť najviac n krát. Spočítame maximálny počet iterácií t_c typu C bez zmeny $F(x)$. Celkový počet iterácií typu C potom získame ako nt_c. Preto ďalej predpokladáme, že sa množina $F(x)$ nemení. Ako ďalej uvidíme, bude nás zaujímať počet zmien koeficientov k_j.

Koeficienty sa môžu buď zvyšovať alebo znižovať. Zvyšovať sa môžu ak pribudne $j \in F(x)$ do $F_i^{'}(x)$, $G_i^{'}(x)$ alebo pribudnem i do $D_=(x)$. Znižovať sa budú ak ubudne i z $D_=^{'}(x)$. Pre každú rovnicu $i \in D^{'}(x)$ platí: $\min_{j \in F_i^{\prime}(x)} k_j = \min_{l \in G_i^{\prime}(x)} k_l + 1$. Čo znamená, že po najviac n zmenách k_j dostaneme postupnosť koeficientov $k_i = k_j + 1 = k_l + 2 = \ldots$. V tejto postupnosti už nie je možné zvýšiť žiadne k_j. Množina, ktorá vypadne z $D_=^{'}(x)$ sa do nej už nevráti (musela by sa zmeniť množina $G_{A_i}(x)$). Teda k_j sa môžu znižovať m krát. Po každom znížení koeficientov ich môžme znova najviac n krát zvyšovať, preto dohromady máme maximálne mn zmien koeficientov k_j.

Pre C_1, C_4 a C_6 platí to isté ako pre B_1, B_4 a B_6 v predchádzajúcom prípade. Prípad C_2 pre $i \notin D^{'}(x)$ sa líši od B_2 tým, že do $F_i(x)$ môže pribudnúť aj j, pre ktoré $k_j < \min_{l \in F_i^{\prime}(x)} k_l$ a teda ich môže byť spolu $(m - |D^{'}(x)|)(|F(x)| - 1)$ pokiaľ sa nezmení F(x), alebo koeficienty k_j algoritmom D1. Kedže zmien k_j je najviac mn, tak iterácií C_2 pre $i \notin D^{'}(x)$ je najviac $O(m^2n^2)$. Iterácie C_2 pre $i \in D^{'}(x)$ buď pridá prvok do $F(x)$, alebo sa algoritmom D1 zväčšia niektoré koeficienty.

Iterácií C_3 pre $i \notin D^{'}(x)$ je rovnaký počet ako iterácií C_2 pre $i \notin D^{'}(x)$ a teda $O(m^2n^2)$. Iterácia C_3 pre $i \in D^{'}(x)$ nastane ak do $G_i^{'}(x)$ pribudne $j \notin F(x)$ alebo $j \notin G_{A_i}(x)$. To môže nastať pre každú rovnicu najviac raz. Tiež môže do $G_i^{'}(x)$ pribudnúť j kde $k_j < \min_{l \in G_i^{\prime}(x)} k_l$. V tom prípade sa ale zmenia koeficienty k_j, čo nastane najviac mn krát.

Do $D^{'}(x)$ môže stále pribudnúť najviac m rovníc. Pokiaľ sa niektoré k_j znížia, tak sa situácia môže opakovať (nie však pre i, ktoré vypadli z $D_=^{'}(x)$). Keďže k_j sa môžu znížiť najviac m krát počet iterácií C_5 je $O(mn)$.

Dohromady teda dostávame, že $t_c = O(m^2n^3)$. Zmena iterácie typu C na typ B znamená, že musí pribudnúť prvok do $G_{A_i}(x)$ alebo do $F(x)$. Keďže v oboch typoch iterácií sa $F(x)$ zväčšuje, tak dohromady ich bude najviac n. V iterácii C je medzi dvoma pridaniami prvku do $F(x)$ $O(m^2n^2)$ krokov, pričom v B iba $O(m)$. Preto najdlhší sled iterácií bez zmeny $F_{A_i}(x)$ alebo $G_{A_i}(x)$ má $O(m^2n^3)$ krokov a zložitosť algoritmu D2 je nanajvýš $O(m^4n^5)$, čím sme ukázali, že je to polynomiálny algortimus.

