

Posudek diplomové práce **Jána Pulmanna**  
“**S-matrix and homological perturbation lemma**”

V první kapitole práce autor zavádí  $A_\infty$  a  $L_\infty$  algebry, jejich morfismy a vysvětluje alternativní popis pomocí koderivací. Tato fakta jsou nepřehledně roztroušena po literatuře a autorův přínos tak spočívá v užitečném sjednocení konvencí. Tato kapitola je dobrou motivací pro některé konstrukce ve zbytku práce.

V druhé kapitole autor vysvětluje BV formalismus a jeho souvislost s homologickou algebrou a formální geometrií. Zavádí důležitý pojem BV algebry a její master rovnice.

Ve třetí kapitole autor rekapituluje Zwiebachův článek [2] a jeho matematickou interpretaci Marklem [3]: vysvětluje, že Zwiebachem zavedená struktura je tzv. loop homotopy algebra. Poté ukazuje ekvivalentní popis těchto algeber pomocí řešení master rovnice v jisté BV algebře formálních funkcí.

Matematická užitečnost homotopických algeber obecně spočívá v tom, že je pro ně řešitelný problém homotopického přenosu: ze zadané struktury algebry na diferenciálním gradovaném prostoru  $V$  sestrojít

1. strukturu algebry na kohomologii  $H^*(V)$  prostoru  $V$ ,
2. morfismus  $V \rightarrow H^*(V)$  algeber, který indukuje isomorfismus na kohomologiích.

Tento problém je důkladně prozkoumán pro algebry nad operádami. Loop homotopy algebry jsou však algebry nad jistou *modulární* operádou a zde již obecná teorie chybí.

V poslední kapitole tedy autor studuje problém homotopického přenosu pro loop homotopy algebry. Fyzikální motivací je konstrukce efektivní akce. Autor problém převede na konstrukci řešení BV master rovnice na formálních funkcích na  $H^*(V)$  z řešení na formálních funkcích na  $V$ . Základním nástrojem pro řešení této nové úlohy je homologické perturbační lemma. Tím autor vyřeší první část problému přenosu. Druhá část v práci již diskutována není (není např. ani jasné, co jsou morfismy loop homotopy algeber). Přesto dává autorův postup naději i na její řešení. Jedná se o původní výsledky, které jsou solidním základem pro vědeckou publikaci.

Ještě poznamenám, že problému přenosu pro algebry nad modulárními operádami se věnuje článek [44], kde ovšem druhá část taktéž vyřešena není a použitá metoda ani nedává náповědu, co dělat dále.

**Předloženou práci považuji za vynikající a doporučuji ji uzнат jako diplomovou práci.**

Níže přikládám seznam připomínek. Nemá smysl, aby na všechny autor reagoval během obhajoby. Uvádím je hlavně pro autorovu reflexi, která mu snad bude užitečná při psaní dalších vědeckých prací. Nejpodstatnější jsou připomínky označené jako “Hlavní”. K druhé a třetí by se autor měl vyjádřit, protože na nich může záviset správnost dosažených výsledků.

Martin Doubek,  
Matematický ústav UK,  
Praha 9.6.2016

## Hlavní připomínky

1. s. 41, výpočet úplně dole - Tento výpočet je důležitý a autor by tedy měl pečlivě vysvětlit, jaké konvence zde používá - zejména proto, že jsou to konvence nestandardní: Vzorec z A.1 by při systematickém použití Koszulovy konvence byl

$$\phi^\#(w) = (-1)^{|w| \cdot |\phi|} w \circ \phi.$$

Vzorec z A.2.1 by byl

$$\begin{aligned} & (\phi^1 \odot \dots \odot \phi^n)(v^1 \odot \dots \odot v^n) = \\ & = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \epsilon(\sigma) (-1)^{\sum_{1 \leq j < i \leq n} |\phi^i| \cdot |v_{\sigma(j)}|} \phi^1(v_{\sigma(1)}) \dots \phi^n(v_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

(možná i  $1/n!$ ).

Zdá se mi, že použití standardních konvencí vede k elegantněji vypadajícímu výsledku:  $\{s_n^g, \phi^k\} = n(\lambda_{n-1}^g)^\#(\phi^k)$ , díky čemuž není potřeba zavádět střískované veličiny jako v dalším výkladu. Ale autorův výpočet je také v pořádku.

