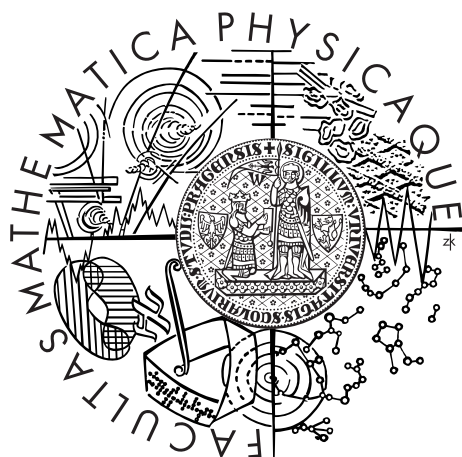


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

# DIPLOMOVÁ PRÁCE



Tomáš Vyskočil

## VISUALIZACE A GEOMTRICKÁ REPREZENTACE GRAFŮ

Katedra aplikované matematiky

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CS

Studijní program: Informatika

Studijní obor: Diskretní matematika

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze, dne 1.července 2006

Tomáš Vyskočil

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Průnikové grafy</b>	<b>6</b>
1	Zkoumané třídy grafů . . . . .	6
2	Základní vztahy . . . . .	13
2.1	Charakterizace chordálních grafů . . . . .	13
2.2	Charakterizace intervalových grafů . . . . .	14
2.3	Třídy související s porovnatelnými grafy . . . . .	14
2.4	Vláknové grafy a mixované grafy . . . . .	15
<b>3</b>	<b>SEG a STRING grafy</b>	<b>16</b>
1	Podtřídy SEG a STRING grafů . . . . .	16
2	Velikosti reprezentací . . . . .	17
2.1	Velikosti reprezentací SEG grafů . . . . .	17
2.2	Velikosti reprezentací STRING grafů . . . . .	17
3	Vztahy mezi třídami . . . . .	18
3.1	Omezení počtu směrů . . . . .	19
3.2	Order Forcing Lemma . . . . .	20
3.3	Základní vlastnosti STRING grafů . . . . .	20
3.4	Charakterizace STRING grafů . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Reprezentace planárních grafů</b>	<b>22</b>
0.5	Bipartitní rovinné grafy . . . . .	23
0.6	Třídy blízké rovinným . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Nové reprezentace SEG grafů</b>	<b>25</b>
0.7	Doplňky stromů . . . . .	26
0.8	Sériově paralelní grafy . . . . .	28
0.9	Doplňky super sériově paralelních grafů . . . . .	30

**Název práce:** Visualizace a geometrická reprezentace grafů

**Autor:** Tomáš Vyskočil

**Katedra (ústav):** Katedra aplikované matematiky

**Vedoucí diplomové práce:** Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

**e-mail vedoucího:** honza@kam.mff.cuni.cz

**Abstrakt:**

**Klíčová slova:**

**Title:** Visualization and geometric representation of graphs

**Author:** Tomáš Vyskočil

**Department:** Department of Applied Mathematics

**Supervisor:** Prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.

**Supervisor's e-mail address:** honza@kam.mff.cuni.cz

**Abstract:** The main interest of this paper is ...

**Keywords:**

# Kapitola 1

## Úvod

Průnikové grafy, patří v současné době k široce studovaným oborům kombinatoriky, jednak proto že zde můžeme najít mnoho teoreticky zajímavých problémů, ale i proto, že problémy týkající se průnikových grafů souvisí s obory jako je biologie, nebo například elektronika a s ní spojené navrhování tištěných spojů.

Průnikových grafů patří mezi jeden z nemnoha oborů kombinatoriky, zabývající se geometrií. Jejich studium začalo pravděpodobně zkoumáním intervalových grafů, u kterých se ukázala spousta pěkných vlastností [2], [3], tyto grafy jsou navíc jednoduše rozpoznatelné [3] a také mají mnoho praktických aplikací.

Mnohem komplikovanější je struktura niťových grafů (průnikové grafy křivek v rovině). Tyto grafy poprvé zmínil Sinden [4] ve spojení s povrchem RC obvodů a nezávisle ne něm i Ehrlich, Even a Tarjan [?]. K dalším komplexním výsledkům přispěl Kratochvíl [6], a společně s Matouškem [8]. Rozpoznání problému se ukázalo jako NP-těžké [8] a později velice zajímavou konstrukcí dokonce NP-úplné [9], [10].

Další zkoumanou množinou průnikových grafů jsou průnikové grafy konvexních množin v rovině [19] a průnikové grafy krychlí a kvádrů v  $n$ -rozměrném prostoru [20], [21].

Mezi mimořádně zajímavé grafy patří pseudo-úsečkové grafy a průnikové grafy úseček které studovali Kratochvíl a Matoušek [1]. Velkou zajímavost těchto grafů umocňuje otázka od Scheinermana [12]: *Je každý rovinný graf do průnikových grafů úseček v rovině?* Tato otázka je stále otevřená dokonce i pro pseudo-úsečkové grafy, ale některých částečných výsledků již bylo dosaženo. Problém rozpoznání dotykových grafů úseček je NP-těžký a to i když je omezen pouze na rovinné grafy [13]. De Castro, Cobos, Dana a Márquez [14] ukázali, že rovinné grafy bez trojúhelníků jsou dotykové grafy úseček ve třech směrech. Dále se ukázalo, to je zatím asi to nejzajímavější z oblasti úsečkových grafů, že 4-souvislé a 3-obarvitelné rovinné grafy jsou dotykové grafy pseudo-úsečkových grafů, to ukázali Fraysseix, Mendez a Pach [16] a v [17] je tato vlastnost dokázána dokonce pro úsečkové grafy. Další obměnu na téma úsečkové grafy přichází s určením počtu směrů. A jak takové třídy vypadají nejdříve studoval Kratochvíl a Matoušek [1]

a později Černý, Kral, Nyklová a Pankrác [22] kteří charakterizovali, jaké třídy grafů jsou těmito směry určeny.

# Kapitola 2

## Průnikové grafy

V této kapitole si zdefinujeme základní pojmy z oblasti průnikových grafů a ukážeme si také základní vztahy mezi jednotlivými třídami těchto grafů.

**Definice 0.1** (Graf). Grafem  $G$  rozumíme uspořádanou dvojici  $G = (V, E)$ , kde  $V$  je množina vrcholů a  $E$  je množina hran mezi vrcholy  $E \subseteq \{uv \mid u, v \in V\}$ .

### 1 Zkoumané třídy grafů

**Definice 1.1.** *Průnikové grafy* Necht'  $\mathcal{M}$  je množinový systém.  $IG(\mathcal{M})$  značí třídu všech grafů  $G$  pro které existuje zobrazení

$$f : V_G \longrightarrow \mathcal{M}$$

takové, že pro každou dvojici různých vrcholů  $u, v \in V_G$ ,

$$uv \in E_G \quad \text{právě když} \quad f(u) \cap f(v) \neq \emptyset.$$

Grafy z  $IG(\mathcal{M})$  jsou nazýváme průnikové grafy z  $\mathcal{M}$ .

**INT** =  $IG$ (intervaly na přímce) budeme nazývat *intervalové grafy* <sup>1</sup>

**CA** =  $IG$ (intervaly na kružnici) budeme nazývat *obloukové grafy* <sup>2</sup>

**CIR** =  $IG$ (tětivy na kružnici) budeme nazývat *tětivové grafy* <sup>3</sup>

**PC** =  $IG$ (mnohostěny vepsané do kružnice) budeme nazývat *PC grafy* <sup>4</sup>

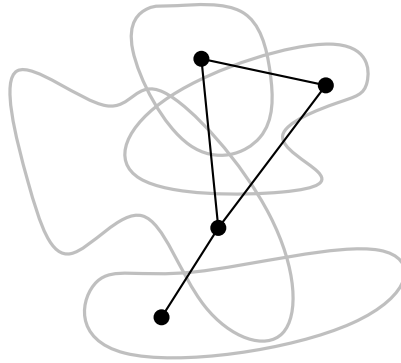
---

<sup>1</sup>v angličtině *interval graphs*

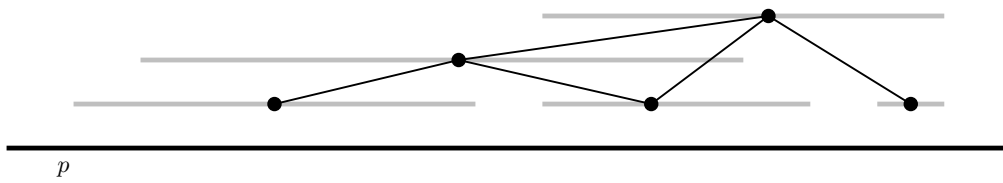
<sup>2</sup>v angličtině *circular arc graphs*

<sup>3</sup>v angličtině *circle graphs*

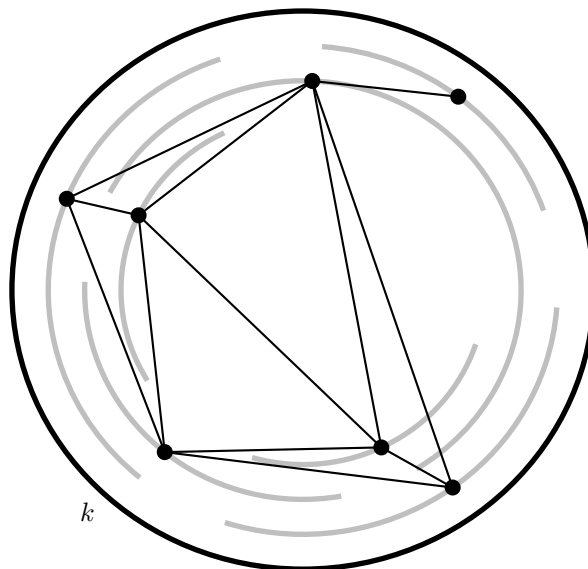
<sup>4</sup>v angličtině *polygon-circle graphs*



