Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Čížek

Weylovy prostoročasy s nenulovou kosmologickou konstantou

Ústav teoretické fyziky MFF UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.
Studijní program: fyzika - obecná fyzika

2006

Na tomto místě bych chtěl poděkovat doc. RNDr. Oldřichu Semerákovi, Dr. za vedení práce a trpělivost při opravování chyb.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 25.5.2006 Pavel Čížek

Obsah

Název práce: Weylovy prostoročasy s nenulovou kosmologickou konstantou
Autor: Pavel Čížek
Katedra (ústav): Ústav teoretické fyziky MFF UK
Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr.
e-mail vedoucího: Oldrich.Semerak@mff.cuni.cz

Abstrakt: Ve vakuovém případě bez kosmologické konstanty lze metriku každého statického axiálně symetrického prostoročasu zapsat v diagonálním tvaru se jen dvěma neznámými funkcemi. Einsteinovy rovnice se pak redukují na Laplaceovu rovnici pro jednu z funkcí a křivkový integrál pro druhou. V této práci se pokoušíme na základě Weylova postupu zjednodušit metriku a Einsteinovy rovnice v případě, kdy kosmologická konstanta je nenulová. Obecně se podaří zjednodušit metriku jen na diagonální tvar s třemi neznámými funkcemi, ale v některých speciálních případech se přesto daří rovnice vyřešit.

Klíčová slova: Obecná relativita, Weylovy prostoročasy, kosmologická konstanta.

Title: Weyl spacetimes with non-zero cosmological constant
Author: Pavel Čížek
Department: Institute of theoretical physics MFF UK
Supervisor: doc. RNDr. Oldřich Semerák, Dr
Supervisor's e-mail address: Oldrich.Semerak@mff.cuni.cz

Abstract: In vacuum case without cosmological constant, metric of each static axially symmetric spacetime can be written in diagonal form with only two unknown functions. In this case Einstein's equations are reduced to Laplace's equation for one of the functions and curve integral for the second of them. In this paper, based on the Weyl's procedure we are trying to simplify metric and Einstein's equations in cases when cosmological constant is non-zero. In general case we are succesfull only in reduction of metric to diagonal form with three unknown functions, but in some special cases we are still able to solve these equations.

Keywords: General relativity, Weyl spacetimes, cosmological constant.

Značení

Indexy

Složky vektorů značíme indexy nahoře, složky forem indexy dole. Tedy vektor v, resp. 1-formu σ zapíšeme jako $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, resp. $\sigma = \sigma_i dx^i$, kde $\frac{\partial}{\partial x^i}$ je báze tečného prostoru, resp. dx^i báze k ní duální. V rovnicích používáme Einsteinovu sumační konvenci, tj. pokud se ve výrazu vyskytuje nějaký index jak nahoře, tak dole, automaticky se přes něj sčítá.

Derivace

Parciální derivace značíme pomocí čárky, následované souřadnicí, dle které derivujeme, tj. $f_{,i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$.
V případě, že derivujeme funkci jedné proměnné, používáme k zápisu derivace dle ní symbol $'$ ($\frac{df(x)}{dx} = f'$).
Pro kovariantní derivace používáme středník, tj. $f_{;i} \equiv \nabla_i f$.
Lieova derivace tenzorového pole T dle vektorového pole X je zapisována $\pounds_X T$.
Komutátor vektorových polí (Lieova závorka) X a Y: $[X, Y] = XY - YX$.
Kroneckerův symbol: δ^a_b Je roven 1 pokud $a = b$, jinak 0.

Metrika, konexe a křivost

Pro metrický tenzor je rezervováno písmeno g a metrika je zapsána ve tvaru $ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b$.
Christoffelovy symboly 2. druhu: $\Gamma^a_{\ bc} = \frac{1}{2} g^{ad}(g_{db,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d})$
Pro kovariantní derivaci libovoného vektoru v platí: $v^a_{\ ;b} = v^a_{\ ,b} + \Gamma^a_{\ cb} v^c$
Riemannův tenzor: $R^a_{\ bcd} = \Gamma^a_{\ bd,c} - \Gamma^a_{\ bc,d} + \Gamma^e_{\ bd}\Gamma^a_{\ ec} - \Gamma^e_{\ bc}\Gamma^a_{\ ed}$
Ricciho tenzor: $R_{ab} \equiv R^e_{\ aeb}$
Skalární křivost: $R \equiv R^a_{\ a}$

Fyzikální veličiny

Tenzor energie a hybnosti: T_{ab}
Stopa tenzoru energie a hybnosti: $T \equiv T^a_{\ a}$
Kosmologická konstanta: Λ
Gravitační konstanta: κ
Einsteinovy rovnice[1]: $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}$

Symetrie

Killingovy vektory: ξ, resp. η
Killingova rovnice: $\pounds_\xi g_{ab} = 0 \Leftrightarrow \xi_{a;b} + \xi_{b;a} = 0$

[1] Zapsány v geometrizovaných jednodkách, v nichž rychlost světla $c = 1$ a gravitační konstanta $\kappa = 1$.

Kapitola 1

Úvod

Otázkou, proč věci padají dolů, se lidstvo zabývalo po celou dobu své existence a odpovědi se v průběhu věků výrazně lišila. Například ve starém Řecku existoval názor, že každá hmota je složena z elementů (země, voda, vzduch, oheň), které mají své přirozené místo (tj. země dole, nad ní voda, pak vzduch, oheň), a každý z těchto elementů se na své přirozené místo snaží dostat (proto kameny ve vodě klesají ke dnu atd.).

První, komu se podařilo popsat gravitaci kvantitativně, byl v sedmnáctém století Isaac Newton. Dle jeho teorie jsou dvě tělesa o hmotnostech m_1, m_2 k sobě přitahována silou o velikosti

$$F = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.1}$$

kde r značí vzdálenost těles. Teorie úspěšně popisovala všechna v té době známá gravitační působení s dostatečnou přesností (např. plynou z ní Keplerovy zákony).

Do výraznějšího sporu s newtonovskou fyzikou se dostala až v devatenáctém století teorie elektromagnetického pole. Její rovnice byly invariantní vzhledem k Lorentzově transformaci, a nikoli ke Galileově, kterou používá Newtonova mechanika. Z Maxwellových rovnic plyne, že ve všech inerciálních systémech se světlo šíří stejnou a konečnou rychlostí. Tato předpověď byla potvrzena i experimentálně.

Počátkem dvacátého století zformuloval A. Einstein speciální teorii relativity. Ta vychází z předpokladů, že všechny inerciální soustavy jsou rovnocenné a světlo se ve všech šíří rychlostí c. Mezi jednotlivými soustavami se pak přechází pomocí Lorentzovy transformace.

Speciální relativita přinesla novou mechaniku s řadou překvapivých vlastností, především s provázáním času s prostorovými souřadnicemi, novou pohybovou rovnicí a univerzální úměrností mezi hmotností a energií. Bylo jasné, že je třeba nové teorie gravitace, která by byla slučitelná s elektrodynamikou a v níž by se i gravitační interakce šířila (na rozdíl od Newtonovy teorie) konečnou rychlostí.

Takovou teorií se stala obecná relativita, kterou odvodil A. Einstein z principu lokální ekvivalence gravitace a setrvačnosti a principu obecné kovariance fyzikálních zákonů. Konečnou verzi teorie předložil v roce 1915 a speciální relativita se stala její limitou pro případ nulové gravitace. Hlavní předpovědí obecné relativity je myšlenka, že fyzikální prostoročas není euklidovský (resp. Minkowského), ale zakřivený, konkrétně že má strukturu čtyřrozměrné pseudo-Riemannovy variety. Gravitace je potom důsledkem tohoto zakřivení. Ústředním bodem teorie jsou Einsteinovy rovnice [1]

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \tag{1.2}$$

které vzájemně provazují geometrii prostoročasu a chování přítomné hmoty. Hmota jako zdroj je popsána tenzorem energie a hybnosti T_{ab}, symetrickým tenzorem 2. řádu, který obsahuje příspěvky k hustotě energie a hybnosti od látky a všech negravitačních polí. Skalární křivost R je stopou symetrického Ricciho tenzoru R_{ab} a ten je dále dán kontrakcí Riemannova tenzoru $R^c{}_{acb}$, který obsahuje metrický tenzor g_{ab} a jeho derivace do 2. řádu. Kosmologická konstanta Λ musí být do teorie dodána odjinud, z obecné relativity samotné její hodnota nevyplývá; pozorování dnes svědčí o tom, že je zřejmě kladná, z hlediska lokální fyziky sice zanedbatelně malá, ale pro vesmír v největším měřítku velmi podstatná.

Einsteinovy rovnice jsou nelineárními parciálními diferenciálními rovnicemi 2. řádu, z nichž 6 určuje (až na souřadnicovou transformaci) 10 složek (symetrického) metrického tenzoru a 4 rovnice omezují zdroje v podobě kovariantních zákonů zachování $T^{ab}{}_{;a} = 0$. Hlavní obtíží při řešení rovnic je jejich nelinearita, díky níž m.j. neplatí princip superpozice. První netriviální přesné řešení bylo přesto nalezeno velmi záhy, již v roce 1915 K. Schwarzschildem. Jedná se o sféricky symetrické vakuové řešení bez kosmologické konstanty a jeho metrika má ve sférických, Schwarzschildových souřadnicích tvar

$$ds^2 = -\Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)dt^2 + \Big(1 - \frac{2M}{r}\Big)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2), \tag{1.3}$$

kde konstanta M značí hmotnost zdroje. Jedná se tedy o metriku statickou, která má singularity na poloměrech $r = 0$ a $r = 2M$. První z nich se ukázala být skutečnou singularitou geometrie, zatímco druhá je dána jen chováním souřadnic. Odpovídá nicméně tzv. horizontu — světelné nadploše, která má vlastnosti jednocestné membrány: díky extrémní gravitaci centra jsou světelné kužely stočeny do jejího vnitřku, takže vše, co se dovnitř dostane (včetně světla), se nemůže dostat zpátky "ven", a navíc je nuceno pohybovat se směrem k centru a tam skončit v singularitě $r = 0$. Oblastem ohraničeným horizonty se později začalo říkat černé díry a dnes hrají centrální roli v modelech některých astrofyzikálních systémů.

