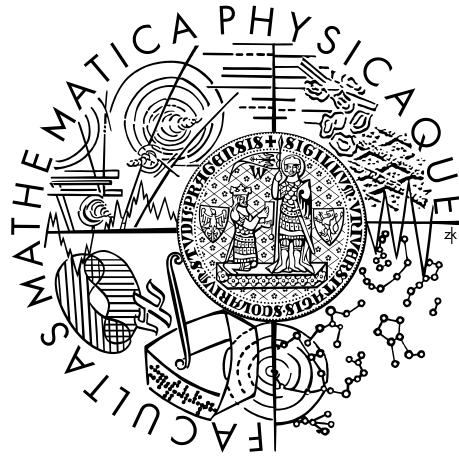


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Adam Ráž

# Infinitesimální kalkulus funkcí více proměnných

Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Mlček, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematické struktury

Praha 2016

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Rád bych z celého srdce poděkoval prof. RNDr. Petru Vopěnkovi, DrSc. za jeho vřelé přijetí, bezpodmínečnou láskyplnou podporu a za inspirující nadšení, kterými při všech našich setkáních oplýval.

Také bych rád poděkoval svému vedoucímu práce doc. RNDr. Josefu Mlčkovi, CSc. za otevřenost a milou ochotu vést mou práci, za jeho trpělivost při odhalování slabých míst mých textů a za cenné rady, které mi při našich konzultacích uděloval.

Mé vřelé poděkování patří i mým přátelům, zejména Mgr. Matěji Novotnému a Mgr. Janu Vlachému, za jejich pomoc při odhalování chyb a za jejich nekritické připomínky, které mi pomohly dopsat práci do této podoby.

Název práce: Infinitesimální kalkulus funkcí více proměnných

Autor: Adam Ráž

Katedra: Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Josef Mlček, CSc., Katedra teoretické informatiky a matematické logiky

Abstrakt: Práce navazuje na alternativní teorii množin a polomnožin Petra Vopěnky rozšířením pojmů nekonečné blízkosti a monády na vícerozměrné reálné prostory. Upřesňuje a na příkladech vysvětluje základní terminologii této teorie, zejména pak pojem množiny, polomnožiny a oboru. Zavádí dva světy — antický a klasický — na nichž ukazuje dvojí pohled na reálné funkce více proměnných, pomocí něhož zkoumá jejich lokální vlastnosti, jakými jsou spojitost, limita či derivace v bodě. Vrcholem práce jsou alternativně zformulované a dokázané věty o implicitní funkci a o inverzním zobrazení. V práci jsou také uvedena překladová pravidla, pomocí nichž lze všechny výsledky formulované tímto alternativním způsobem převést do řeči tradičního pojetí matematické analýzy.

Klíčová slova: Vopěnkova alternativní teorie množin a polomnožin, monáda, věta o implicitní funkci, věta o inverzním zobrazení

Title: Differential Calculus of Functions of Several Variables

Author: Adam Ráž

Department: Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Supervisor: doc. RNDr. Josef Mlček, CSc., Department of Theoretical Computer Science and Mathematical Logic

Abstract: The thesis follows on Petr Vopěnka's alternative theory of sets and semisets by extending notions of infinite closeness and monad for real spaces of several variables. It specifies and explains on examples the basic terminology of this theory, namely notions of sets, semisets and domains. It brings up two worlds — an ancient and a classical one — by which it shows a dual way of looking at real functions of several variables. That is used for examining local properties like continuity, limit or derivative of a function at a point. The peak of the thesis is an alternative formulation of the implicit function theorem and the inverse function theorem. The thesis also contains translation rules, which allow us to reformulate all these results from an alternative into a traditional formulation used in mathematical analysis.

Keywords: Vopěnka's alternative set theory, monad, implicit function theorem, inverse function theorem

# Obsah

Úvod	2
<b>1 Základní pojmy nové teorie množin a polomnožin</b>	<b>4</b>
1.1 Třídy, množiny a obory objektů . . . . .	4
1.2 Světy a zákony expanze . . . . .	6
1.3 Číselné struktury . . . . .	9
<b>2 Reálný prostor <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>12</b>
2.1 Základní vlastnosti reálného prostoru . . . . .	12
2.2 Reálné funkce . . . . .	14
2.3 Překladová pravidla . . . . .	14
2.4 Lokální vlastnosti reálných funkcí . . . . .	17
<b>3 Diferenciální počet funkcí více proměnných</b>	<b>19</b>
3.1 Spojitost funkce v bodě . . . . .	19
3.2 Bolzanova věta o mezihodnotě . . . . .	21
3.3 Limita funkce v bodě . . . . .	21
3.4 Derivace funkce v bodě . . . . .	23
3.5 Lagrangeova věta o přírůstku funkce . . . . .	28
3.6 Souvislosti derivace a parciálních derivací funkce v bodě . . . . .	29
3.7 Funkce třídy $C^p$ . . . . .	31
3.8 Věta o implicitní funkci . . . . .	32
3.9 Věta o inverzní funkci . . . . .	37
<b>Dodatek</b>	<b>38</b>
<b>Závěr</b>	<b>39</b>
<b>Seznam použité literatury</b>	<b>40</b>

# Úvod

Vývoj infinitesimálního kalkulu se od konce devatenáctého století ubíral směrem, který všechny Newtonem a Leibnizem dříve zavedené pojmy, jakými jsou například *nekonečně malé veličiny*, přetváří do podoby formulované v Zermelo-Fraenkelově teorii množin a popisuje je pomocí základního pojmu limity, která je definovaná způsobem, který zpravidla nazýváme  $\varepsilon, \delta$ -analýzou.

Tento způsob práce však již neuznává nekonečně malé veličiny jako existující objekty a úvahám o nich se snaží vyhýbat. V praxi se nicméně ukazuje, že je pro intuitivní geometrické představy vhodné si takovéto veličiny umět představovat a že i počítání s nimi vede často velmi rychle k užitečným výsledkům. Od konce šedesátých let dvacátého století, kdy Robinson pomocí nestandardních modelů teorie množin formálně ukázal, že nekonečně malé veličiny existují, se však ještě nepodařilo pro studium infinitesimálního kalkulu práci s těmito čísly navrátit do běžného uvažování.

Jednou z hlavních příčin tohoto nezdaru je náročnost pochopení formálního zavedení těchto veličin v pojetí, které přímo navazuje na práci Robinsona a které se zpravidla nazývá nestandardní analýzou. Tuto překážku ovšem překonává Petr Vopěnka ve svých knihách *Calculus infinitesimalis*,<sup>1</sup> ve kterých zavádí nekonečně malá reálná čísla a ukazuje přesnou práci s nimi bez jakékoli předchozí znalosti jejich formálního uchopení v teorii množin. Jsou zavedena ve shodě s intuicí nekonečně malých veličin u Leibnize a to tak, že je pochopí i student na gymnáziu.

Hlavním cílem Petra Vopěnky zde je zpřístupnit intuici infinitesimálního kalkulu leibnizovského stylu co nejširšímu okruhu čtenářů a přitom tak činit jasně a přesně. Z tohoto důvodu ji však nezavádí v tradiční Zermelo-Fraenkelově teorii množin, ale v terminologicky bohatší *alternativní teorii množin*, resp. v její nejposlednější podobě, kterou nazývá *nová teorie množin a polomnožin*. Tu již ale neformuluje axiomaticky, nýbrž intuitivně a s důrazem na možnost jejího pochopení bez předchozích dlouhodobých zkušeností s matematikou.

V první kapitole této práce nejdříve shrneme části Vopěnkovy nové teorie množin a polomnožin, které jsou užitečné pro zavedení nekonečně malých veličin, a to zejména ve vícerozměrných prostorech reálných čísel. Zavedeme ještě několik nových užitečných pojmů jako např. rozlišování objektů či vlastností na *antické* a *klasické*, které zjednoduší a zkrátí vyjadřování. Matematizujeme také Leibnizův pojem *monády* jakožto nekonečně blízkého okolí.

*Antický a klasický svět* je terminologie, kterou Petr Vopěnka zavedl zejména, aby rozlišil dva základní druhy nekonečna — nekonečno absolutní, které se ukazuje v klasickém světě, a nekonečno potenciální, se kterým pracovali v době antické. Právě nekonečno potenciální je to, díky kterému přímo uchopujeme přirozeně neostré jevy, jakými je například spojitost funkcí, a modelujeme je v klasickém světě doslova před našima očima.

Tyto dva světy nám také připomínají, že způsob nahlížení na typicky geometricky *neostré* objekty, jakými jsou reálné funkce či nekonečné posloupnosti, je dvojí. Právě v této přirozené dvojakosti teprve jasně zachycujeme jejich neostrost, kterou se tradiční  $\varepsilon, \delta$ -analýza snaží pomocí jejich nekonečnosti popisovat.

---

<sup>1</sup>Jsou to (Vopěnka, 2010) a (Vopěnka, 2011b).

V druhé kapitole přirozeně rozšiřujeme pojem monády pro vícerozměrný prostor reálných čísel  $\mathbf{Real}^n$ . Pro kohokoliv, kdo má zájem porovnávat námi později zaváděné definice a tvrzení z infinitesimálního kalkulu s tradičními definicemi a tvrzeními formulovanými  $\varepsilon, \delta$ -analýzou, v této části také podrobně dokazujeme základní překladová pravidla, která ukazují ekvivalentnost formulací pomocí pojmu monády (založené na dvojakém vidění světa) s formulacemi používajícími pouze jednoduché vidění světa, které tradičně zapisujeme pomocí  $\varepsilon, \delta$ -formulí.

V poslední části této kapitoly ukážeme, že se pojem monády velmi dobře hodí k popisu *lokálních* vlastností funkcí. Jsou to vlastnosti, které tradičně definujeme tak, že závisí jen na libovolně malém okolí bodu. V naší formulaci jsou to ale vlastnosti, které závisí právě na monádě bodu. Díky pojmu monády jsme se tedy přesunuli od „libovolnosti“ k „určitosti“.

Ve třetí kapitole pak navazujeme na diferenciální počet reálných funkcí jedné proměnné (rozpracovaný Petrem Vopěnkou ve (Vopěnka, 2010)) zobecněním základních pojmů spojitosti a derivace funkcí v bodě pro reálné funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$ . Důkazem vícerozměrné verze Bolzanovy věty o mezihodnotě a Lagrangeovy věty o přírůstku funkce demonstrujeme intuitivnost a přímot naší důkazové metody.

Klademe důraz na formulaci vět pro funkce definované *na monádě* bodu, čímž se ihned ukazuje jejich lokálnost, která by se tradičně popisovala pomocí nějakého otevřeného okolí bodu. Tento způsob pak zejména oceníme u formulací a důkazů v tradičním pojetí technicky náročněji formulovatelných a dokazovatelných vět, jakými jsou věta o implicitní funkci či věta o inverzní funkci.

Touto kapitolou připravujeme půdu pro možné vydání navazujícího spisu *Calculus infinitesimalis: Pars tertia*, který by se zabýval diferenciálním počtem funkcí více proměnných způsobem, jímž by ho mohli pochopit i nadanější studenti středních škol.

# 1. Základní pojmy nové teorie množin a polomnožin

V této práci budeme vycházet z nejposlednější koncepce Petra Vopěnky, kterou popsal zejména ve své knize *Velká iluze matematiky XX. století a nové základy*<sup>1</sup> (Vopěnka, 2011a) a nazval ji **nová teorie množin a polomnožin**.

V nové teorii množin a polomnožin se narodil do Vopěnkovy dřívější **alternativní teorie množin** neklade důraz na její formální axiomatizaci, ale na správné intuitivní pochopení základních pojmů jako jsou přirozená čísla, objekt, seskupení, nekonečno či polomnožina. Pojmy a principy je tedy lépe nejdříve chápat a až poté je přesněji uchopovat — matematizovat.

## 1.1 Třídy, množiny a obory objektů

Předpokládejme, že pojem objekt<sup>2</sup> a přirozené číslo<sup>3</sup> je jasný. Zavedeme nyní základní pojmy, které používáme k práci s objekty.<sup>4</sup>

Jestliže z některých dříve již vytvořených objektů některé vydělíme, vznikne **seskupení** těchto vydělených objektů. **Třídou** rozumíme kterékoliv seskupení nějakých daných objektů (jejích prvků), které vykládáme jako samostatného jedince neboli jako objekt jediný.<sup>5</sup>

**Množinou** rozumíme takovou třídu, která je *ostře* vymezená. **Ostrostí**<sup>6</sup> rozumíme určitost, jasnost, přesnost — krátce onu antickou dokonalost geometrických objektů studovanou v Eukleidových Základech.

**Vlastní třídou** rozumíme třídu, která není množinou. **Polomnožinou** rozumíme vlastní třídu, která je částí (to je podtřídou) nějaké množiny. **Kalnou množinou**<sup>7</sup> rozumíme takovou množinu, jejíž některá podtřída je polomnožinou.

Uvedme několik příkladů. Seskupení přirozených čísel od 1 do 5, tedy objekt,

---

<sup>1</sup>Pro pochopení filosofických konceptů, na kterých tato teorie staví, doporučujeme váženému čtenáři přečtení všech filosofických a motivačních částí této knihy, případně také knihy *Pojednání o jevech povstávajících na množstvích* (Vopěnka, 2008).

<sup>2</sup>Způsob užívání pojmu objekt je vysvětlen například na str. 52-55 (Vopěnka, 2008). Objekty jsou obecně jakékoliv entity, které si můžeme nějak označit — mohou jimi být čísla, body v prostoru, tzv. *abstraktní prvoobjekty* (objekty, jejichž náplně jsou vyprázdněné), množiny či třídy jiných objektů apod. Základním typem objektu jsou tzv. *abstraktní objekty typu 1*, za které budeme považovat abstraktní prvoobjekty, přirozená čísla a navíc i další druhy čísel. Např. i reálná čísla, zavedená v kapitole II.8.3 (Vopěnka, 2011a), ve smyslu zavedení pojmu tvrdá množina v kapitole II.4.2 tamtéž. Při naší práci se nebudeme zajímat o původ reálných čísel (rozumějme jejich skladbu), ale jejich vlastnosti a vztahy, které z tohoto původu vyplývají.

<sup>3</sup>Odkazují se na vysvětlení pojmu v kapitole II.3 (Vopěnka, 2011a). Všimněme si zejména, že přirozená čísla zde začínají od 0 a že je považujeme za základní abstraktní objekty a ne za seskupení všech přirozených nižších než dané číslo, jak bývá tradičně zvykem.

<sup>4</sup>Následující pojmy a značení jsou převzaté z kapitoly II.2.1 (Vopěnka, 2011a).

<sup>5</sup>To mj. znamená, že třídu můžeme označit jedním znakem, např.  $\mathcal{X}$ . Způsob práce s třídami i přesný způsob jejich značení je dále rozveden na str. 38-42 (Vopěnka, 2011a).

<sup>6</sup>Později při matematizaci bude způsob užívání tohoto pojmu upřesněn. Bude mj. znamenat, že *počet* prvků nějaké ostře vymezené třídy musí být *konečný*.

<sup>7</sup>Viz str. 13-18 (Vopěnka, 2008).

který budeme značit  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , chápeme nejen jako třídu, ale je to dokonce množina (a není to tedy vlastní třída). Je ostře vymezená už jen proto, že jsme ji právě vyčerpávajícím způsobem přesně popsali.

Oproti tomu seskupení  $D$  všech přirozených čísel, ke kterým se dokážu nahlas dopočítat od 1 přičítáním jedničky během jedné minuty, můžeme považovat za vlastní třídu. Jednak proto, že při každém pokusu se pravděpodobně dopočtu jiného nejvyššího čísla, ale i proto, že se odkazují na své *schopnosti*. Pokud bychom se při této definici odkázali na schopnosti jiných jedinců nebo dokonce počítače, výsledné seskupení by vypadalo jistě zcela jinak. Zřejmě ani počítač by se při opakovaných pokusech nedopočítal vždy stejných čísel, ať už mu přisuzujeme ostrost jakoukoliv.

Pro nějakého jedince — člověka, kdo počítá, lze ale považovat třídu  $D$  za polomnožinu. Dokážeme totiž *odhadnout*, že se určitě během jedné minuty nedopočítá do jednoho tisíce. Přitom čísla od 1 do 1000 bychom během určitého času jistě dokázali všechny napsat (i když to zde činit nebudeme) a tedy  $\{1, \dots, 1000\}$  považujeme za množinu a to dokonce kalnou.

Nyní je namístě otázka, jak vypadá taková množina, která není kalná. Zcela jistě si lze představit i velmi *malé* kalné množiny. Příkladem může být jednoprvková množina  $K$  všech koček, které při svém slavném pokusu zavřel Erwin Schrödinger do neprůhledné krabice. Z množiny  $K$  lze totiž vydělit vlastní třídu  $Z$  všech živých koček v krabici. Toto seskupení z povahy pokusu nelze (minimálně do otevření krabice) považovat za ostré seskupení.

Pokud tedy nějakým zákonem zakážeme kalnost určitých množin<sup>8</sup>, omezujeme vlastně naše schopnosti vydělovat z těchto množin neostrá seskupení. Při konkrétnějším uchopení pojmů této teorie tedy musíme mít na zřeteli matematika (či jiný subjekt), jehož schopnosti si propůjčujeme.<sup>9</sup>

Všechna přirozená čísla netvoří ani množinu ani jakékoliv jiné seskupení již existujících objektů, neboť neomezujeme naše schopnosti tvořit stále nová přirozená čísla.<sup>10</sup> Pro zachycení tohoto souboru objektů se hodí následující pojem.

**Obor** není souhrn nějakých již existujících objektů (lhostejno, jaká je modalita jejich bytí); je to zdroj a zároveň jakási jímka, do níž padají vhodné objekty z těch, které se objevují či vznikají.<sup>11</sup>

Každé seskupení nějakých objektů lze vykládat i jako obor, byť již vyčerpáný. **Aktualizací** nějakého oboru rozumíme jeho vyčerpání, to je nahrazení tohoto oboru seskupením všech objektů, které do něj padají či mohou padnout.

Obor všech přirozených čísel budeme značit  $\mathcal{N}$ <sup>12</sup> a považujeme jej za neaktualizovatelný.<sup>13</sup> Zřídka se však budeme při naší práci odkazovat na samotný obor  $\mathcal{N}$ .

<sup>8</sup>Budeme tak činit u všech množin světa  $\mathcal{A}$ .