Obrázek 2.1: Průnikový graf



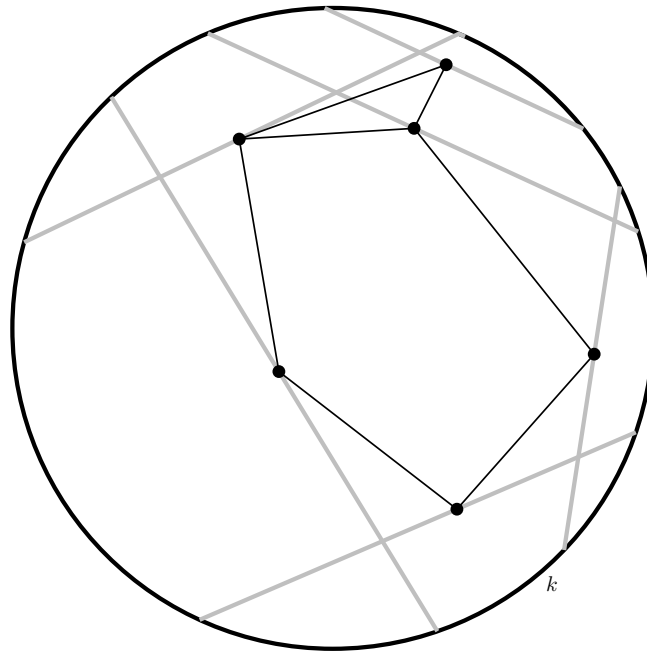
Obrázek 2.2: Intervalový graf



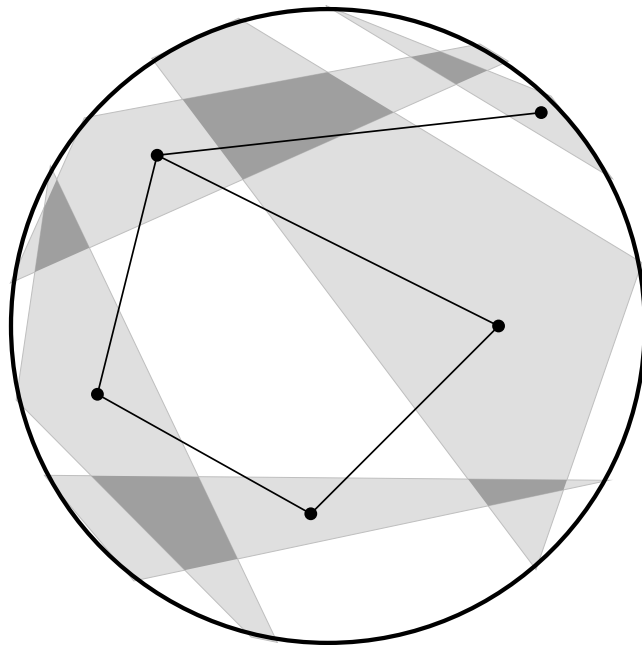
Obrázek 2.3: Obloukový graf

**PER** =  $IG$ (úsečky s konci na 2 rovnoběžných přímkách) se nazývají *permutační*

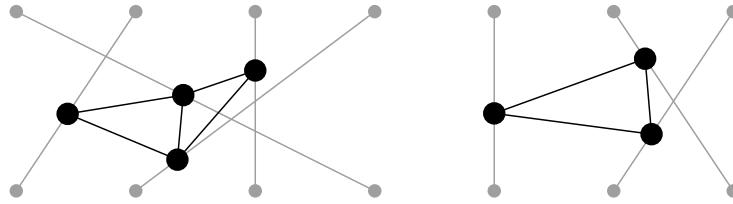




Obrázek 2.4: Tětivový graf

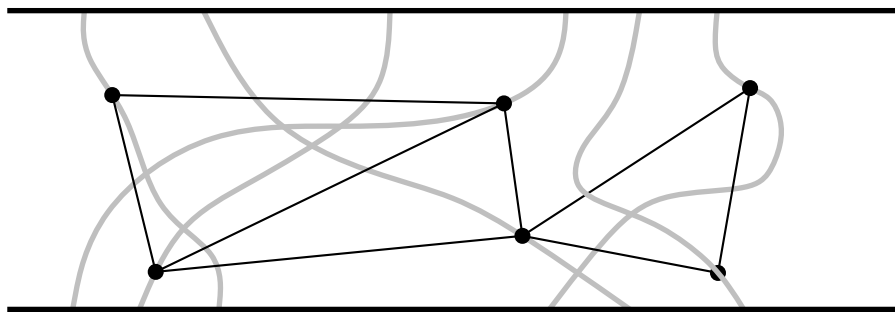


Obrázek 2.5: PC graf

grafy<sup>5</sup>

Obrázek 2.6: Permutační graf

**FUN** =  $IG$ (funkce s konci na 2 rovnoběžných přímkách, které leží svisele a s definičním oborem me  
 =  $IG$ (grafy spojitých funkcí definovaných na  $\langle 0, 1 \rangle$ ) se nazývají *funkční grafy*<sup>6</sup>



Obrázek 2.7: Funkční grafy

**IFA** =  $IG$ (intervalová vlákna)  
 =  $IG$ (grafy spojitě nezáporné funkce definované na uzavřeném intervalu s nulovými okraji)  
 se nazývají *vláknové grafy*<sup>7</sup>

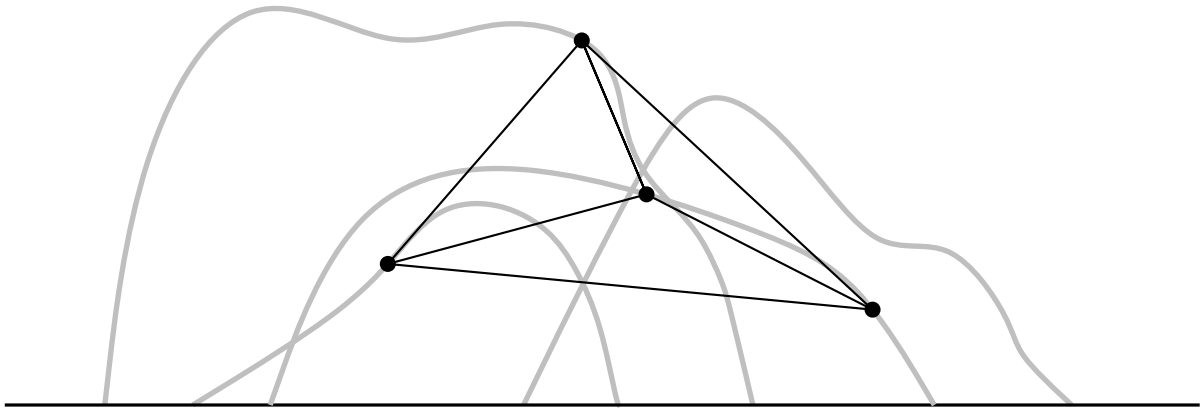
**OSTRING** =  $IG$ (křivky které se jedním koncem dotýkají kružnice a navíc leží celé v ní)  
 =  $IG$ (grafy spojitě nezáporné funkce definované na uzavřeném intervalu s nulovými okraji)  
 se nazývají *vnějškově niťové grafy*<sup>8</sup>

<sup>5</sup>v angličtině *permutation graphs*

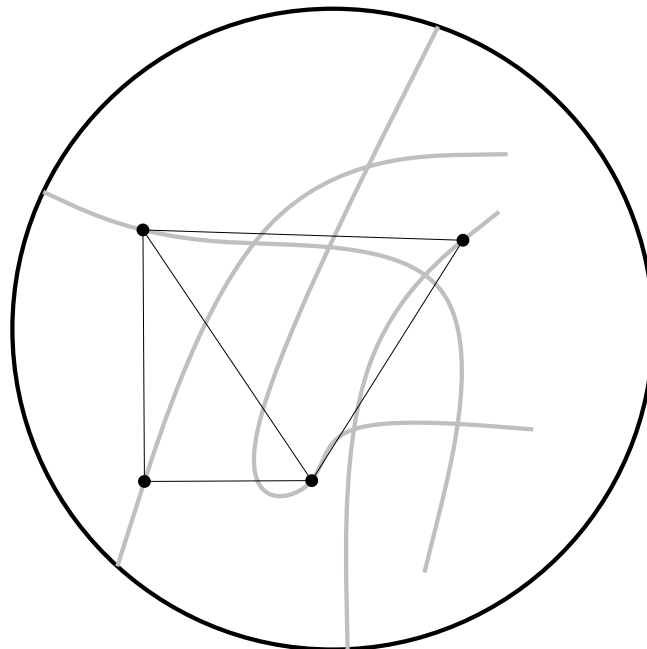
<sup>6</sup>v angličtině *function graphs*

<sup>7</sup>v angličtině *interval filament graphs*

<sup>8</sup>v angličtině *outer string graphs*



Obrázek 2.8: Vlákňový graf



Obrázek 2.9: Vnějšíkově niťový graf

**STRING** =  $IG(\text{křivky v } \mathbb{R}^2)$  se nazývají *niťové grafy*<sup>9</sup>

**CONV** =  $IG(\text{konvexní množina v } \mathbb{R}^2)$  se nazývají *konvexní grafy*<sup>10</sup>

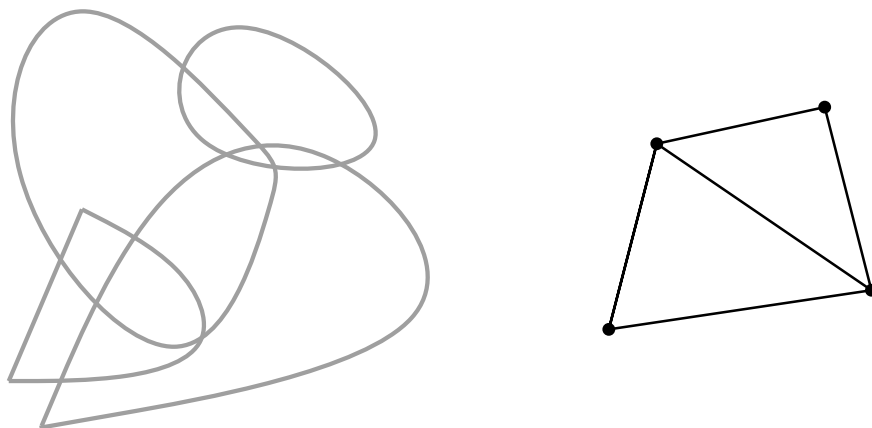
---

<sup>9</sup>v angličtině *string graphs*

<sup>10</sup>v angličtině *convex graphs*



Obrázek 2.10: Niťový graf a jeho reprezentace



Obrázek 2.11: Konvexní graf a jeho reprezentace

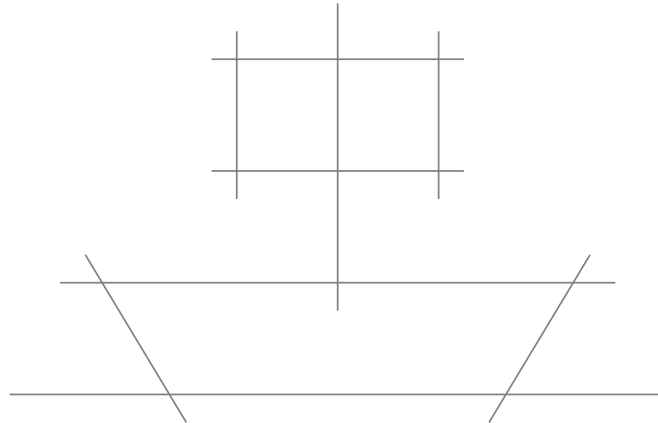
**SEG** =  $IG(\text{úsečky v } \mathbb{R}^2)$  se nazývají *úsečkové grafy* <sup>11</sup>

**GRID** =  $IG(\text{svislé a vodorovné úsečky v } \mathbb{R}^2)$  se nazývají *mřížkové grafy* <sup>12</sup>

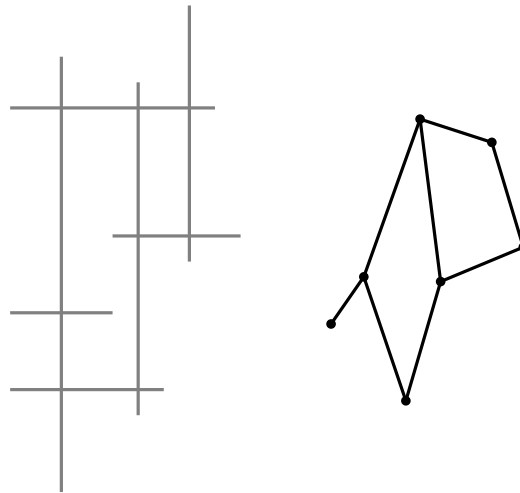
---

<sup>11</sup>v angličtině *segment graphs*

<sup>12</sup>v angličtině *grid graphs*



Obrázek 2.12: Úsečková reprezentace ve tvaru loďky



Obrázek 2.13: Mřížkový graf a jeho reprezentace

**Definice 1.2** (Boxicity). Boxicity grafu  $G$ , kterou značíme  $\text{box}(G)$ , znamená nejmenší dimenzi  $d$  takovou, že  $G$  je průnikový graf  $d$ -dimenzionálních intervalů.