Kapitola 3

Iné úlohy

V tejto kapitole sa budeme zaoberať riešením iných úloh pomocou algoritmu z predchádzajúcej kapitoly.

Majme sústavu m $(\max, \wedge)$-lineárnych nehomogénnych rovníc o n neznámych tvaru:

$$\max(A \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x, \alpha) = (B \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x, \beta) \tag{3.1}$$

kde

$$\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$$

a A, B, $\underline{x}$, $\overline{x}$, α, β sú matice a vektory s konečnými prvkami z danej $(\max, \wedge)$-algebry $\mathcal{E}$ s naväčším prvkom $\overline{\alpha}$ a najmenším prvkom $\underline{\alpha}$.

Lemma 4 *Úloha 3.1 je ekvivalentná úlohe 1.1 v tvare:*

$$A^{'} \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x^{'} = B^{'} \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x^{'} \tag{3.2}$$

kde

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \gamma \end{pmatrix} \leq x^{'} \leq \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \gamma \end{pmatrix}$$

a $\gamma = \max_{1 \leq j \leq n}(\alpha_j, \beta_j)$,

$$A^{'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad B^{'} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & \beta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} & \beta_n \end{pmatrix}$$

Dôkaz:
Zo zadania plynie, že $\underline{x}_j \leq x_j^{'} \leq \overline{x}_j$ pre $j = 1, \ldots, n$, čo je podmienka ekvivalentná podmienke pre x z úlohy 3.1. Ďalej platí, že $x_{n+1}^{'} = \gamma$. Preto

$$\begin{aligned} a_{i\,n+1} \wedge x_{n+1}^{'} &= a_{i\,n+1} = \alpha_i \quad \text{pre } \forall i \\ b_{i\,n+1} \wedge x_{n+1}^{'} &= b_{i\,n+1} = \beta_i \end{aligned}$$

Každá ľavá strana rovnice i úlohy 3.2 sa dá zapísať ako:

$$a_i(x^{'}) = \max_{1 \leq j \leq n+1} (a_{ij} \wedge x_j^{'}) = \max(\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} \wedge x_j^{'}),\ a_{i\,n+1} \wedge x_{n+1}^{'}) = \max(\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} \wedge x_j^{'}), \alpha_i)$$

čo je ľavá strana rovnice i úlohy 3.1. Tak isto pre pravé strany sústavy platí:

$$b_i(x^{'}) = \max(\max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} \wedge x_j^{'}),\ b_{i\,n+1} \wedge x_{n+1}^{'}) = \max(\max_{1 \leq j \leq n} (b_{ij} \wedge x_j^{'}), \beta_i)$$

Tým sme ukázali, že úloha 3.1 je ekvivalentná úlohe 1.1. $\boxtimes$

Majme sústavu m $(\max, \wedge)$-lineárnych homogénnych rovníc o n neznámych tvaru:

$$A \textcircled{\wedge}\, x = B \textcircled{\wedge}\, y \tag{3.3}$$

kde

$$\begin{aligned} \underline{x} \leq x \leq \overline{x} \\ \underline{y} \leq y \leq \overline{y} \end{aligned}$$

a A, B, $\underline{x}$, $\overline{x}$, $\underline{y}$, $\overline{y}$ sú matice a vektory s konečnými prvkami z danej $(\max, \wedge)$-algebry $\mathcal{E}$ s naväčším prvkom $\overline{\alpha}$ a najmenším prvkom $\underline{\alpha}$.