<sup>9</sup>Proto se například při zavádění světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ , viz kapitola III.2.1 (Vopěnka, 2011a), hodí odkazovat se pro jejich rozlišení na schopnosti různých *bohů*. Člověk znalý mýtů o bozích si totiž může vytvořit mnohem lépe intuitivní představu toho, o jaké schopnosti se jedná.

<sup>10</sup>Viz kapitola I (Vopěnka, 2011a).

<sup>11</sup>Obor může být vymezen např. nějakým předpisem pro tvorbu objektů určitého druhu. Nedělá si ale nároky na existenci *všech* takových objektů. Připouští, že ať máme libovolné seskupení objektů vytvořených pomocí tohoto předpisu, tj. padnoucích do tohoto oboru, dá se vytvořit objekt, který třeba do té doby ještě vytvořit nebylo možné, který do tohoto oboru patří, ale přitom jsme ho v daném seskupení nenalezli.

<sup>12</sup>Zde vycházíme ze značení zavedeného v kapitole I.4 (Vopěnka, 2011a).

<sup>13</sup>Viz kapitola I.3 (Vopěnka, 2011a).

Mnohem častěji budeme pracovat s nějakou jeho částí, která je vymezena našimi schopnostmi příslušná přirozená čísla hledat, vidět či tvořit.

## 1.2 Světy a zákony expanze

Při matematizaci různých jevů reálného světa máme vždy na zřeteli nějaký subjekt, který na reálný svět pohlíží<sup>14</sup>, pozoruje a popisuje ho. Tomuto subjektu také přisuzujeme **schopnosti** vidět a zkoumat objekty onoho světa, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy<sup>15</sup>, vydělovat seskupení objektů<sup>16</sup> či hledat objekty<sup>17</sup> určitých vlastností. Schopnosti tohoto pozorovatele jsou často omezeny nějakým obzorem, směrem k němuž se síla (ostrost) jeho schopností ztrácí a po jehož překročení z nich zbývá již jen stopa.

Mějme nějakého takového pozorovatele s příslušnými schopnostmi. Tento pozorovatel spolu se všemi objekty, jež je schopen vidět, jevy, které na nich vystávají a které je schopen svými schopnostmi rozlišovat, a se všemi jevy, které vystávají na obzoru jeho pohledu (schopností), vytváří něco, co obecně označujeme **svět**. Říkame, že nějakou úvahu provádíme **ve světě**, odkazujeme-li se tím na schopnosti příslušného pozorovatele, který je s tímto světem spjat.

Označme si nějaký takový svět  $\mathcal{M}$ . Vymezujeme-li seskupení objektů ve světě  $\mathcal{M}$  nějakou pevnou ostrou hranicí, vznikají nám objekty, které nazýváme *množiny*. Pokud však vymezujeme seskupení objektů, které je omezeno toliko obzorem ve světě  $\mathcal{M}$ , vznikají nám *třídy*, které nemusí být množiny. Dohodněme se, že žádný další způsob tvorby seskupení neuvažujeme. Seskupení, která vymezíme ostře, zpravidla nazýváme *konečná*, kdežto seskupení, která jsou omezena až obzorem, se zpravidla nazývají *nekonečná*.<sup>18</sup>

Všimněme si, že pojem obor nedefinujeme ve světě, neboť se pro něj neomezujeme schopností vidět všechny jeho možné objekty, jako je tomu tak však u pozorovatele ve světě. Schopnost kdykoliv tvořit objekty nové, které do oboru padnou, ona možnost nechat se „překvapit“ nějakým zcela novým objektem, který do oboru padne, ale jehož existenci jsme před chvílí ještě neuvažovali, dává tomuto pojmu příslušnou hloubku.

Pokud budeme chtít vymezit seskupení nějakého oboru  $\mathcal{X}$  ve světě  $\mathcal{M}$ , činíme tak definicí třídy  $\mathcal{X}_{\mathcal{M}}$  jako třídy všech objektů světa  $\mathcal{M}$ , která padnou do oboru  $\mathcal{X}$ . V žádném případě si ale neděláme nárok na to, že tím najdeme objekty všechny. Můžeme ale symbolicky psát, že  $\mathcal{X}_{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{X}$ .

Další pojem, který nemá v samotném světě  $\mathcal{M}$  smysl zavádět, je polomnožina. Žádná taková by totiž neexistovala. Tento pojem nabývá na významu až ve chvíli, kdy porovnáváme seskupení objektů ve více světech najednou.

★

Budeme pracovat se dvěma konkrétními světy, které budeme v celé práci pevně

<sup>14</sup>Viz pojem *pohled* a *obzor* v kapitole II.2.2 (Vopěnka, 2011a).

<sup>15</sup>Tedy rozhodovat tvrzení o objektech pomocí formulí.

<sup>16</sup>Tedy schopnost tvořit seskupení, tradičně reprezentované axiomy teorie množin (a polomnožin).

<sup>17</sup>Existenční kvantifikace.

<sup>18</sup>O tomto pojetí nekonečna se lze dočíst například v kapitole II.2.4 (Vopěnka, 2011a).

označovat  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ .<sup>19</sup> Svět  $\mathcal{A}$  budeme ve stručnosti nazývat **světem antickým** a svět  $\mathcal{C}$  **světem klasickým**.

O těchto světech budeme předpokládat, že jsou *vnitřně nerozlišitelné*, to znamená, že všechny nástroje k vymezování seskupení, hledání objektů apod., které máme jako pozorovatel v libovolném z těchto světů k dispozici, jsou totožné. Staneme-li se pozorovatelem jednoho z těchto světů, nemáme bez dalších prostředků žádný způsob, jak zjistit, ve kterém světě jsme.

Díváme-li se ovšem na tyto světy zvenku — a tento způsob pohledu zpravidla označujeme tak, že uvažujeme oba světy  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ <sup>20</sup> — dokážeme tyto světy a v nich definovaná seskupení objektů rozlišit. Tento rozdíl spočívá však pouze v tom, že obzor světa  $\mathcal{C}$  je „dál“ než obzor světa  $\mathcal{A}$ , tj. ve světě  $\mathcal{C}$  vidíme všechny objekty, které vidíme i ve světě  $\mathcal{A}$ , nicméně vidíme i některé další, které již pozorovatel světa  $\mathcal{A}$  nevidí.

Protože v obou světech máme zavedena přirozená čísla, rozdíl mezi obzory světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$  se zpravidla popisuje rozdílem mezi  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  a  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , tedy zápisem  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}} \subsetneq \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , z něhož pak již plyne i příslušný rozdíl mezi obory racionálních i reálných čísel.

Výše zmíněný rozdíl mezi světy shrneme v následující definici.

**Definice 1** (Zákony expanze). *Nechť  $\mathcal{M}, \mathcal{E}$  jsou světy obsahující přirozená čísla. Řekneme, že svět  $\mathcal{E}$  je **rozepnutím (expanzí)** světa  $\mathcal{M}$  (či že svět  $\mathcal{M}$  **rozepneme do** světa  $\mathcal{E}$ ), a tuto skutečnost píšeme  $\mathcal{M} \prec \mathcal{E}$ , jestliže jsou splněny následující podmínky.<sup>21</sup>*

1.  *$\phi$  je vlastnost objektů náležející do světa  $\mathcal{M}$  zformulovaná ve světě  $\mathcal{M}$  právě tehdy, když  $\phi$  je vlastnost objektů náležejících do světa  $\mathcal{E}$  zformulovaná ve světě  $\mathcal{E}$ .<sup>22</sup>*

2. *Nechť  $\phi$  je vlastnost zformulovaná v jednom ze světů  $\mathcal{M}$  či  $\mathcal{E}$ .*

*Ve světě  $\mathcal{M}$  existuje objekt mající vlastnost  $\phi$  právě tehdy, když objekt mající vlastnost  $\phi$  existuje i ve světě  $\mathcal{E}$ .*

*Všechny objekty světa  $\mathcal{M}$  mají vlastnost  $\phi$  právě tehdy, když všechny objekty světa  $\mathcal{E}$  mají vlastnost  $\phi$ .*

3. *Objekty náležející do světa  $\mathcal{M}$  náležejí též do světa  $\mathcal{E}$  a mají ve světě  $\mathcal{E}$  tytéž vlastnosti, které jsou formulované v jednom ze světů  $\mathcal{M}$  či  $\mathcal{E}$ , a jsou v něm zasazeny do týchž vzájemných vztahů jako ve světě  $\mathcal{M}$ .*

4. *Pro přirozená čísla těchto světů platí  $\mathcal{N}_{\mathcal{M}} \subsetneq \mathcal{N}_{\mathcal{E}}$ .*

<sup>19</sup>Jejich smysl je zaveden v kapitole III.2.1 (Vopěnka, 2011a), avšak způsobem jejich užívání staví na zákonech uvedených až v následujících kapitolách.

<sup>20</sup>Případně můžeme užívat zkráceného termínu dvojsvětí  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ . Tento termín však Petr Vopěnka nepoužívá. Pokud to není nutné, tento pohled zpravidla vůbec neoznačujeme.

<sup>21</sup>Tyto podmínky zpravidla označujeme **zákony expanze** a lze je najít podrobněji vysvětlené v kapitole III.2.2 (Vopěnka, 2011a).

<sup>22</sup>Tento bod je silnější předpoklad, než klade Petr Vopěnka ve svém prvním zákonu expanze na str. 154 (Vopěnka, 2011a). Ten totiž uvažuje i možnost, že ve světě  $\mathcal{C}$  lze formulovat vlastnosti, které nelze formulovat ve světě  $\mathcal{A}$ , nicméně ve skutečnosti tuto možnost nikdy nevyužívá bez znalosti obou světů  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ . Budeme tedy v případě vymezování seskupení objektů ze světa  $\mathcal{C}$  rozlišovat, zda vzniklo prostředky světa  $\mathcal{C}$  (a je tedy objektem světa  $\mathcal{C}$ ), anebo zda jsme použili znalost obou světů  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$  a vzniklo tedy ve dvojsvětí  $\mathcal{A}$ - $\mathcal{C}$ . V takovém případě toto seskupení nepovažujeme za objekt ani jednoho ze světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ .

Po zbytek práce uvažujme, že klasický svět  $\mathcal{C}$  je rozepnutím antického světa  $\mathcal{A}$ , neboli platí  $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ . Na tyto světy si klademe ještě další nároky, ty ovšem zavedeme až později.

Uveďme nyní nějaké příklady. Nechť vlastnost  $\phi$  popisuje vlastnost objektu „býti přirozeným číslem“. Tuto vlastnost lze obecně zapisovat například takto  $\phi(x) \equiv x \in \mathcal{N}$ . Tato vlastnost je formulovatelná v obou světech  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ . Formulace  $\phi(x)$  ve světě  $\mathcal{A}$  budeme psát jako  $\phi_{\mathcal{A}}(x) \equiv x \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  a její formulace ve světě  $\mathcal{C}$  vypadá jako  $\phi_{\mathcal{C}}(x) \equiv x \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ .

Seskupení všech objektů, které vlastnost  $\phi$  vymezuje ve světě  $\mathcal{A}$ , tedy často značíme  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ , a podobně ve světě  $\mathcal{C}$  ho značíme  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ . Ve smyslu zákonů expanze je ale toto seskupení považováno za tentýž objekt patřící do obou světů, jinými slovy pokud jsme v jednom z těchto světů, tento objekt vypadá úplně stejně jako když jsme v druhém z nich. Říkáme, že  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  a  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  jsou vnitřně nerozlišitelné.

Pokud ale uvažujeme oba světy  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$  najednou, má smysl rozlišovat tento objekt na  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  a  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , pokud chceme ukázat, že jsou to dvě *různá* seskupení objektů. Jsme například schopni najít objekt  $\gamma$ , který leží v  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , ale neleží v  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ . Objekt  $\gamma$  je přirozené číslo ležící ve světě  $\mathcal{C}$ , pozorovatel světa  $\mathcal{A}$  ho ovšem nevidí.

Ve světě  $\mathcal{C}$  umíme pracovat s objektem  $\gamma$  právě tak, jako s jakýmkoli přirozeným číslem pracujeme i ve světě  $\mathcal{A}$ . Ve světě  $\mathcal{C}$  ale tedy nesmíme využít vlastnosti, že  $\gamma$  „neleží ve světě  $\mathcal{A}$ “ — protože o tom, jaké objekty leží ve světě  $\mathcal{A}$ , pozorovatel světa  $\mathcal{C}$  nic neví. Toto je tedy příklad vlastnosti, která není zformulovaná ani v jednom ze světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$ . Je však zformulovaná ve dvojsvětí  $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{C}$ , v němž budeme spoustu takto užitečných vlastností zavádět.

★

Domluvme se nyní na následujících zkratkách. Náleží-li nějaký objekt do světa  $\mathcal{A}$ , řekneme, že je **antický**. Podobně náleží-li nějaký objekt do světa  $\mathcal{C}$ , řekneme, že je **klasický**. Ze zákonů expanze tedy víme, že všechny antické objekty jsou i klasické. Naopak to už však neplatí.

Řekneme, že  $\phi_{\mathcal{A}}$  je **antická**, jestliže  $\phi_{\mathcal{A}}$  je formulace vlastnosti  $\phi$  ve světě  $\mathcal{A}$ . Podobně řekneme, že  $\phi_{\mathcal{C}}$  je **klasická**, jestliže  $\phi_{\mathcal{C}}$  je formulace vlastnosti  $\phi$  ve světě  $\mathcal{C}$ . Ze zákonů expanze víme, že antická vlastnost  $\phi_{\mathcal{A}}$  existuje právě tehdy, když existuje klasická vlastnost  $\phi_{\mathcal{C}}$ . Jejich formulace jsou sice z hlediska světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$  vnitřně nerozlišitelné, my však ve dvojsvětí  $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{C}$  jejich formulaci rozlišovat musíme.

Nechť  $\phi$  nějaká vlastnost. Seskupení antických objektů vymezených antickou vlastností  $\phi_{\mathcal{A}}$  označujeme  $\{\phi_{\mathcal{A}}\}$ . Podobně seskupení klasických objektů vymezených klasickou vlastností  $\phi_{\mathcal{C}}$  označujeme  $\{\phi_{\mathcal{C}}\}$ . Vztah mezi těmito seskupeními potom nejčastěji označujeme jako  $\text{Ex}(\{\phi_{\mathcal{A}}\}) = \{\phi_{\mathcal{C}}\}$ .

Uveďme nějaké příklady. Přirozené číslo  $n$  takové, že  $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ , je antické i klasické. Přirozené číslo  $\gamma$  takové, že  $\gamma \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  a  $\gamma \notin \mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ , je klasické, ale není antické. Seskupení  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  je antický objekt a tentýž objekt je i klasický, v takovém případě ho však značíme  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ . Pro tento objekt viděný jako seskupení platí  $\text{Ex}(\mathcal{N}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ .

Všimněme si, že pro formální zápis toho, zda přirozené číslo  $\gamma$  je antické nebo ne, se rozlišovat v zápise objekty  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  a  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$  hodí (a také tak často pro jednoduchost činíme), nicméně není to třeba a stačí užívat právě zavedený predikát „je antický objekt“. Naopak rozlišovat zápisy  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$  a  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , ve chvíli, kdy máme na mysli jeden

a tžž objekt obsažený v obou světech  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ , je více než nešikovné. Provedeme tedy následující úmluvu.

**Úmluva.** V případě, že  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \{\phi_{\mathcal{A}}\}$  označuje nějaké seskupení antických objektů vymezených vlastností  $\phi_{\mathcal{A}}$ , píšeme místo  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$  či  $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$  pouze  $\mathcal{X}$  a toto označení užíváme i v případě, kdy mluvíme o příslušném seskupení  $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}$  ve světě  $\mathcal{C}$ .

Například můžeme ve světě  $\mathcal{A}$  definovat třídu  $H := \{n \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}} : n \geq 1\}$ , aniž bychom psali u  $H$  index světa  $\mathcal{A}$ . Třída  $H$  jako objekt je antická i klasická. Jsme-li ve světě  $\mathcal{C}$  a máme nějaké přirozené číslo  $\gamma \neq 0$ , jistě platí, že  $\gamma \in H$ . Samozřejmě, chceme-li popsat třídu  $H$  ve světě  $\mathcal{C}$ , je třeba psát  $H = \{n \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}} : n \geq 1\}$ .

Tato úmluva se v matematické analýze zejména uplatňuje u objektů definovaných ve světě  $\mathcal{A}$  jako jsou posloupnosti, reálné funkce či intervaly. Například viděním nějaké antické funkce ve světě  $\mathcal{C}$  se přirozeně bude skládat z jiných objektů (světa  $\mathcal{C}$ ), bude to však stále tžž funkce.

*Poznámka.* I když budeme později klást na expanzi světa  $\mathcal{A}$  do světa  $\mathcal{C}$  další požadavky, uvědomme si nyní, že se dá předpokládat, že jsme k příslušnému dobře známému světu  $\mathcal{A}$  takový svět  $\mathcal{C}$ , aby  $\mathcal{A} \prec \mathcal{C}$ , sestrojili.<sup>23</sup> Můžeme proto jistě podobně uvažovat, že ke světu  $\mathcal{C}$  existuje i svět  $\mathcal{D}$  takový, že  $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$ . Tímto způsobem lze pokračovat dále.<sup>24</sup>

## 1.3 Číselné struktury

Třídu všech přirozených čísel světa  $\mathcal{A}$ , tj. třídu  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ , budeme nadále označovat také jako **FN**, neboli jako třídu všech **konečných přirozených čísel**. Třída všech přirozených čísel světa  $\mathcal{C}$ , tj. třídu  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ , se bude nadále značit také jako **N**.<sup>25</sup> Navíc objekty třídy **IN** := **N** \ **FN** budeme nazývat **nekonečná přirozená čísla**. Na těchto číslech jsou definovány zřejmé operace následníka, sčítání, násobení, mocnění, k nim inverzní operace i relace uspořádání.

Všimněme si, že nyní můžeme použít termín polomnožina k označení třídy **FN**, protože je-li  $\gamma$  libovolné nekonečné přirozené číslo, pak **FN**  $\subseteq$   $[\gamma]$ , kde  $[\gamma] := \{n \in \mathbf{N} : n < \gamma\}$  je množina. Všimněme si, že v tomto zápise je  $[\gamma]$  také zřejmě kalná množina.