**Pozorování 1.3.** Následující inkluze plynou většinou přímo z definice

$$INT \subseteq CA \subseteq PC \subseteq IFA$$

$$INT \subseteq FUN \subseteq IFA \subseteq OSTRING \subseteq STRING$$

$$PER \subseteq CIR \subseteq PC$$

$$PER \subseteq FUN$$

$$GI \subseteq SEG \subseteq CONV \subseteq STRING$$

## 2 Základní vztahy

Nyní představím grafy, které se hojně využívají v teorii průnikových grafů. A to *chordální grafy* (značíme CHOR) a *porovnatelné grafy* (značíme COMP)

**Definice 2.1** (Chordální graf). Graf je *chordální* pokud graf neobsahuje indukovanou  $C_n$  pro  $n \geq 4$  (kružnici větší než 3).

**Definice 2.2.** Graf je *porovnatelný* pokud celá jeho množina vrcholů je částečně uspořadatelná množina relací  $<$ , která je tranzitivní, antisymetrická a antireflexivní. Tedy pro libovolné vrcholy  $u \neq v \in V_G, uv \in E_G$  pokud  $u < v$  nebo  $v < u$ .

**Pozorování 2.3.** *Graf je porovnatelný právě tehdy, pokud jeho hrany jsou tranzitivně orientovatelné.*

### 2.1 Charakterizace chordálních grafů

**Definice 2.4.** Vrchol  $v$  z grafu  $G$  nazveme *simpliciální* pokud jeho sousedi (značíme  $N_G(v)$ ) indukují úplný graf

**Definice 2.5.** Posloupnost vrcholů  $v_1, v_2 \dots v_n$  nazýváme *perfektní eliminační schema* grafu  $G$  pokud pro každé  $i = 1, 2, \dots, n$ , vrchol  $v_i$  je simpliciální v grafu  $G[v_i, \dots, n]$ .

**Lemma 2.6.** *Každý minimální vrcholový řez v chordálním grafu indukuje úplný podgraf.*

**Lemma 2.7.** *Každý chordální graf, který je různý od úplného grafu obsahuje, alespoň dva nesousední simpliciální vrcholy.*

**Definice 2.8** (Klikový strom). Klikový strom grafu  $G$  je takový strom  $T$  jehož vrcholy reprezentují maximální kliky (myšleno inkluzivně) v  $G$  a který splňuje tyto vlastnosti: Pro každý vrchol  $u \in V_G$ , kliky ve kterých je obsažený jsou spojeny v  $T$ .

Ne pro všechny grafy existuje klikový strom a navíc klikové stromy nejsou jednoznačné (pokud existují).

**Věta 2.9** (Pruniková charakterizace chordálních grafů). *Pro každý graf  $G$  jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

1.  $G$  je chordální graf.
2.  $G$  má perfektně eliminační schema.
3. Pro  $G$  existuje klikový strom
4.  $G$  je průnikový graf systému podstromů stromu.

## 2.2 Charakterizace intervalových grafů

**Definice 2.10** (Kliková cesta). Kliková cesta je klikový strom, který tvoří právě jen cesta.

Pokud  $\mathcal{A}$  je třída grafů, potom  $\text{CO-}\mathcal{A}$  je třída obsahující doplňky grafů z  $\mathcal{A}$ , tedy  $\text{CO-}\mathcal{A} = \overline{\mathcal{G}} \mid \mathcal{G} \in \mathcal{A}$

**Věta 2.11** (Charakterizace intervalových grafů). *Pro každý graf  $G$  jsou následující tvrzení ekvivalentní*

1.  $G$  je intervalový graf.
2.  $G$  má klikovou cestu.
3.  $G \in \text{CHOR} \cap \text{CO-COMP}$ .

## 2.3 Třídy související s porovnatelnými grafy

Zde si ukážeme blízké vztahy mezi COMP, FUN a PER grafy.

**Věta 2.12.** *Grafy funkcí jsou právě doplňky porovnatelných grafů.*

*Důkaz.* **FUN  $\subseteq$  CO-COMP:** Pro danou reprezentaci grafu  $G$  funkcemi ležícími mezi dvěma svislými rovnoběžnými přímkami, najdeme orientaci každé nehrany  $uv$  našeho grafu  $G$  tak, že pokud reprezentace  $u$  leží nad reprezentací  $v$  potom zorientujeme hranu z  $u$  do  $v$ . A to je dobře definovaná orientace dopňku  $G$ .

**CO-COMP  $\subseteq$  FUN:** Nechtě  $P$  je částečné uspořádání na vrcholech  $G$  takové, že porovnatelný graf  $P$  je doplňkem  $G$ .  $P$  si představíme jako průnik  $d$  lineárních uspořádání (minimální takové  $d$  nazýváme dimenzí částečného uspořádání). Nakreslíme  $d$  svislých přímk reprezentujících dané lineární uspořádání, a na ně nakreslíme body které respektují dané uspořádání. Pro každý vrchol  $G$  spojíme body jemu odpovídající v daném lineárním uspořádání. Tyto funkce reprezentují  $G$ .

**Lemma 2.13.** *Doplňky permutačních grafů jsou opět permutační grafy.*

*Důkaz.* Pokud  $\pi$  je permutace realizující  $G$  potom  $\pi^{-1}$  realizuje  $\overline{G}$ . Tedy  $\text{CO-PER} \subseteq \text{PER}$  a tedy  $\text{PER} = \text{CO-CO-PER} \subseteq \text{CO-PER}$ .

**Věta 2.14.** *Graf  $G$  je permutační graf právě tehdy pokud jsou jak  $G$  tak jeho doplněk porovnatelné grafy.*

*Důkaz.*  $\text{PER} \subseteq \text{CO-COMP}$  to plyne z  $\text{PER} \subseteq \text{FUN} = \text{CO-COMP}$  a dále  $\text{PER} \subset \text{COMP}$  to zase plyne z  $\text{PER} = \text{CO-PER} \subseteq \text{CO-FUN} = \text{COMP}$ .  $\text{COMP} \cap \text{CO-COMP} \subseteq \text{PER}$ : Nechť  $F_1$  je tranzitivní orientace hran z  $G$  a  $F_2$  tranzitivní orientace nehran. Potom  $A = F_1 \cup F_2$  a  $B = F_1^{-1} \cup F_2$  jsou lineární uspořádání vrcholů z  $G$ . Položme body odpovídající vrcholům z  $G$  na dvě rovnoběžné přímky, v pořadí které udává  $A$  a  $B$ . Body odpovídající stejným vrcholům spojme. Tímto dostáváme reprezentaci  $G$ .

**Definice 2.15.** Nechť  $G = (V, E)$  je neorientovaný graf. Binární relace  $F \subseteq V \times V$  se nazývá **citlivá** pokud  $xy \in F, yz \notin E$  a  $xz \in E$  implikuje  $xz \in F$  a analogicky  $xy \in F, xz \notin E$  implikuje  $zy \in F$  **pěkná** pokud  $xy \in F$  implikuje  $xy \in E$

**Pozorování 2.16.** Každá tranzitivní orientace hran grafu je jak citlivá tak pěkná.

**Definice 2.17.** Pokud  $G = (V, E)$  je graf a  $F$  je binární relace na  $V \times V$  připomeňme, že  $\langle F \rangle_S$  značíme nejmenší citlivou relaci obsahující  $F$ .

**Věta 2.18.** Graf  $G = (V, E)$  je tranzitivně orientovatelný tehdy a jen tehdy pokud pro každou hranu  $xy \in E$  relace  $\langle xy \rangle_S$  generovaná pomocí orientované hrany  $xy$  je pěkná relace.

## 2.4 Vlákňové grafy a mixované grafy

**Definice 2.19.** Nechť  $\mathcal{A}$  je třída grafů. Třída  $\mathcal{A}$ -mixovaných grafů obsahuje všechny grafy  $G = (V, E)$  takové, že  $E$  můžeme rozdělit do  $E = E_1 \cup E_2$  and  $E_2$  je tranzitivně orientovaná relací  $F$  tak, že  $(V, E_1) \in \mathcal{A}$ , a pro všechny  $x, y, z \in V, xy \in F$  a  $yz \in E_1$  implikuje  $xz \in E_2$

**Věta 2.20.** Doplnky vláknových grafů jsou právě (CO-INT)-mixované grafy.

Maximální velikost nezávislé množiny může být určena v polynomiálním čase pro třídy INT, FUN, PER, CA, CIR, CHOR, PC, IFA. A navíc algoritmus pro IFA grafy může být zobecněn pro některé mixované grafy.

**Věta 2.21.** Nechť  $\mathcal{G}$  je třída grafů pro které je problém maximální vážené kliky řešitelný v čase  $F(n, m)$ . Potom je tento problém řešitelný v čase  $O(nF(n, m) + n + m)$  na  $\mathcal{G}$ -mixovaných grafech, kde mixované rozdělení je součástí vstupu.

**Pozorování 2.22.** Maximální vážená klika v doplňcích intervalů (a obecněji dokonce ve funkčních grafech) je řešitelná v polynomiálním čase.

**Důsledek 2.23.** Maximální vážená nezávislá množina v IFA grafech je řešitelná v polynomiálním čase.



# Kapitola 3

## SEG a STRING grafy

V této kapitole se budeme zabývat těmi nejzajímavějšími výsledky, které souvisejí s třídami SEG a STRING grafů.

### 1 Podtřídy SEG a STRING grafů

Nejdříve si ale představíme třídy grafů které rozšiřují rodinu SEG a STRING grafů

**$k$ -SEG** = IG(Jsou křivky složené z nejvýše  $k$  navazujících úseček) pro  $k \geq 1$

**SEG** = 1-SEG

**$k$ -DIR**( $d_1, \dots, d_k$ ) = IG(všechny úsečky se směry mezi  $d_1, \dots, d_k$ ), kde  $d_1, \dots, d_k \in \mathbf{R}$ .

**$k$ -DIR** =  $\bigcup k$ -DIR( $d_1, \dots, d_k$ ), kde  $d_1, \dots, d_k \in \mathbf{R}$

Další třídy zajímavých průnikových grafů nám vzniknou pokud si omezíme průnikové grafy i podle relativní pozice množin reprezentujících grafy. Tuto vlastnost budeme vyjadřovat následující notací. Potom IG( $\mathcal{C}$ )— $\mathbf{R}$  bude značit třídu všech grafů IG( $\mathcal{C}$ ), jejichž všechny reprezentace  $I \subseteq \mathcal{C}$  splňují podmínku  $R$ . Potom tedy

**$k$ -CROSS** = STRING—(každé dvě křivky mají společný průnik v  $\leq k$  bodech a v každém bodu průniku se protínají)

**pseudo-SEG** = 1-CROSS tyto grafy budeme také označovat jako pseudoúsečkové.

**PURE- $k$ -DIR**( $d_1, \dots, d_k$ ) =  $k$ -DIR( $d_1, \dots, d_k$ )—(žádné dvě úsečky které jsou ve stejném směru nemají společný průnik)

**PURE- $k$ -DIR** =  $\bigcup$  PURE —  $k$  — DIR( $d_1, \dots, d_k$ ), kde  $d_1, \dots, d_k \in \mathbf{R}$

## 2 Velikosti reprezentací

Jak se ukazuje mezi velikostí reprezentací grafů a ostatními vlastnostmi reprezentací grafů platí překvapivé vztahy. Ukazuje se, že pro většinu definovaných tříd průnikových grafů jsou již pro poměrně malé grafy potřebné velice složité reprezentace. Např. jsou úsečkové grafy s  $O(n)$  vrcholy, takové které pro svoji úsečkovou reprezentaci budou potřebovat relativní přesnost  $2^{-2^n}$ . (na druhou stranu není těžké ukázat, polynomiálně velkou reprezentaci pro 2-SEG reprezentaci těchto grafů). A proto zde musíme vysvětlit a popsat co myslíme "velikost reprezentace  $R$ ". Nejprve se budeme zabývat SEG grafy.