Schwarzschildův prostoročas patří do širší třídy statických osově symetrických řešení (s $\Lambda = 0$), která jako první prozkoumal v r. 1917 H. Weyl. Metrika a polní rovnice se pro tato řešení dají napsat ve velmi jednoduché podobě a pro jednu z neznámých metrických funkcí dokonce platí princip superpozice. V následující kapitole ukážeme, jak se ke zjednodušením dospěje, a vyzkoušíme, do jaké míry je podobný postup (ne)možný v případě, kdy kosmologická konstanta je nenulová. V další části pak ukážeme, jaké případy s $\Lambda \neq 0$ odpovídají speciálnímu typu metrik, jejichž neznámé funkce lze zapsat v separovaném tvaru.

---

[1] V celé práci zapisujeme rovnice a veličiny v geometrizovaných jednotkách, v nichž rychlost světla c a gravitační konstanta κ jsou rovny jedné.

Kapitola 2

Rekonstrukce Weylova postupu

2.1 Diagonalizace metriky

Při zjednodušování metriky použijeme podobný postup, jako je popsán v [5](kap. 7.1).

Pokud v prostoročasu existuje Killingovo vektorové pole ξ, můžeme jako jednu ze souřadnic (např. x^0) použít jeho integrální křivky, $\xi = \frac{\partial}{\partial x^0}$. Jelikož Lieova derivace je objekt, který je nezávislý na souřadnicích, můžeme psát

$$\pounds_\xi g_{ab} = \pounds_{\frac{\partial}{\partial x^0}} g_{ab} = g_{ab,0} = 0. \tag{2.1}$$

Tudíž metrický tenzor je nezávislý na souřadnici odpovídající Killingovu vektoru.

O řešení říkáme, že je stacionární, pokud v něm existuje časupodobné Killingovo vektorové pole. Pokud je toto pole kolmé na podprostor, který definují zbylé tři souřadnice (tj. $g_{a0} = 0$ pro $a = 1, 2, 3$), říkáme, že řešení je statické. Nyní se budeme zabývat vlastnostmi stacionární metriky a redukci na statickou provedeme na konci tohoto oddílu.

Předpokládejme, že řešení je i axiálně symetrické, tzn. existuje ještě jedno Killingovo vektorové pole η, jehož integrální křivky jsou uzavřené a které komutuje s ξ, tj. $[\xi, \eta] = 0$. Jelikož platí

$$[\xi, \eta] = \pounds_\xi \eta = -\pounds_\eta \xi = 0, \tag{2.2}$$

vektorová pole ξ a η generují dvourozměrnou plochu (tj. existuje plocha, po níž se z každého bodu dostaneme do libovolného jiného podél integrálních křivek ξ, resp. η, a libovolný bod, který na ploše neleží, podél těchto křivek dosažitelný není). Díky komutativitě je možno integrální křivky η vzít jako další souřadnici (x^3), na které opět nebude záviset metrický tenzor.

Dalším krokem ke konstrukci metriky Weylova typu je dokázat, že v každém bodě existuje plocha, která je ortogonální na plochu generovanou vektorovými poli ξ a η. Jak uvádí [3](str. 294), nutná a postačující podmínka existence této plochy je

$$\eta^d R_{d[a}\xi_b\eta_{c]} = 0 = \xi^d R_{d[a}\xi_b\eta_{c]}, \tag{2.3}$$

kde hranatá závorka značí antisymetrizaci v indexech a, b, c[1].

[1] $R_{d[a}\xi_b\eta_{c]} = \frac{1}{3!}(R_{da}\xi_b\eta_c + R_{db}\xi_c\eta_a + R_{dc}\xi_a\eta_b - R_{dc}\xi_b\eta_a - R_{db}\xi_a\eta_c - R_{da}\xi_c\eta_b)$

Nyní využijeme toho, že Einsteinovy rovnice jde přepsat do duálního tvaru,[2] kde se na levé straně vyskytuje jen Ricciho tenzor

$$R_{ab} = 8\pi T_{ab} - 4\pi T g_{ab} + \Lambda g_{ab}. \tag{2.4}$$

V případě Weylova zadání ($T_{ab} = 0$, $\Lambda = 0$) je Ricciho tenzor nulový, tudíž dvojice podmínek (2.3) je triviálně splněna. Ve vakuovém případě s nenulovou kosmologickou konstantou přechází (2.4) na tvar

$$R_{ab} = \Lambda g_{ab}. \tag{2.5}$$

Nyní uvažujme první z podmínek (2.3). Užitím (2.5) získáváme

$$\eta^d R_{d[a} \xi_b \eta_{c]} = \Lambda \eta^d g_{d[a} \xi_b \eta_{c]} = \Lambda \eta_{[a} \xi_b \eta_{c]}, \tag{2.6}$$

kde hranaté závorky opět značí antisymetrizaci. Jelikož ale tenzor $\eta_a \xi_b \eta_c$ je symetrický vzhledem k záměně a a c, je jeho úplná antisymetrizace nulová, a tedy první z podmínek (2.3) je splněna. Druhá se dokáže analogicky (jen zaměníme ξ a η). [3]

Je tedy možno zvolit zbylé dvě souřadnice tak, aby popisovaly plochu kolmou na plochu $\xi\eta$, metrika pak bude mít tvar

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b + g_{cd} dx^c dx^d, \tag{2.7}$$

kde a a b nabývají jen hodnot 1,2 a c a d jen hodnot 0,3. Kromě toho, jak již bylo výše uvedeno, metrika je závislá jen na souřadnících x^1 a x^2.

Nyní využijeme toho, že pro dvourozměrnou metriku (označme její metrický tenzor ${}^{(2)}g$) existuje soustava souřadnic, kde metrika nabývá konformního tvaru, tj. existují souřadnice y^1 a y^2 takové, že ${}^{(2)}ds^2 = {}^{(2)}g_{ab} dx^a dx^b = \alpha^2((dy^1)^2 + (dy^2)^2)$.

Pokud takovéto souřadnice použijeme pro plochu kolmou na Killingovy vektory a označíme souřadnici odpovídající časovému Killingovu vektoru t, souřadnici odpovídající axiálnímu vektoru ϕ a zbylé dvě jako x a y, získáváme metriku tvaru

$$ds^2 = -\gamma^2 dt^2 + \beta^2 d\phi^2 + \alpha^2(dx^2 + dy^2) + 2\delta dt d\phi. \tag{2.8a}$$

Nás však zajímá statický případ, kdy je časová souřadnice kolmá na ostatní tři, takže $\delta = 0$ a máme metriku

$$ds^2 = -\gamma^2 dt^2 + \beta^2 d\phi^2 + \alpha^2(dx^2 + dy^2). \tag{2.8b}$$

[2] Vynásobením Einstenových rovnic g^{ab} a vysčítáním dostaneme vztah $R = 4\Lambda - 8\pi T$ a dosazením zpět získáme (2.4).

[3] Splnění těchto podmínek je možno dokázat i v obecnějším případě, pro ideální tekutiny, resp. elektromagnetické pole za určitých omezení na čtyřrychlost, resp. čtyřhustotu proudu, viz. [3](str. 295).

2.2 Weylovy souřadnice

V souřadnicích x, y metriky (2.8b) je jistá volnost (například pro souřadnice $p = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, q = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ platí $dx^2 + dy^2 = dp^2 + dq^2$) a je rozumné se ptát, zda by tuto volnost nešlo využít pro další zjednodušení metriky.

Uvažujme tedy nové souřadnice p a q a ptejme se, co musí platit, aby zůstala zachována konformita metriky ${}^{(2)}g$, tedy aby platilo

$$\alpha^2(dx^2 + dy^2) = \psi^2(dp^2 + dq^2), \tag{2.9}$$

kde ψ je nová funkce závislá jen na x a y, resp. p a q. Dosazením za diferenciály dp a dq pomocí forem dx a dy na pravou stranu (2.9) získáváme

$$\psi^2(dp^2+dq^2) = \psi^2\Big((p_{,x}^{\ 2}+q_{,x}^{\ 2})dx^2+(p_{,y}^{\ 2}+q_{,y}^{\ 2})dy^2(p_{,x}p_{,y}+q_{,x}q_{,y})(dxdy+dydx)\Big). \tag{2.10}$$

Aby funkce ψ mohla vyhovět (2.10), musí být splněna dvojice rovnic

$$\begin{aligned} p_{,x}^{\ 2} + q_{,x}^{\ 2} &= p_{,y}^{\ 2} + q_{,y}^{\ 2}, \\ 0 &= p_{,x}p_{,y} + q_{,x}q_{,y}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Jelikož víme, že $p_{,y} \neq 0$ nebo $q_{,y} \neq 0$[4], můžeme BÚNO tvrdit např. $p_{,y} \neq 0$ (jelikož rovnice (2.11) jsou symetrické vůči záměně p a q), a tedy pokud vyjádříme $p_{,x}$ z druhé rovnice a dosadíme do první, získáme vztah

$$\frac{q_{,x}^{\ 2}q_{,y}^{\ 2}}{p_{,y}^{\ 2}} + q_{,x}^{\ 2} = \Big(\frac{q_{,x}}{p_{,y}}\Big)^2\Big(p_{,y}^{\ 2} + q_{,y}^{\ 2}\Big) = p_{,y}^{\ 2} + q_{,y}^{\ 2}. \tag{2.12}$$

Protože $p_{,y} \neq 0$, můžeme rovnici (2.12) zkrátit výrazem $p_{,y}^{\ 2} + q_{,y}^{\ 2}$ a po odmocnění obdržíme

$$q_{,x} = \pm p_{,y}. \tag{2.13a}$$

Dosazením do druhé z rovnic (2.11) získáme druhou podmínku

$$q_{,y} = \mp p_{,x}. \tag{2.13b}$$

Tato soustava rovnic je ekvivalentní s (2.11). Pokud tedy zvolíme funkci p, máme již (až na integrační konstantu) definovanou funkci q (pokud existuje).
Nutná a postačující podmínka pro existenci funkce q je dle [2](str. 213)

$$\Big(\pm p_{,y}\Big)_{,y} = \Big(\mp p_{,x}\Big)_{,x} \Leftrightarrow \triangle p = 0, \tag{2.14}$$

kde $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

[4] Jinak nové souřadnice popisují prostor s nižší dimenzí.