Stanovme si od nyní jasnou terminologii, že používáme-li pojem množina, míníme tím pouze takové seskupení, které má kardinalitu<sup>26</sup>  $n \in \mathbf{N}$ , tj. existuje ostře definované vzájemně jednoznačné<sup>27</sup> zobrazení mezi daným seskupením a  $[n]$  pro nějaké přirozené číslo  $n$ .

Zároveň je od světa  $\mathcal{A}$  vyžadováno, že je absolutně ostrý, tj. neuvažujeme, že by byl expanzí jiného světa. V naší terminologii dvou světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$  můžeme tento požadavek formulovat tak, že *neexistuje konečná kalná množina*.

<sup>23</sup>Takovouto konstrukcí v klasické teorii množin se totiž původně vůbec ukázalo, že uvažovat takovouto expanzi má smysl — je relativně bezesporná s původní teorií.

<sup>24</sup>Místo tohoto způsobu lze ovšem uvažovat také cestu, kdy platí tzv. *generální kolaps*, viz str. 194-195 (Vopěnka, 2008). Přestože jsme tímto směrem sice v této práci nevykročili, nic nám v přijetí axiomu generálního kolapsu nebrání.

<sup>25</sup>Toto je značení používané v sekci III (Vopěnka, 2011a) a v obou knihách věnovaných matematické analýze (Vopěnka, 2010) a (Vopěnka, 2011b).

<sup>26</sup>Viz kapitola II.4.1 (Vopěnka, 2011a).

<sup>27</sup>Všechny základní definice o třídách (obecněji oborech) najdeme v kapitole II.2.1 (Vopěnka, 2011a).

Dále předpokládáme platnost tiché verze axiomu výběru, axiom dosažitelnosti obzoru i axiom prodloužení.<sup>28</sup> Protože však s těmito axiomy nebudeme přímo pracovat, jejich znění zde ani uvádět nebudeme.

Dále **Rac** (nebo také  $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ ) označuje třídu všech racionálních čísel<sup>29</sup> a **Real** (nebo také  $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ ) třídu všech reálných čísel<sup>30</sup> světa  $\mathcal{A}$ . Na reálných číslech jsou definovány zřejmé operace sčítání, násobení, mocnění<sup>31</sup>, k nim inverzní operace, absolutní hodnoty i relace uspořádání. Racionální čísla světa  $\mathcal{C}$  budeme označovat  $\mathcal{Q}_{\mathcal{C}}$  a reálná čísla světa  $\mathcal{C}$  budeme označovat  $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ .

Řekneme, že reálné číslo  $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$  je **nekonečně velké**, jestliže pro každé  $n \in \mathbf{FN}$  je  $n < |r|$ . Řekneme, že  $r$  je **konečně velké**, jestliže není nekonečně velké. Řekneme, že  $r$  je **nekonečně malé**, jestliže pro každé  $n \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$  je  $|r| < 1/n$ .

Řekneme, že reálná čísla  $x, y \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$  jsou **nekonečně blízká**, jestliže  $x - y$  je nekonečně malé. Tuto skutečnost budeme značit  $x \doteq y$ .<sup>32</sup>

UVědomme si, že ze způsobu zavedení reálných čísel plyne jejich *úplnost*, kterou formulujeme jako následující zákon.<sup>33</sup>

**Princip 1 (Zákon zpětné projekce).** *Ke každému konečně velkému reálnému číslu  $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$  ve světě  $\mathcal{C}$  existuje reálné číslo  $s \in \mathbf{Real}$  ve světě  $\mathcal{A}$  takové, že  $r \doteq s$ .*

Z definice ihned víme, že pro dvě antická reálná čísla  $r, s \in \mathbf{Real}$  platí, že pokud  $r \doteq s$ , tak již nutně  $r = s$ . Proto máme pro hledané číslo ze zákona zpětné projekce jednoznačnost a můžeme definovat funkci Proj.

**Definice 2.** *Nechť  $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ . Je-li konečně velké, definujeme  $\text{Proj}(r) := s \in \mathbf{Real}$  takové reálné číslo, že  $r \doteq s$ . Je-li  $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$  nekonečně velké kladné (resp. záporné), pak definujeme  $\text{Proj}(r) := +\infty$  (resp.  $-\infty$ ).*

*Poznámka.* Objekty  $+\infty, -\infty$  považujeme za **nevlastní reálná čísla**, tj. objekty, světa  $\mathcal{A}$ , o které byl tento svět rozšířen. Zároveň, pokud to má dobrý smysl, byla o ně rozšířena i aritmetika reálných čísel **Real**.<sup>34</sup>

**Definice 3.** *Nechť  $s \in \mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\}$ . Pak definujeme třídu  $\text{Mon}(s) := \{r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}} : \text{Proj}(r) = s\}$ , kterou nazýváme **monáda**<sup>35</sup>  $s$ . Definujme také třídu  $\text{Mon}_o(s) := \{r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}} : \text{Proj}(r) = s\} \setminus \{s\}$ , kterou nazýváme **redukováná monáda**  $s$ .*

Všimněme si, že pro každé  $r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$  platí, že  $r \in \text{Mon}(\text{Proj}(r))$ . Také pro každé  $s \in \mathbf{Real}$  platí, že  $s = \text{Proj}(\text{Mon}(s))$ , v případě, kdy výraz napravo chápeme jako obraz třídy  $\text{Mon}(s)$  při zobrazení Proj.

<sup>28</sup>Po řadě viz str. 108, 116 a 75 (Vopěnka, 2011a).

<sup>29</sup>Odpovídá tradičním definicím, viz str. 127 (Vopěnka, 2011a).

<sup>30</sup>Sestrojení reálných čísel je nestandardní, viz str. 131 (Vopěnka, 2011a).

<sup>31</sup>Viz kapitola 25 (Vopěnka, 2010).

<sup>32</sup>Více o základních zákonech počítání s nekonečnou blízkostí najdeme na str. 157-161 (Vopěnka, 2011a).

<sup>33</sup>Viz kapitola III.2.5 (Vopěnka, 2011a).

<sup>34</sup>Více v kapitole III.2.5 (Vopěnka, 2011a).

<sup>35</sup>Tato definice pojmu je monády je mírně odlišná od definice Petra Vopěnky, jak ji uvádí v kapitole II.6.2 (Vopěnka, 2011a). V jeho definici by monáda musela být navíc  $\pi$ -třída, což naše monáda není. Restringuje-li ovšem naši monádu na libovolnou mříž, již to  $\pi$ -třída bude a my můžeme všechna tvrzení mluvící o monádách ve (Vopěnka, 2011a) užívat. Pro všechny naše účely to bude stačit.

Na expanzi světa  $\mathcal{A}$  do světa  $\mathcal{C}$  si budeme klást ještě jeden nárok, který bude pro nás v mnoha tvrzeních klíčovým. Lze ho formulovat jako následující princip.

**Princip 2 (Existence plné mříže).** *Existuje množina  $\hat{\mathbb{R}}$  reálných čísel světa  $\mathcal{C}$  taková, že platí  $\mathbf{Real} \subseteq \hat{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ .<sup>36</sup> Takovou množinu  $\hat{\mathbb{R}}$  nazýváme **plná mříž**.*

Všimněme si, že z našeho nároku na kardinalitu množin existuje přirozené číslo  $\gamma$  takové, že  $\text{Card}(\hat{\mathbb{R}}) = \gamma$ . Zřejmě  $\gamma \in \mathbf{IN}$ .

---

<sup>36</sup>Ve (Vopěnka, 2011a) je tento princip znám jako *čtvrtý zákon expanze* a je popsán v kapitole III.2.7.

## 2. Reálný prostor $\mathbf{Real}^n$

### 2.1 Základní vlastnosti reálného prostoru

V této kapitole rozšíříme dosud uvedené pojmy zavedené na reálných číslech na více rozměrů. Necht' v celé této části, pokud  $n$  používáme jako index ve značce  $\mathbf{Real}^n$  či  $\mathcal{R}_C^n$ , předpokládáme vždy, že  $n \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$ .

Třidu  $\mathbf{Real}^n$  chápeme jako  $n$ -násobný kartézský součin<sup>1</sup> třídy  $\mathbf{Real}$  ve světě  $\mathcal{A}$  a nazýváme ji  **$n$ -rozměrný reálný prostor**. Tato třída se ve světě  $\mathcal{C}$  rozepne na  $\mathcal{R}_C^n$ , která je  $n$ -násobným kartézským součinem třídy  $\mathcal{R}_C$  ve světě  $\mathcal{C}$ .

Píšeme-li  $x \in \mathbf{Real}^n$ , chápeme  $x$  jako bod prostoru  $\mathbf{Real}^n$ . Chceme-li tento bod popsat po složkách, užíváme zápisu  $x = (x^1, \dots, x^n)$ , kde  $x^1, \dots, x^n \in \mathbf{Real}$  jsou jeho složky. Bod  $x$  ale také můžeme chápat jako *vektor* a složky  $x^1, \dots, x^n$  pak označují jeho souřadnice. Nakonec pro účely maticového násobení užíváme konvenci, že vektor  $x$  je matice typu  $n \times 1$ , tedy vektor bychom psali sloupcově. Protože nebudeme užívat jiné než kanonické báze  $\mathbf{Real}^n$  jako vektorového prostoru, můžeme si dovolit všechny tyto způsoby chápání  $x$  dle potřeby volně zaměňovat, aniž by došlo k nedorozumění.

Píšeme-li  $x \in \mathbf{Real}^{n \times k}$ , chápeme  $x$  jako matici typu  $n \times k$  a její složky budeme označovat jako  $x_{(i,j)}$ , kde  $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, k\}$ . Objekt  $x$  ale můžeme chápat také jako bod prostoru  $\mathbf{Real}^{n \cdot k}$ .

**Definice 4.** Necht'  $x, y \in \mathcal{R}_C^n$ ,  $s \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^n$

Řekneme, že  $x \in \mathbf{Real}^n$  je **nekonečně blízko** 0, jestliže pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$  je  $x^i$  nekonečně malé reálné číslo.

Řekneme, že  $x, y$  jsou **nekonečně blízka**, jestliže  $x - y$  je nekonečně blízko 0. Tuto skutečnost značíme  $x \doteq y$ .

Definujme  $\text{Proj}(x) := s$  jako takové číslo  $s$ , že pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$  platí  $s^i = \text{Proj}(x^i)$ .

Pak definujme třidu  $\text{Mon}(s) := \{x \in \mathcal{R}_C^n : \text{Proj}(x) = s\}$ , kterou nazýváme **monáda**  $s$ . Definujme také třidu  $\text{Mon}_o(s) := \{x \in \mathcal{R}_C^n : \text{Proj}(x) = s\} \setminus \{s\}$ , kterou nazýváme **redukováná monáda**  $s$ .

**Úmluva.** Chceme-li zdůraznit, že se jedná o projekci (resp. monádu) v  $n$ -rozměrném reálném prostoru, označujeme ji jako  $\text{Proj}^n$  (resp.  $\text{Mon}^n$ ).

Všimněme si, že  $\text{Proj}$  je zřejmě definovaná pro všechna  $\mathcal{R}_C^n$ .

Dále nahlédneme, že pokud  $\hat{R}$  je plná mříž, pak pro  $\hat{R}^n$  platí, že je to množina ve světě  $\mathcal{C}$ , pro kterou platí  $\mathbf{Real}^n \subseteq \hat{R}^n \subseteq \mathcal{R}_C^n$ . Množinu  $\hat{R}^n$  s touto vlastností budeme tedy nazývat  **$n$ -rozměrnou plnou mříží**.

Z definice také ihned plyne následující užitečné tvrzení.

**Tvrzení 1.** Necht'  $x \in \mathbf{Real}^n, y \in \mathbf{Real}^k$ . Pak platí, že

$$\text{Mon}^n(x) \times \text{Mon}^k(y) = \text{Mon}^{n+k}(x, y).$$

---

<sup>1</sup>Viz str. 40 (Vopěnka, 2011a).

**Definice 5.** Necht  $x \in \mathbf{Real}^n$ . Definujeme *euklidovskou normu*  $\|\cdot\|_e$ , *součtovou normu*  $\|\cdot\|_s$  a *maximovou normu*  $\|\cdot\|_m$  na  $\mathbf{Real}^n$  jako

$$\begin{aligned}\|x\|_e &:= \left( \sum_{i=1}^n x^i \cdot x^i \right)^{1/2}, \\ \|x\|_s &:= \sum_{i=1}^n |x^i|, \\ \|x\|_m &:= \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \{|x^i|\}.\end{aligned}$$

Ze základních aritmetických vlastností nekonečně malých čísel a z faktu, že  $n \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$  ihned plyne následující tvrzení.

**Tvrzení 2.** Necht  $\|\cdot\|$  je euklidovská, součtová či maximová norma na  $\mathcal{R}_C^n$ . Pro libovolné  $x \in \mathcal{R}_C^n$  platí

$$\|x\| \doteq 0 \Leftrightarrow x \doteq 0.$$

*Poznámka.* Tuto vlastnost budeme později nazývat spojitost normy v 0.

**Definice 6.** Necht  $\|\cdot\|$  je euklidovská, součtová či maximová norma na  $\mathbf{Real}^n$  a necht  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $\delta \in \mathbf{Real}, \delta > 0$ . Pak definujeme *otevřenou* (resp. *redukovanou otevřenou*) *kouli bodu*  $x$  *o poloměru*  $\delta$  jako

$$\begin{aligned}B_\delta(x) &:= \{y \in \mathbf{Real}^n : \|x - y\| < \delta\}, \\ \text{resp. } B_\delta^\circ(x) &:= B_\delta(x) \setminus \{x\}.\end{aligned}$$

**Věta 3** (O ekvivalenci norem<sup>2</sup>). Necht  $\|\cdot\|$  je euklidovská, součtová či maximová norma na  $\mathbf{Real}^n$  a necht  $x \in \mathbf{Real}^n$ . Pak platí následující

$$\bigcap_{i \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}} B_{1/i}(x) = \text{Mon}(x) = \bigcup_{\gamma \in \mathbf{IN}} B_{1/\gamma}(x).$$

*Důkaz.* Plyne ihned z předchozích definic a základních pravidel pro počítání s nekonečně malými reálnými čísly. □

Všimněme si, že z věty 3 speciálně plyne, že je-li  $\alpha \in \text{Mon}^1(0), \alpha > 0, \varepsilon \in \mathbf{Real}, \varepsilon > 0$ , pak pro libovolný bod  $x \in \mathbf{Real}^n$  platí, že

$$B_\alpha(x) \subseteq \text{Mon}(x) \subseteq B_\varepsilon(x)$$

nezávisle na zvolené normě. Této vlastnosti užíváme například při důkazu překladových pravidel níže, proto při formulaci tvrzení, ve kterých se nachází  $B_\varepsilon(x)$  nespecifikujeme, jakou normu při definici otevřené koule používáme — takové tvrzení bude platit pro libovolnou z nich.

<sup>2</sup> Důvodem, proč tuto větu nazýváme „o ekvivalenci norem“, je, že si můžeme všimnout, že zatímco pojem monády nezávisí na normě a pojem otevřené koule ano, lze monádu nezávisle na druhu normy definovat i pomocí spočetného (viz pojem spočetnosti v kapitole II.7.2 (Vopěnka, 2011a)) průniku příslušných koulí. Protože tradičně nazýváme dvě normy ekvivalentní, pokud indukují stejnou topologii, a monáda (definovaná tímto způsobem) jednoznačně určuje topologii (viz kapitola II.6 (Vopěnka, 2011a)), jsou všechny tři výše definované normy na  $\mathbf{Real}^n$  ekvivalentní.

## 2.2 Reálné funkce

**Definice 7.** *Nechť  $n, k \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$ . Řekneme, že třída  $f$  je **reálná funkce**, jestliže  $f$  je funkce taková, že platí  $\text{dom}(f) \subseteq \mathbf{Real}^n$ ,  $\text{rng}(f) \subseteq \mathbf{Real}^k$ . V takovém případě říkáme, že  $f$  je **z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$** .*

Všimněme si, že díky naší úmluvě 1.2 je takto definovaná funkce  $f$  antický objekt. Zároveň díky zákonům expanze je to i klasický objekt. Ve světě  $\mathcal{C}$  o funkci  $f$  platí, že  $\text{dom}(f) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^n$ ,  $\text{rng}(f) \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^k$ . Speciálně však  $n$  i  $k$  zůstávají konečná přirozená čísla, neboť při expanzi zůstanou tyto objekty zachovány, zatímco třída  $\text{dom}(f)$  se expanduje (dle své definice) do  $\mathcal{R}_{\mathcal{C}}^n$ . Pokud například  $\text{dom}(f) = [0, 1)$ , kde  $[0, 1) := \{r \in \mathbf{Real} : 0 \leq r < 1\}$  ve světě  $\mathcal{A}$ , pak  $\text{dom}(f) = [0, 1) = \{r \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}} : 0 \leq r < 1\}$  ve světě  $\mathcal{C}$ .

*Poznámka.* Zformulujeme-li definici „býti reálnou funkcí“ ve světě  $\mathcal{C}$ , všimněme si, že tuto definici splňuje např. funkce  $g$ , kterou definujeme jako  $g(x) := \alpha$ , pro nějaké  $\alpha \in \text{Mon}^1(0)$ ,  $\alpha > 0$  pevné, kde  $x \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^n$ .<sup>3</sup> Předpokládáme-li nyní  $n \in \mathbf{FN}$  a definujeme-li antickou funkci  $h(y) := \text{Proj}(g(y))$ , kde  $y \in \mathbf{Real}^n$ , vidíme, že  $h = 0$  na celém  $\mathbf{Real}^n$ , přesto vznikla projekcí funkce, která byla všude kladná. I když tedy v antickém světě funkcí  $h$  nemůžeme dělit, ve světě  $\mathcal{C}$  můžeme dělit funkcí  $g$  a v některých případech se nám tato znalost může hodit (například při vyšetřování bodové konvergence funkcí).<sup>4</sup>

Nechť  $f$  je nějaká klasická reálná funkce s  $\text{dom}(f) = \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ . Potom ale restrikce  $f|_{\text{Mon}(0)}$  formálně není klasická reálná funkce, protože není objektem světa  $\mathcal{C}$ , neboť ani  $\text{dom}(f|_{\text{Mon}(0)}) = \text{Mon}(0)$  není objekt světa  $\mathcal{C}$ . Funkci  $f|_{\text{Mon}(0)}$  chápeme tedy striktně jako třídu, kterou definujeme až při znalosti obou světů  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ , podobně jako tak chápeme třídu  $\text{Mon}(0)$  či  $\mathbf{IN}$ . Nicméně to nám nebrání nahlížet  $f|_{\text{Mon}(0)}$  stále jako reálnou funkci.