### 2.1 Velikosti reprezentací SEG grafů

Nechť  $R$  je SEG reprezentace grafu  $G \in \text{SEG}$ . Nechť  $P(R)$  je množina koncových bodů a navíc všech křížících bodů úseček v  $R$ . A nechť  $D(R)$  určuje maximální (euklidovskou) vzdálenost mezi body v  $P(R)$  a  $d(R)$  určuje minimální vzdálenost mezi body z  $P(R)$ . Budeme definovat velikost  $R$  jako podíl  $D(R)/d(R)$ .

**Věta 2.1** ([1]). *Pro každé  $n$ , existuje úsečkový graf  $G$  s  $O(n^2)$  vrcholy, tak že každá úsečková reprezentace  $G$  s celočíselnými souřadnicemi má souřadnice které jsou  $\geq 2^{2^n}$ .*

**Pozorování 2.2.** *Pro napsání souřadnic grafu  $G$  z 2.1 potřebujeme exponenciálně mnoho bitů.*

### 2.2 Velikosti reprezentací STRING grafů

Přirozená míra pro velikost reprezentace STRING grafů je celkový počet průsečíků (protínání) křivek. Dlouho dobu nebyly známe vůbec žádné odhady, nakonec se však ukázalo, že velikost reprezentací STRING grafů je exponenciální.

Nejdříve si zadefinujeme takzvané *Abstraktní topologické grafy*, které s touto oblastí blízce souvisí.

**Definice 2.3** (Abstraktní topologický graf). Abstraktní topologický graf je pár  $G = (V, E)$ ,  $R \subseteq \binom{E}{2}$  a značíme ho AT-graf  $G, R$ . AT-graf  $G, R$  se nazývá realizovatelný pokud graf  $G$  může být nakreslen v rovině, tak že dvě hrany se kříží pouze tehdy, pokud tvoří dvojici v  $R$ . Pokud je  $G, R$  realizovatelný potom označíme  $cr(G, R)$  minimální počet křížení v korektním nakreslení.

**Pozorování 2.4.**  *$R$  nám reprezentuje množinu dvojic hran které se v korektním nakreslení mohou křížit. Pokud je  $R = \emptyset$  potom  $G$  musí být rovinný graf. Pokud  $R = \binom{V}{2}$ , potom  $cr(G, R) = cr(G)$  klasické průsečíkové číslo grafu  $G$ .*

Pro definování složitosti reprezentace a pro definování maximální nutné složitosti reprezentace grafu s daným počtem vrcholů, představíme následující funkce:

$$f_{at}(n) = \max_{G,R:|V_G|=n} cr(G, R)$$

$$f_{st}(n) = \max_{G:|V_G|=n} \min_{\text{STRING reprezentace } S} \# \text{křížení v } S$$

Tyto funkce jsou polynomiálně ekvivalentní, ale obě jsou alespoň exponenciální, jak ukazují následující odhady.

**Věta 2.5** ([8]).

$$f_{at}(n) \leq f_{st}(2n) - 2n,$$

$$f_{st}(n) \leq f_{at}(n^2 - 2n) + 2n^2.$$

**Věta 2.6** ([8]).

$$f_{at}(n) \geq 2^{\frac{n-7}{4}}.$$

Dlouho nebyl známý žádný horní odhad a dokonce ani žádný konečný algoritmus pro rozpoznání těchto grafů. To se změnilo s článkem Schaefera a Štefankoviče [11].

**Věta 2.7** ([11]).

$$f_{at}(n) \leq \frac{n}{2}(2^{n-1}).$$

Tyto odhady souvisejí s otázkami náležení do třídy NP, a to konkrétně s ověřovacími certifikáty, protože bylo ukázáno v [8], že složitost je alespoň exponenciální, zřejmě to nebude vhodný kandidát na certifikát, protože ověření certifikátu je nutné v polynomiálním čase. I přesto že nezle použít tento certifikát bylo ukázáno, že tento problém patří do NP a to v [10].

### 3 Vztahy mezi třídami

V této kratičké části si řekneme některé vztahy mezi grafy souvisejícími s SEG a STRING grafy.

**Lemma 3.1** ([1]).

$$SEG = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\text{-DIR} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{PURE-}k\text{-DIR}.$$

**Lemma 3.2** ([1]). *Nechť  $k$  je kladné celé číslo, potom platí:*

1.  $k\text{-CROSS} \neq (k+1)\text{-CROSS}$ .
2.  $k\text{-SEG} \neq (k+1)\text{-SEG}$ .
3.  $k\text{-SEG} \neq k^2\text{-CROSS}$ .
4.  $k\text{-SEG} \not\subset k^2\text{-CROSS}$ .

### 3.1 Omezení počtu směrů

Několik dalších problémů přichází v úvahu pokud se začneme zajímat od grafy s omezeným počtem směrů, ke kterým nejvíce přispěli články Kratochvíla a Matouška [1] a Černého, Krale, Nyklové a Pankráce [22].

**Lemma 3.3** ([1]). *Pro každé  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_1$*

1.  $1\text{-DIR} = 1\text{-DIR}(\alpha_1)$ ,
2.  $2\text{-DIR} = 2\text{-DIR}(\alpha_1, \alpha_2)$ ,
3.  $3\text{-DIR} = 3\text{-DIR}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ,
4.  $4\text{-DIR} \neq 4\text{-DIR}(0, n/4, n/2, 3n/4)$ .

Tento výsledek zobecnili v [22] a ukázali, že záleží na tom jaké směry jsou vybrané, a které směry jsou navzájem ekvivalentní.

Ale nejdříve si zadefinujeme nějaké potřebné pojmy, které se zde používají.

**Definice 3.4.** O dvou  $k$ -ticích směrů  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  řekneme že jsou ekvivalentní pokud platí

$$\text{PURE-}k\text{-DIR}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \text{PURE-}k\text{-DIR}(\beta_1, \dots, \beta_k)$$

. O  $k$ -tici  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  řekneme, že jsou převoditelné na  $\beta_1, \dots, \beta_k$  pokud existuje afinní transformace, která převádí jednu na druhou.

A teď již věty které zobecňují lemma 3.3.

**Věta 3.5** ([22]). *Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro  $k$ -tice směru  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \dots, \beta_k$ .*

1.  $k$ -tice směrů  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \dots, \beta_k$  mohou být převedeny na sebe.
2.  $k$ -tice směrů  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \dots, \beta_k$  jsou ekvivalentní.
3.  $k\text{-DIR}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = k\text{-DIR}(\beta_1, \dots, \beta_k)$

**Věta 3.6** ([22]). *Nechť  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \dots, \beta_k$  jsou dvě  $k$ -tice směrů, potom platí následující.*

1. *Pokud jsou  $k$ -tice  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \dots, \beta_k$  na sebe navzájem převoditelné, potom  $\text{PURE-}k\text{-DIR}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \text{PURE-}k\text{-DIR}(\beta_1, \dots, \beta_k)$ .*
2. *Pokud  $k$ -tice  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  a  $\beta_1, \dots, \beta_k$  na sebe nejsou převoditelné, potom  $\text{PURE-}k\text{-DIR}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq \text{PURE-}k\text{-DIR}(\beta_1, \dots, \beta_k)$  a  $k\text{-DIR}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq k\text{-DIR}(\beta_1, \dots, \beta_k)$ .*

a navíc ukázali následující

**Věta 3.7** ([22]). *Nechť  $0 = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \pi$  je libovolná čtveřice směrů. Potom existuje právě jedno  $\beta$ ,  $\pi/2 < \beta < 3\pi/4$  takové, že čtveřice  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  a  $0, \pi/4, \pi/2, \beta$  jsou ekvivalentní.*

### 3.2 Order Forcing Lemma

A nyní si představíme jednu moc dobrou pomůcku při práci s SEG grafy, je to tvrzení, které nám vynucuje jak bude daná SEG-reprezentace vypadat. A tedy se budeme bavit o takzvaném "Order Forcing Lemma" (v češtině by to mohlo znít jako "Lemma o vynucení pořadí", ale to se nepoužívá).

**Věta 3.8** (Order Forcing Lemma [6]). *Nechť  $R = \{r_u \mid u \in V(G)\}$  je SEG-reprezentace grafu  $G$  taková, že libovolné dvě rovnoběžné úsečky jsou disjunktní a žádné tři úsečky nemají společný bod. Potom existuje graf  $G'$  splňující následující vlastnosti*

1.  $G \subset G'$  ( $G$  je podgraf  $G'$ ),
2.  $G'$  má  $O(|V(G)|^2)$  vrcholů,
3.  $G' \in \text{SEG}$ ,
4. Pokud  $R$  je PURE- $k$ -DIR reprezentace, potom  $G' \in \text{PURE-}k\text{-DIR}$ ,
5. Pokud  $R'$  je libovolná SEG-reprezentace  $G'$  potom existuje oblast  $\Omega \in E_2$  a homeomorfismus  $f : E_2 \rightarrow \Omega$  taková, že  $f(r_u) \subset r'_u$  pro každé  $u \in V(G)$ .

A teď se budeme zase chvíli věnovat STRING grafům, ve kterých se během jejich historie ukázalo množství zajímavých vlastností.

### 3.3 Základní vlastnosti STRING grafů

Nejprve si ukážeme úplně základní vlastnosti, které není těžké nahlédnout, a případně potřeby se dají najít v [5].

**Lemma 3.9** ([5]). *Každý niťový graf  $G$  má STRING-reprezentaci  $R$  s následujícími vlastnostmi.*

1. Křivky z  $R$  mají konečnou délku.
2. Každé dvě křivky z  $R$  mají v průniku konečný počet bodů.
3. Žádné tři křivky neprocházejí stejným bodem.
4. Každá křivka reprezentující vrchol v stupně  $\leq 2$  má společný právě jeden bod s křivkami, s které reprezentují sousedy vrcholu v  $G$ .

dále si uvedeme větičku, která nám pomůže si lépe představit STRING grafy, nebo alespoň ukáže jinou formu STRING grafů.

**Věta 3.10** ([5]). *Niťové grafy jsou právě průnikové grafy cest (podstromů, spojených podgrafů) v rovinném grafu.*

### 3.4 Charakterizace STRING grafů

V článku od Kratochvíla [6] se zjišťuje kolik je kritických neniťových grafů, což jistým způsobem charakterizuje třídu STRING grafů a přináší vzhled do složitosti jejich struktury.

Nejřívě si zadefinujeme co je to kritický neniťový graf ale k tomu budeme potřebovat ještě další pojmy, tedy

**Definice 3.11** (Indukovaný minor). Graf  $H$  je indukovaný minor grafu  $G$  pokud  $H$  vznikne z  $G$  opakovanou kontrakcí hran nebo mazáním vrcholů.

**Definice 3.12** (Kritické neniťové grafy). Graf  $G$  je kritickým neniťovým grafem, pokud  $G$  není STRING graf a pokud všechny jeho indukované minory už jsou STRING grafy.

Potom nám věta z [6] říká

**Věta 3.13** ([6]). *Počet kritických neniťových grafů je nekonečný.*

# Kapitola 4

## Reprezentace planárních grafů

Ty nejzajímavější části kombinatoriky vždy nějak souvisejí s rovinnými grafy, a stejně tak to je i u průnikových grafů. Tato oblast je jednou z nejméně studovaných oblastí průnikových grafů vůbec a její výsledky jsou nejvíce ceněny.

Asi první kdo do této oblasti přispěl byl již v roce 1936 Koebe [23] s jeho slavnou větou nazvanou "Pusinkové lemma"<sup>1</sup>.

**Věta 0.14** ([23]). *Každý rovinný graf může být reprezentován dotýkajícími se kružnicemi.*

Kde se jedná o průnikový graf kružnic. Tento nebo podobný výsledek byl znovu objeven několikrát, proto zmiňuji ještě následující větu která je ještě silnější a zajímavější a její důkaz lze nalézt například v [25].

