Posudek na diplomovou práci Adama Ráže "Infinitesimální kalkulus více proměnných".

Převážná většina matematiků se schodne na tom, že nejdůležitější je tvorba pojmů a vztahů. To se děje i s argumentací v abstraktním světě. Volba světa nebo světů tvoří mantinely pro matematizaci pojmů, vztahů i argumentací. Nová teorie množin a polomnožin pracuje se světem nazývaným antický a značeným A, a expanzí antického světa zvaným klasický a značeným C. Zpravidla se uvažují oba světy, A i C. Obor světa C jde dál než obor světa A. Odlišnost mezi obory spočívá mimo jiné v rozdílu mezi přirozenými čísly, $\mathcal{N}_A \subsetneq \mathcal{N}_C$, a tudíž v rozdílu oborů racionálních a reálných čísel. $\mathcal{N}_A$ se zpravidla označuje $\mathcal{FN}$ - třída všech konečných přirozených čisel. Třída $\mathcal{N}_C$ se značí jako $\mathcal{IN} = \mathcal{N} - \mathcal{FN}$.

Petr Vopěnka dochází k přesvědění, že obor všech přirozených čísel není aktualizovatelný, následkem čehož je přesvědčen, že množina všech přirozených čísel neexistuje. Antický geometrický svět a věda o něm obdržela název eukleidovská geometrie.

Nekonečno které se připouští je nekonečně potenciální. Rozepnutí celého světa přirozených čísel i reálných čísel lze vytvořit užitím ultraproduktu. Fakticky jde o zobecnění Skolemova modelu nestandartních přirozených čísel.

Pro mne je ultraprodukt cestou k lepšímu pochopení oč Petru Vopěnkovi jde. Chce rehabilitovat původní geometrický názor týkající se nekonečně malých veličin s nimiž bezpečně kalkulovali Newton, Leibnitz i další matematici a fyzici.

Příklad (nestandartní analýza, A. Robinson): nechť S je spočetná množina a D normální ultrafiltr na S. Uvažujeme ultraproduct přirozených čísel $\mathcal{N}$. Roli $\mathcal{FN}$ zde hrají constanty $\mathcal{C}_{\mathcal{N}} : n \in \mathcal{N}$. Zřejmě, je-li $f \; : \; S \to \; [0,k], k \in \mathcal{N}$, pak existuje takové $n, 0 \leq n \leq k$, že $f|D = c_n$. Roli $\mathcal{IN}$ hrají funkce $h \; : \; A \to \; \mathcal{N}$ takové že $h|D$ je množina. $\mathcal{FN}$ jsou vlastní polomnožiny, a totéž je pravda pro $\mathcal{IN}$. Veličina f přirozených nebo reálných či racionálních čísel je nekonečně malá právě když $D{-}lim_{s \in S} f(s) = 0$.

Vopěnka od roku 1970 pracoval na alternativní teorii množin. Jedná se o altrenativu vůči Cantorově teorii množin, kterou pokládá za zcestnou iluzy matematiky 20. století.

Základní pojmy nové teorie jsou třídy, třída je seskupením nějakých objektů který chápeme jako jedinný objekt. Množinou se rozumí třída která je ostře vymezená. Polomnožinou se rozumí neostře vymezená třída která je částí množiny.

Dalším pojmem který Vopěnka používá je obzor. Osvětlená a neosvětlená část předmětu ležícím před a za obzorem a obzor tyto části odděluje. Vopěnka se obrací ke geometrickému světu kteý pokládá za názorný nebo též antický geometrický svět. Užitečný axiom nové teorie množin a polomnožin je axiom dvou nekonečných mohutností: nechť X, Y jsou nespočetné třídy, potom existuje vzájemně jednoznačná funkce F taková, že $dom(F) = X$ a $rng(F) = Y$.

Jádro posuzované práce je ve třetí části týkající se diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Jsou zavedeny pojmy spojitosti, limity v bodě, derivace funkce v bodě, presentována Langrangeova věta o přírustku funkce, vše formulováno v řeči monád. Další sekce probírá funkce třídy PC, a jádrem je věta o implicitní funkci. Sekce končí větou o inverzní funkci. V důkazech autor podstatně využívá překladových vět. Práce je napsána velice pečlivě. Našel jsem jediný defekt ve vetě 3 v kapitolě 2. Vopěnka v práci "Nová teorie množin a polomnožin" (Karolinum Praha 2015), která nemohla být v diplomové práci ještě citována, použil Rážův důkaz pro Tvrzení 4.14 na straně 58. Oceňuji v závěru presentovanou představu jak dále rozvíjet zkoumanou tematiku.

Po úspěšné obhajobě doporučuji práci uznat jako diplomovou s hodnocením výborně.

V Praze 31. května 2016

Balcar

RNDr. Bohuslav Balcar, DrSc