**Definice 8.** *Řekneme, že reálná funkce  $f$  je **definovaná v bodě**  $x$ , jestliže  $x \in \text{dom}(f)$ . Řekneme, že reálná funkce  $f$  je **definovaná na třídě**  $X$ , jestliže pro každé  $x \in X$  je  $f$  definovaná v bodě  $x$ , tj. platí  $X \subseteq \text{dom}(f)$ .*

Speciálně řekneme-li, že reálná funkce  $f$  je definovaná  $\text{Mon}(x)$  myslíme tím, že pro všechny  $y \in \text{Mon}(x)$  platí, že  $f$  je definovaná v bodě  $y$ . Není těžké ukázat, že pokud  $f$  je antická (či klasická) reálná funkce, pak nutně  $\text{Mon}(x) \subsetneq \text{dom}(f)$ , tedy dokonce existuje  $\delta > 0$  takové, že  $\text{Mon}(x) \subsetneq B_{\delta}(x) \subseteq \text{dom}(f)$ . Zdůvodnění tohoto bude zřejmé ihned z kapitoly 2.3 o překladových pravidlech.<sup>5</sup>

## 2.3 Překladová pravidla

Ve chvíli, kdy v nějaké formulaci vlastnosti užíváme třídu  $\text{Mon}(x)$  a říkáme že  $y \in \text{Mon}(x)$  (tj. bod  $y$  je nekonečně blízko bodu  $x$ ), je to podmínka, kterou

<sup>3</sup> Tato funkce může být definovaná i na *nekonečně rozměrném prostoru*, tj. když  $n \in \mathbf{IN}$ .

<sup>4</sup> Ve světě  $\mathcal{C}$  existuje spousta podobně užitečných funkcí, jejichž takto *po bodech* definovaná projekce nemá ve světě  $\mathcal{A}$  dobrý smysl. Nechť např. pro  $\alpha \in \text{Mon}^1(0)$ ,  $\alpha > 0$  pevné definujeme funkci  $\delta$  v  $\mathcal{C}$  následovně  $\delta(x) := \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\alpha^2}$ . Její bodová projekce do světa  $\mathcal{A}$  bude funkce, která je všude 0, jen v 0 je  $+\infty$  (pokud vůbec takovou funkci připustíme). A zároveň platí  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta = 1$  a  $\delta$  je nekonečně hladká. Splňuje tedy základní požadavky na tzv. Diracovu delta funkci.

<sup>5</sup> Viz např. důsledek 7.

nedokážeme ověřit ani v jednom ze světů  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{C}$  zvlášť, ale potřebujeme znalost obou světů  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$ . V případě třídy  $\text{Mon}(x)$  se vlastně odkazujeme na objekt, který neleží ani ve světě  $\mathcal{A}$  ani ve světě  $\mathcal{C}$ .

Existuje nicméně věta, která tvrdí, že se každá takováto formulace využívající jinak jen antické objekty se dá ekvivalentně zformulovat i pouze ve světě  $\mathcal{A}$ . Následující tvrzení<sup>6</sup> jsou tou nejjednodušší ukázkou takovýchto překladů a umožňují člověku znalému tradičního  $\varepsilon, \delta$  přístupu jednoduché ověření ekvivalentnosti našich později zaváděných definic z analýzy nekonečně malých veličin s tradičními definicemi.

**Věta 4** (O zobecněných překladových pravidlech). *Nechť  $n, k \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbf{Real}^n$ ,  $b \in \mathbf{Real}^k$ ,  $K$  představuje antický konečný soubor konstant označujících antické objekty a  $\phi$  je nějaká antická vlastnost. Pak platí*

$$\exists \alpha \in \text{Mon}(a) : \phi(\alpha, K) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists x \in B_\varepsilon(a) : \phi(x, K), \quad (\text{i})$$

$$\forall \alpha \in \text{Mon}(a) : \phi(\alpha, K) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall x \in B_\varepsilon(a) : \phi(x, K), \quad (\text{ii})$$

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in \text{Mon}(a) \forall \beta \in \text{Mon}(b) : \phi(\alpha, \beta, K) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in B_\delta(a) \forall y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K), \quad (\text{iii}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \text{Mon}(a) \exists \beta \in \text{Mon}(b) : \phi(\alpha, \beta, K) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \exists y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K), \quad (\text{iv}) \end{aligned}$$

kde formule vlevo je zformulovaná ve dvousvětí  $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{C}$  a formule vpravo je zformulovaná ve světě  $\mathcal{A}$ , tj. je antická.

*Důkaz.* Protože (i) a (ii) jsou ekvivalentní a implikace v (ii) jsou jen obměnou implikací v (i), podobně pro body (iii) a (iv), stačí ve všech případech dokázat implikaci zprava doleva. Předpokládejme tedy pro každý případ, že platí pravá strana ekvivalence.

(i) Tato formule je antická, z prvního zákona expanze tedy platí i ve světě  $\mathcal{C}$ , tedy i pro  $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \text{Mon}(0)$ . V takovém případě je  $B_\varepsilon(a) \subseteq \text{Mon}(a)$ , tedy příslušné  $x \in B_\varepsilon(a)$  je hledané  $\alpha$ .

(ii) Nechť  $\varepsilon$  je pevné antické takové, že platí antická formule  $\psi(a, \varepsilon, K) := \forall x \in B_\varepsilon(a) : \phi(x, K)$ . Tato formule z prvního zákona expanze platí i ve světě  $\mathcal{C}$ . Protože v tomto případě  $\text{Mon}(a) \subseteq B_\varepsilon(a)$ , platí tedy levá strana ekvivalence.

(iii) Nechť  $\varepsilon$  je pevné antické takové, že ve světě  $\mathcal{A}$  platí

$$\psi(a, b, \varepsilon, K) := \forall \delta > 0 \exists x \in B_\delta(a) \forall y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K),$$

kde  $\forall y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K)$  je antická formule s antickými konstantami  $b, \varepsilon$  a souborem  $K$ . Použijeme-li na formuli  $\psi(a, b, \varepsilon, K)$  překladové pravidlo (i), dostaneme platnost

$$\exists \alpha \in \text{Mon}(a) \forall y \in B_\varepsilon(b) : \phi(\alpha, y, K),$$

kde formule  $\forall y \in B_\varepsilon(b) : \phi(\alpha, y, K)$  nyní pro příslušné  $\alpha$  platí ve světě  $\mathcal{C}$  s tím, že konstanta  $\varepsilon$  je antická. Proto platí  $\text{Mon}(b) \subseteq B_\varepsilon(b)$ , tedy platí i levá strana ekvivalence.

<sup>6</sup>Přímo zobecňují překladová pravidla i jejich důkazy uvedené na stranách 193-197 (Vopěnka, 2011a).

(iv) Z platnosti pravé strany můžeme definovat posloupnost  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbf{FN}}$  takovou, aby

$$\forall n \in \mathbf{FN} \exists \delta_n > 0 \forall x \in B_{\delta_n}(a) \exists y \in B_{1/n}(b) : \phi(x, y, K).$$

Z prvního zákona expanze je tato posloupnost definovaná i ve světě  $\mathcal{C}$ . Zvolme nyní  $\alpha \in \text{Mon}(a)$  libovolné. Protože  $(\alpha \in B_{\delta_n}(a))$  je formulovaná pouze prostředky světa  $\mathcal{C}$  a navíc každé  $n \in \mathbf{FN}$  tuto formuli splňuje, ukážeme, že existuje nějaké  $\gamma \in \mathbf{IN}$  takové, že platí  $\alpha \in B_{\delta_\gamma}(a)$ . To dokážeme sporem: protože  $(\alpha \in B_{\delta_n}(a))$  je formulovaná pouze prostředky světa  $\mathcal{C}$ , můžeme definovat pro libolné  $k \in \mathbf{N}$  množinu  $M_k := \{m \in [k] : \alpha \in B_{\delta_m}(a)\}$ . Kdyby takové  $\gamma \in \mathbf{IN}$  neexistovalo, znamenalo by to, že  $M_k = \mathbf{FN}$ , to je ale spor, neboť  $\mathbf{FN}$  není množina.

Pro  $n = \gamma$  tedy ve světě  $\mathcal{C}$  platí

$$\forall x \in B_{\delta_\gamma}(a) \exists y \in B_{1/\gamma}(b) : \phi(x, y, K).$$

Protože  $\alpha \in B_{\delta_\gamma}(a)$  a  $B_{1/\gamma}(b) \subseteq \text{Mon}(b)$ , volbou  $x := \alpha$  a  $\beta := y$  dostáváme platnost levé strany ekvivalence. □

*Poznámka.* Připomeňme, že výše uvedená věta platí díky větě 3 pro definici otevřené koule při libovolné ze zmíněných norem.

Ukážeme několik přímých důsledků věty 4, které budeme často používat. Následující se hodí např. k překladu definice *limity* či *malého o*.

**Důsledek 5.** *Nechť  $n, k \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbf{Real}^n$ ,  $b \in \mathbf{Real}^k$ ,  $K$  představuje antický konečný soubor konstant označujících antické objekty a  $\phi$  je nějaká antická vlastnost. Pak platí*

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \text{Mon}_o(a) \exists \beta \in \text{Mon}(b) : \phi(\alpha, \beta, K) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta^\circ(a) \exists y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K), \end{aligned}$$

kde formule vlevo se týká obou světů  $\mathcal{A}$  i  $\mathcal{C}$  a formule vpravo se týká pouze světa  $\mathcal{A}$ , tj. je antická.

*Důkaz.* Stačí si uvědomit zřejmou souvislost mezi  $B_\delta^\circ(a)$  a  $\text{Mon}_o(a)$  a že  $x \in B_\delta^\circ(a)$  je antická vlastnost. Důkaz probíhá stejně jako ve větě 4, budeme-li všude místo  $x \in B_\delta(a)$  psát  $x \in B_\delta^\circ(a)$  a místo  $\text{Mon}(a)$  psát  $\text{Mon}_o(a)$ . □

★

Následující důsledek se hodí například k překladu formulace věty o implicitní funkci, viz věta 30.

**Věta 6** (O definici antické reálné funkce na monádě). *Nechť  $n, k \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$ ,  $a \in \mathbf{Real}^n$ ,  $b \in \mathbf{Real}^k$ ,  $K$  představuje antický konečný soubor konstant označujících antické objekty a  $\phi$  je nějaká antická vlastnost. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(i) Ve dvojsvětí  $\mathcal{A}\text{-}\mathcal{C}$  platí<sup>7</sup>

$$\forall \alpha \in \text{Mon}(a) \exists! \beta \in \text{Mon}(b) : \phi(\alpha, \beta, K).$$

(ii) Existuje antická reálná funkce  $f$  definovaná na  $\text{Mon}(a)$  taková, že

$$\forall \alpha \in \text{Mon}(a) \forall \beta \in \text{Mon}(b) : (\phi(\alpha, \beta, K) \Leftrightarrow f(\alpha) = \beta).$$

(iii) Ve světě  $\mathcal{A}$  platí

$$\exists \Delta > 0 \forall \varepsilon, \Delta \geq \varepsilon > 0 \exists \delta, \Delta \geq \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \exists! y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K).$$

(iv) Ve světě  $\mathcal{A}$  platí, že existují  $\Delta > 0$  a  $\delta > 0$  a existuje reálná funkce  $f : B_\delta(a) \rightarrow B_\Delta(b)$  taková, že

$$\forall x \in B_\delta(a) \forall y \in B_\Delta(b) : (\phi(x, y, K) \Leftrightarrow f(x) = y).$$

*Důkaz.* (i)  $\Leftrightarrow$  (iii): Rozepíšeme-li tvrzení (i) dle definice  $\exists!$ , dostaneme

$$\begin{aligned} & \forall \alpha \in \text{Mon}(a) \exists \beta \in \text{Mon}(b) : \phi(\alpha, \beta, K) \wedge \\ & \wedge \forall \alpha \in \text{Mon}(a) \forall \beta^1, \beta^2 \in \text{Mon}(b) : (\phi(\alpha, \beta^1, K) \wedge \phi(\alpha, \beta^2, K)) \Rightarrow \beta^1 = \beta^2, \end{aligned}$$

Protože mohu ale místo „ $\forall \alpha \in \text{Mon}(a) \forall \beta^1, \beta^2 \in \text{Mon}(b)$ “ psát „ $\forall (\alpha, \beta^1, \beta^2) \in \text{Mon}(a, b, b)$ “, kde  $(a, b, b) \in \mathbf{Real}^n \times \mathbf{Real}^k \times \mathbf{Real}^k$ , můžeme pro obě části konjunkce použít dle věty 4 překladové pravidlo a dostaneme

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B_\delta(a) \exists y \in B_\varepsilon(b) : \phi(x, y, K) \wedge \\ & \wedge \exists \Delta > 0 \forall (x, y^1, y^2) \in B_\Delta(a, b, b) : (\phi(x, y^1, K) \wedge \phi(x, y^2, K)) \Rightarrow y^1 = y^2, \end{aligned}$$

což je již snadno ekvivalentní tvrzení (iii).

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Existuje  $\Delta > 0$  takové, že dosazením  $\varepsilon := \Delta$  existuje  $\delta > 0$  takové, že platí

$$\forall x \in B_\delta(a) \exists! y \in B_\Delta(b) : \phi(x, y, K).$$

Můžeme tedy definovat antickou funkci  $f$  v každém bodě  $x \in B_\delta(a)$ , která splňuje požadovanou vlastnost  $\forall x \in B_\delta(a) \forall y \in B_\Delta(b) : (\phi(x, y, K) \Leftrightarrow f(x) = y)$ . Zřejmě platí, že  $\text{rng}(f) \subseteq B_\Delta(b)$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (ii): Plyne okamžitě z bodu (ii) věty 4.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Plyne okamžitě, neboť  $f$  je funkce definovaná na  $\text{Mon}(a)$ . □

## 2.4 Lokální vlastnosti reálných funkcí

**Důsledek 7** (Překladové pravidlo pro vlastnost funkce v bodě). *Nechť  $\phi$  je nějaká antická vlastnost funkce v bodě a  $x \in \mathbf{Real}^n$  antický bod. Antická reálná funkce  $f$  má vlastnost  $\phi$  v každém bodě  $\text{Mon}(x)$ , právě když existuje antické  $\delta > 0$  takové, že  $f$  má vlastnost  $\phi$  v každém bodě  $B_\delta(x)$ .*

<sup>7</sup>Značkou  $\exists!$  myslíme existenci právě jednoho.

*Důkaz.* Je pouhou aplikací bodu (ii) věty 4, kde do souboru  $K$  patří funkce  $f$  jako antický objekt. □

**Definice 9.** *Nechť  $\phi$  je nějaká antická vlastnost funkce v bodě a  $x \in \mathbf{Real}^n$  antický bod. Řekneme, že  $\phi$  je **lokální vlastnost**, jestliže pro libovolnou antickou reálnou funkci  $f$  lze učinit rozhodnutí, zda má  $f$  vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$ , z pouhé znalosti  $f|_{\text{Mon}(x)}$ .*

Příkladem antické vlastnosti funkce v bodě může být „funkce je definovaná v bodě“ či „funkční hodnota leží v množině  $M$ “. Antické vlastnosti funkce v bodě jsou ale díky důsledku 5 i všechny níže definované vlastnosti jako spojitost funkce v bodě, existence derivace funkce v bodě apod., i když je definujeme pomocí světa  $\mathcal{C}$ . Všechny tyto vlastnosti jsou lokální.

**Definice 10.** *Nechť  $\phi$  je nějaká antická vlastnost funkce v bodě. Řekneme-li, že funkce  $f$  **má vlastnost  $\phi$  na třídě  $X$** , znamená to, že pro každé  $x \in X$  má funkce  $f$  vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$ .*

Ve spojení s úmluvou o oboru ve světě to znamená, že tvrzení „antická funkce  $f$  je definovaná na  $\text{Mon}(x)$ “ chápeme přesněji jako tvrzení „ $f$  je antická funkce taková, že  $\text{Ex}(f)$  je definovaná na  $\text{Mon}(x)$ “ a toto je ekvivalentní tvrzení „existuje antické  $\delta > 0$  takové, že antická funkce  $f$  je definovaná na  $B_\delta(x)$ “.

**Tvrzení 8.** *Nechť  $\phi$  je nějaká antická vlastnost funkce v bodě,  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce. Jestliže  $f$  má vlastnost  $\phi$  na  $\text{Mon}(x)$ , má  $f$  vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$  ve světě  $\mathcal{A}$ .*

*Důkaz.* Vzhledem k definici vlastnosti funkce na třídě, chápeme předpoklad tvrzení tak, že pro každý bod  $y \in \text{Mon}(x)$  platí ve světě  $\mathcal{C}$ , že  $f$  má vlastnost  $\phi$  v bodě  $y$ . Speciálně tedy ve světě  $\mathcal{C}$  platí, že  $f$  má vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$ . Protože  $f$ ,  $\phi$  i  $x$  jsou antické, musí nutně ze zákonů expanze platit i ve světě  $\mathcal{A}$ , že  $f$  má vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$ . □

**Definice 11.** *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$  a nechť  $f$  a  $g$  jsou antické reálné funkce definované v bodě  $x$ . Řekneme, že  $f$  a  $g$  **jsou totožné v bodě  $x$** , jestliže  $f(x) = g(x)$ .*

*Jsou-li  $f$  a  $g$  navíc definované na  $\text{Mon}(x)$ , řekneme, že  $f$  a  $g$  **jsou totožné na  $\text{Mon}(x)$** , jestliže platí  $f|_{\text{Mon}(x)} = g|_{\text{Mon}(x)}$  jako rovnost funkcí.*

Důkaz následujícího tvrzení plyne ihned z definic.

**Tvrzení 9** (O lokální vlastnosti). *Nechť  $\phi$  je nějaká antická vlastnost funkce v bodě, která je lokální. Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$  a nechť  $f$  a  $g$  jsou antické reálné funkce totožné na  $\text{Mon}(x)$ . Pak  $f$  má vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$ , právě když  $g$  má vlastnost  $\phi$  v bodě  $x$ .*

# 3. Diferenciální počet funkcí více proměnných

V této kapitole vycházíme z poznatků zavedených v části III: Základy infinitezimálního kalkulu (Vopěnka, 2011a). Zachováváme také terminologii, avšak mírně rozšířenou (viz předchozí kapitoly) pro větší jasnost. U mnoha zaváděných pojmů je možné se odkazovat na příslušné pojmy pro reálné funkce jedné proměnné. Pokusíme se ale pro názornost takto nečinit.