**Věta 0.15.** *Rovinné grafy jsou právě dotykové grafy kruhů v rovině.*

Ale to je již minulost nyní se koukněme na dnešní výsledky z oblasti reprezentací rovinných grafů průnikovi grafy. Je několik tříd průnikových grafů o kterých se ví, že obsahují rovinné grafy např. STRING, CONV a u těch je poměrně jednoduché ukázat, že třídu rovinných grafů obsahují, na druhé straně je zase mnoho tříd průnikových grafů o kterých se ví, že neobsahují třídu rovinných grafů. My se zde budeme zabívat úsečkovými grafy a pseudoúsečkovými grafy o kterých se ve spojitosti s rovinnými grafy ví již hodně, ale otázka zda rovinné grafy patří do těchto tříd ještě nebyla zodpovězena.

Mnoho článků z této oblasti pochází od Fraysseixeho a Ossony de Mendezety ty nejdůležitější jsou [16], [17] kde se snaží úsečkovými grafy co nejvíce přiblížit rovinným grafům. Další zajímavý možná snad překvapivý výsledek najdeme v článku [14] od de Castra, Cobose, Dana a Márqueze.

Ale půjdeme postupně tedy nejdříve tvrzení týkající se bipartitních rovinných grafů.

---

<sup>1</sup>z anglického "the Kissing lemma".

## 0.5 Bipartitní rovinné grafy

**Věta 0.16** ([16]). *Libovolný bipartitní rovinný graf je průnikový graf úseček, které se nekříží a mají společný bod tehdy a jen tehdy pokud incidentní vrcholy jsou spojeny hranou.*

Ke stejnému výsledku dospěli nezávisle na sobě jak Fraysseix, Osona de Mendez a Pach [16] tak také Ben-Arroyo Hartman, Newman a Ziv [15].

## 0.6 Třídy blízké rovinným

Ale opravdu důležitý výsledek najdeme až ve článku [17], ve kterém se blížíme rovinným grafům na dosah, dokonce v době vydání tohoto článku [17] se nic lepšího nevědělo ani o pseudoúsečkových grafech v tedy oblasti rovinných grafů. Teď na chvilku odskočíme od SEG grafů k pseudoúsečkovým aby jsme se zpátky dostali k úsečkovým a to proto, že mají tyto třídy průnikových grafů mnoho společného.

Osona de Mendez a Fraysseix [18] v tomto článku přiblížili rovinné grafy a pseudoúsečky.

**Věta 0.17** ([18]). *Nechť  $G$  je 4-souvislý a 3-obarvitelný rovinný graf, potom  $G$  má dotykovou reprezentaci pseudoúsečkami.*

A nebo jiná o něco silnější věta, která ale není tak intuitivní.

**Věta 0.18** ([18]). *Nechť  $G$  je 4-souvislý rovinný graf, který neobsahuje indukovanou  $C_4$ , která má vrcholy obarveny všemi 4-mi barvami. Potom  $G$  má pseudoúsečkovou reprezentaci.*

Tento článek přinesl tento zajímavý výsledek, ale proto z něho čerpá i další článek [17], který přináší ještě silnější větu a tím se právě vracíme zpátky k SEG grafům. A tedy platí

**Věta 0.19** ([18]). *Nechť  $G$  je 4-souvislý a 3-obarvitelný rovinný graf, potom  $G$  má dotykovou SEG reprezentaci.*

a opět i silnější tvrzení

**Věta 0.20** ([18]). *Nechť  $G$  je 4-souvislý rovinný graf, který neobsahuje indukovanou  $C_4$ , která má vrcholy obarveny všemi 4-mi barvami. Potom  $G$  má pseudoúsečkovou reprezentaci.*

Důkaz těchto vět je velmi komplikovaný a požívá tvrzení o pseudoúsečkách z [18] a narovnáva je do úseček, a je velmi neočekávané, že takový postup skutečně funguje. Navíc se v tomto článku ukazuje vztah mezi reprezentací úseček a pseudoúseček.

Další nepřehlédnutelný výsledek přišel s článkem [14], který napsali de Castro, Cobos, Dana, Márquez a Noy, ti se přiblížili k třídě rovinných grafů jinak. A to tak, že vzali rovinné grafy bez trojúhelníků, ale navíc omezili počet směrů úseček na tři, tedy



**Věta 0.21** ([14]). *Každý rovinný graf bez trojúhelníků je průnikový graf úseček ve třech směrech.*

V důkazu této věty se využívá známá Grötszchova věta, která byla dokázána Thomassenem [27], která zaručuje, že každý rovinný graf bez trojúhelníků je 3-obarvitelný. Důkaz je poměrně náročný, nejprve se přidají vrcholy, které rozdělí graf, pak se použije vlastnost 3-obarvení a k úsečkové reprezentaci ve třech směrech se dosáhne pomocí mnoha velice technických lemat. Na konci tohoto důkazu se ještě musí odstranit přebytečné vrcholy. Tři předpokládané směry jsou svislý, vodorovný a šikmý. To ovšem nevadí jak již víme z [1].

# Kapitola 5

## Nové reprezentace SEG grafů

Nejdříve si zadefinujeme důležité pojmy, které budeme používat.

**Definice 0.22** (Konvexní obal). Konvexní obal  $n$  bodů  $a_1, a_2, \dots, a_n$  je

$$\text{Conv}(a_1, \dots, a_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i j_i \mid \forall i : j_i \geq 0 \text{ a } \sum_{i=1}^n j_i = 1 \right\}$$

**Definice 0.23** (Úsečka). Mějme v rovině body  $a$  a  $b$  a

$$u = \text{Conv}(a, b)$$

potom je  $u$  úsečka s koncovými body  $a$  a  $b$ .

**Definice 0.24** (Otevřená úsečka). Je úsečka, která neobsahuje konec a začátek. Mějme v rovině body  $a$  a  $b$  které definují úsečku, potom otevřená úsečka  $o$  je

$$o = \text{Conv}(a, b) \setminus (a \cup b)$$

A nyní ještě definice technických pojmů používaných v důkazech.

**Definice 0.25** (Protínání úseček). Úsečka  $a$  protíná  $b$  pokud mají společný průnik  $x$  a pokud v bodě  $x$  nekončí  $a$  ani  $b$ .

Tato vlastnost je symetrická, tedy pokud  $a$  protíná  $b$  potom i  $b$  protíná  $a$ .

**Definice 0.26** (Úsečky se dotýkají). Úsečka  $a$  se dotýká množiny  $m$ , pokud uzávěr úsečky  $a$  má neprázdný průnik s  $b$  a tento průnik je bod  $k$ , který je koncový bod úsečky  $a$ .

V celém zbytku této kapitoly budeme mít následující konvenci. Nechť  $v$  je vrchol, potom úsečku reprezentující vrchol  $v$  budeme značit  $\tilde{v}$ .

## 0.7 Doplnky stromů

V této části ukážeme, že doplňky stromů patří do SEG grafů, a to tak že najdeme nakreslení této reprezentace.

Nejdříve si ale zadefinujeme některé tehnické pojmy.

**Definice 0.27** (Úsečka je obarvená). Mějme úsečku  $u$ , její konce jsou body  $a$  a  $b$  a tyto dva body obarvíme tak, že právě jeden bod bude mít barvu  $L$  a právě jeden barvu  $R$ , pak nazveme úsečku  $u$  obarvenou.

Mějme strom  $T$ . Zvolme některý vrchol  $k$  jako jeho kořen. To určuje relaci rodič-potomek pro každé dva sousední vrcholy. (vrchol  $d$  je potomek  $r$  pokud mají společnou hranu a délka nejkratší cesty z  $d$  do  $k$  je o jedna větší než z  $r$  do  $k$ ).

**Definice 0.28** (Rodičovská úsečka). Nechť máme vrcholy  $r$  a  $p$  které jsou ve vztahu rodič potomek, a potom  $\tilde{r}$  se říká rodičovská úsečka úsečky  $\tilde{p}$ .

**Tvrzení 0.29.** *Doplňek  $T$  má SEG reprezentace  $\tilde{T}$  s následujícími vlastnostmi.*

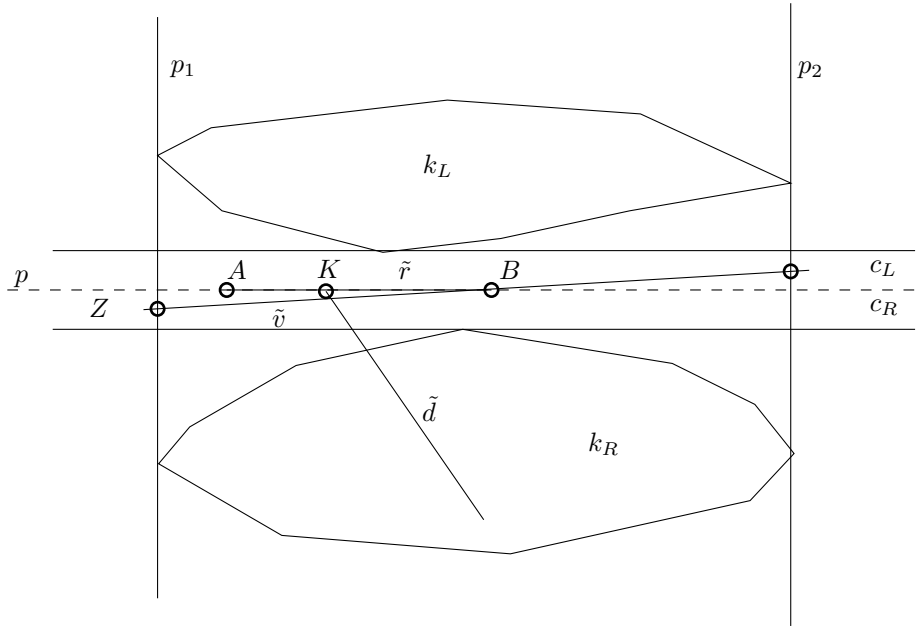
1. Každá úsečka z  $\tilde{T}$  je obarvená.
2. Pro každou úsečku  $u$  z  $\tilde{T}$  platí následující. Nechť přímka  $p$  je prodloužením  $u$ . Potom všechny body obarvené barvou  $L$  leží v jedné polorovině a všechny body s barvou  $R$  v druhé s jedinou výjimkou a je bod  $k$ , který je koncem  $d$  a  $d$  je rodičovská úsečka úsečky  $u$ .
3. Pokud mají úsečky společný průnik pak se nedotýkají ale protínají.
4. Mějme vrchol  $r$  a  $p$  potom rodičovská úsečka  $\tilde{r}$  se blíží  $\tilde{p}$  a navíc prodloužením této úsečky je přímka, která protíná  $\tilde{p}$ .

*Důkaz.* Budeme dokazovat indukcí a to podle počtu vrcholů.

Neprve první krok důkazu, tedy reprezentaci kořene, jistě umíme nakreslit jednu otevřenou úsečku libovolně dlouhou v libovolném směru a libovolně ji obarvit barvami  $L$  a  $R$ .

Nyní předpokládejme, že umíme reprezentovat doplněk grafu  $T'$  který vzniknul z  $T$  odebráním listu označme ho  $v$ . Nechť je  $r$  jeho rodič a rodič  $r$  je vrchol  $d$ . Konec úsečky  $\tilde{r}$  označme za  $A$  a  $B$  a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $A$  je obarven  $L$  a  $B$  je obarven  $R$ . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že konec  $K$  úsečky  $\tilde{d}$ , který leží na úsečce  $\tilde{r}$  má barvu  $L$ . Přímka  $p$  je určena prodloužením úsečky  $\tilde{r}$ . Označme si jednu polorovinu určenou přímkou  $p$  jako  $\Omega_L$  a druhou jako  $\Omega_R$ , a vytvoříme je tak, že ani jedna polorovina neobsahuje  $p$ . A opět bůno předpokládejme, že v polorovině  $\Omega_L$  jsou všechny body barvy  $L$  a v  $\Omega_R$  jsou právě všechny body barvy  $R$ , body na úsečce  $\tilde{r}$  nepočítáme.