Nyní se podívejme, jak vypadá Ricciho tenzor. Pokud uvažujeme metriku tvaru (2.8b), platí dle [4](str. 310):

$$\begin{aligned}
R_{xx} = & \quad (\frac{\alpha_{,x}}{\alpha})_{,x} + (\frac{\alpha_{,y}}{\alpha})_{,y} + \frac{\beta_{,x,x}}{\beta} + \frac{\gamma_{,x,x}}{\gamma} - \frac{\alpha_{,x}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,x}}{\beta\gamma} + \frac{\alpha_{,y}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,y}}{\beta\gamma}, \\
R_{yy} = & \quad (\frac{\alpha_{,x}}{\alpha})_{,x} + (\frac{\alpha_{,y}}{\alpha})_{,y} + \frac{\beta_{,y,y}}{\beta} + \frac{\gamma_{,y,y}}{\gamma} + \frac{\alpha_{,x}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,x}}{\beta\gamma} - \frac{\alpha_{,y}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,y}}{\beta\gamma}, \\
R_{xy} = \quad R_{yx} = & \quad \frac{\beta_{,x,y}}{\beta} + \frac{\gamma_{,x,y}}{\gamma} - \frac{\alpha_{,x}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,y}}{\beta\gamma} - \frac{\alpha_{,y}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,x}}{\beta\gamma}, \\
R_{\phi\phi} = & \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2}(\frac{\triangle\beta}{\beta} + \frac{\beta_{,x}\gamma_{,x} + \beta_{,y}\gamma_{,y}}{\beta\gamma}), \\
R_{tt} = & \quad -\frac{\gamma^2}{\alpha^2}(\frac{\triangle\gamma}{\gamma} + \frac{\beta_{,x}\gamma_{,x} + \beta_{,y}\gamma_{,y}}{\beta\gamma}).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ostatní složky jsou nula. Význam $\triangle$ je stejný jako v (2.14).
Je možno si všimnout, že

$$R^t_{\ t} + R^\phi_{\ \phi} = \frac{\triangle(\beta\gamma)}{\alpha^2\beta\gamma}. \tag{2.16}$$

Tedy pokud $R^t_{\ t} + R^\phi_{\ \phi} = 0$ (což pro nulovou kosmologickou konstantu a vakuové rovnice platí), můžeme definovat dle (2.14) nové souřadnice ρ a z tak, že $\rho = \beta\gamma$. V těchto souřadnicích zapíšeme metriku (2.8b) v tvaru

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + \rho^2 e^{-2\nu}d\phi^2 + e^{2(\lambda-\nu)}(d\rho^2 + dz^2), \tag{2.17}$$

kde $\nu \equiv \ln(\gamma)$, $\lambda = \ln(\alpha\gamma)$ a $\beta = \rho/\gamma$.
Rovnice (2.15) spolu s (2.4) tak ve vakuovém případě bez kosmologické konstanty přejdou na

$$\begin{aligned}
0 = & \quad \tfrac{1}{2}(R_{\rho\rho} + R_{zz}) & = \triangle\lambda + (\nu_{,\rho})^2 + (\nu_{,z})^2, \\
0 = & \quad \tfrac{1}{2}(R_{\rho\rho} - R_{zz}) & = (\nu_{,\rho})^2 - (\nu_{,z})^2 - \frac{1}{\rho}\lambda_{,\rho}, \\
0 = & \quad R_{\rho z} & = 2\nu_{,\rho}\nu_{,z} - \frac{1}{\rho}\lambda_{,z}, \\
0 = & \quad R^\phi_{\ \phi} - R^t_{\ t} & = \triangle\nu + \frac{1}{\rho}\nu_{,\rho}, \\
0 = & \quad R^\phi_{\ \phi} + R^t_{\ t} & = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Čtvrtá rovnice (2.18) je Laplaceova rovnice v cylindrických souřadnicích. Pokud známe její řešení, najdeme λ integrací druhé a třetí rovnice,[5]

$$\lambda = \int \rho(\lambda_{,\rho}^{\ 2} - \lambda_{,z}^{\ 2})d\rho + 2\rho\nu_{,\rho}\nu_{,z}dz. \tag{2.19}$$

První rovnice (2.18) je důsledkem zbylých tří.

[5]Je možno se derivováním přesvědčit, že tyto dvě rovnice jsou dohromady integrovatelné.

2.3 Nenulová kosmologická konstanta

Při nenulové kosmologické konstantě se rovnice (2.16) změní na

$$2\Lambda = R^{\phi}_{\ \phi} + R^{t}_{\ t} = \frac{\triangle\beta\gamma}{\alpha^2\beta\gamma} \neq 0, \tag{2.20}$$

tedy $\beta\gamma$ není možné vzít za jednu ze souřadnic, aniž bychom porušili konformitu metriky ${}^{(2)}g$ či ztratili diagonalitu.

Podívejme se, jak nyní vypadá celá soustava rovnic (2.15):

$$\begin{aligned}
2\Lambda\alpha^2 = &\quad R_{xx} + R_{yy} &&= 2(\frac{\alpha_{,x}}{\alpha})_{,x} + 2(\frac{\alpha_{,y}}{\alpha})_{,y} + \frac{\triangle\beta}{\beta} + \frac{\triangle\gamma}{\gamma}, \\
0 = &\quad R_{xx} - R_{yy} &&= \frac{\beta_{,x,x} - \beta_{,y,y}}{\beta} + \frac{\gamma_{,x,x} - \gamma_{,y,y}}{\gamma} - 2\frac{\alpha_{,x}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,x}}{\beta\gamma} + 2\frac{\alpha_{,y}}{\alpha}\frac{(\beta\gamma)_{,y}}{\beta\gamma}, \\
0 = &\quad R_{xy} &&= \frac{\beta_{,x,y}}{\beta} + \frac{\gamma_{,x,y}}{\gamma} - \frac{\alpha_{,x}}{\alpha}(\frac{\beta_{,y}}{\beta} + \frac{\gamma_{,y}}{\gamma}) - \frac{\alpha_{,y}}{\alpha}(\frac{\beta_{,x}}{\beta} + \frac{\gamma_{,x}}{\gamma}), \\
2\Lambda\alpha^2 = &\quad \alpha^2(R^{\phi}_{\ \phi} + R^{t}_{\ t}) &&= \frac{\triangle(\beta\gamma)}{\beta\gamma}, \\
0 = &\quad \alpha^2(R^{\phi}_{\ \phi} - R^{t}_{\ t}) &&= \frac{\triangle\beta}{\beta} - \frac{\triangle\gamma}{\gamma}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

V další kapitole se pokusíme tyto rovnice řešit za předpokladu, že funkce α, β, γ jsou separované. Nicméně vraťme se k hledání nového souřadného systému, který (2.21) zjednoduší.

Čtvrtou rovnici zapíšeme ve tvaru

$$2\Lambda\alpha^2\beta\gamma = \triangle(\beta\gamma). \tag{2.22}$$

Pokud nalezneme funkci $p(x, y)$ takovou, že $\alpha^2\beta\gamma = \triangle p$, můžeme jako novou souřadnici zvolit funkci $2\Lambda p - \beta\gamma$ a mohlo by se podařit zjednodušit soustavu (2.21).
Při zkoušení různých funkcí $p(x, y)$, pomocí kterých bychom rádi snížili požet neznámých funkcí v metrice (2.8b), bohužel narazíme na problém: rovnice (2.21) obsahují derivace, které se při přechodu od souřadnic x, y k r, s transformují

$$\frac{\partial}{\partial x} = r_{,x}\frac{\partial}{\partial p} + s_{,x}\frac{\partial}{\partial q} \tag{2.23}$$

(pro y analogicky), takže pokud funkce $p(x, y)$ obsahuje derivace funkcí α, β nebo γ, "proniknou" do rovnic, až na velmi vzácné vyjímky, i derivace nových souřadnic dle starých, což nám přidává v rovnicích neznámé funkce. Jednou z mála výjimek jsou případy, kdy $\alpha^2\beta\gamma$ je vlastní funkcí Laplaceova operátoru. Tímto případem se budeme zabývat ve zbytku tohoto oddílu.