## 3.1 Spojitost funkce v bodě

**Definice 12** (Spojitost funkce v bodě ve světě  $\mathcal{A}$ ). *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(x)$ .<sup>1</sup> Řekneme, že funkce  $f$  je **spojitá v bodě**  $x$ , jestliže pro každé  $y \in \text{Mon}(x)$  platí, že*

$$f(x) \doteq f(y).$$

Jak již bylo řečeno, spojitost funkce v bodě lze díky překladovým pravidlům považovat za antickou vlastnost funkce v bodě, neboť je anticky zformulovatelná. Zároveň však z naší formulace jasně vidíme, že je to vlastnost lokální.

Ukažme si nyní, co to přesně znamená, řekneme-li pro nějaké  $a \in \mathbf{Real}^n$ , že nějaká antická reálná funkce  $f$  je spojitá na  $\text{Mon}(a)$ . Máme několik možných přístupů.

V prvním z nich si přeložíme naši definici spojitosti funkce v bodě do formulace pouze ve světě  $\mathcal{A}$ . Protože je tato vlastnost antická, je zároveň i klasická. Spojitost  $f$  na  $\text{Mon}(a)$  znamená spojitost v každém bodě  $x \in \text{Mon}(a)$  ve světě  $\mathcal{C}$ . Můžeme tedy psát, že ve světě  $\mathcal{C}$  platí

$$(\forall x \in \text{Mon}(a))(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y \in B_\delta(x)) : f(y) \in B_\varepsilon(f(x)).$$

V druhém přístupu si uvědomíme, že z překladových pravidel (díky antičnosti spojitosti) je spojitost  $f$  na  $\text{Mon}(a)$  ekvivalentní existenci nějakého antického reálného  $\delta > 0$  tak, že ve světě  $\mathcal{A}$  je  $f$  spojitá na  $B_\delta(a)$ , neboli v každém bodě otevřené koule  $B_\delta(a)$ . Z naší definice to tedy znamená

$$(\exists \delta > 0, \delta \in \mathbf{Real})(\forall x \in B_\delta(a), x \in \mathbf{Real}^n)(\forall y \in \text{Mon}(x)) : f(x) \doteq f(y).$$

V obou případech jsme museli využít nějakého překladového pravidla. Pokud se jim chceme vyhnout a zcela následovat naši intuitivní definici, je pak ale třeba pracovat s expanzí světa  $\mathcal{C}$ , tedy s nějakým světem  $\mathcal{D}$  takovým, že  $\mathcal{C} \prec \mathcal{D}$ .<sup>2</sup> Můžeme pak ekvivalentně psát

<sup>1</sup>Tento požadavek je díky větě 7 ekvivalentní existenci nějakého antického okolí bodu  $x$ , na kterém je  $f$  definovaná.

<sup>2</sup>Domnívám se, že chceme-li plně využít potenciálu naší intuitivní definice spojitosti pomocí nekonečné blízkosti, je užitečné si zvyknout na expanzi světa  $\mathcal{C}$  do dalšího světa  $\mathcal{D}$  podobně, jako přijímáme expanzi světa  $\mathcal{A}$  do světa  $\mathcal{C}$ . Toto je ovšem cesta, kterou si Petr Vopěnka nepřál.

$$(\forall x \in \text{Mon}(a))(\forall y \in \text{Mon}^{\mathcal{D}}(x)) : f(x) \doteq^{\mathcal{D}} f(y),$$

kde  $\text{Mon}^{\mathcal{D}}(x)$  je monáda bodu, kterou lze definovat ve světě  $\mathcal{D}$  jako

$$\text{Mon}^{\mathcal{D}}(x) = \bigcap_{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}} B_{1/n}(x),$$

která ale obsahuje více bodů než jen bod  $x$ , neboť pro přirozená čísla  $\mathcal{N}_{\mathcal{D}}$  světa  $\mathcal{D}$  ze zákonů expanze platí, že  $\mathbf{N} \subsetneq \mathcal{N}_{\mathcal{D}}$ . Podobně nekonečnou blízkost  $f(x) \doteq^{\mathcal{D}} f(y)$  ve světě  $\mathcal{D}$  lze přepsat například jako  $f(y) \in \text{Mon}^{\mathcal{D}}(f(x))$ .

Všimněme si, že jestliže je antická reálná funkce  $f$  spojitá v bodě  $x \in \mathbf{Real}^n$  ve světě  $\mathcal{A}$ , pak je z prvního zákona expanze i klasická  $f$  spojitá v bodě  $x \in \mathbf{Real}^n \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^n$  ve světě  $\mathcal{C}$ .

Je-li naopak klasická reálná funkce  $g$  spojitá v  $y \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}^n$  ve světě  $\mathcal{C}$ , pak  $g$  nemusí být ani antická, natož aby byla spojitá. Pokud ale navíc víme, že  $g$  je antická,  $y \in \mathbf{Real}^n$ , kde  $n \in \mathbf{FN} \setminus \{0\}$ , pak již z tvrzení 8 i  $g$  musí být spojitá v  $y$  ve světě  $\mathcal{A}$ .

Dále platí zřejmá tvrzení, že součet i součin spojitých funkcí v bodě je opět spojitá funkce v bodě.<sup>3</sup> Stejně tak platí, že antická reálná funkce  $f$  z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  je spojitá v  $x \in \mathbf{Real}^n$  právě tehdy, když pro každé  $j \in \{1, \dots, k\}$  platí, že funkce  $f^j$  je spojitá v  $x$ .

Pro ukázkou a názornost práce s monádami ještě podrobně dokažme následující dvě tvrzení. Důkaz druhého z nich provedeme bez použití překladových pravidel ve smyslu předchozích úvah. Samozřejmě je možné ho vést i bez použití expanze světa  $\mathcal{C}$  do  $\mathcal{D}$ .

**Tvrzení 10** (O složení spojitých funkcí v bodě). *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$ ,  $f$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(x)$  a  $g$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(f(x))$ . Pokud funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x$  a  $g$  je spojitá v bodě  $f(x)$ , pak funkce  $g \circ f$  je spojitá v bodě  $x$ .*

*Důkaz.* Nechť  $y \in \text{Mon}(x)$  je libovolné. Ze spojitosti  $f$  v bodě  $x$  víme, že  $f(x) \doteq f(y)$ . Ze spojitosti  $g$  v bodě  $f(x)$  pak víme, že  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \doteq g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ .

□

**Tvrzení 11** (O složení spojitých funkcí na monádě). *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$ ,  $f$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(x)$  a  $g$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(f(x))$ . Pokud funkce  $f$  je spojitá na  $\text{Mon}(x)$  a  $g$  je spojitá na  $\text{Mon}(f(x))$ , pak funkce  $g \circ f$  je spojitá na  $\text{Mon}(x)$ .*

*Důkaz.* Nechť  $y \in \text{Mon}(x)$  je libovolné. Protože  $f$  je spojitá v bodě  $y$  a díky  $f(y) \in \text{Mon}(f(x))$  jsou ze spojitosti  $g$  v bodě  $f(x)$  splněny základní předpoklady tvrzení 10 ve světě  $\mathcal{C}$ . Uvědomme si jenom, že přímá reformulace tvrzení 10 (tj. bez překladových pravidel) ve světě  $\mathcal{C}$  říká, že zbývá ověřit předpoklady, že  $f$  je

<sup>3</sup>Platí přímá zobecnění tvrzení III.3.1 až III.3.4 (Vopěnka, 2011a) obdobně pro naše funkce více proměnných.

klasická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}^{\mathcal{D}}(y)$  a že  $g$  je klasická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}^{\mathcal{D}}(f(y))$ . To ale zřejmě platí, neboť  $\text{Mon}^{\mathcal{D}}(y) \subseteq \text{Mon}(x) \subseteq \text{dom}(f)$  a  $\text{Mon}^{\mathcal{D}}(f(y)) \subseteq \text{Mon}(f(x)) \subseteq \text{dom}(g)$ . Funkce  $g \circ f$  je tedy spojitá v bodě  $y$ .  $\square$

## 3.2 Bolzanova věta o mezihodnotě

Následuje zobecněná verze Bolzanovy věty o mezihodnotě. Připomeňme, že  $\hat{\mathbb{R}}^n$  je  $n$ -rozměrná plná mříž ve smyslu zavedení v kapitole 2.1. Protože  $\hat{\mathbb{R}}^n$  je množina, znamená to speciálně, že existuje nějaké  $\gamma \in \mathbf{IN}$  takové, že  $\text{Card}(\hat{\mathbb{R}}^n) = \gamma$ .

Každá antická reálná funkce  $f$  má svou množinovou verzi  $\hat{f} := \text{Ex}(f)|_{\hat{\mathbb{R}}^n}$ , tedy  $\hat{f}$  je klasická reálná funkce, kterou považujeme za množinu (neboť  $f$  je antická a zároveň  $\text{dom}(\hat{f})$  je množina) a která je klasicky konečná.

Speciálně to, že  $\hat{f}$  je množina ve světě  $\mathcal{C}$  a  $\text{Card}(\hat{f}) = \hat{\gamma} \leq \gamma$ , znamená, že existuje  $x \in \hat{\mathbb{R}}^n$  takové, že

$$\forall y \in \hat{\mathbb{R}}^n : \hat{f}(y) \leq \hat{f}(x),$$

jinými slovy existuje bod  $x$ , ve kterém má funkce  $\hat{f}$  maximum.

Následující definici a větu formulují zcela ve světě  $\mathcal{A}$ .

**Definice 13.** *Nechť  $x, y \in \mathbf{Real}^n$ . Pak antická třída  $\overline{xy}$  definovaná jako  $\overline{xy} := \{x + t(y - x) : t \in [0, 1] \cap \mathbf{Real}\}$  se nazývá **úsečka**  $xy$ .*

**Věta 12** (Bolzanova věta o mezihodnotě). *Nechť  $y, z \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}$  spojitá na  $\overline{yz}$ . Nechť  $u \in f(y)f(z)$ . Pak existuje  $v \in \overline{yz}$  takové, že  $f(v) = u$ .*

*Důkaz.* Je-li  $u = f(y)$  nebo  $u = f(z)$ , pak jsme hotovi. Předpokládejme tedy bez újmy na obecnosti, že  $f(y) < u < f(z)$ . Nechť  $w$  je reálná funkce proměnné  $t \in \mathbf{Real}$  definovaná  $w(t) := y + t(z - y)$ . Tato funkce je zřejmě spojitá a má svou množinovou verzi  $\hat{w} := \text{Ex}(w)|_{\hat{\mathbb{R}}}$ . Existuje tedy největší  $t_0 \in [0, 1] \cap \hat{\mathbb{R}}$  takové, že  $(f \circ \hat{w})(t_0) \leq u$ . Je-li  $t_1$  horní soused  $t_0$ ,<sup>4</sup> pak zřejmě  $(f \circ \hat{w})(t_1) > u$ . Položíme-li  $v = \hat{w}(\text{Proj}(t_0))$ , pak  $v$  je antický a platí  $f(v) = u$ , neboť  $(f \circ \hat{w})$  je spojitá.  $\square$

## 3.3 Limita funkce v bodě

**Definice 14.** *Nechť  $y \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^n, z \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^k$  a  $f$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}_o(y)$ . Řekneme, že  $z$  je **limitou funkce  $f$  v bodě  $y$** , jestliže pro každé  $x \in \text{Mon}_o(y)$  platí, že  $f(x) \in \text{Mon}(z)$ , a tuto skutečnost zapisujeme*

$$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = z.$$

<sup>4</sup> $t_1$  je **horní soused**  $t_0$ , pokud je  $t_1 \in \hat{\mathbb{R}}$  nejmenší takové, že  $t_1 > t_0$  — viz definice na str. 165 (Vopěnka, 2011a).

V případě, že  $z \in \mathbf{Real}^k$ , říkáme, že limita  $f$  je **vlastní**. V opačném případě je limita  $f$  **nevlastní**.

*Poznámka.* Pro toto zobecnění pojmu limity platí i příslušná zobecněná tvrzení III.3.30 až III.3.38 (Vopěnka, 2011a) (o aritmetice limit, L'Hospitalovo pravidlo).

Pro názornost dokážeme podrobně následující triviální tvrzení.

**Tvrzení 13.** *Nechť  $y \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce. Funkce  $f$  je spojitá v bodě  $y$ , právě když  $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$ .*

*Důkaz.* Nechť  $f$  je spojitá v antickém bodě  $y$ . Z definice spojitosti platí, že pro každé  $x \in \text{Mon}(y)$  je  $f(x) \in \text{Mon}(f(y))$ , platí to tedy i na menší třídě  $\text{Mon}_o(y)$  a tím máme dokázanou implikaci zleva doprava.

Nechť naopak platí  $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = f(y)$ . Z definice limity platí, že pro každé  $x \in \text{Mon}_o(y)$  je  $f(x) \doteq f(y)$ . Aby měl výraz  $f(y)$  smysl, je funkce  $f$  definovaná v antickém bodě  $y$  a zřejmě je v tomto bodě i spojitá.  $\square$

Pro spojení s tradiční notací asymptotického chování, zavedeme nyní ještě značení *malé o*.

**Definice 15.** *Nechť  $y \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^n$  a  $f, g$  jsou antické reálné funkce definované na  $\text{Mon}_o(y)$ , kde  $\text{rng}(f) \subseteq \mathbf{Real}^k$  a  $\text{rng}(g) \subseteq \mathbf{Real}^l$ . Řekneme, že funkce  $f$  je **malé o funkce g v bodě y**, jestliže pro každé  $x \in \text{Mon}_o(y)$  existuje  $\alpha \in \text{Mon}^{k \times l}(0)$  takové, že  $f(x) = \alpha \cdot g(x)$ .<sup>5</sup> Tuto skutečnost zapisujeme*

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow y.$$

*Poznámka.* Všimněme si, že v případě  $l = 1$  naše definice rozšiřuje smysl malého o definovaného tradičně např. na str. 21 (Zajíček, 2007). Shrňme tuto skutečnost v následujícím snadném tvrzení.

**Tvrzení 14.** *Nechť  $y \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^n$  a  $f, g$  jsou antické reálné funkce definované na  $\text{Mon}_o(y)$ , kde  $\text{rng}(g) \subseteq \mathbf{Real}$ . Předpokládejme navíc, že funkce  $g$  je na  $\text{Mon}_o(y)$  nenulová. Pak platí*

$$f(x) = o(g(x)), x \rightarrow y \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

*Důkaz.* Z definice tvrzení na levé straně ekvivalence máme, že pro každé  $x \in \text{Mon}_o(y)$  existuje  $\alpha \in \text{Mon}^k(0)$  takové, že  $f(x) = \alpha \cdot g(x)$ . Tato rovnost je z nenulovosti  $g$  na  $\text{Mon}_o(y)$  ekvivalentní  $\frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ . Existence  $\alpha \in \text{Mon}^k(0)$  takového, že platí tato rovnost, je ekvivalentní  $\frac{f(x)}{g(x)} \in \text{Mon}^k(0)$ . Protože toto platí pro každé  $x \in \text{Mon}_o(y)$ , dostaneme z definice limity tvrzení na pravé straně ekvivalence.  $\square$

<sup>5</sup>Bod  $\alpha$  v tomto případě nahlížíme jako matici a součin  $\alpha \cdot g(x)$  chápeme jako součin matice  $\alpha$  se sloupcovým vektorem  $g(x)$ .

Dokážeme nyní jedno lemma, které se nám bude hodit při osvětlení vztahu námi definované derivace funkce v bodě s tradiční definicí. Dohodněme se, že v následujícím tvrzení pro bod  $x \in \mathbf{Real}^n$  označuje  $\|x\|_s := \sum_{i=1}^n |x^i|$  součtovou normu vektoru  $x$  a  $\text{sgn}$  označuje známou funkci signum. Lemma však bude snadno platit, uijeme-li libovolnou normu ekvivalentní součtové normě.

**Lemma 15.** *Nechť  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\text{Mon}_o^n(0)$ . Pak platí*

$$f(x) = o(\|x\|), x \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x) = o(x), x \rightarrow 0.$$

*Důkaz.* V celém důkazu necht'  $x \in \text{Mon}_o^n(0)$  je libovolně zvolené, ale pevné.

$\Rightarrow$ : Z definice levé strany ekvivalence existuje  $\alpha \in \text{Mon}^k(0)$  takové, že  $f(x) = \|x\|_s \cdot \alpha$ . Položme  $\beta_{(i,j)} := \alpha^i \cdot \text{sgn}(x^j)$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, k\}, j \in \{1, \dots, n\}$ . Zřejmě  $\beta \in \text{Mon}^{k \times n}(0)$  a platí, že  $f(x) = \beta \cdot x$ .

$\Leftarrow$ : Z pravé strany ekvivalence existuje  $\beta \in \text{Mon}^{k \times n}(0)$  takové, že  $f(x) = \beta \cdot x$ . Položme  $\alpha^i := \sum_{j=1}^n \beta_{(i,j)} \cdot x^j / \|x\|_s$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Zřejmě  $\alpha \in \text{Mon}^k(0)$  a platí, že  $f(x) = \|x\|_s \cdot \alpha$ . □

*Poznámka.* Všimněme si, že pro případ, kdy  $g(x) = \|x\|$  jsou splněny předpoklady tvrzení 14, tedy výraz  $f(x) = o(\|x\|), x \rightarrow 0$  je ekvivalentní tradičnímu pojetí používanému např. v (Zajíček, 2007).

### 3.4 Derivace funkce v bodě

Připomeňme si nejdříve definici derivace, kterou snadno rozšíříme po složkách i na reálné funkce z  $\mathbf{Real}$  do  $\mathbf{Real}^k$ .