Tím již víme na které polorovině se úsečka  $\tilde{d}$  nalézá protože jeden konec má barvu  $L$  druhý musí mít z předpokladu barvu  $R$  a tedy leží v polorovině  $\Omega_R$ .



Obrázek 5.1: Konstrukce reprezentace doplňku stromu

Vytvořme si konvexní obal bodů s barvou  $R$  z  $\Omega_R$  ( $\Omega_R$  je zde jen proto aby jsme nezapočítávali body, které leží na  $\tilde{r}$ ), a stejně tak vytvořme  $k_L$ .

Z předpokladu víme, že prodloužení úsečky neobsahuje žádné jiné obarvené body než koncové body naší úsečky a (v případě že se nejedná o kořen) jeden konec rodičovské úsečky. To znamená, že existuje nekonečný pásek  $c$  kolem přímky  $p$  ( $p$  je jeho osa), takový že má nenulovou šířku a pro který platí  $C \cap k_L = \emptyset$  a  $C \cap k_R = \emptyset$ .

Protože všechny úsečky s výjimkou  $\tilde{r}$  a  $\tilde{d}$  mají jeden bod v  $k_L$  a druhý v  $k_R$  to znamená že úsečky protínají tento páseček. a tedy pokud povedu dostatečně dlouhou úsečku protnu všechny úsečky tyto úsečky. Nyní už zbývá vyřešit jen protínání s úsečkou  $\tilde{r}$  a  $\tilde{d}$ .

Nyní leží na úsečce  $\tilde{r}$  tři body, dva mají barvu  $L$  a jeden  $R$ . Vybereme bod který má barvu  $R$  tedy  $B$ . Tímto bodem bude procházet úsečka  $\tilde{v}$ , kterou se snažíme zkonstruovat. Celou reprezentaci  $T'$ . Posuneme do počátku  $l$  a orotujeme tak aby  $p$  byla osou  $x$  a  $a$  měla záporné  $y$ -lonové souřadnice. Zjistíme který průnik pásku s úsečkami má v absolutní hodnotě největší souřadnice označme tuto vzdálenost jako  $y$ . Pásek rozdělme na dvě poloviny přímkou  $p$ . Polovina pásku která má společný průnik s  $\tilde{d}$  označme jako  $c_R$  a druhou polovinu jako  $c_L$ . Nyní ve vzdálenosti  $y$  i  $-y$  nakresleme dvě přímky označme  $p_1$  a  $p_2$ .

Nechť průnik přímky  $p_1$  s  $c_R$  je úsečka  $q$  potom střed této úsečky nazvěme  $z$ . Potom úsečka  $\tilde{v}$  má směr určený body  $B$  a  $Z$ . Protíná  $p_1$  ale neprotíná už okraje pásku  $c$ . Analogicky na druhou stranu.

Tato úsečka má na jedné straně všechny body  $L$  na druhé všechny  $R$ . Všechny úsečky se kterými má neprázdný průnik ji protínají a které nemají tak se k ní blíží. Konce úsečky obarvíme libovolně. A tedy, tvrzení je dokázáno.

## 0.8 Sériově paralelní grafy

V této části dokážeme, že sériově paralelní grafy patří do SEG, přesněji do 3-PURE-DIR, ale nejdříve si tyto grafy zadefinujeme

**Definice 0.30** (Sériově paralelní grafy). Graf  $G$  nazveme sériově paralelní pokud obsahuje právě dva význačné vrcholy, budeme je nazývat *severní* a *jížní* pól. Budeme definovat induktivně, nechť  $G_1$  a  $G_2$  jsou sériově paralelní grafy, nechť  $s_1$  je severní pól  $G_1$  a  $j_1$  je jižní pól  $G_2$  a dále  $s_2$  je severní pól  $G_2$  a  $j_2$  je jižní pól  $G_2$ . Potom jsou následující grafy také sériově paralelními.

1.  $G$  je hrana, jeden vrchol je severní a druhý jižní pól.
2.  $G$  vzniknul serializací grafů  $G_1$  a  $G_2$ , to znamená že se stotožní jižní pól z  $G_1$  se severním pólem s  $G_2$ . Severní pól u  $G$  bude severní pól z  $G_1$  a jižní pól u  $G$  bude jižní pól z  $G_2$ .
3.  $G$  vzniknul paralelizací grafů  $G_1$  a  $G_2$  to znamená, že se stotožní oba jižní póly a oba severní póly. A tedy severní i jižní póly zůstanou póly nadale.

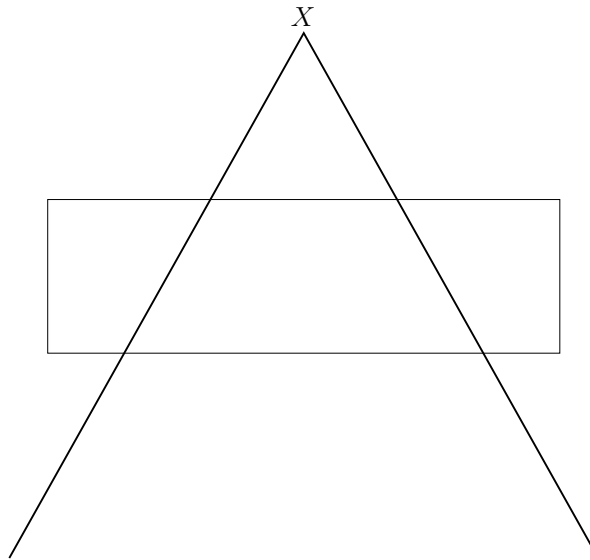
A počtem kroků konstrukce grafu  $G$  se myslí počet serializací a paralelizací od hrany až k vytvoření grafu  $G$ .

Nejprve definice technických prvků.

**Definice 0.31** (Teepee). O struktuře úseček mluvíme jako o teepee pokud obsahuje úsečky ve 3 směrech, označíme tyto směry jako  $a, b, c$ . A dále obsahuje dvě úsečky, které jsou ve dvou směrech  $a \neq b$ , označíme je jako důležité úsečky, Proloužení těchto úseček jsou přímky  $a'$  a  $b'$  jejich průnik označíme jako průsečík v teepee označíme ho  $x$ . Důležité úsečky se navzájem dotýkají pak teepee označujeme jako uzavřené a nebo se k sobě blíží potom označíme teepee jako otevřené. Teepee dále obsahuje obdelník, navěme ho  $o$ , jehož jedna strana leží ve směru  $c$ . Protože jde o obdelník, obsahuje právě dvě strany ve stejném směru (jsou tedy rovnoběžné). Každá s těchto dvou stran protíná obě důležité úsečky ale má neprázdný průnik s bodem  $x$ . Znázornění na obrázku 0.8.

**Tvrzení 0.32.** *Nechť  $G$  je sériově paralelní graf, potom  $G$  má 3-PURE-DIR reprezentaci  $I_G$  se směry  $a, b, c$  s následující vlastností.*

1. Reprezentace  $I_G$  grafu  $G$  je teepee  $T$ .
2. Důležité úsečky teepee  $T$  jsou  $s, j$  a reprezentují póly grafu  $G$ .



Obrázek 5.2: Teepee

3. Směry důležitých úseček v teepee jsou v libovolných dvou různých zadaných směrech  $a, b, c$ .

*Důkaz.* Budeme dokazovat indukcí přes počet kroků konstrukce  $G$  sériově paralelního grafu.

1. V prvním kroku dokážeme tvrzení pro hranu. pro 2 zvolené různé směry bez újmy na obecní zvolíme  $a, b$  a nakreslíme otevřené teepee kde jeho důležité úsečky budou ve směru  $a, b$  nakreslíme je tak aby jsme mohly úsečkou ve směru  $c$  protnout obě tyto úsečky (to kvůli obdelníku a jednoznačnosti nakreslení) a obdelník zvolíme libovolně tak aby splnil vlastnost teepee, to jistě jde protože mají důležité úsečky nenulovou délku a směr  $c$  je protíná tedy existuje nenulová šířka kde můžeme nakreslit obdelník.

2. Necht' všechny grafy které mají menší počet kroku sériově paralelní konstrukce než  $G$  už umíme reprezentovat. Necht' máme graf  $G_1$  a jeho teepee reprezentaci  $T_1$  a graf  $G_2$  a jeho teepee reprezentaci  $T_2$ . Označme severní pól grafu  $G_1$  jako  $s_1$  a jižní pól jako  $j_1$  analogicky pro  $G_2$ , tedy severní pól grafu  $G_2$  jako  $s_2$  a jižní pól jako  $j_2$ . Serializace. Necht' graf  $G$  vzniknul serializací grafů  $G_1$  a  $G_2$ . Nyní použijeme teepee reprezentace  $T_1$  a  $T_2$ . Při serializaci dochází k stotožnění vrcholu  $j_1$  a  $s_2$  to samé uděláme v reprezentaci úsečka  $\tilde{j}_1$  a  $\tilde{s}_2$  bude muset být v reprezentaci  $G$  stejná úsečka. Necht' obrázek ?? značí teepee  $T_1$ . Převezmeme značení z tohoto obrázku, tedy body  $y, z$  průniky okraje obdelníku s úsečkou  $\tilde{j}_1$  a bod  $k$  což je konec úsečky  $\tilde{j}_1$ . Nyní budeme posunovat bod  $k$  po prodloužení úsečky  $\tilde{j}_1$  tak aby platilo že délka z bodu  $z$  do bodu  $k$  je ostře větší jak délka úsečky  $\tilde{s}_2$  z teepee  $T_2$ . Nyní posuneme průsečík teepee  $T_2$  do vrcholu  $k$ .

Protože platí že  $\tilde{j}_1$  a  $\tilde{s}_2$  určují stejnou přímku označme ji  $p$ , můžou nastat dva případy otočení  $T_2$ . Buď na přímce je pořadí průniků bod  $k$ , první obdelík z  $T_2$ , druhý obdelník z  $T_1$  v tom případě nic neděláme nebo případ první obdelník z  $T_2$ , bod  $k$  a obdelník z  $T_1$ . V tom případě je pro naši konstrukci teepee  $T_2$  špatně orientované, a provedeme otočení  $T_2$  podle středu úsečky  $\tilde{s}_2$  o  $\pi$ . Nyn vytvoříme obdelník pro nově tvořené teepee označme ho  $T$ . Ten bude mít stranu ve směru  $c$  tedy různou od směrů úseček  $\tilde{s}_1$  a  $\tilde{j}_2$ . Bude to nejmenší obdelník který obsahuje obdelníky teepee  $T_1$  a  $T_2$ . Už jen upravíme délku úseček  $\tilde{s}_1$  a  $\tilde{j}_2$ . Protáhneme úsečky  $\tilde{s}_1$  a  $\tilde{j}_2$  tak že se vzájemně dotýkají v bodě  $w$  a protínají obě rovnoběžné strany nového obdelníku teepee  $T$ . Paralelizace. Označme průsečík teepee  $T_1$  jako  $x$  položme průsečík teepee  $T_2$  do  $x$ . V bodě  $x$  povedeme přímku ve směru  $c$ . Bod  $x$  s obdelníkem z teepee  $T_1$  nám určuje polorovinu  $\Omega$  pokud v této polorovině leží obdelník z  $T_2$  potom je vše v pořádku, pokud ne, potom proveme rotaci  $T_2$  o  $\pi$  okolo bodu  $x$ .