Nechť tedy platí $\triangle(\alpha^2\beta\gamma) = N\alpha^2\beta\gamma$. Pak je třeba rozlišit dva případy:

- $N = 0$. Pak jako novou souřadnici x volíme přímo funkci $\alpha^2\beta\gamma$.
- $N \neq 0$. Pak jako novou souřadnici x volíme funkci $\beta\gamma(1 - \frac{2\Lambda}{N}\alpha^2)$.

Souřadnici y volíme dle (2.13) (tj. harmonicky sdruženou k x). V nových souřadnicích bude mít metrika opět tvar (2.8b), tedy Einsteinovy rovnice mají formálně stejný tvar (rovnice (2.21)) (jen derivace jsou podle nových souřadnic).

Podívejme se na oba případy o něco podrobněji.

- $N = 0$
  Rovnice (2.22) má tvar

  $$2\Lambda x = \triangle\beta\gamma \Leftrightarrow 0 = \triangle(\beta\gamma - \frac{2\Lambda}{3}x^3), \tag{2.24}$$

  což je Laplaceova rovnice. Její řešení již známe, a tedy z (2.24) můžeme určit $\beta\gamma$, resp. α po uvážení vztahu $x = \alpha^2\beta\gamma$.

- $N \neq 0$
  Rovnice (2.22) má tvar

  $$2\Lambda\alpha^2\beta\gamma = N(\beta\gamma - x) = \triangle(\beta\gamma) = \triangle(\beta\gamma - x), \tag{2.25}$$

  kde poslední rovnost vyplývá z harmoničnosti funkce x. Z rovnice (2.25) plyne, že $\beta\gamma - x$ je vlastní funkcí operátoru $\triangle$ s vlastním číslem N. Tedy na základě (2.25) určíme $\beta\gamma$ a α po uvážení

  $$(1 - \frac{x}{\beta\gamma})\frac{N}{2\Lambda} = \alpha^2.$$

Nicméně vztah (2.24), resp. (2.25) je nutná nikoli postačující podmínka.

Pokud jde o funkce β, γ, tak k jejich určení je možno použít např. třetí a pátou rovnici (2.21), kde po uvážení znalosti $\beta\gamma$ a vyjádření γ pomocí β máme jen první derivace β.

Přirozená je zde otázka, zda by bylo možno tento postup zobecnit. Bohužel pokusy o rozepsání $\alpha^2\beta\gamma$ jako sumy vlastních funkcí operátoru Laplace nevedou k použitelnému výsledku.

Kapitola 3

Separovatelná řešení

V této kapitole zkusíme řešit Einsteinovy rovnice přímo. Vzhledem ke komplikovanosti (2.21) budeme uvažovat funkce α, β, γ ve speciálním tvaru, při němž se soustava parciálních diferenciálních rovnic změní na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic.

3.1 Základní dělení

Uvažujme řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} \alpha(x,y) &= a(x)f(y), \\ \beta(x,y) &= b(x)g(y), \\ \gamma(x,y) &= c(x)h(y). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dosazením do čtvrté rovnice (2.21) dostaneme

$$2\Lambda a^2 f^2 = \frac{(bc)''}{bc} + \frac{(gh)''}{gh}, \tag{3.2}$$

kde $'$ je derivace dle příslušné proměnné. Funkce $\alpha(x,y)$ je tedy jen funkcí x, nebo y.[1] Vzhledem k symetrii rovnic (2.21) vůči záměně souřadnic mužeme bez újmy na obecnosti uvažovat $f(y)$ konstantní. Dále vzhledem k tomu, že α se nezmění, pokud dvojici $a(x)$ a $f(y)$ nahradíme dvojicí $a(x)/K$, $Kf(y)$, kde K je libovolná nenulová konstanta, můžeme položit

$$f(y) = 1. \tag{3.3}$$

Dosazením $\alpha = \alpha(x)$ do první z rovnic (2.21) s uvážením páté pak dostaneme

$$\begin{aligned} \Lambda a^2 &= \left(\tfrac{a'}{a}\right)' + \tfrac{b''}{b} + \tfrac{g''}{g}, \\ \Lambda a^2 &= \left(\tfrac{a'}{a}\right)' + \tfrac{c''}{c} + \tfrac{h''}{h}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

[1] Dokáže se to jednoduše sporem. Mějme x_1, x_2, y_1 a y_2 taková, že $\frac{(bc)''}{bc}(x_1) \neq \frac{(bc)''}{bc}(x_2)$, resp. $\frac{(gh)''}{gh}(y_1) \neq \frac{(gh)''}{gh}(y_2)$. Pak $\Lambda a^2(x_1)(f^2(y_1) - f^2(y_2)) = \frac{(gh)''}{gh}(y_1) - \frac{(gh)''}{gh}(y_2) = \Lambda a^2(x_2)(f^2(y_1) - f^2(y_2))$. Jelikož víme, že hodnota $\frac{(gh)''}{gh}$ je v bodech y_1 a y_2 různá, je prostřední výraz nenulový , takže nenulový musí být i $(f^2(y_1) - f^2(y_2))$, a tedy můžeme tímto výrazem rovnici zkrátit a získáváme vztah $a^2(x_1) = a^2(x_2)$. Odtud $0 = \Lambda(a^2(x_1) - a^2(x_2))f^2(y_1) = \frac{(bc)''}{bc}(x_1) - \frac{(bc)''}{bc}(x_2) \neq 0$ (poslední nerovnost jsme dostali z předpokladů na x_1 a x_2). To je ovšem spor, a tudíž alespoň jedna z funkcí $a(x)$, $f(y)$ musí být konstanta.

Jelikož a, b, c jsou funkce x, zatímco g a h jsou funkce jen y, musí platit

$$\begin{aligned} \tfrac{g''}{g} &= G, \\ \tfrac{h''}{h} &= H, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde G a H jsou reálné konstanty.

Rovnice (3.5) jsou obyčejné lineární diferenciální rovnice, jejichž rešení nalezneme standardními postupy (např. [1] kap. 7.5). Pokud vytkneme stejně jako v případě funkce $f(y)$ nenulovou konstantu z $g(y)$ do funkce $b(x)$, můžeme tvrdit, že všechna zajímavá řešení rovnic vypadají takto:

$$g(x) = \begin{cases} \exp(\pm y\sqrt{G}) & G > 0 \\ \sinh(y\sqrt{G} + Q) & G > 0 \\ \cosh(y\sqrt{G} + Q) & G > 0 \\ y + Q & G = 0 \\ 1 & G = 0 \\ \sin(y\sqrt{-G} + Q) & G < 0 \end{cases}, \tag{3.6}$$

kde Q je reálná konsanta. Pro $h(y)$ jsou výsledky analogické.

Pokud dále od první z rovnic (2.21) odečteme čtvrtou, dostaneme

$$\Big(\frac{a'}{a}\Big)' = \frac{b'c'}{bc} + \frac{g'h'}{gh}. \tag{3.7}$$

Jelikož a, b i c jsou funkce x, musí platit

$$\frac{g'h'}{gh} = \text{const.} \tag{3.8}$$

Při dosazování za $g(y)$, resp. $h(y)$ z (3.6) zjistíme, že ne pro každou kombinaci těchto funkcí je rovnice (3.8) splněna. Vyhovují níže uvedené kombinace a kombinace, kde $g(y)$ a $h(y)$ zaměníme mezi sebou. Vzhledem k symetrii (2.21) vůči záměně β a γ budeme dále uvažovat bez újmy na obecnosti jen tyto kombinace funkcí $g(y)$ a $h(y)$.

$g(y)$	$h(y)$	**Konstanty**	**Podrobněji**
$\sinh(y\sqrt{G} + Q)$	$\cosh(y\sqrt{G} + Q)$	$G > 0, H = G$	2.2
$\sin(y\sqrt{-G} + Q)$	$\cos(y\sqrt{-G} + Q)$	$G < 0, H = G$	2.2
1	$\exp(Ky)$	$G = 0, K^2 = H$	2.3
1	$\cosh(y\sqrt{H} + Q)$	$G = 0, H > 0$	2.3
1	$\sinh(y\sqrt{H} + Q)$	$G = 0, H > 0$	2.3
1	$\sin(y\sqrt{-H} + Q)$	$G = 0, H < 0$	2.3
1	$y + Q$	$G = H = 0$	2.3
1	1	$G = H = 0$	2.4
$\exp(Ky)$	$\exp(Ly)$	$K^2 = G, L^2 = H$	2.5

Tabulka 1 - připustné kombinace funkcí $g(y)$, $h(y)$.

3.2 (Hyper)sinová řešení

Dosazením $g(y) = \sinh(y\sqrt{G}+Q)$ a $h(y) = \cosh(y\sqrt{G}+Q)$ do rovnice (2.21) pro R_{xy} získáme

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{b'}{b}\sqrt{G}\coth(y\sqrt{G} + Q) + \tfrac{c'}{c}\sqrt{G}\tanh(y\sqrt{G} + Q) \\ &\quad -\tfrac{a'}{a}\sqrt{G}\Big(\coth(y\sqrt{G} + Q) + \tanh(y\sqrt{G} + Q)\Big). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Tato rovnice jde přepsat do přehlednějšího tvaru (na základě nenulovosti G)

$$\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} = \Big(\frac{c'}{c} - \frac{a'}{a}\Big)\tanh^2(y\sqrt{G} + Q). \tag{3.9'}$$

Levá strana rovnice je nezávislá na y, zatímco $\tanh^2(y\sqrt{G} + Q)$ na y závisí, takže pro splnění (3.9') je nutno, aby obě strany rovnosti byly nula, tedy:

$$\begin{array}{lllll} \frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} = 0 & \Leftrightarrow & (\ln(a))' = (\ln(b))' & \Leftrightarrow & b = Ka \\ \frac{c'}{c} - \frac{a'}{c} = 0 & \Leftrightarrow & (\ln(c))' = (\ln(a))' & \Leftrightarrow & c = La \end{array}, \tag{3.10}$$

kde K a L jsou konstanty.