2. Začátek 4.1.3 - Nelze zvolit bázi s vektory  $b_i$  a  $c_i$  tak, aby  $Q(c_i) = -b_i$  a  $H(b_i) = c_i$  - to by pak  $Q$  a  $H$  nebyly vzájemně inverzní (že je něco špatně je vidět i z rovnice  $(\widehat{H} \circ \widehat{Q} + \widehat{Q} \circ \widehat{H})(\alpha\beta^i\gamma^i)$  na s. 48, která je ve sporu s třetí rovnicí odshora na s. 47).

Náprava se ale projeví jen přidáním minusu do definice  $\widehat{h}^\#$ , což snad nic dále nepokazí.

3. s. 53, konec první čtvrtiny - "every  $\delta'' \circ H$  removes two  $\gamma$ " - odstraní z  $S'$  nebo  $F$ ? Ale nechápu ani jedno. V následujícím příkladu mi připadá, že druhý člen ve vyjádření  $P \circ \delta'' \circ \widehat{H} \circ \delta(F)$  může být nenulový, i když  $S'$  obsahuje jen jednu  $\gamma$ .

Je tato restrikce na  $S'$  někde potřeba?

## Vedlejší připomínky

1. s. 10 - Remark nahoře je nesrozumitelná.
2. Lemma 1.8 -  $\tilde{\varphi}$  a  $\tilde{\psi}$  jsou dokonce určena jednoznačně.
3. s. 13, formule nahoře - Jaký je přesně význam symbolu  $\sigma$ ? V appendixu se definuje  $\sigma_n$ , ale pak se používá už jen  $\sigma$ . Značení  $\sigma_n$  vs  $\sigma$  je v práci nekonzistentní.

Co přesně je concat v symetrickém případě?

4. s. 14 - Ve větě "If we have  $\varphi_0 = \text{proj}_V(\Phi_0), \dots$ " je "If" velmi matoucí.

Jak se definuje exp? Je to řada bez faktoriálů?

Výpočty na s. 14 jsou velmi zajímavé. Jejich systematictější zpracování by bylo pěkným můstkem mezi fyzikální a matematickou literaturou.

5. s. 16, Remark - I když jsem tuto poznámku nakonec pochopil a považuji ji za zajímavou, připadá mi nesrozumitelně zformulovaná.

6. Kapitola 1 - Jaký je důvod pracovat s koderivacemi s netriviální složkou arity 0? Pro  $A_\infty$  a  $L_\infty$  algebry to není potřeba a pro loop homotopy algebry je potřeba jít ještě dále ke koderivacím řádu 2, které jsou ale zmíněny jen okrajově v 3.2.1. Výklad i značení by se pro koderivace s triviální složkou arity 0 trochu zjednodušil.
7. 1.4.5 - Popis algeber nad  $\mathbf{DP}$  bez použití kooperád (např.  $\mathcal{P}^!$  místo  $\mathcal{P}^i$ ) je k nalezení v Proposition 3.88 v [13].
8. s. 45, před- a předpředposlední display - Bylo by lepší napsat tyto formule vyčíslené na elementech. Zejména ta druhá není ve stávajícím zápisu zcela srozumitelná.
9. s. 46 nahoře - Monomy netvoří ani generující množinu  $\mathcal{F}(V)$  (funkce jsou totiž formální řady), takže nestačí se odvolávat jen na linearitu.
10. s. 46 - Ve větě "...in one of the terms  $\hat{h}^\#$  commutes with  $\hat{Q}^\#$ ..." je "commutes" zavádějící.
11. s. 48 - Je pěkně spočítáno, že  $\hat{H}$  definované první formulí na této stránce dává požadovanou homotopii na  $\mathcal{F}(V)$ . To, že se jedná o homotopii definovanou na s. 46, autor komentuje jako "nontrivial manipulation". Není-li tento výpočet příliš dlouhý, bylo by zajímavé ho zahrnout.
12. s. 49, druhý odstavec - Bylo by zde vhodné připomenout význam čárkované  $\Delta'$  a  $\{.,.\}'$ .
13. Lemma 4.4 - Popis  $\omega_\alpha^{ij}$  je nesrozumitelný.
14. s. 54 - Nepochopil jsem, proč autor zmiňuje "This is necessary condition for  $W$  to exist,...".
15. s. 54 - Co by se stalo s integrálem, kdyby  $W_p$  obsahovalo i liché proměnné?
16. Lemma 4.5 - V důkaze by se hodilo zvýraznit, kde se využije (4.22).
17. s. 55, poslední věta před 4.3.1 - Je nesrozumitelná.