Nyní stačí zmenšit  $T_2$  tak aby se obdelníky z  $T_1$  a  $T_2$  neprotínali. Tedy nejbližší průnik obdelníku z  $T_1$  s úsečkou  $\tilde{j}_1$  od bodu  $x$ , označme ho jako  $y$ . A necht'  $q$  je nejbzdálenější průnik bodu obdelníku z  $T_2$  s úsečkou  $\tilde{j}_2$  od bodu  $x$ . Potom  $d = |yx|/|qx|$ , a nyní  $T_2$  transformujeme tak, že  $T_2 := cT_2$  kde  $0 < c < d$ . Důležité úsečky nového teepee  $T$  budou  $\tilde{s}_1$  a  $\tilde{j}_1$ . Tím jsme skoro u konce. Nyní zjistíme zda u grafu  $G$  je hrana mezi jeho póly. Pokud ano potom ještě upravíme důležité úsečky tak že  $\tilde{s}_1 := \tilde{s}_1 \setminus x$  a podobně pro  $\tilde{j}_1 := \tilde{j}_1 \setminus x$ . Obdelník nového teepee  $T$  vznikne podobně jako u serializace, obdelník bude mít stranu ve směru  $c$  a bude nejmenší takový, že bude obsahovat oba obdelníky z  $T_1$  tak obdelník z  $T_2$ .

## 0.9 Doplnky super sériově paralelních grafů

V této kapitole dokážeme, že do třídy SEG grafů patří grafy velmi podobné doplnkům sériově paralelních grafů.

**Definice 0.33** (Super sériově paralelní grafy). To jsou serivě paralelní grafy jen s výjimkou toho, že zakážeme paralelizaci s jednou hranou, budeme je značit SSP.

**Definice 0.34** (Páseček). Obdelník nazveme pásečkem pokud má následující vlastnosti. Je podrozdělen na 5 dalších obdelníků jak je zobrazeno na obrázku ???. Podle pořadí ve kterém rozdělují obdelník je očíslováme. Tedy máme obdelníky 1, 2, 3, 4, 5, z toho sudým tedy obdelníkům s čísli 2 a 4 budeme říkat Špatné. Obdelníku s 3 budeme říkat obdelník střední. A obdelníkům s čísli 1 a 5 budeme říkat kraní.

Konvence pro pojmenování parametrů pásečku jsou následující, délce strany která je společná pro všechny obdelníky v pásečku a i pro samotný páseček budeme říkat šířka (na obrázku ?? se jedna o délku strany  $BC$ ). Délku sousední strany pásečku budeme nazývat šířkou. A toto značení budeme analogicky používat i pro obdelníky v pásečku.

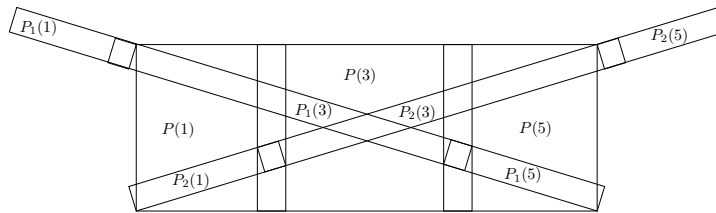
**Definice 0.35** (Protínání obdelníku). Obdelník  $o$  je protnut obdelníkem  $s$  pokud  $o$  má neprázdný průnik s  $s$  tak, že dvě protilehlé strany  $z$   $s$  mají neprázdný průnik se dvěma protilehlými stranami  $z$   $o$ . Dále protínání obdelníku úsečkou nazveme pokud úsečka má neprázdný průnik s dvěma protilehlými stranami obdelníku.

Definice protínání obdelníku platí stejně tak pro páseček, protože je to vlastně také obdelník.

V této části budeme používat následující značení. Nechť  $P$  je páseček potom  $P(k)$  označuje  $k$ -tý obdelník v pásečku  $P$ .

**Definice 0.36** (Serializace pásečku). Nechť máme pásečky  $P_1$  a  $P_2$ . Páseček  $P$  je serializací páseček  $P_1$  a  $P_2$  pokud splňuje následující vlastnosti

1.  $P_1(3)$  a  $P_2(1)$  protínají  $P(1)$ .
2.  $P_1(5)$  a  $P_2(3)$  protínají  $P(5)$ .
3.  $P_1(3)$  a  $P_2(3)$  protínají  $P(3)$  a  $P_1(3) \cap P_2(3) \subset P(3)$ .
4. Navíc chceme abych existovala úsečka která protíná jak  $P_1(1)$  tak  $P_2(5)$  a tato úsečka protínala páseček  $P$ .

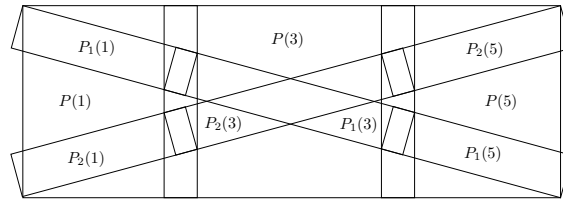


Obrázek 5.3: Serializace pásečku

**Definice 0.37** (Paralelizace pásečku). Nechť máme pásečky  $P_1$  a  $P_2$ . Páseček  $P$  je paralelizací páseček  $P_1$  a  $P_2$  pokud splňuje následující vlastnosti

1.  $P_1(1)$  a  $P_2(1)$  protínají  $P(1)$ .
2.  $P_1(3)$  a  $P_2(3)$  protínají  $P(3)$ .
3.  $P_2(5)$  a  $P_2(5)$  protínají  $P(5)$  a  $P_1(3) \cap P_2(3) \subset P(3)$ .



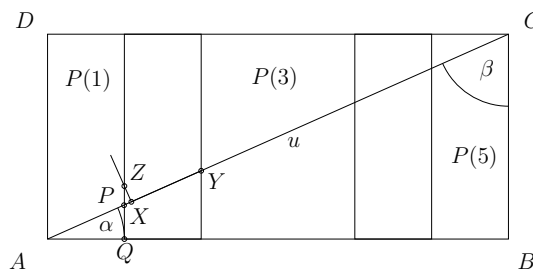


Obrázek 5.4: Paralelizace pásečku

**Lemma 0.38.** *Nechť páseček  $P$  má vzniknout paralelizací pásečků  $P_1$  a  $P_2$ . A nechť umíme zkonstruovat  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) tak že bude mít libovolnou šířku  $s_1$  (resp.  $s_2$ ), bude mít libovolnou délku krajních obdelníků  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) a bude mít libovolnou šířku středního obdelníku  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) a libovolnou šířku špatných oblastí  $\varepsilon_1$  (resp.  $\varepsilon_2$ ). Potom umíme zkonstruovat  $P$  pro libovolné zadané  $s, k, l, \varepsilon$ , kde  $s$  je šířka,  $k$  je délka krajních obdelníků,  $l$  je délka středního obdelníku a  $\varepsilon$  je délka špatných oblastí.*

*Důkaz.* Tento důkaz je sice zřejmý, ale technicky poměrně náročný.

Naším úkolem, je najít správné parametry pro pásečky  $P_1$  a  $P_2$  a pozici aby výsledný páseček  $P$  splňoval všechny požadované vlastnosti. Nakresleme si páseček který má parametry stejné jako  $P$ . Označme si vrcholy tohoto pásečku  $A, B, C, D$  tak jak jsou na obrázku 0.9. Při vkládání pásečku  $P_1$  do pásku  $P$  se musíme starat jednak o to aby se obdelníky  $P_1(3)$  a  $P_2(3)$  protli v oblasti  $P(3)$ , to bude jeden odhad a jednak aby pokud zvolíme moc velkou šířku aby se nám do špatných oblastí pásečku  $P$  vešli vůbec nějaké špatné obdelníky z  $P_1$  a  $P_2$ . Dále se budeme zabívat už pouze pásečkem  $P_1$ , u pásečku  $P_2$  můžeme postupovat analogicky.



Obrázek 5.5: Obrázek k prvnímú odhadu

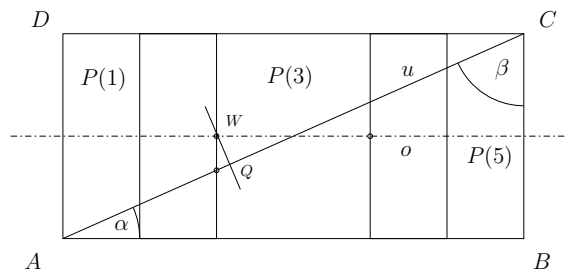
Nejdříve si uděláme odhad na šířku pásečku podle špatných obdelníků  $P$ . Nakresleme si úhlopříčku obdelníku  $ABCD$  nazvěme ji  $u$ . Rozhodneme se že budeme chtít aby špatné obdelníky v  $P_1$  měli šířku alespoň takovou jako mají špatné pásečky  $P$ . Nyní stačí upočítat odhad na šířku pásečku budeme se ve značení řídit obrázkem ???. Nechť máme vynešenou vzdálenost  $\varepsilon$  na  $u$ , tak, že je mezi body  $X$  a  $Y$ . Potom odhad na šířku pásečku je vzdálenost mezi body  $X$  a  $Z$  a tu spočítáme takto.

Nejdříve si spočítáme úhel svýrající strana  $DA$  s  $u$  tedy

$$\alpha = \arcsin \frac{s}{2\varepsilon + 2k + l}$$

A teď již můžeme spočítat vzdálenost bodů  $X$  a  $Z$ . Nejprve spočítáme vzdálenost úsečky  $PY$ , to je  $|PY| = \varepsilon / \cos(\alpha)$  a tedy  $|PX| = |PY| - \varepsilon$ . A tedy první odhad na šířku pásečku je

$$x_1 = \min \varepsilon \sin \alpha, |PQ|$$



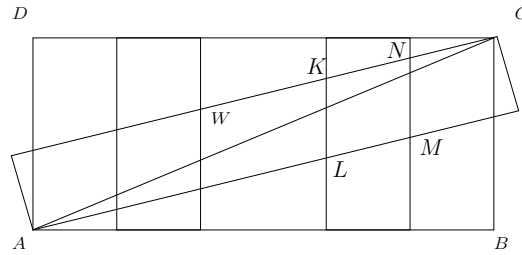
Obrázek 5.6: Obrázek k druhému odhadu

Nechť  $o$  je osa pásečku  $P$  tak, že prochází středem obdelníka a je rovnoběžná se stranou  $AB$ , potom bod  $W$  je nejbližší bod průniku  $o$  a špatného úseku tak jak je zobrazeno na 0.9. Na druhý odhad nám stačí spočítat vzdálenost bodu  $W$  od úhlopříčky  $u$ , tedy

$$x_2 = \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

Protože budeme konstruovat  $P_1$  symetricky tento odhad nám zaručí, že se celý jejich průnik bude ležet v  $P(3)$ .

Skutečnou šířku pásečku bude minimum z  $x_1$  a  $x_2$ , tedy  $x = \min\{x_1, x_2\}$ . Vytvoříme obdelník  $k$  (je to obvod  $P_1$ ) se šířkou  $x$  a s úhlopříčkou  $u$ . Tak, že  $k$  protíná obdelník  $ABCD$  na stranách  $DA$  a  $BC$ . Tím je tento obdelník jasně definovaný. Nyní ho ještě musíme správně rozdělit. Špatné obdelníky s délkou  $\varepsilon$  se jistě vejdou do průniku  $k$  s  $P(2)$  proto jsme počítaly odhad  $x_1$ . A tedy podle obrázku ?? nakreslíme do špatných obdelníku z  $P$  obdelníčky špatných oblastí z  $P_1$  a to tak, že průnik pásečku  $P_1$  s špatným obdelníkem  $P(2)$  vznikne rovnoběžník jeho vrcholy označme  $KLMN$  označme je tak jak na obrázku 0.9, potom úhly v bodech  $K, M$  jsou tupé a proto se sem vejdou vrcholy špatného obdelníku  $P_1(2)$ . A těmito body a obdelníkem  $k$  je tato oblast už jasně definovaná, analogicky to uděláme s druhým špatným obdelníkem. A všechno co jsme tu dělali pro  $P_1$  uděláme pro  $P_2$  a tím získáme parametry pro  $P_1$  a  $P_2$ . Tedy zadané parametry  $P$  jsme schopni vytvořit z  $P_1$  a  $P_2$  o kterých z předpoladu víme, že je umíme pro libovolné parametry zkonstruovat.