**Definice 16.** *Nechť  $x \in \mathbf{Real}$ ,  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\text{Mon}(x)$ . Pak řekneme, že vektor  $f'(x) \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^k$  je **derivací funkce  $f$  v bodě  $x$** , jestliže*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Všimněme si, že z definice limity je to ekvivalentní tvrzení, že pro každé  $\alpha \in \text{Mon}_o(0)$  platí

$$\frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \in \text{Mon}(f'(x))$$

nebo ekvivalentně

$$\text{Proj} \left( \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \right) = f'(x).$$

**Definice 17.** Necht  $x \in \mathbf{Real}^n$ ,  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\text{Mon}(x)$  a  $i \in \{1, \dots, n\}$ . **Parciální derivaci funkce  $f$  podle  $i$ -té proměnné v bodě  $x$**  značíme jako  $\partial_i f(x) \in (\mathbf{Real} \cup \{\pm\infty\})^k$  a je definována jako

$$\partial_i f(x) := f'_i(0),$$

kde  $f'_i(0)$  značí derivaci funkce  $f_i$  v nule a  $f_i : t \mapsto f(x + te_i)$  pro  $t \in \mathbf{Real}$ .<sup>6</sup>

Parciální derivaci funkce snadno zobecníme na pojem derivace funkce podle vektoru.

**Definice 18.** Necht  $x, v \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(x)$ . **Derivaci funkce  $f$  podle vektoru  $v$  v bodě  $x$**  značíme jako  $\partial_v f(x)$  a je definována jako

$$\partial_v f(x) := f'_v(0),$$

kde  $f'_v(0)$  značí derivaci funkce  $f_v$  v nule a  $f_v : t \mapsto f(x + tv)$  pro  $t \in \mathbf{Real}$ .

*Poznámka.* Podobně jako u limit v případě, že  $\partial_v f(x) \in \mathbf{Real}^k$ , říkáme, že je příslušná derivace **vlastní**. V opačném případě říkáme, že je **nevlastní**.

Všimněme si, že platí

$$\partial_i f(x) = \partial_{e_i} f(x),$$

kde  $e_i$  je příslušný kanonický jednotkový vektor ve směru  $i$ -té souřadnice.

V následujícím lemmatu formulovaném ve světě  $\mathcal{A}$  shrneme základní pozorování o derivaci funkce podle vektoru.

**Lemma 16.** Necht existuje  $\partial_v f(x)$  vlastní a  $\lambda \in \mathbf{Real}$ . Pak platí

- $\partial_{\lambda v} f(x) = \lambda \cdot \partial_v f(x)$ ,
- $f(x + \lambda v) - f(x) - \partial_{\lambda v} f(x) = o(\|\lambda v\|)$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ .

*Důkaz.* První část ukážeme výpočtem z definice, kde pro libovolné  $\alpha \in \text{Mon}_o(0)$  a  $\lambda \neq 0$  platí

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda v} f(x) &= \text{Proj} \left( \frac{f(x + \alpha \lambda v) - f(x)}{\alpha} \right) = \\ &= \text{Proj} \left( \lambda \cdot \frac{f(x + \alpha \lambda v) - f(x)}{\alpha \lambda} \right) = \lambda \cdot \partial_v f(x). \end{aligned}$$

Případ, kdy  $\lambda = 0$  platí triviálně. Všimněme si, že první bod tvrzení je formulován ve světě  $\mathcal{A}$ . Platí tedy i ve světě  $\mathcal{C}$ , tj. pro libovolné  $\lambda \in \mathcal{R}_{\mathcal{C}}$ .

Pro případ, kdy  $v = 0$ , platí druhý bod triviálně. Uvažujme tedy dále, že  $v \neq 0$ . Z definice derivace podle vektoru a protože je tato derivace vlastní, pro každé  $\alpha \in \text{Mon}_o(0)$  existuje  $\beta \in \text{Mon}(0)$  takové, že platí

<sup>6</sup>Kanonický vektor  $e_i$  definujeme jako bod v  $\mathbf{Real}^n$  takový, že na  $i$ -tém místě je jeho souřadnice 1 a všechny jeho zbylé souřadnice jsou 0.

$$\partial_v f(x) = \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha} + \beta.$$

Pouhou úpravou této rovnosti a užitím předchozího bodu tvrzení dostaneme rovnost

$$f(x + \alpha v) - f(x) - \partial_{\alpha v} f(x) = \frac{-\beta}{\operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \|v\|} \cdot \|\alpha \cdot v\|.$$

Protože  $\frac{-\beta}{\operatorname{sgn}(\alpha) \cdot \|v\|} \in \operatorname{Mon}(0)$ , je z definice dokázán i druhý bod. □

**Tvrzení 17** (Ekvivalentní definice derivace podle vektoru). *Nechť  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$ . Derivace  $\partial_v f(x)$  je vlastní, právě když existuje lineární reálná funkce  $L(\lambda) = \lambda \cdot w$ , kde  $\lambda \in \mathbf{Real}$ ,  $w \in \mathbf{Real}^k$ , pro kterou platí, že*

$$f(x + \lambda v) - f(x) - L(\lambda) = o(\|\lambda v\|), \lambda \rightarrow 0.$$

*V takovém případě je  $w = \partial_v f(x)$ .*

*Důkaz.* Zleva doprava plyne tvrzení ihned z druhého bodu lemmatu 16. Předpokládejme tedy, že platí pravá strana ekvivalence. Pro  $v = 0$  platí levá strana triviálně. Nechť tedy dále  $v \neq 0$ . Z pravé strany snadným výpočtem ihned odvodíme, že pro všechna  $\alpha \in \operatorname{Mon}_o(0)$  platí

$$w \doteq \frac{f(x + \alpha v) - f(x)}{\alpha}.$$

Protože  $w$  je antický, je tedy z definice roven  $\partial_v f(x)$ , která tedy existuje a je vlastní. □

Derivace dle různých vektorů funkce v bodě spolu obecně nesouvisí. My se nyní zaměříme na speciální případ, kdy spolu souvisí, a to tak, že funkce  $\partial \mathbf{f}(x)$  chápaná jako  $\partial \mathbf{f}(x) : v \mapsto \partial_v \mathbf{f}(x)$  bude antická lineární. Speciálně derivace dle všech vektorů budou vlastní.

**Definice 19.** *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\operatorname{Mon}(x)$ . Řekneme, že antická lineární funkce  $\partial f(x) : \mathbf{Real}^n \rightarrow \mathbf{Real}^k$  je **derivace funkce  $f$  v bodě  $x$** , jestliže platí pro každé  $\alpha \in \operatorname{Mon}^n(0)$  existuje  $\beta \in \operatorname{Mon}^{k \times n}(0)$  takové, že*

$$f(x + \alpha) - f(x) - \partial f(x)(\alpha) = \beta \cdot \alpha.$$

*Matici  $k \times n$  lineární funkce  $\partial f(x)$  v takovém případě značíme  $[\partial f(x)]$  a nazýváme ji **Jacobiho matice funkce  $f$  v bodě  $x$** .*

Všimněme si, že z definice malého  $o$  můžeme v definici derivace funkce  $f$  v bodě  $x$  prostě psát, že

$$f(x + v) - f(x) - \partial f(x)(v) = o(v), v \rightarrow 0.$$

*Poznámka.* Z tvrzení 17 a lemmatu 15 ihned vidíme, že existuje-li derivace funkce  $f$  v bodě  $x$ , pak funkce derivace  $f$  podle vektoru v bodě  $x$  chápaná jako  $\partial \cdot f(x) : v \mapsto \partial_v f(x)$  je definovaná na celém  $\mathbf{Real}^n$ , je lineární a dokonce pro každé  $v \in \mathbf{Real}^n$  je  $\partial_v f(x) = \partial f(x)(v)$ .

Nechť  $(i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, n\}$ . Pak lze  $(i, j)$ -tou složku Jacobiho matice vyjádřit jako

$$[\partial f(x)]_{(i,j)} = \partial_j f^i(x).$$

Všimněme si, že existuje-li derivace funkce, pro její určení (a tedy i určení jejích derivací podle všech vektorů) stačí znát všechny její parciální derivace.

*Poznámka.* Všimněme si také, že limita funkce v bodě, malé o funkce v bodě, parciální derivace, derivace podle vektoru i derivace funkce v bodě jsou lokální vlastnosti.

Existují-li všechny parciální derivace funkce  $f$  v bodě  $x$  vlastní a dokonce je-li funkce  $\partial \cdot f(x) : v \mapsto \partial_v f(x)$  lineární a definovaná na celém  $\mathbf{Real}^n$ , neznamená to ještě, že existuje derivace funkce  $f$  v bodě  $x$ .

Příkladem budiž funkce  $g : \mathbf{Real}^2 \rightarrow \mathbf{Real}$  definovaná funkční hodnotou 1 na třídě  $\{(x, y) \in \mathbf{Real}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x^2 = y\}$  a všude jinde jako 0. Počítáme-li derivaci funkce  $g$  podle vektoru  $v \in \mathbf{Real}^2$  v bodě  $(0, 0)$ , chceme z definice spočítat pro libovolné  $\alpha \in \text{Mon}(0)$  výraz  $\text{Proj}\left(\frac{g(\alpha \cdot v)}{\alpha}\right)$ , jemuž se pak ona derivace rovná. Všimněme si ale, že součin  $\alpha \cdot v$  nemůže být nikdy roven  $(\beta, \beta^2)$  pro žádné  $\beta \in \text{Mon}_0^1(0)$ .<sup>7</sup> Proto  $g(\alpha \cdot v) = 0$ , tedy  $\partial_v g((0, 0)) = 0$ .

Počítáme-li derivaci  $\partial g((0, 0))$ , měla by se, pokud existuje, rovnat nulové lineární funkci. Z definice derivace tedy musí platit, že pro každé  $\alpha \in \text{Mon}((0, 0))$  existuje  $\beta \in \text{Mon}^{1 \times 2}(0)$ , že  $g(\alpha) = \beta \cdot \alpha$ . Zvolíme-li ale  $\alpha := (\gamma, \gamma^2)$  pro libovolné  $\gamma \in \text{Mon}_0^1(0)$ , bude platit

$$1 = g(\alpha) = \beta \cdot \alpha \in \text{Mon}(0),$$

což je zřejmě spor. Derivace  $\partial g((0, 0))$  tedy neexistuje.

Přímo z definic snadno dokážeme následující tvrzení.

**Věta 18** (Ekvivalentní definice derivace). *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\text{Mon}(x)$ . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) *Existuje  $\partial f(x)$ .*

(ii) *Existuje  $L : \mathbf{Real}^n \rightarrow \mathbf{Real}^k$  antická lineární funkce taková, že*

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - L(v)}{\|v\|} = 0.$$

---

<sup>7</sup>Nechť  $v = (a, b) \in \mathbf{Real}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Zřejmě můžeme předpokládat  $\alpha \neq 0$ . Dokážeme sporem: kdyby  $\alpha \cdot v = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b) = (\beta, \beta^2)$ , pak porovnáním složek zjistíme, že  $b = a \cdot \beta \in \text{Mon}(0)$ . V tom případě ale  $v = (0, 0)$ .

(iii) Existuje  $A : \mathbf{Real}^n \rightarrow \mathbf{Real}^k$  antická afinní funkce taková, že

$$A(x) = f(x) \text{ a } \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - A(y)}{\|y - x\|} = 0.$$

V případě, že platí libovolný z předchozích bodů, je nutně  $L = \partial f(x)$  a  $A(y) = f(x) + \partial f(x)(y - x)$ .

*Poznámka.* Chceme-li dokázat existenci  $\partial f(x)$  pomocí nějaké z předchozích podmínek, všimněme si, že hledané  $L$  nutně splňuje  $L(e_i) = \partial_i f(x)$ . Stačí tedy ověřit, zda podmínka platí pro takto definovanou lineární funkci  $L$ .

*Důkaz.* Ekvivalence prvních dvou bodů plyne z definice derivace, z tvrzení 14 a lemmatu 15. Pokud platí bod (ii), volbou  $A(y) = f(x) + L(y - x)$  a dosazením do limity za  $v = y - x$  dostaneme ihned platnost (iii). Platí-li naopak (iii), volbou  $L$  jako lineární funkci tak, aby  $A(y) = A(x) + L(y - x)$ , vidíme díky  $A(x) = f(x)$ , že  $A(y) = f(x) + L(y - x)$ , a dosazením do limity za  $y = x + v$  dostaneme ihned platnost (ii). □

**Úmluva.** Pokud tvrdíme, že existuje  $\partial f(x)$  (resp.  $\partial_i f(x)$ ), míníme tím automaticky, že výraz  $\partial f(x)$  (resp.  $\partial_i f(x)$ ) má smysl, tj. jsou splněny všechny předpoklady naší definice. Znamená to, že  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\text{Mon}(x)$ .

★

V klasické literatuře se pro reálné funkce do  $\mathbf{Real}$  námi definovaná derivace funkce v bodě zpravidla nazývá *totální diferenciál*.<sup>8</sup> Až pro vyšší rozměr se volí název derivace. Zvolili jsme název derivace rovnou, abychom si mohli vyhradit termín *diferenciál* pro jiný pojem — pojem, který souvisí s nekonečně malou diferencí. Rozšíříme definici ze str. 201 (Vopěnka, 2011a) následujícím způsobem.

Pracujme s pevně danou plnou  $n$ -rozměrnou mříží  $\hat{\mathbb{R}}^n$ . Nechť je zadán bod  $x = (x^1, \dots, x^n) \in \hat{\mathbb{R}}^n$ . Označme  $dx = (dx^1, \dots, dx^n) \in \hat{\mathbb{R}}^n$  takový bod, že  $x^i + dx^i$  je horní soused bodu  $x^i$  na  $\hat{\mathbb{R}}$  pro každé  $i$ . **Diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x$**  pak definujeme jako

$$df(x) := \partial f(x)(dx) = \partial_1 f(x) \cdot dx^1 + \dots + \partial_n f(x) \cdot dx^n.$$

Nahlížíme-li na  $x$  jako na funkci identity  $\text{id}(x) = x$ , lze vidět  $dx$  i jako diferenciál funkce  $\text{id}$  v bodě  $x$ . Zřejmě můžeme zobecnit diferenciál funkce  $f$  v bodě  $x$  pro libovolné  $\alpha \in \text{Mon}^n(0)$  jako  $df(x)(\alpha) := \partial f(x)(\alpha)$ .

Definujeme-li ještě podobným způsobem užitečnou značku difference funkce  $f$  v bodě  $x$  ve směru  $v$  jako  $\Delta_v f(x) = \Delta f(x)(v) := f(x + v) - f(x)$ , můžeme při práci s mříží  $\hat{\mathbb{R}}^n$  opět definovat **diferenci funkce  $f$  v bodě  $x$**  jako

$$\Delta f(x) := \Delta_{dx} f(x) = f(x + dx) - f(x).$$

Všimněme si, že pokud má funkce  $f$  v bodě  $x$  derivaci, existují z definice derivace čísla  $\alpha^i \in \text{Mon}(0)$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$  taková, že

$$df(x) - \Delta f(x) = \alpha^1 \cdot dx^1 + \dots + \alpha^n \cdot dx^n.$$

<sup>8</sup>Viz str. 52 (Zajíček, 2007).

### 3.5 Lagrangeova věta o přírůstku funkce

Uvedeme nyní přímé důkazy různých verzí Lagrangeovy věty o přírůstku funkce pro funkce více proměnných. Následující základní verzi dokážeme pro ilustraci přímo z definic.<sup>9</sup> Tuto větu formulujeme ve světě  $\mathcal{A}$ .

**Věta 19** (Lagrangeova věta o přírůstku funkce dle vektoru). *Nechť  $x, y \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}$ . Označme  $v := (y - x)$ . Předpokládejme, že existuje  $\partial_v f$  vlastní na  $\overline{xy}$ . Pak existuje bod  $z \in \overline{xy}$  takový, že*

$$\partial_v f(z) = f(y) - f(x) = \Delta_v f(x).$$

*Důkaz.* Nejdříve si uvědomme, že je-li  $x = y$ , je tvrzení triviálně splněno. Nechť dále  $x \neq y$ . Definujme reálnou funkci  $w(t) := x + t \cdot v$  pro  $t \in \mathbf{Real}$ . Z definice vidíme, že pro libovolné  $t \in [0, 1]$  platí  $\partial_v f(w(t)) = (f \circ w)'(t)$ , a protože  $(f \circ w)'(t) \in \mathbf{Real}$ , je  $f \circ w$  spojitá v bodě  $t$ . Zřejmě také  $(f \circ w)(0) = f(x)$  a  $(f \circ w)(1) = f(y)$ .<sup>10</sup>

Definujme lineární reálnou funkci  $L(t) := (f(y) - f(x))t + f(x)$  pro  $t \in \mathbf{Real}$ . Tato funkce má vlastnost  $L(0) = f(x)$  a  $L(1) = f(y)$ . Omezíme-li nyní obě funkce  $w$  a  $L$  na množinu  $[0, 1] \cap \hat{\mathbf{R}}$ , vzniknou nám jejich množinové verze. Existuje tedy  $t_0 \in [0, 1] \cap \hat{\mathbf{R}}$  takové, že  $|(f \circ w)(t_0) - L(t_0)|$  je maximální. Předpokládejme dále, že číslo  $(f \circ w)(t_0) - L(t_0)$  je kladné. Kdyby bylo záporné, důkaz by probíhal stejně, jen s opačnými nerovnostmi; kdyby bylo nulové, je tvrzení triviálně splněno pro libovolný bod  $z \in \overline{xy}$ .

Předpokládejme dále, že  $t_0$  je antické, neboť položíme-li  $\hat{t}_0 = \text{Proj}(t_0)$ , bude z její spojitosti  $\hat{t}_0$  maximalizovat  $f \circ w - L$  na antickém, tedy i klasickém, intervalu  $[0, 1]$ . Pracovali bychom tedy místo s  $t_0$  s  $\hat{t}_0$ . Dále vidíme, že dokonce  $t_0 \in (0, 1)$ , neboť pro něj předpokládáme, že  $(f \circ w)(t_0) - L(t_0)$  je nenulové.

Nechť  $\alpha \in \text{Mon}_o^1(0)$  je libovolné. Zřejmě platí

$$(f \circ w)(t_0 + \alpha) - L(t_0 + \alpha) - ((f \circ w)(t_0) - L(t_0)) \leq 0.$$

Protože  $(L(t_0 + \alpha) - L(t_0))/\alpha = \Delta_v f(x)$ , plyne z předchozí nerovnosti, že

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ w)(t_0 + \alpha) - (f \circ w)(t_0)}{\alpha} &\leq \Delta_v f(x) \quad \text{pro } \alpha > 0 \\ \text{a } \frac{(f \circ w)(t_0 + \alpha) - (f \circ w)(t_0)}{\alpha} &\geq \Delta_v f(x) \quad \text{pro } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Protože existuje  $(f \circ w)'(t_0)$  vlastní a projekce levých stran předchozích dvou nerovností jí musí být rovny, vidíme ihned, že  $(f \circ w)'(t_0) = \Delta_v f(x)$ .<sup>11</sup>

□

Následující zobecnění Lagrangeovy věty se hodí zformulovat v řeči monád. Díky překladovým pravidlům snadno nahlédneme, že je to trochu slabší verze věty 2.19 (Zajíček, 2007).