Podobnou úvahu je možno provést i pro řešení, kde $g(y) = \sin(y\sqrt{-G} + Q)$ a $h(y) = \cos(y\sqrt{-G} + Q)$. Rovnice pro R_{xy} nabývá tvaru

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{b'}{b}\cot(y\sqrt{-G} + Q)\sqrt{-G} - \frac{c'}{c}\tan(y\sqrt{-G} + Q)\sqrt{-G} \\ & & -\frac{a'}{a}\Big(\cot(y\sqrt{-G} + Q)\sqrt{-G} - \tan(y\sqrt{-G} + Q)\sqrt{-G}\Big) \end{array}, \tag{3.11}$$

což lze přepsat na

$$\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} = \Big(\frac{a'}{a} - \frac{c'}{c}\Big)\tan^2(y\sqrt{-G} + Q). \tag{3.11'}$$

Ze stejných důvodů jako u (3.9') musí být obě strany rovnice nulové, takže musí platit (3.10).

Dosazením (3.10) do (2.21), uvažováním libovolné z výše uvedených voleb g a h a případným vydělením rovnic dvěma dospějeme ke vztahům

$$\begin{array}{rcccl} \Lambda a^2 & = & \frac{1}{2}(R_{xx} + R_{yy}) & = & 2\frac{a''}{a} - \Big(\frac{a'}{a}\Big)^2 + G, \\ 0 & = & \frac{1}{2}(R_{xx} - R_{yy}) & = & \frac{a''}{a} - G - 2\Big(\frac{a'}{a}\Big)^2, \\ \Lambda a^2 & = & \frac{\alpha^2}{2}(R^{\phi}{}_{\phi} + R^{t}{}_{t}) & = & \Big(\frac{a'}{a}\Big)^2 + \frac{a''}{a} + 2G. \end{array} \tag{3.12}$$

Zbylé dvě rovnice (2.21) jsou splněny triviálně.[2] Uvedené tři rovnice jsou lineárně závislé[3] a má tedy smysl zabývat se dále jen dvěma z nich (vynecháme první). Dosazením za a''/a z druhé do třetí dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{rcl} G & = & \frac{a''}{a} - 2\Big(\frac{a'}{a}\Big)^2, \\ \frac{\Lambda}{3}a^2 & = & \Big(\frac{a'}{a}\Big)^2 + G \quad \Leftrightarrow \quad (a')^2 = \frac{\Lambda}{3}a^4 - Ga^2. \end{array} \tag{3.13}$$

Tyto rovnice jsou opět závislé. Pokud totiž zderivujeme druhou a výsledný vztah vydělíme[4] $2a'a$, dostaneme

$$\frac{a''}{a} = \frac{2}{3}\Lambda a^2 - G. \tag{3.14}$$

Po dosazení za $(2/3)\Lambda a^2$ z druhé z rovnic (3.13) obdržíme stejnou rovnici jako je první z (2.13). Po odmocnění získáme diferenciální rovnici se separovanými proměnnými, která je ekvivalentní

$$\pm\int \frac{da}{a\sqrt{\frac{\Lambda}{3}a^2 - G}} = \int dx, \tag{3.15}$$

[2] Rovnice pro R_{xy} byla již výše vyřešena a vztah pro $R^{\phi}{}_{\phi} - R^{t}{}_{t}$ je v tomto případě důsledek rovnice pro R_{xy}.

[3] První je součtem zbylých dvou.

[4] To si můžeme dovolit, jelikož a' není nula. Pokud by byla, nejde splnit první z rovnic (3.13).

kde znaménko na levé straně se může měnit v bodech, kde $a' = 0$ (tj. můžeme navazovat "+" a "-" řešení). Nyní má opět smysl začít rozlišovat dvě větve řešení dle znaménka G.

Větev $G > 0$ (kdy g a h jsou "hyper-" funkce) má smysl jen pro kladné kosmologické konstanty. Pokud by totiž byla kosmologická konstanta záporná, pravá strana druhé z rovnic (3.13) by byla záporná, zatímco levá nezáporná.
Integrováním (3.15) pak dostaneme vztah

$$\frac{2}{\sqrt{G}} \arctan\left(a\sqrt{\frac{\Lambda}{3G}} + \sqrt{\frac{\Lambda}{3G}a^2 - 1}\right) = \pm x + D, \tag{3.16}$$

kde D je integrační konstanta. Z této rovnice můžeme vyjádřit

$$a = \sqrt{\frac{3G}{\Lambda}} \frac{1}{\sin(\pm x\sqrt{G} + C)}, \tag{3.17}$$

kde $C = D\sqrt{G}$, tedy nová konstanta, a zderivováním se přesvědčit, že

$$a' = 0 \Leftrightarrow \cos(\pm x\sqrt{G} + C) = 0. \tag{3.18}$$

V těchto bodech je hodnota sinu plus nebo mínus jedna. Vzhledem k tomu, že ve výsledné metrice se vyskytuje $a(x)$ jen v druhých mocninách a sinus je sudý vzhledem k bodům, kde je jeho absolutní hodnota jedna, navazování řešení nic nového nepřinese a větev s mínus tedy můžeme ignorovat.
Celá metrika je tak ve tvaru

$$ds^2 = \frac{3G\Big(dx^2 + dy^2 + K^2\sinh^2(y\sqrt{G} + Q)d\phi^2 - L^2\cosh^2(y\sqrt{G} + Q)dt^2\Big)}{\Lambda \sin^2(x\sqrt{G} + C)}, \tag{3.19}$$

resp. některém ze symetrických.

Nyní zpět k druhé větvi řešení (3.15), s $G < 0$ (kdy g a h jsou goniometrické funkce). Pokud je kosmologická konstanta kladná, získáme vyintegrováním (3.15) výsledek[5]

$$a = \sqrt{\frac{-3G}{\Lambda}} \frac{1}{\sinh(x\sqrt{-G} + C)}, \tag{3.20}$$

který odpovídá metrice

$$ds^2 = \frac{-3G\Big(dx^2 + dy^2 + K^2\sin^2(y\sqrt{-G} + Q)d\phi^2 - L^2\cos^2(y\sqrt{-G} + Q)dt^2\Big)}{\Lambda \sinh^2(x\sqrt{-G} + C)}. \tag{3.21}$$

Pro záporné Λ však vyjde[6]

$$a = \sqrt{\frac{3G}{\Lambda}} \frac{1}{\cosh(x\sqrt{-G} + C)}, \tag{3.22}$$

[5] Vycházejí opět dvě větve - s plus a mínus. Nicméně derivace (3.20) je vždy nenulová a sinh() je lichá funkce, takže při práci s druhou mocninou a nepřináší mínus větev novou informaci.

[6] Opět vychází dvě větve, s $\pm x$. Derivace a je ale nulová jen v bodech, kde je nulový argument hyberbolického kosinu, a vzhledem k těmto bodům je a sudá, takže mínus větev nic nového nepřinese.

což odpovídá metrice

$$ds^2 = \frac{3G\Big(dx^2 + dy^2 + K^2 \sin^2(y\sqrt{-G} + Q)d\phi^2 - L^2 \cos^2(y\sqrt{-G} + Q)dt^2\Big)}{\Lambda \cosh^2(x\sqrt{-G} + C)}. \tag{3.23}$$

Všechny tři výše zmíněné metriky obsahují 5 volných konstant, ale tyto konstanty nenesou žádnou podstatnou informaci. Tři z nich (G, K a L) škálují souřadnice (t, ϕ, resp. dvojici x, y) a zbylé dvě (C a Q) fixují počátek (x, resp. y).

Existuje ale i jiný způsob, jak se s rovnicí (3.15) vypořádat. Tento postup bude nevyhnutelný v další části, poněvadž jako obdobu (3.15) tam obdržíme vztah (3.36), který již nepůjde jednoduše zintegrovat přímo. Postup však uvedeme již na tomto místě, i když zde jím dospějeme znovu ke stejným metrikám (jen zapsaných v jiných souřadnicích). Tento postup však bude mít jednu drobnou vadu na kráse, totiž přijdeme o konformitu metriky ${}^{(2)}g$.
Jak na to? Přeškálujeme souřadnici x pomocí funkce α, tedy zavedeme místo x novou souřadnici r, pro kterou bude platit

$$r = \alpha(x). \tag{3.24}$$

Z toho plyne

$$dr = \alpha'(x)dx, \tag{3.24$'$}$$

tedy

$$dr^2 = (\alpha'(x))^2 dx^2 = (a')^2(x)dx^2 = (\frac{\Lambda}{3}a^4 - Ga^2)dx^2 = (\frac{\Lambda}{3}r^4 - Gr^2)dx^2, \tag{3.24$''$}$$

kde třetí rovnost vyplynula z (3.13). Po dosazení těchto znalostí do (2.8b) získáváme metriku

$$ds^2 = -\gamma^2 dt^2 + \beta^2 d\phi^2 + r^2 dy^2 + \frac{dr^2}{\frac{\Lambda}{3}r^2 - G}. \tag{3.25}$$

Pokud ještě dosadíme za γ a β, obdržíme konečně

$$ds^2 = -L^2 r^2 \cosh^2(y\sqrt{G} + Q)dt^2 + K^2 r^2 \sinh^2(y\sqrt{G} + Q)d\phi^2 + r^2 dy^2 + \frac{dr^2}{\frac{\Lambda}{3}r^2 - G} \tag{3.26a}$$

pro kladná G, resp.

$$ds^2 = -L^2 r^2 \cos^2(y\sqrt{-G} + Q)dt^2 + K^2 r^2 \sin^2(y\sqrt{-G} + Q)d\phi^2 + r^2 dy^2 + \frac{dr^2}{\frac{\Lambda}{3}r^2 - G} \tag{3.26b}$$

pro G záporná. Konstanty K, L a G opět odpovídají škálování souřadnic t, ϕ a dvojice (r, y)[7] a Q opět volbě počátku y.