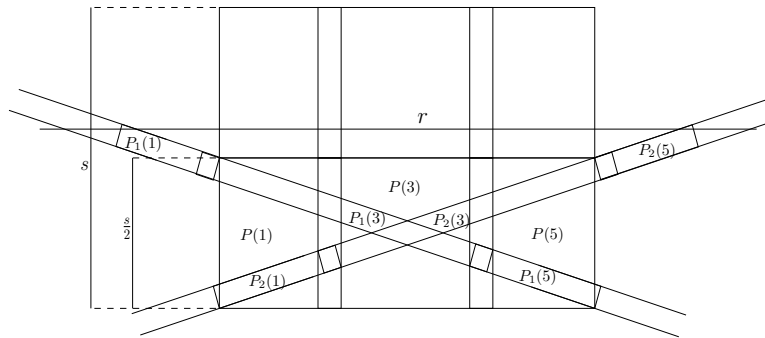
Obrázek 5.7: Přidání špatných oblastí

**Lemma 0.39.** *Nechť pásceček  $P$  má vzniknout serializací páscečků  $P_1$  a  $P_2$ . A nechť umíme zkonstruovat  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) tak že bude mít libovolnou šířku  $s_1$  (resp.  $s_2$ ), bude mít libovolnou délku krajních obdelníků  $k_1$  (resp.  $k_2$ ) a bude mít libovolnou šířku středního obdelníku  $l_1$  (resp.  $l_2$ ) a libovolnou šířku špatných oblastí  $\varepsilon_1$  (resp.  $\varepsilon_2$ ). Potom umíme zkonstruovat  $P$  pro libovolné zadané  $s, k, l, \varepsilon$ , kde  $s$  je šířka,  $k$  je délka krajních obdelníků,  $l$  je délka středního obdelníku a  $\varepsilon$  je délka špatných oblastí.*

*Důkaz.* V tom to důkazu použijeme dva odhady které jsme použili u předchozího důkazu. Tedy již máme odhad na šířku páscečků, teď již stačí zajistit poslední a to čtvrtou vlastnost z definice serializace. A tou je, že existuje úsečka kterou protneme obdelníky  $P_1(1)$  a  $P_2(5)$ . A z tohoto vzejde poslední odhad na šířku páscečku. Může se nám totiž stát že nám budou špatné obdelníky "stínit" ve výhledu z obdelníku  $P_1(1)$  na  $P_2(5)$ . Tedy stačí pokud zvolíme dostatečně velké  $k_1$  což je délka krajního obdelníku v  $P_1$ . A ten stačí zvolit tak aby prodloužení úsečky  $AB$  protlo obdelník  $P_1(5)$ . A to proto, že pokud přímka určená  $AB$  protne  $P_1(5)$  a protože vzdálenost průniku  $P_1$  s  $P_2(2)$  od  $AB$  je nenulová existuje přímka která protíná  $P_2(1)$  a také  $P_1(5)$  (například právě prodloužení  $AB$ ). A pokud lze protnout tyto dva obdelníky potom jistě můžeme protnout i obdelníky  $P_1(1)$  a  $P_2(5)$  což jsme chtěli. Špatné obdelníky pro  $P_1$  vytvoříme podobně jako v předchozím lemmatu, viz obrázek ???. Tato konstrukce nám ještě nezaručuje, že existuje úsečka  $u$  která protíná  $P_1(1)$  a  $P_2(5)$  a navíc protíná  $P$ , ale to se udělá snadno. Stačí celou tuto konstrukci udělat se stejnými parametry jen počítat s parametrem  $s$  jako s  $s/2$  a tedy nechat si polovinu páscečku pouze na protnutí úsečkou  $u$  a v této polovině jistě taková úsečka existuje, a to ze symetrie páscečků viz obrázek 0.9.

**Definice 0.40** (Reprezentace grafu páscečky). Nechť  $G$  je SSP graf  $\tilde{G}$  je jeho páscečková reprezentace pokud. Hranu reprezentujeme libovolným páscečkem. Pokud  $G_1$  a  $G_2$  mají reprezentaci  $\tilde{G}_1$  a  $\tilde{G}_2$ , potom pokud  $G$  vzniknul serializací  $G_1$  a  $G_2$  potom  $\tilde{G}$  vzniknul serializací  $\tilde{G}_1$  a  $\tilde{G}_2$ . Analogicky pro paralelizaci tedy pokud  $G$  vzniknul paralelizací  $G_1$  a  $G_2$  potom  $\tilde{G}$  vzniknul paralelizací  $\tilde{G}_1$  a  $\tilde{G}_2$ .

**Tvrzení 0.41.** *Nechť je  $G$  SSP graf potom existuje páscečková reprezentace  $\tilde{G}$  grafu  $G$ .*

Obrázek 5.8: Úsečka protínající  $P_1(1)$  a  $P_1(5)$ 

*Důkaz.* Důkaz je induktivní, a bude používat předchozí lemmata.

1. Hranu jistě umíme reprezentovat, zdefinice nám stačí libovolný páseček. 2. Serializace plyne z lemmatu ... a paralelizace z lemmatu ...

**Tvrzení 0.42.** *Nechť  $G$  je SSP graf, pokud umíme  $G$  reprezentovat pásečky potom je doplněk  $G$  SEG graf.*

*Důkaz.* Stačí vymyslet uspořádání úseček do pásečku tak aby serializace a paralelizace fungovala stejně dobře pro úsečky tak jako pro pásečky.

Nejprve si ukážeme jak reprezentovat hranu. s danými parametry. Nechť máme zadané parametry jak má páseček vypadat. tedy jeho šířku  $s$ , délku krajních obdelníků  $k$ , délku středního obdelníku  $l$  a délku špatných pásečků  $\varepsilon$ . Nakreslíme si páseček  $P$  s danými parametry, nazveme ho  $ABCD$  viz obr. ???. Dovnitř nakreslíme dvě přímky  $k, l$  které jsou rovnoběžné se stranou  $AB$  neleží na stejné přímce a neleží ani na stejné přímce s úsečkami  $AB$  a  $CD$ . A navíc  $k$  se dotýká strany  $DA$  a druhý konec se dotýká strany  $B''C''$  jež je stranou špatného obdelníka z  $P$ . A podobně pro úsečku  $l$ , tedy dotýká se strany  $BC$  a na druhé straně se dotýká strany  $A'D'$ .

Nyní si řekneme jaké úsečky leží ve kterých oblastech pásečku a jakým způsobem. Mějme páseček  $P$  reprezentující  $G$ . Póly  $G$  označíme  $s$  jako severní pól a  $j$  jako jižní pól. Skoro úsečkovou reprezentací  $G$  budeme označovat reprezentaci která je reprezentace indukovaného podgrafu  $G \setminus \{s, v\}$ . A o pásečku řekneme, že obsahuje skoro úsečkovou reprezentaci pokud

a označme, že obsahuje skoro úsečkovou reprezentaci doplnku  $G$  pokud

Nyní ukážeme že serializace pasečků je serializace úsečkové reprezentace doplnku.

# Literatura

- [1] J. Kratochvíl, J. Matoušek, Intersection graphs of segments *KAM Series: No. 89-143*
- [2] D. F. Fulkerson, O. A. Gross, Incidence matrices with the consecutive 1's property. *Bull. Amer. Math. Soc.* 70(1965) p. 681-684
- [3] K.S. Booth, G. S. Lucker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms. *J. Comput. Syst. Sci* 13(1976) p 255-265
- [4] F. W. Sinden, Topology of thin film RC-circuits *Bell System Tech. J.*(1966), p. 1639-1662
- [5] J. Kratochvíl, M. Goljan, P.Kučera, String graphs *Academia, Prague 1986*
- [6] J. Kratochvíl, String graphs I: the number of critical nonstring graphs is infinite *J. Combin. Theory Ser. B*52(1991), p. 53-66
- [7] J. Kratochvíl, String graphs II: Recognizing string graphs is in NP-hard *J. Combin. Theory Ser. B*52(1991b)
- [8] J. Kratochvíl and J. Matoušek, String graphs requiring exponential representation *J. Combin. Theory Ser. B*52(1991), p. 1-4
- [9] J. Pach and G. Tóth, Which crossing number is it anyway? *Journal of Combinatorial Theory, Ser. B* 80 (2000), no. 2, 225-246
- [10] M. Schaefer, E. Sedgwick and D. Štefankovič, Recognizing string graphs in NP *Journal of Computer and System Sciences* 67 (2003), no. 2, 365-380
- [11] M. Schaefer and D. Štefankovič, Decidability of string graphs in NP *Journal of Computer and System Sciences* 68 (2004), no. 2, 319-334
- [12] E. R. Scheinerman, Intersection classes and multiple intersection parameters of graphs *Ph.D. thesis, Princeton University, 1984*
- [13] Petr Hliněný, Contact graphs of line segments are NP-complete *Discrete Mathematics* 235 (2001), no. 1-3, 95-106

- [14] N. de Castro, F. J. Cobos, J. D. Dana and A. Márquez, Triangle-free planar graphs as segment intersection graphs *journal of Graph Algorithms and Application* 6 (2002), no. 1, 7-26
- [15] I. Ben-Arroyo Hartman, I. Newman and R. Ziv, On grid intersection graphs, *Discrete Math. Vol. 87*, pp.41-52 1991.
- [16] H. de Fraysseix, P. Ossona de Mendez and J. Pach, Representation of planar graphs by segments *Intuitive Geometry* 63 (1991), 109-117
- [17] H. de Fraysseix and P. Ossona de Mendez, Contact and Intersection Representations *In Pach, Jánoš, Eds. Proceedings Graph Drawing (2004)*, 217-227
- [18] H. de Fraysseix and P. Ossona de Mendez, Intersection Graphs of Jordan Arcs, *Contemporary Trends in Discrete Mathematics, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, vol 49. DIMATIA-DIMACS, 1999, Štířín 1997 Proc.*, pp. 11-28.
- [19] P. Duchet, personal communication
- [20] S. Roberts, On the boxicity and cubicity of a graph *Recent Progresses in Combinatorics, W Tutte ed. Acad. Press New York 1969*, 301-310
- [21] J. E. Steif, The frame dimension and the complete overlap dimension of graph *J. Graph Theory* 9(1985) 285-299
- [22] J. Černý, D. Král, H. Nyklová, O. Pankrác, On Intersection Graphs of Segments with Prescribed Slopes *Proceedings 9th International Symposium Graph Drawing 2001 (GD'01), Lecture Notes in Computer Science vol. 2265*, pp. 261-271, Springer-Verlag, 2002.
- [23] P. Koebe. Kontaktprobleme der konformen Abbildung, *Ber. Verch. Sachs. (1936)*, 141-164
- [24] J. Kratochvil, Geometric representation of graphs *Graph Theory Course at UPC Barcelona*
- [25] Pach, Jánoš, Agarwal, Pankaj K., Combinatorial geometry. *Wiley-Interscience Publication. New York, NY: Jowhn Wiley & Sons. xiii, 354 p. (1995)*
- [26] Ron Shamir, Sariel Har-Peled, Advanced Topics in Graph Algorithms *Technical Report, Tel-Aviv University, Spring 1994*
- [27] C. Thomassen, Grötzsch's 3-colour theorem and its counterparts for the torus and the projective plane, *J. Comb. Teory B, Vol. 62*, pp. 268-279, 1994.