<sup>9</sup>Věta je jen přímým zobecněním Lagrangeovy věty o přírůstku funkce uvedené na str. 179 (Vopěnka, 2011a).

<sup>10</sup>V tuto chvíli se můžeme odvolat na jednorozměrnou verzi Lagrangeovy věty o přírůstku funkce ze str. 179 (Vopěnka, 2011a) aplikovanou na funkci  $f \circ w$  a jsme hotovi.

<sup>11</sup>Všimněme si, že zde bez větších zmínek užíváme tvrzení III.2.23 (Vopěnka, 2011a).

**Věta 20** (Lagrangeova věta o přírůstku funkce na monádě). *Nechť  $z \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}$  definovaná na  $\text{Mon}(z)$ . Nechť  $\partial_i f$  jsou vlastní na  $\text{Mon}(z)$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pak pro všechna  $x, y \in \text{Mon}(z)$  existují  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \text{Mon}(z)$  takové, že platí*

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=1}^n (y^i - x^i) \partial_i f(\xi_i).$$

*Důkaz.* Označme  $\alpha := y - x \in \text{Mon}^n(0)$ . Hledáme tedy body  $\xi_i$  takové, aby platilo  $f(x + \alpha) - f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_i f(\xi_i)$ . Označíme-li  $\hat{x}_i := x + \sum_{j=1}^i \alpha^j e_j$ , všimněme si, že platí

$$f(x + \alpha) - f(x) = \sum_{i=1}^n (f(\hat{x}_i) - f(\hat{x}_{i-1})).$$

Protože pro libovolné  $i \in \{1, \dots, n\}$  je  $\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1} = \alpha^i e_i$ , z lemmatu 16 platí  $\partial_{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}} f = \alpha^i \cdot \partial_i f$  na  $\text{Mon}(z)$ . Derivace podle vektoru  $\partial_{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}} f$  je tedy vlastní speciálně všude na úsečce  $\overline{\hat{x}_{i-1} \hat{x}_i}$ . Jsou tedy splněny předpoklady věty 19 ve světě  $\mathcal{C}$  a existuje  $\xi_i$  takové, že platí

$$f(\hat{x}_i) - f(\hat{x}_{i-1}) = \partial_{\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}} f(\xi_i) = \alpha^i \cdot \partial_i f(\xi_i).$$

Dosazením do předchozí rovnosti získáme, co jsme chtěli. □

### 3.6 Souvislosti derivace a parciálních derivací funkce v bodě

Následuje několik velmi užitečných vět formulovaných ve světě  $\mathcal{A}$  souvisejících s existencí derivace reálné funkce v bodě. Jednoduchostí jejich důkazů chceme demonstrovat užitečnost naší definice.

**Věta 21.** *Nechť  $f$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  a nechť existuje  $\partial f(x)$ . Pak funkce  $f$  je spojitá v bodě  $x$ .*

*Důkaz.* Nechť  $y \in \text{Mon}(x)$  je libovolné. Z definice derivace dosazením za  $\alpha = y - x$  platí

$$f(y) = f(x) + \partial f(x)(y - x) + \beta \cdot (y - x),$$

kde  $\beta \in \text{Mon}(0)$ . Z linearity a ze spojitosti  $\partial f(x)$  v nule je zřejmé  $\partial f(x)(y - x) + \beta \cdot (y - x) \in \text{Mon}(0)$ . Platí tedy  $f(y) \doteq f(x)$  pro všechna  $y \in \text{Mon}(x)$ , což jsme chtěli dokázat. □

**Věta 22.** *Nechť  $f$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  a nechť  $\partial_i f$  je spojitá v bodě  $x$  pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Pak existuje  $\partial f(x)$ .*

*Důkaz.* Zvolme  $j \in \{1, \dots, k\}$  a  $\alpha \in \text{Mon}^n(x)$  libovolně. Z předpokladu spojitosti  $\partial_i f^j$  v bodě  $x$  pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  víme, že  $\partial_i f^j$  je vlastní na  $\text{Mon}(x)$ . Pro reálnou funkci  $f^j$  jsou tedy splněny předpoklady věty 20 pro dvojici bodů  $x$  a  $x + \alpha$ . Platí tedy

$$f^j(x + \alpha) - f^j(x) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \cdot \partial_i f^j(\xi_i^j)$$

pro nějaké  $\xi_1^j, \dots, \xi_n^j \in \text{Mon}(x)$ . Označme matici  $\beta_{(j,i)} := \partial_i f^j(\xi_i^j) - \partial_i f^j(x)$ . Ze spojitosti  $\partial_i f^j$  zřejmě platí  $\beta \in \text{Mon}^{k \times n}(0)$ . Dostaneme tedy

$$f(x + \alpha) - f(x) - \sum_{i=1}^n \alpha^i \partial_i f(x) = \beta \cdot \alpha.$$

Reálná funkce  $L(v) := \sum_{i=1}^n v^i \cdot \partial_i f(x)$  je lineární a z věty 18 je  $L = \partial f$ . □

**Věta 23** (O derivaci složené funkce). *Nechť  $f$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  a  $g$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^k$  do  $\mathbf{Real}^l$ . Nechť existují  $\partial f(x)$  a  $\partial g(f(x))$ . Pak existuje  $\partial(g \circ f)(x)$  a platí*

$$\partial(g \circ f)(x) = \partial g(f(x)) \circ \partial f(x).$$

*Důkaz.* Protože  $\partial g(f(x)) \circ \partial f(x)$  je zřejmě lineární, zbývá ověřit, že pro libovolné  $\alpha \in \text{Mon}^n(0)$  existuje  $\beta \in \text{Mon}^{l \times n}(0)$  takové, že

$$(g \circ f)(x + \alpha) - (g \circ f)(x) - (\partial g(f(x)) \circ \partial f(x))(\alpha) = \beta \cdot \alpha.$$

Z existence derivací  $\partial f(x)$ ,  $\partial g(f(x))$  a spojitosti  $f$  v bodě  $x$  dále označme  $\beta^f \in \text{Mon}^{k \times n}(0)$ ,  $\beta^g \in \text{Mon}^{l \times k}(0)$  takové, že platí

$$\begin{aligned} f(x + \alpha) - f(x) - \partial f(x)(\alpha) &= \beta^f \cdot \alpha, \\ g(f(x) + (f(x + \alpha) - f(x))) - g(f(x)) - \partial g(f(x))(f(x + \alpha) - f(x)) &= \\ &= \beta^g \cdot (f(x + \alpha) - f(x)). \end{aligned}$$

Užijeme-li zápisu derivace pomocí Jacobiho matice  $[\partial f(x)]$ , platí

$$f(x + \alpha) - f(x) = (\beta^f + [\partial f(x)]) \cdot \alpha.$$

Pouhou úpravou výrazu a využitím linearit derivace dostaneme, že platí

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + \alpha) - (g \circ f)(x) - (\partial g(f(x)) \circ \partial f(x))(\alpha) &= \dots \\ \dots &= (\beta^g \cdot (\beta^f + [\partial f(x)]) + [\partial g(f(x))] \cdot \beta^f) \cdot \alpha. \end{aligned}$$

Hledané  $\beta := \beta^g \cdot (\beta^f + [\partial f(x)]) + [\partial g(f(x))] \cdot \beta^f$  zřejmě leží v  $\text{Mon}^{l \times n}(0)$ . □

### 3.7 Funkce třídy $C^p$

V této kapitole ukážeme několik základních výsledků pro vícenásobné derivování a definujeme si pojem hladkosti funkce v bodě.

Nechť  $f$  je antická reálná funkce a  $x, v, w \in \mathbf{Real}^n$ . Uvědomme si nejdříve, že pro antickou reálnou funkci  $f$ , která má všechny derivace podle vektoru  $v$  na  $\text{Mon}(x)$  vlastní, tj. existuje reálná funkce  $\partial_v f$  na  $\text{Mon}(x)$ , má smysl definovat derivaci funkce  $\partial_v f$  podle vektoru  $w$  v bodě  $x$  (resp. ve smyslu funkce na  $\text{Mon}(x)$ ). Tu pak označujeme  $\partial_w \partial_v f(x)$  (resp. jako funkci  $\partial_w \partial_v f$ ). Říkáme pak, že  $\partial_w \partial_v f$  je **parciální derivace funkce  $f$  podle vektorů  $v, w$  řádu 2**. Podobně bychom pro libovolné  $p \in \mathbf{FN}$  definovali derivaci funkce podle vektorů řádu  $p$ .

V případě, že bychom chtěli psát několikrát za sebou derivaci podle stejného vektoru  $v$ , zapisujeme pak zkráceně např.  $\partial_v^2 f$  místo  $\partial_v \partial_v f$ .

*Poznámka.* Tato definice platí zřejmě i speciálně pro parciální derivace funkce  $f$ .

**Definice 20.** *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce definovaná na  $\text{Mon}(x)$ . Řekneme, že  $f$  je třídy  $C^p$  v bodě  $x$  pro  $p \in \mathbf{FN}$ , jestliže všechny parciální derivace funkce  $f$  řádu  $p$  jsou spojité v bodě  $x$ .*

*Speciálně  $f$  je třídy  $C^0$  v bodě  $x$ , pokud  $f$  je spojitá v bodě  $x$ .*

*Řekneme, že  $f$  je třídy  $C^\infty$  v bodě  $x$ , jestliže pro každé  $p \in \mathbf{FN}$  je  $f$  třídy  $C^p$  v bodě  $x$ . Takovou funkci  $f$  také nazýváme **hladkou v bodě  $x$** .*

Předpokládáme-li, že  $f$  je třídy  $C^{p+1}$  v bodě  $x$ , znamená to nutně ze spojitosti parciálních derivací funkce  $f$  řádu  $p+1$  v bodě  $x$ , že jsou tyto parciální derivace vlastní na  $\text{Mon}(x)$ . Zároveň z věty 22 víme, že existuje derivace všech parciálních derivací funkce  $f$  řádu  $p$  v bodě  $x$ . Z věty 21 tedy speciálně máme, že  $f$  je třídy  $C^p$  v bodě  $x$ .

**Tvrzení 24** (O záměně dvou parciálních derivací). *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$ ,  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  a  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  jsou pevné. Pokud platí, že funkce  $\partial_i \partial_j f$  a  $\partial_j \partial_i f$  jsou spojité v bodě  $x$ , pak platí  $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$ .*

*Důkaz.* Nejdříve si uvědomme, že můžeme předpokládat, že funkce  $f$  je z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}$ , neboť tvrzení lze dokázat pro každou složku  $f$  zvlášť.

Všimněme si také, že z předpokladů spojitosti parciálních derivací v bodě  $x$  plyne, že jsou vlastní na  $\text{Mon}(x)$ . To také znamená, že pro nekonečně malé vektory ve směru kanonických vektorů  $e_i, e_j$  jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty 19 ve světě  $\mathcal{C}$  o přírůstku funkcí  $f, \partial_i f$  a  $\partial_j f$  na všech úsečkách v  $\text{Mon}(x)$ .

Nechť  $\alpha_i, \alpha_j \in \text{Mon}_0^1(0)$  jsou libovolné. Připomeňme, že pro libovolnou funkci  $g$  definujeme diferenci  $g$  ve směru  $v$  v bodě  $y$  jako  $\Delta_v g(y) := g(y+v) - g(y)$  a můžeme ji nahlížet jako funkci proměnné  $y$ . Všimněme si nyní, že platí

$$\Delta_{\alpha_i e_i} \Delta_{\alpha_j e_j} f(x) = \Delta_{\alpha_j e_j} \Delta_{\alpha_i e_i} f(x).$$

Z věty 19 a věty 23 postupnou aplikací na obě strany rovnosti dostaneme, že existují  $\xi_1, \xi_2 \in \text{Mon}(x)$  takové, že

$$\alpha_i \alpha_j \cdot \partial_i \partial_j f(\xi_1) = \Delta_{\alpha_i e_i} \Delta_{\alpha_j e_j} f(x) = \Delta_{\alpha_j e_j} \Delta_{\alpha_i e_i} f(x) = \alpha_i \alpha_j \cdot \partial_j \partial_i f(\xi_2).$$

Protože  $\alpha_i, \alpha_j$  byla libovolná nenulová čísla a protože funkce  $\partial_i \partial_j f, \partial_j \partial_i f$  jsou spojité v bodě  $x$ , máme

$$\partial_i \partial_j f(x) \doteq \partial_i \partial_j f(\xi_1) = \partial_j \partial_i f(\xi_2) \doteq \partial_j \partial_i f(x).$$

Neboť  $\partial_i \partial_j f(x)$  a  $\partial_j \partial_i f(x)$  jsou antická, musí nutně  $\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$ . □

Všimněme si, že předchozí větu lze snadno zobecnit pro vektory a pro řád  $p$ .

**Věta 25.** *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$ ,  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$  a  $q \in \mathbf{FN}$ ,  $q \leq p \in \mathbf{FN} \cup \{\infty\}$ . Nechť dále  $v_1, \dots, v_q \in \mathbf{Real}^n$ . Pokud platí, že funkce  $f$  je třídy  $C^p$  v bodě  $x$ , pak pro výpočet  $\partial_{v_1} \dots \partial_{v_q} f(x)$  nezáleží na pořadí operací  $\partial_{v_1}, \dots, \partial_{v_q}$ .*

Následuje věta, kterou budeme bez dalších odkazů dále používat.

**Věta 26** (O skládání funkcí třídy  $C^p$  na monádě). *Nechť  $x \in \mathbf{Real}^n$ ,  $f$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^k$ ,  $g$  je reálná funkce z  $\mathbf{Real}^k$  do  $\mathbf{Real}^l$  a  $p \in \mathbf{FN} \cup \{\infty\}$ . Pokud  $f$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(x)$  a  $g$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(f(x))$ , pak  $g \circ f$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(x)$ .*

*Důkaz.* Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že  $l = 1$ , neboť tvrzení lze dokázat pro každou složku funkce  $g \circ f$  zvlášť.

V případě  $p = 0$  plyne věta ihned z tvrzení 11. V případě  $p = 1$  z věty 22 a věty 23 v libovolném bodě  $y \in \text{Mon}(x)$  pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  platí

$$\partial_i (g \circ f)(y) = \sum_{j=1}^k \partial_k g(f(y)) \cdot \partial_i f^k(y)$$

a z tvrzení 10 je zřejmě funkce proměnné  $y$  na pravé straně rovnosti spojitá v bodě  $y$ . Tedy i  $\partial_i (g \circ f)$  je spojitá v bodě  $y$ . Vidíme tedy, že  $g \circ f$  je třídy  $C^p$  v libovolném bodě  $y$ , tedy na  $\text{Mon}(x)$ .

Případ  $p > 1, p \in \mathbf{FN}$  dokážeme indukcí. Předpokládejme tedy, že věta platí pro  $p - 1$ . Chceme ukázat, že pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  je  $\partial_i (g \circ f)$  třídy  $C^{p-1}$  v libovolném bodě  $y \in \text{Mon}(x)$ . Protože pro tuto funkci proměnné  $y$  ale zřejmě platí stejná rovnost jako v části důkazu pro  $p = 1$  a z indukčního předpokladu je v této rovnosti funkce vpravo zřejmě třídy  $C^{p-1}$  v bodě  $y$ , jsme hotovi. □

### 3.8 Věta o implicitní funkci

Dokážeme nejdříve následující lemma, které pro jednoduchost zápisu zformulujeme pomocí monád. Z překladových pravidel lze samozřejmě zformulovat příslušnou verzi ve světě  $\mathcal{A}$ .

**Lemma 27** (Slabá věta o implicitní funkci spojitě v bodě). *Nechť  $(a, b) = (a^1, \dots, a^n, b) \in \mathbf{Real}^{n+1}$  a  $g$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^{n+1}$  do  $\mathbf{Real}$  definovaná na  $\text{Mon}(a, b)$ . Nechť dále platí*

- (i)  $g(a, b) = 0$ ,
- (ii)  $\partial_{n+1}g(a, b) \neq 0$ ,
- (iii)  $\partial_{n+1}g$  je spojitá na  $\text{Mon}(a, b)$ ,
- (iv)  $g$  je spojitá v  $(a, b)$ .

Pak existuje antická reálná funkce  $f$  definovaná na  $\text{Mon}(a)$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(x, y) = 0.$$

Navíc platí, že  $f$  je spojitá v bodě  $a$ .

*Důkaz.* Protože  $g$  je antický objekt a podmínka  $g(x, y) = 0$  je antická, stačí z věty 6 o definici antické reálné funkce na monádě ukázat, že pro každé  $x \in \text{Mon}(a)$  existuje právě jedno  $y \in \text{Mon}(b)$  takové, že  $g(x, y) = 0$ . Spojitost definované funkce  $f$  v bodě  $a$  je z definice zřejmá.

Nechť  $x \in \text{Mon}(a)$  je libovolné. Označme  $h = g(x, \cdot)$  klasickou reálnou funkcí z  $\mathbf{Real}$  do  $\mathbf{Real}$  takovou, že  $h(t) := g(x, t)$ . Zřejmě  $h$  je definovaná na  $\text{Mon}(b)$ ,  $h(b) \doteq 0$  (z bodů (i) a (iv)) a existuje  $r \in \mathbf{Real} \setminus \{0\}$  takové, že  $h' \doteq r$  na  $\text{Mon}(b)$  (z bodů (ii) a (iii)). Funkce  $h$  je tedy spojitá na  $\text{Mon}(b)$ .

Dokažme nejdříve existenci. V případě, že  $h(b) = 0$ , jsme hotovi. Předpokládejme dále, že  $h(b) \neq 0$ . Nechť  $\alpha \in \text{Mon}(0)$  je libovolné. Z Lagrangeovy věty 19 aplikované na funkci  $h$  a body  $b, b + \alpha$  ve světě  $\mathcal{C}$  máme, že existuje  $\xi_\alpha \in \text{Mon}(b)$  takové, že

$$h(b + \alpha) = \alpha \cdot h'(\xi_\alpha) + h(b).$$

Volbou  $\alpha := |2h(b)/r| \in \text{Mon}(0)$  z předchozí rovnosti snadným výpočtem plyne, že  $h(b - \alpha)$  a  $h(b + \alpha)$  mají opačná znaménka. Díky spojitosti  $h$  na  $[b - \alpha, b + \alpha]$  z Bolzanovy věty 12 o mezihodnotě plyne, že existuje  $y \in [b - \alpha, b + \alpha] \subseteq \text{Mon}(b)$  takové, že  $0 = h(y) = g(x, y)$ .