### Překlepy atp.

1. s. 11, první třetina - Má být  $\text{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$ .
2. s. 13, footnote 2 - První věta nedává smysl a v symbolu  $\psi^{\otimes 3}$  je překlep.
3. Lemma 1.10 - Ve zvýrazněných formulích chybí dolní indexy  $\geq 1$ .
4. s. 16, horní formule - Jedna ze závorek je umístěna špatně.
5. s. 16, třetí formule odshora - Index  $i$  by měl jít od 0 do  $n - s$ .
6. s. 16, Remark - chybí část dolního indexu v  $TV_{\geq}$ .
7. Example 1.11 - Na třetím řádku má být  $\tilde{m}(1_k)$  místo  $m_0(1_k)$ .
8. s. 17, 6. řádek odshora -  $TV$  má být  $\tilde{m}(v)$ .

9. Lemma 1.12 - V první větě chybí za čárkou “then”.
10. Example 1.14 - Na začátek bar komplexu by se hodilo dát pár teček na zdůraznění jeho pokračování.
11. formule (1.14) - Chybí “= 0”.
12. Example 1.18, poslední odstavec - Místo “coderivation” má být “differential”.
13. s. 26 - Ve větě “The first term...” chybí na konci tečka.
14. s. 28 - Pod “ $(n, n)$ -dimensional manifold” se asi myslí supermanifold.
15. s. 28 - Ve větě “The odd symplectic structure allow us...” má být “allows”.
16. s. 29 - V posledních dvou displayích vypadlo několikrát Ber.
17. první věta v 2.4 - má být “the most important”.
18. s. 33 - Je toto první místo, kde se objevuje  $\mathcal{F}$ ? Kde je tento symbol definován?
19. s. 33 - Na konci odstavce nad větou “Corresponding BV...” je nadbytečné “twice”.
20. s. 35 - Věta “This always is a square zero map...” je ve sporu s následujícím výpočtem, kde se ukazuje, že  $T_S^2 = 0$ , právě když je pro  $S$  splněna master rovnice.
21. s. 37 - Mělo by někde být zmíněno, že  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  má symetrii  $\langle B_1, B_2 \rangle = (-1)^{(|B_1|+1)(|B_2|+1)} \langle B_2, B_1 \rangle$ .
22. s. 39 - V prvním displayi je notace pro unshuffly nekonzistentní se zbytkem práce kvůli malému písmenu.
23. s. 40 - Notace  $\text{Sym}W[t]$  není vysvětlena. Co je  $y'$  ve 3. displayi odshora?
24. Theorem 3.2 - Ze znění vypadla nějaká slova.
25. s. 40, úplně dole - místo “product” má být asi “degree”. Navíc formulace navozuje dojem, že  $|\omega| = |\langle \cdot, \cdot \rangle| + |\uparrow \uparrow \otimes \uparrow \uparrow| = -1 + 4 = 3$ .
26. s. 41 - Odkaz v poslední větě by měl být raději na “Appendix A”.
27. s. 41, výpočet dole -  $s^{g_n}$  má být  $s_n^g$ .
28. s. 43 - Ve větě “The equation 4.2 tells us that on homology...” by bylo lepší vynechat “on homology”, neboť na homologiích jsou si uvedené zobrazení dokonce rovna.
29. s. 47 - Na několika místech tu chybějí horní indexy a  $F$  v  $F(V)$  by mělo být kaligrafické.
30. s. 49, první formule - Vypadlo  $I$  na konci.
31. s. 51, řádek pod prvním displayem - Vypadlo dvakrát  $\delta$ .

32. s. 52, věta nad (4.19) - “can only increase” by mělo být “don’t decrease”.
33. s. 53, druhý a třetí display odshora - Ztratily se stříšky nad  $H$ .
34. s. 54, první rovnice - Indexy  $i, j$  jsou ve znaménkovém faktoru prohozeny.
35. s. 54, úplně na konci -  $W^p$  má mít index dole.
36. s. 58, A.2 - Ve třetím řádku se objevuje “...the an...”.