Lemma 5 *Úloha 3.3 je ekvivalentná úlohe 1.1 v tvare:*

$$A^{'} \textcircled{\wedge}\, x^{'} = B^{'} \textcircled{\wedge}\, x^{'} \tag{3.4}$$

kde

$$\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \leq x^{'} \leq \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$$

a $A^{'} = (\, A\ D\,),\ B^{'} = (\, D\ B\,)$,

$$D = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma & \ldots & \sigma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma & \ldots & \sigma \end{pmatrix}}_{n} \quad \textit{pre} \quad \sigma = \min(\min_j(\underline{x_j},\ \underline{y_j}),\ \min_{ij}(a_{ij},\ b_{ij}))$$

Dôkaz:
Z definície σ plynie, že

$$\sigma \wedge x_j^{'} = \sigma \quad \text{pre} \quad \forall j \quad x_j^{'} \in < \underline{x}_j^{'}, \overline{x}_j^{'} >$$

preto pre $\forall i$ platí:

$$\max_{1 \le j \le 2n} (a_{ij} \wedge x_j^{'}) = \max_{1 \le j \le n} (a_{ij} \wedge x_j^{'})$$
$$\max_{1 \le j \le 2n} (b_{ij} \wedge x_j^{'}) = \max_{n+1 \le j \le 2n} (b_{ij} \wedge x_j^{'})$$

Ak označíme vektor $\begin{pmatrix} x_1^{'} \\ \vdots \\ x_n^{'} \end{pmatrix}$ ako x a $\begin{pmatrix} x_{n+1}^{'} \\ \vdots \\ x_{2n}^{'} \end{pmatrix}$ ako y potom

$$\max_{1 \le j \le 2n} (a_{ij} \wedge x_j^{'}) = \max_{1 \le j \le n} (a_{ij} \wedge x_j)$$
$$\max_{1 \le j \le 2n} (b_{ij} \wedge x_j^{'}) = \max_{1 \le j \le n} (b_{i\,j+n} \wedge y_j)$$

a teda

$$A^{'} \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x^{'} \Leftrightarrow A \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x$$
$$B^{'} \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ x^{'} \Leftrightarrow B \bigcirc\!\!\!\!\wedge\ y$$

Taktiež aj podmienku $\begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} \le x^{'} \le \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ môžme zapísať ako

$$\underline{x} \le x \le \overline{x}$$
$$\underline{y} \le y \le \overline{y}$$

$\boxtimes$

Majme sústavu m rovníc o n neznámych tvaru:

$$\min_{1 \le j \le n} (a_{ij} \vee x_j) = \min_{1 \le j \le n} (b_{ij} \vee x_j) \quad i = 1 \ldots m \tag{3.5}$$

kde

$$\underline{x} \le x \le \overline{x}$$

pričom $\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$ a A, B, $\underline{x}$, $\overline{x}$, $\underline{y}$, $\overline{y}$ sú matice a vektory s konečnými prvkami z danej $(\max, \wedge)$-algebry $\mathcal{E}$ s naväčším prvkom $\overline{\alpha}$ a najmenším prvkom $\underline{\alpha}$.

Lemma 6 *Úloha 3.5 je ekvivalentná úlohe 1.1 v tvare:*

$$A^{'} \textcircled{\wedge} x^{'} = B^{'} \textcircled{\wedge} x^{'} \tag{3.6}$$

kde

$$-\overline{x} \leq x^{'} \leq -\underline{x}$$

pričom $A^{'}$, $B^{'}$ *sú defninované:*

$$\begin{array}{l} a_{ij}^{'} = -a_{ij} \\ b_{ij}^{'} = -b_{ij} \end{array} \quad i = 1 \ldots m \; j = 1 \ldots n$$

Dôkaz:
Z definície $A^{'}$, $B^{'}$ a $x^{'}$ plynie

$$a_{ij} \wedge x_j = -(a_{ij}^{'} \vee x_j^{'})$$
$$b_{ij} \wedge x_j = -(b_{ij}^{'} \vee x_j^{'})$$

a preto aj

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} \wedge x_j = -(\min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}^{'} \vee x_j^{'})$$
$$\max_{1 \leq j \leq n} b_{ij} \wedge x_j = -(\min_{1 \leq j \leq n} b_{ij}^{'} \vee x_j^{'})$$

⊠