3.3 Schwarzschildovo-de Sitterovo řešení a jemu podobná

Pro většinu přípustných funkcí g a h, kde $g(y) = 1$, je možno pomocí třetí rovnice (2.21) dokázat, že $c = Da$, kde D je konstanta. Zbylé čtyři rovnice pak nabývají tvaru

$$\Lambda a^2 \;=\; \Big(\frac{a'}{a}\Big)' + \frac{a''}{a} + R,$$

[7] To není na první pohled zřejmé, jasné to začíná být, pokud se část metriky odpovídající (r, y) přepíše do tvaru $\frac{r^2}{G}Gdy^2 + \frac{dr^2}{G}\left(\frac{\Lambda}{3}\frac{r^2}{G} - 1\right)^{-1}$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{a''}{a} - \frac{a'}{a}\Big(\frac{b'}{b} + \frac{a'}{a}\Big), \\
2\Lambda a^2 &= \frac{(ba)''}{ba} + R, \\
\frac{b''}{b} &= \frac{a''}{a} + R,
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

kde konstanta R se liší dle toho, o jaký případ jde. Nyní podrobněji:

1. $h(y) = \exp(Ky)$
   Rovnice pro R_{xy} pak má tvar

   $$0 = \frac{c'}{c}K - \frac{a'}{a}K \Leftrightarrow (\ln(c))' = (\ln(a))' \Leftrightarrow c = Da. \tag{3.28a}$$

   Dosazením do zbytku (2.21) zjistíme, že $R = K^2$.

2. $h(y) = \cosh(y\sqrt{H} + Q)$
   Rovnice pro R_{xy} pak má tvar

   $$0 = \frac{c'}{c}\sqrt{H}\tanh(y\sqrt{H} + Q) - \frac{a'}{a}\sqrt{H}\tanh(y\sqrt{H} + Q) \Leftrightarrow c = Da. \tag{3.28b}$$

   Dosazením do zbytku (2.21) zjistíme, že $R = H$.

3. $h(y) = \sinh(y\sqrt{H} + Q)$
   Rovnice pro R_{xy} pak má tvar

   $$0 = \frac{c'}{c}\sqrt{H}\coth(y\sqrt{H} + Q) - \frac{a'}{a}\sqrt{H}\coth(y\sqrt{H} + Q) \Leftrightarrow c = Da. \tag{3.28c}$$

   Dosazením do zbytku (2.21) zjistíme, že $R = H$.

4. $h(y) = sin(y\sqrt{-H} + Q)$
   Rovnice pro R_{xy} pak má tvar

   $$0 = \frac{c''}{c}\sqrt{-H}\cot(y\sqrt{-H} + Q) - \frac{a''}{a}\sqrt{-H}\cot(y\sqrt{-H} + Q) \Leftrightarrow c = Da. \tag{3.28d}$$

   Dosazením do zbytku (2.21) zjistíme, že $R = H$.

5. $h(y) = y + Q$
   Rovnice pro R_{xy} pak má tvar

   $$0 = \frac{c'}{c}\frac{1}{y+Q} - \frac{a'}{a}\frac{1}{y+Q} \Leftrightarrow \frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} \Leftrightarrow c = Da. \tag{3.28e}$$

   Dosazením do zbytku (2.21) zjistíme, že $R = 0$.

3.3.1 $\alpha = \text{const.}$

Podívejme se nejdřív na případ, kdy $a' = 0$. V soustavě (3.27) pak zůstanou jen tři netriviální rovnice, a to

$$\begin{aligned} \Lambda a^2 &= \frac{b''}{b}, \\ 2\Lambda a^2 &= \frac{b''}{b} + R, \\ \frac{b''}{b} &= R. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Z nich zřejmě prostřední je součtem zbylých dvou, a tak je možno soustavu přepsat

$$\begin{aligned} a^2 &= \tfrac{R}{\Lambda}, \\ b'' &= Rb. \end{aligned} \tag{3.29'}$$

Jelikož metrika (2.8b) pro $\alpha = 0$ nemá smysl, neexistuje pro $R = 0$ (tj. případ 5.) smysluplné řešení. Dále je možno si všimnout, že levá strana první rovnice (3.29') je vždy nezáporná, a tedy řešení existuje pouze tehdy, když je znaménko R a Λ stejné.

V případech 1.-3. je $R > 0$, tedy řešení má smysl jen pro $\Lambda > 0$ a vypadá

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\tfrac{R}{\Lambda}}, \\ b &= A\exp(x\sqrt{R}) + B\exp(-x\sqrt{R}) \end{aligned} \tag{3.30}$$

Odpovídající celé metriky mají tak výsledný tvar:

1.
$$ds^2 = -E^2 \exp(2yK)dt^2 + (A\exp(xK) + B\exp(-xK))^2 d\phi^2 + \frac{K^2}{\Lambda}(dx^2 + dy^2), \tag{3.31a}$$

   kde $E \equiv DK/\sqrt{\Lambda} = \text{const.}$

2.
$$\begin{aligned} ds^2 = & -E^2\cosh^2(y\sqrt{H} + Q)dt^2 \\ & +(A\exp(x\sqrt{H}) + B\exp(-x\sqrt{H}))^2 d\phi^2 + \tfrac{H}{\Lambda}(dx^2 + dy^2), \end{aligned} \tag{3.31b}$$

   kde $E \equiv D\sqrt{H/\Lambda} = \text{const.}$

3.
$$\begin{aligned} ds^2 = & -E^2\sinh^2(y\sqrt{H} + Q)dt^2 \\ & +(A\exp(x\sqrt{H}) + B\exp(-x\sqrt{H}))^2 d\phi^2 + \tfrac{H}{\Lambda}(dx^2 + dy^2), \end{aligned} \tag{3.31c}$$

   kde $E \equiv D\sqrt{H/\Lambda} = \text{const.}$

V případě 4. máme řešení jen pro $\Lambda < 0$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\tfrac{H}{\Lambda}}, \\ b &= A\sin(x\sqrt{-H} + B), \end{aligned} \tag{3.32}$$

a odpovídající metrika má podobu

$$ds^2 = -E^2\sin^2(y\sqrt{-H} + Q)dt^2 + A^2\sin^2(x\sqrt{-H} + B)d\phi^2 + \frac{H}{\Lambda}(dx^2 + dy^2), \tag{3.31d}$$

kde $E \equiv D\sqrt{H/\Lambda} = \text{const.}$

Význam konstant je následující: E odpovídá škálování času, H škálování souřadnic (x,y), Q volbě počátku y a v konstantách A a B je skryto škálování ϕ a volba počátku x.[8]

3.3.2 $\alpha \neq$ const.

Nyní k druhé větvi výpočtu, kdy $a' \neq 0$.[9] Zde můžeme rozšířit druhou rovnici (3.20) výrazem a/a',

$$\frac{a''}{a'} = \frac{(ab)'}{ab} \Leftrightarrow (\ln(a'))' = (\ln(ab))' \Leftrightarrow a' = Eab \Leftrightarrow (\ln(a))' = Eb. \tag{3.33}$$

Dosazením (3.33) do zbylých rovnic (3.27) dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} \Lambda a^2 &= 2\tfrac{a''}{a} - \left(\tfrac{a'}{a}\right)^2 + R, \\ 2\Lambda a^2 &= \tfrac{a'''}{a'} + R, \\ \tfrac{a'''}{a'} - 3\tfrac{a''}{a} + 2\left(\tfrac{a'}{a}\right)^2 &= \tfrac{a''}{a} + R. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Tyto tři rovnice jsou opět lineárně závislé[10] a při dalších výpočtech stačí uvažovat první dvě. Vynásobme druhou a' a zintegrujme,

$$\frac{2}{3}\Lambda a^3 = a'' + Ra + \frac{C}{2}, \tag{3.35}$$

resp.

$$\frac{2}{3}\Lambda a^2 = \frac{a''}{a} + K^2 + \frac{C}{2a}, \tag{3.35$'$}$$

kde C je integrační konstanta. Pokud nyní vynásobíme (3.35) opět a', dostaneme znovu lehce integrovatelnou rovnici:

$$\frac{2}{3}\Lambda\frac{a^4}{4} = \frac{(a')^2}{2} + R\frac{a^2}{2} + \frac{C}{2}a + F, \tag{3.36}$$

resp.

$$\frac{\Lambda}{3}a^2 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + R + \frac{C}{a} + \frac{F}{a^2}, \tag{3.36$'$}$$

kde F značí integrační konstantu. Odečteme-li od dvojnásobku (3.35') rovnici (3.36'), získáme vztah

$$\Lambda a^2 = 2\frac{a''}{a} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + R - \frac{F}{a^2}. \tag{3.37}$$

Porovnáním s první rovnicí (3.34) dostaneme $F = 0$ a zjistíme, že obě rovnice (3.34) jsou důsledky (3.36). Bohužel rovnice (3.36) nejde jednoduše zintegrovat a budeme muset použít trik s volbou nové souřadnice, který jsme již vyzkoušeli v oddíle (3.2).

Novou souřadnici r zvolíme jako

$$r = a(x), \tag{3.38}$$

[8] V případě 4. je to zřejmé. Pokud jsou A, B nenulové, je možno b v (3.30) přepsat jako hyper(ko)sinus a význam konstant se také vyjasní. Pokud A, či B je nula (pokud by byly obě nula, dostaneme metriku, kde posun ve ϕ neodpovídá žádnému intervalu, což nechceme), určuje zbylá souřadnice škálování a počátek x jsme v jistém smyslu odsunuli "do nekonečna".

[9] Tím myslíme, že a není konstanta. Pokud bude $a' = 0$ jen v některých bodech, tak nám to nevadí.

[10] Součet druhé a třetí je dvojnásobek první.

což implikuje

$$dr = a'dx, \tag{3.38'}$$

tedy

$$dr^2 = (a')^2 dx^2 = \Big(\frac{\Lambda}{3}a^4 - Ra^2 - Ca\Big)dx^2 = \Big(\frac{\Lambda}{3}r^4 - Rr^2 - Cr\Big)dx^2, \tag{3.38''}$$

kde druhou rovnost jsme obdrželi z (3.36). Nastává ovšem problém, jak spočítat b z (3.33). Naštěstí platí

$$Eb = \frac{d(\ln(a))}{dx} = \frac{d(\ln(a))}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{d(\ln(r))}{dr}a' = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}r^4 - Rr^2 - Cr}. \tag{3.39}$$

Metriku, která odpovídá těmto případům, je pak možno zapsat ve tvaru

$$\begin{array}{rcl} ds^2 & = & -D^2r^2h^2(y)dt^2 + N(r)d\phi^2 + r^2dy^2 + \frac{dr^2}{N(r)}, \\ N(r) & = & \frac{\Lambda}{3}r^2 - R - \frac{C}{r}. \end{array} \tag{3.40}$$

3.3.3 Sféricky symetrická řešení

Zajímavé na této, resp. jedné z metrik, kterou z (3.40) dostaneme výše uvedenými symetriemi, je to, že popisuje všechna vakuová statická sféricky symetrická řešení. Abychom to ukázali, uvažujme obecnou statickou sféricky symetrickou metriku,

$$\begin{array}{rcl} ds^2 & = & -T^2(r)dt^2 + S^2(r)dr^2 + U^2(r)d\Omega^2 \\ & = & -T^2(r)dt^2 + S^2(r)dr^2 + U^2(r)(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \end{array} \tag{3.41}$$

Pomocí transformace souřadnic

$$x = \int \frac{U(r)}{S(r)}dr \Leftrightarrow dx = \frac{U(r)}{S(r)}dr \tag{3.42}$$

ji převedeme na částečně konformní tvar

$$ds^2 = -T^2dt^2 + U^2(dx^2 + d\theta^2) + U^2\sin^2(\theta)d\phi^2, \tag{3.41'}$$

kde T a U jsou stejné funkce jako v (3.41). To ale odpovídá metrice (2.8b), pokud ztotožníme

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & U, \\ \beta & = & U\sin(\theta), \\ \gamma & = & T \end{array} \tag{3.43}$$

a přejmenujeme souřadnici θ na y.

Funkce α, β, γ jsou zjevně separované a spadají mezi řešení diskutovaná v této kapitole. Vzhledem k závislosti na souřadnici θ, resp. y se jedná o případ 4. tohoto oddílu (jen musíme zaměnit funkce γ a β). Vyjdou nám tedy dvě metriky. Jedna pro $\alpha \neq$ const. (pro libovolnou kosmologickou konstantu) a druhé pro α konstantní (jen pro $\Lambda < 0$):

- Nezávisle na znaménku kosmologické konstanty získáme řešení[11]

$$ds^2 = -N(r)dt^2 + r^2 \sin^2(y) d\phi^2 + r^2 dy^2 + \frac{dr^2}{N(r)}, \tag{3.44}$$

kde $N(r) = 1 - \frac{C}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2$. Toto je Schwarzschildova-de Sitterova metrika.

- Pro záporné Λ však obdržíme ještě jedno řešení:

$$ds^2 = -E^2 \sin^2(x) dt^2 + \frac{-1}{\Lambda} \sin^2(y) d\phi^2 + \frac{-1}{\Lambda}(dx^2 + dy^2). \tag{3.44'}$$

Pro kladné kosmologické konstanty jsme dokázali částečnou analogii Birkhoffova teorému:[12]
Jediné statické sféricky symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic s kladnou kosmologickou konstantu je Schwarzschieldovo-de Sitterovo.
Pro zápornou kosmologickou konstantu je přípustné ještě jedno řešení, (3.44'), které však v tuto chvíli nedokážu fyzikálně interpretovat.

3.4 Případ se třemi ortogonálními Killingovými vektorovými poli

Uvažujme nyní případ, kdy je metrika nezávislá ještě na y, tedy kdy $g(y) = h(y) = 1$. Třetí rovnice (2.21) je splněna triviálně (nic nezávisí na y).

Pokud budeme užívat označení $A = \ln(a)$, $B = \ln(b)$, $C = \ln(c)$, $U = B + C = \ln(bc)$, $V = B - C = \ln(b/c)$, dosazením do páté rovnice (2.21) dostaneme vztah

$$0 = \frac{b''}{b} - \frac{c''}{c} = B'' + (B')^2 - C'' - (C')^2 = V'' + V'U'. \tag{3.45}$$

Vyjádřením V' z této rovnice zjistíme, že

$$V' = D \exp(-U), \tag{3.46}$$

kde D je konstanta. Jelikož dále víme, že $U' = B' + C' = \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c}$, můžeme B' i C' vyjádřit pomocí U takto:

$$\begin{array}{lllllllll} B' & = & \frac{b'}{b} & = & \frac{U'+V'}{2} & = & \frac{1}{2}(U' + D\exp(-U)) & = & \frac{u'+D}{2u}, \\ C' & = & \frac{c'}{c} & = & \frac{U'-V'}{2} & = & \frac{1}{2}(U' - D\exp(-U)) & = & \frac{u'-D}{2u}, \end{array} \tag{3.47}$$

kde $u = \exp(U) = bc$. Nyní dosadíme (3.47) do zbylých tří netriviálních rovnic (2.21),

$$\begin{array}{rcl} \Lambda a^2 & = & A'' + \dfrac{2uu'' - (u')^2 + D^2}{4u^2}, \\ 0 & = & \dfrac{2uu'' - (u')^2 + D^2}{4u^2} - A'\dfrac{u'}{u}, \\ 2\Lambda a^2 & = & \dfrac{u''}{u}. \end{array} \tag{3.48}$$

[11] Konstanty D, H a Q byly nastaveny tak, aby metrika splňovala (3.43).

[12] Ten tvrdí, že jediné sféricky symetrické vakuové řešení Einsteinových rovnic s nulovou kosmologikou konstantou je řešení Schwarzchildovo.

Dosazením z třetí do první rovnice (3.48) získáme vztah

$$A'' = \frac{(u')^2 - D^2}{4u^2}. \tag{3.48$'$}$$

Pokud $u' = 0$ (identická nula, ne jen nulová derivace v nějakém bodě), pak i $u'' = 0$ a dle třetí rovnice (3.48) musí být $a = 0$, což nechceme. Tedy nechť $u' \neq 0$ abychom mohli vyjádřit z druhé rovnice (3.48)

$$A' = \frac{1}{2}\frac{u''}{u'} - \frac{1}{4}\frac{u'}{u} + \frac{D^2}{4uu'}. \tag{3.48$''$}$$

Nyní ukážeme, že (3.48') je důsledkem zbylých dvou rovnic (tj. (3.48") a třetí rovnice (3.48)). Víme, že

$$A' = \frac{a'}{a} = \frac{1}{2}\frac{(2\Lambda a^2)'}{2\Lambda a^2} = \frac{1}{2}\frac{u}{u''}\Big(\frac{u''}{u}\Big)' = \frac{1}{2}\Big(\frac{u'''}{u''} - \frac{u'}{u}\Big). \tag{3.49}$$

Dosadíme-li za A' do (3.48"), dostaneme

$$0 = -\frac{u'''}{2u''} + \frac{u''}{2u'} + \frac{u'}{4u} + \frac{D^2}{4uu'}. \tag{3.50}$$

Tuto rovnici přenásobíme u''/u' a máme

$$0 = -\frac{u'''}{2u'} + \frac{1}{2}\Big(\frac{u''}{u'}\Big)^2 + \frac{u''}{4u} + \frac{D^2 u''}{4u(u')^2}. \tag{3.50$'$}$$

Nyní k (3.50) přičteme zderivovanou rovnici (3.48")

$$\begin{aligned} A'' &= -\frac{u'''}{2u'} + \frac{1}{2}\Big(\frac{u''}{u'}\Big)^2 + \frac{u''}{4u} + \frac{D^2u''}{4u(u')^2} + \frac{u'''}{2u'} - \frac{1}{2}\Big(\frac{u''}{u'}\Big)^2 - \frac{u''}{4u} + \Big(\frac{u'}{2u}\Big)^2 - \frac{D^2}{4}\frac{u''u + (u')^2}{(uu')^2} \\ &= \frac{(u')^2 - D^2}{4u^2}, \end{aligned} \tag{3.51}$$

což jsme chtěli dokázat. Celá soustava (2.21) je tedy v tomto případě ekvivalentní (3.50), s tím, že a vyjádříme z třetí rovnice (3.48) a b, c získáme zintegrováním (3.47).

Zbavme se tedy v (3.50) zlomků,

$$0 = -2u'''u'u + 2(u'')^2u + u''(u')^2 + D^2u''. \tag{3.50$''$}$$

V této rovnici se nevyskytuje proměnná x, jen funkce u a derivace dle x. Uvažujme tedy, že budeme vyjadřovat derivace u ne jako funkce x, ale jako funkce u, tedy $u' = p(u)$, kde p je nová funkce. Pro vyšší derivace u platí $u'' = p'p$, resp. $u''' = p''p^2 + (p')^2p$, kde $p(u)$ je derivováno dle u. Dosazením do (3.50") získáváme (po vydělení p^3)

$$2p''u = p'\Big(1 + \frac{D^2}{p^2}\Big). \tag{3.51}$$

Jelikož $(p'u)' = p''u + p'$, můžeme (3.51) přepsat jako

$$2(p'u)' = p'\Big(3 + \frac{D^2}{p^2}\Big) = \Big(3p - \frac{D^2}{p}\Big)', \tag{3.51$'$}$$

což lze snadno integrovat na

$$\frac{p'}{3p - \frac{D^2}{p} + C} = \frac{pp'}{3p^2 + Cp - D^2} = \frac{1}{2u}. \tag{3.52}$$

Ve jmenovateli na levé straně je kvadratický trojčlen jehož kořeny jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 + 12D^2}}{6}. \tag{3.53}$$

Z (3.53) je zřejmé, že dvojnásobný kořen existuje jen pro $C = D = 0$, jinak $\lambda_1 \neq \lambda_2$ a pro všechny volby C a D jsou oba kořeny reálné, takže rozklad na parciální zlomky si můžeme dovolit.

Nejdříve co s dvojnásobným kořenem:

$$\frac{pp'}{3p^2 + Cp - D^2} = \frac{pp'}{3p^2} = \frac{1}{3}(\ln(p))' = \frac{1}{2}(\ln(u))' \Leftrightarrow p = Eu^{\frac{3}{2}}, \tag{3.54}$$

kde E je konstanta. Po uvážení, že $u' = p(u)$, tedy získáváme rovnici

$$u' = Eu^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{u}} = Ex + F \Leftrightarrow u = \frac{1}{(Gx+H)^2}, \tag{3.55}$$

kde F je integrační konstanta a $G = -E/2$, resp. $H = -F/2$ jsou nové konstanty. Po dosazení do (3.48c) vyjádříme a^2 jako

$$a^2 = \frac{3G^2}{\Lambda(Gx+H)^2}. \tag{3.55}$$

Z (3.47) nakonec vypočteme b, c (zde přihlédneme k tomu, že $D = 0$),

$$\begin{array}{rclcrclcl} (\ln(b))' &=& \frac{1}{2}(\ln(u))' &\Leftrightarrow& b &=& K\sqrt{u} &=& \frac{K}{(Gx+H)}, \\ (\ln(c))' &=& \frac{1}{2}(\ln(u))' &\Leftrightarrow& c &=& L\sqrt{u} &=& \frac{L}{(Gx+H)}. \end{array} \tag{3.56}$$

Výsledná metrika má tedy podobu

$$ds^2 = \frac{1}{(Gx+H)^2}\Big(-L^2dt^2 + K^2d\phi^2 + \frac{1}{(Gx+H)^2}(dx^2 + dy^2)\Big). \tag{3.57}$$

Nyní zpět k případu, kdy $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Platí pak

$$\frac{pp'}{3p^2 + Cp - D^2} = \frac{pp'}{3(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)} = \frac{\lambda_1}{3(\lambda_1 - \lambda_2)}\frac{1}{p-\lambda_1} + \frac{-\lambda_2}{3(\lambda_1 - \lambda_2)}\frac{1}{p-\lambda_2}. \tag{3.58}$$

Dosazením do levé strany (3.52) a vyintegrováním získáváme vztah

$$(p-\lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}(p-\lambda_2)^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}} = Eu^{\frac{3}{2}}, \tag{3.59}$$

kde E má funkci integrační konstanty. Dosazením za $p(u)$ tak dostáváme rovnici ekvivalentní s (3.50), která je sice prvního řádu, ale má výrazně komplikovanější strukturu:

$$(u'-\lambda_1)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}(u'-\lambda_2)^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}} = Eu^{\frac{3}{2}}. \tag{3.59'}$$

3.5 Případ se dvěma exponencielami

Poslední zatím nediskutovanou možností je případ, kdy

$$g(y) = \exp(Ky), h(y) = \exp(Ly).$$

Nepodařilo se mi s ním příliš mnoho udělat. Zredukoval jsem ho jen na tři obyčejné diferenciální rovnice pro jednu funkci:

Použijeme stejné značení jako v části 2.4, tj. $A = \ln(a), B = \ln(b), C = \ln(c), U = B+C = \ln(bc), V = B - C = \ln(b/c)$. Pak z poslední rovnice (2.21) získáváme vztah

$$0 = B'' + (B')^2 + K^2 - C'' - (C')^2 - L^2 = V'' + V'U' - (L^2 - K^2). \tag{3.60}$$

Považujeme-li jej za rovnici pro V', je její fundamentální systém

$$V' = \chi \exp(-U), \tag{3.61}$$

kde χ je libovolná konstanta.

Pro nalezení řešení s pravou stranou (tj. s $(L^2 - K^2)$) použijeme variaci konstant. Uvažujme, že $\chi = \chi(x)$. Pak dosazením (3.61) do (3.60) získáme vztah

$$\chi' = (L^2 - K^2) \exp(U). \tag{3.62}$$

Zavedeme tedy funkci $\psi(x)$, pro kterou bude platit $\psi' = \exp(U)$ (je určena jednoznačně až na konstantu). Vzhledem ke tvaru (3.62) můžeme tuto konstantu zvolit takovou, aby platilo $\chi = (L^2 - K^2)\psi$. Pak B', C' můžeme zapsat jako

$$\begin{array}{rcccl} B' & = & \frac{U'+V'}{2} & = & \frac{\psi''+(L^2-K^2)\psi}{2\psi'}, \\ C' & = & \frac{U'-V'}{2} & = & \frac{\psi''-(L^2-K^2)\psi}{2\psi'}. \end{array} \tag{3.63}$$

Zbylou metrickou funkci vyjádříme pomocí čtvrté rovnice (2.21)

$$a^2 = \frac{1}{2\Lambda} \frac{\psi'''}{\psi'}. \tag{3.64}$$

Z toho již snadno derivací obdržíme rovnici

$$A' = \frac{(a^2)'}{2a^2} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\psi^{(4)}}{\psi'''} - \frac{\psi''}{\psi'}\Big), \tag{3.64$'$}$$

kde $\psi^{(4)}$ značí čtvrtou derivaci ψ dle x. Dosazením do zbývajících tří rovnic (2.21) získáme vztahy

$$\begin{array}{rcl} \frac{\psi'''}{\psi'} & = & \Big(\frac{\psi^{(4)}}{\psi'''} - \frac{\psi''}{\psi'}\Big)' + \frac{\psi'''}{\psi'} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\psi''}{\psi'}\Big)^2 + \frac{(L^2-K^2)^2}{2}(\psi')^2 + K^2 + L^2, \\ 0 & = & \frac{\psi'''}{\psi'} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\psi''}{\psi'}\Big)^2 + \frac{(L^2-K^2)^2}{2}(\psi')^2 - K^2 - L^2 + \Big(\frac{\psi^{(4)}}{\psi'''} - \frac{\psi''}{\psi'}\Big)\frac{\psi''}{\psi'}, \\ 0 & = & K\Big(\frac{\psi''+(L^2-K^2)\psi}{2\psi'}\Big) + L\Big(\frac{\psi''-(L^2-K^2)\psi}{2\psi'}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\psi^{(4)}}{\psi'''} - \frac{\psi''}{\psi'}\Big)(K+L). \end{array} \tag{3.65}$$

Bohužel ty se mi nepodařilo dále výrazněji zjednodušit.

Kapitola 4

Závěr

V této práci jsme se zabývali statickými axiálně symetrickými řešeními Einsteinových rovnic s nenulovou kosmologickou konstantou. Speciálně jsme se zajímali o to, zda a kdy jde metrika a polní rovnice uvést do podobně jednoduchého tvaru, jako ve Weylově případě bez kosmologické konstanty.

Přestože v obecném případě se nám Weylův postup zopakovat nepodařilo, při některých speciálních tvarech metriky lze polní rovnice vyřešit. Pokud konkrétně odmocnina z determinantu metriky (2.8b) je vlastní funkcí Laplaceova operátoru, vedou rovnice k jednoduché podmínce pro jednu z metrických funkcí, na základě jejíž znalosti jsme dále schopni vyjádřit (pokud existují) i zbylé dvě.

Kromě toho, jsou-li metrické funkce separované, je možno (až na dvě větve) řešení popsat explicitně. Tento případ zahrnuje mj. všechny statické sféricky symetrické vakuové prostoročasy.

Literatura

[1] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky 2*, Matfyzpress, Praha 1998.

[2] J. Kopáček: *Matematická analýza pro fyziky 3*, Matfyzpress, Praha 2002.

[3] H. Stephani et al.: *Exact solutions of Einstein's field equations*, CUP, Cambridge 2003.

[4] J. L. Synge: *Relativity: The general theory*, North-Holland, Amsterdam 1960.

[5] R. M. Wald: *General Relativity*, University of Chicago press, 1984.