Pro důkaz jednoznačnosti předpokládejme, že existuje  $\hat{y} \in \text{Mon}(b)$  takové, že  $h(\hat{y}) = 0$ . Z Lagrangeovy věty 19 aplikované na funkci  $h$  a body  $y, \hat{y}$  ve světě  $\mathcal{C}$  existuje  $\vartheta \in \text{Mon}(b)$  takové, že

$$0 = h(\hat{y}) - h(y) = (\hat{y} - y) \cdot h'(\vartheta).$$

Protože  $h'(\vartheta)$  je vždy nenulové, nutně platí  $\hat{y} = y$ .

□

*Poznámka.* Zformulujeme-li předchozí lemma ve světě  $\mathcal{A}$ , je její tradiční důkaz podobně dlouhý. Lze jej nalézt například na str. 105-106 (Zajíček, 2007), a proto jej zde nebudeme uvádět. Náš důkaz je zajímavý tím, že se oproti tradičnímu přístupu zcela vyhneme práci s okolními body. Místo toho pracujeme na monádě a jádrem důkazu je ukázat, že dostatečně rychle (s kladnou antickou derivací) rostoucí spojitá klasická funkce projde všemi body monády, speciálně i její projekcí.

**Lemma 28** (Slabá věta o implicitní funkci s derivací v bodě). *Nechť  $(a, b) = (a^1, \dots, a^n, b) \in \mathbf{Real}^{n+1}$  a  $g$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^{n+1}$  do  $\mathbf{Real}$  definovaná na  $\text{Mon}(a, b)$ . Nechť dále platí*

- (i)  $g(a, b) = 0$ ,
- (ii)  $\partial_{n+1}g(a, b) \neq 0$ ,
- (iii)  $\partial_{n+1}g$  je spojitá na  $\text{Mon}(a, b)$ ,
- (iv) Existuje  $\partial g(a, b)$ .

*Pak existuje antická reálná funkce  $f$  definovaná na  $\text{Mon}(a)$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí*

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(x, y) = 0.$$

*Navíc platí, že existuje  $\partial f(a)$  a  $\partial_i f(a) = -\frac{\partial_i g(a, b)}{\partial_{n+1}g(a, b)}$  pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

*Důkaz.* Protože z bodu (iv) dle věty 21 plyne, že  $g$  je spojitá v bodě  $(a, b)$ , jsou splněny všechny předpoklady lemmatu 27 a existuje tedy funkce  $f$  spojitá v bodě  $a$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí  $f(x) = y \Leftrightarrow g(x, y) = 0$ .

Z existence  $\partial g(a, b)$  podle věty 18 pro libovolné  $\alpha \in \text{Mon}^{n+1}(0)$  existuje  $\beta \in \text{Mon}^{n+1}(0)$  takové, že  $g((a, b) + \alpha) - g(a, b) - \partial g(a, b)(\alpha) = \beta^T \cdot \alpha$ . Uvažujme libovolnou nekonečně malou změnu  $\gamma \in \text{Mon}^n(0)$  v bodě  $a$ . Zvolme  $\alpha := (\gamma, f(a + \gamma) - f(a))$ , tj. tak, aby platilo  $g((a, b) + \alpha) = g(a, b) = 0$ . Zřejmě  $\alpha \in \text{Mon}^{n+1}(0)$ , neboť  $f$  je spojitá v bodě  $a$ . Dostaneme tedy rovnost

$$-\sum_{i=1}^n \partial_i g(a, b) \cdot \gamma^i - \partial_{n+1}g(a, b) \cdot (f(a + \gamma) - f(a)) = \sum_{i=1}^n \beta^i \cdot \gamma^i + \beta^{n+1} \cdot (f(a + \gamma) - f(a)).$$

Po úpravě získáme

$$f(a + \gamma) - f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial_i g(a, b) + \beta^i}{\partial_{n+1}g(a, b) + \beta^{n+1}} \cdot \gamma^i = 0.$$

Všimněme si, že rovnici jsme mohli dělit výrazem  $\partial_{n+1}g(a, b) + \beta^{n+1}$ , neboť  $\partial_{n+1}g(a, b)$  je nenulové antické reálné číslo. Zřejmě také pro každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  existuje  $\delta^i \in \text{Mon}^1(0)$  takové, že

$$\frac{\partial_i g(a, b) + \beta^i}{\partial_{n+1}g(a, b) + \beta^{n+1}} = \frac{\partial_i g(a, b)}{\partial_{n+1}g(a, b)} + \delta^i$$

Existuje tedy  $\delta := (\delta^1, \dots, \delta^n) \in \text{Mon}^n(0)$  takové, že

$$f(a + \gamma) - f(a) - \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\partial_i g(a, b)}{\partial_{n+1}g(a, b)} \right) \cdot \gamma^i = \delta^T \cdot \gamma,$$

tedy z definice existuje  $\partial f(a)$  a zřejmě

$$\partial_i f(a) = -\frac{\partial_i g(a, b)}{\partial_{n+1}g(a, b)}.$$

□

**Věta 29** (Slabá věta o implicitní funkci třídy  $C^p$  na monádě). *Nechť  $p \in \mathbf{FN} \cup \{\infty\}$ . Nechť  $(a, b) = (a^1, \dots, a^n, b) \in \mathbf{Real}^{n+1}$  a  $g$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^{n+1}$  do  $\mathbf{Real}$  definovaná na  $\text{Mon}(a, b)$ . Nechť dále platí*

- (i)  $g(a, b) = 0$ ,
- (ii)  $\partial_{n+1}g(a, b) \neq 0$ ,
- (iii)  $\partial_{n+1}g$  je spojitá na  $\text{Mon}(a, b)$ ,
- (iv)  $g$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a, b)$ .

*Pak existuje antická reálná funkce  $f$  definovaná na  $\text{Mon}(a)$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí*

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(x, y) = 0.$$

*Navíc platí, že  $f$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a)$ .*

*Důkaz.* Začneme případem  $p = 0$ . Lemma 27 nám ihned zaručuje existenci  $f$  a její spojitost v bodě  $a$ . Nechť  $\hat{a} \in \text{Mon}(a)$  a označme  $\hat{b} := f(\hat{a})$ . Všimněme si, že pro reálnou funkci  $g$  platí, že  $g(\hat{a}, \hat{b}) = 0$  i  $\partial_{n+1}g(\hat{a}, \hat{b}) \neq 0$ . Pro bod  $(\hat{a}, \hat{b})$  a funkci  $g$  jsou splněny předpoklady lemmatu 27 formulovaného ve světě  $\mathcal{C}$ , existuje tedy reálná funkce  $\hat{f}$  spojitá v bodě  $\hat{a}$ . Protože na monádě bodu  $\hat{a}$  jsou funkce  $\hat{f}$  a  $f$  totožné<sup>12</sup> a spojitost funkce v bodě je lokální vlastnost, ze spojitosti  $\hat{f}$  v bodě  $\hat{a}$  plyne díky tvrzení 9 i spojitost  $f$  v bodě  $\hat{a}$ .

V případě  $p = 1$  je zřejmě splněn i případ  $p = 0$ . Pro důkaz, že  $\partial_i f(\hat{a}) = -\frac{\partial_i g(\hat{a}, f(\hat{a}))}{\partial_{n+1}g(\hat{a}, f(\hat{a}))}$  postupujeme obdobně jako v předchozím případě, uvědomíme-li si, že díky větě 22 jsou ihned splněny předpoklady lemmatu 28 a že existence vlastní parciální derivace funkce v bodě i její velikost je lokální vlastnost. Spojitost  $\partial_i f$  v bodě  $\hat{a}$  plyne ze zřejmé spojitosti funkce  $-\frac{\partial_i g(\hat{a}, f(\hat{a}))}{\partial_{n+1}g(\hat{a}, f(\hat{a}))}$  v bodě  $\hat{a}$ .

Případ  $p > 1, p \in \mathbf{FN}$  ukážeme indukcí. Nechť  $V(q)$  je tvrzení, že  $f$  je třídy  $C^q$  na  $\text{Mon}(a)$ . Z předchozí části důkazu zřejmě  $V(1)$  platí. Předpokládejme nyní, že pro nějaké  $q < p$  platí  $V(q)$ . Platí tedy, že  $f$  je třídy  $C^q$  na  $\text{Mon}(a)$ . Zároveň pro každé  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  je funkce  $\partial_i g$  třídy  $C^q$  na  $\text{Mon}(a, b)$ . Z předpisu pro výpočet parciálních derivací  $f$  jsou zřejmě i  $\partial_i f$  třídy  $C^q$  na  $\text{Mon}(a)$ , tedy  $f$  je třídy  $C^{q+1}$  na  $\text{Mon}(a)$ , tj. platí  $V(q+1)$ . Protože věta platí pro každé  $p \in \mathbf{FN}$ , platí z definice i pro  $p = \infty$ . □

<sup>12</sup>Při formulaci lemmatu 27 ve světě  $\mathcal{C}$  se zde nabízejí dvě základní možnosti, jak ji nahlížet.

První možností je použít překladová pravidla a zformulovat tak celé lemma pouze prostředky světa  $\mathcal{A}$ . Díky zákonům expanze toto lemma platí i ve světě  $\mathcal{C}$  a tak ho použijeme. V tomto případě není těžké ověřit i zbylé předpoklady věty. Z jejího závěru pak díky větě 7 plyne existence funkce  $\hat{f}$ , která je definovaná podmínkou  $g = 0$  na nějakém  $B_\delta(\hat{a}) \times B_\Delta(\hat{b})$ , které za našich předpokladů bude obsaženo v  $\text{Mon}(a, b)$ . Totožnost  $\hat{f}$  na tomto okolí s  $f$  plyne ihned.

Druhou možností je si uvědomit, že pokud mluvíme v lemmatu 27 platném ve světě  $\mathcal{C}$  o monádě, myslíme tím takovou třídu nekonečně blízkých bodů, která vznikne až při expanzi světa  $\mathcal{C}$  do nějakého světa  $\mathcal{D}$ . Totožnost funkcí  $\hat{f}$  a  $f$  tedy ověřujeme na monádě bodu  $\hat{a}$  ve světě  $\mathcal{D}$ . Ta platí, jelikož jsou definovány stejnou funkcí  $g$ , která je antická a kterou rozepneme nejdříve do světa  $\mathcal{C}$  a pak ještě jednou do světa  $\mathcal{D}$ .

**Věta 30** (Věta o implicitní funkci třídy  $C^p$  na monádě). *Nechť  $p \in \mathbf{FN} \cup \{\infty\}$ ,  $p \geq 1$ . Nechť  $(a, b) := (a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^k) \in \mathbf{Real}^{n+k}$  a  $g$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^{n+k}$  do  $\mathbf{Real}^k$  definovaná na  $\text{Mon}(a, b)$ . Nechť dále platí*

$$(i) \quad g(a, b) = 0,$$

$$(ii) \quad \partial g(a, \cdot)(b) \text{ je bijekce,}^{13}$$

(iii)  $g$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a, b)$ .

*Pak existuje antická reálná funkce  $f$  definovaná na  $\text{Mon}(a)$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí*

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(x, y) = 0.$$

*Navíc platí, že  $f$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a)$ .*

*Důkaz.* Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že  $[\partial g(a, \cdot)(b)]$  je jednotková matice. Pokud by tomu tak nebylo, označme lineární bijekci  $L := \partial g(a, \cdot)(b)$  a definujme  $\hat{g} := L^{-1} \circ g$ . Funkce  $\hat{g}$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a, b)$  a navíc  $g(x, y) = 0$  platí, právě když  $\hat{g}(x, y) = 0$ . Nakonec

$$\partial \hat{g}(a, \cdot)(b) = \partial(L^{-1} \circ g(a, \cdot))(b) = L^{-1} \circ \partial g(a, \cdot)(b) = \text{id},$$

tedy  $[\partial \hat{g}(a, \cdot)(b)] = [\text{id}]$ , což je jednotková matice. Důkaz bychom pak provedli pro  $\hat{g}$ .

Důkaz provedeme indukcí dle  $k$ . Nechť  $V(k)$  označuje platnost celé této věty pro nějaké  $k \geq 1$ . Je-li  $k = 1$ , máme  $\partial_{n+1}g(a, b) = 1$  a z věty 29 dostaneme okamžitě platnost  $V(1)$ .

Předpokládejme nyní, že platí  $V(k)$  a chceme dokázat platnost  $V(k+1)$ . Z předpokladů tvrzení  $V(k+1)$  máme tedy, že  $\partial_{n+k+1}g(a, b) = 1$ , z věty 29 existuje tedy antická reálná funkce  $\phi$  třídy  $C^p$  definovaná na  $\text{Mon}(a, b^1, \dots, b^k)$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí

$$\phi(x, y^1, \dots, y^k) = y^{k+1} \Leftrightarrow g(x, y) = 0.$$

Dosazením funkce  $\phi$  místo proměnné  $y^{k+1}$  definujme na  $\text{Mon}(a, b^1, \dots, b^k)$  novou reálnou funkci  $h$  z  $\mathbf{Real}^{n+k}$  do  $\mathbf{Real}^k$  jako

$$h(x, y^1, \dots, y^k) := g(x, y^1, \dots, y^k, \phi(x, y^1, \dots, y^k)).$$

Funkce  $h$  je zřejmě třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a, b^1, \dots, b^k)$ , platí  $h(a, b^1, \dots, b^k) = 0$  a pro všechna  $n+1 \leq i \leq n+k$  zřejmě platí

$$\partial_i h(a, b^1, \dots, b^k) = \partial_i g(a, b) + \partial_{n+k+1}g(a, b) \cdot \partial_i \phi(a, b^1, \dots, b^k).$$

Protože  $\partial_{n+k+1}g(a, b) = 0$ , platí, že  $\partial h(a, \cdot)(b^1, \dots, b^k)$  je bijekce. Na funkci  $h$  a bod  $(a, b^1, \dots, b^k)$  můžeme tedy použít indukční předpoklad  $V(k)$  a dostaneme antickou reálnou funkci  $\psi$  třídy  $C^p$  definovanou na  $\text{Mon}(a)$  takovou, že pro všechna  $(x, y^1, \dots, y^k) \in \text{Mon}(a, b^1, \dots, b^k)$  platí

$$\psi(x) = (y^1, \dots, y^k) \Leftrightarrow h(x, y^1, \dots, y^k) = 0.$$

<sup>13</sup>Této podmínce je ekvivalentní zápis  $\det[\partial g(a, \cdot)(b)] \neq 0$ , přičemž reálnou funkcí  $g(a, \cdot)$  myslíme funkci dle definice  $g(a, \cdot) : y \mapsto g(a, y)$ .

Nyní si již jen stačí uvědomit, že funkce  $f(x) := (\psi(x), \phi(x, \psi(x)))$  je antická reálná funkce třídy  $C^p$  definovaná na  $\text{Mon}(a)$  taková, že pro všechna  $(x, y) \in \text{Mon}(a, b)$  platí

$$f(x) = y \Leftrightarrow g(x, y) = 0,$$

tedy platí  $V(k + 1)$ . □

*Poznámka.* Náš důkaz není nijak nestandardní, probíhá velmi podobně jako např. na str. 109-111 (Zajíček, 2007). Je však kratší o všechny úvahy o inkluzích nej-různějších okolí. V našem případě stačí ověřovat triviální podmínky náležení do monády, které jsou ze spojitosti všech funkcí vždy splněny.

### 3.9 Věta o inverzní funkci

**Definice 21.** *Nechť  $p \in \mathbf{FN} \cup \{\infty\}$ ,  $p \geq 1$ ,  $x \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^n$ . Řekneme, že  $f$  je **difeomorfismus třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(x)$** , jestliže  $f|_{\text{Mon}(x)}$  je bijekce  $\text{Mon}(x)$  na  $\text{Mon}(f(x))$  taková, že  $f|_{\text{Mon}(x)}$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(x)$  a  $f^{-1}|_{\text{Mon}(f(x))}$  je třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(f(x))$ .*

Tato definice je snadno dle překladových pravidel ekvivalentní tradiční definici difeomorfismu (na nějakém okolí bodu  $x$ ). Věta o inverzní funkci má však v naší formulaci velmi elegantní důkaz.

**Věta 31** (Věta o inverzní funkci). *Nechť  $p \in \mathbf{FN} \cup \{\infty\}$ ,  $p \geq 1$ ,  $b \in \mathbf{Real}^n$  a  $f$  je antická reálná funkce z  $\mathbf{Real}^n$  do  $\mathbf{Real}^n$  třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(b)$ . Pokud  $\partial f(b)$  je bijekce, pak  $f$  je difeomorfismus třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(b)$ .*

*Důkaz.* Inverzní funkci  $y = f^{-1}(x)$  počítáme z rovnice  $g(x, y) := x - f(y) = 0$  pomocí věty 30 o implicitních funkcích. Označme  $a := f(b)$ . Protože platí  $g(a, b) = 0$ ,  $\partial g(a, \cdot)(b) = \partial(a - f(\cdot))(b) = -\partial f(b)$  je bijekce a  $g$  je zřejmě třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a, b)$ , jsou splněny předpoklady věty a existuje tedy funkce  $\tilde{f}$  třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(a) = \text{Mon}(f(b))$  taková, že pro všechny  $x \in \text{Mon}(f(b))$ ,  $y \in \text{Mon}(b)$  platí, že

$$\tilde{f}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y).$$

Protože  $f$  je definovaná na  $\text{Mon}(b)$  a  $\tilde{f} = f^{-1}$  jsou totožné na  $\text{Mon}(f(b))$  je  $f$  bijekce  $\text{Mon}(b)$  na  $\text{Mon}(f(b))$ , tedy difeomorfismus třídy  $C^p$  na  $\text{Mon}(b)$ . □

# Dodatek

Stranou aplikace nové teorie množin a polomnožin na matematickou analýzu je užitečné zkoumat tzv.  $\pi$ -třídy a  $\sigma$ -třídy,<sup>14</sup> které jsou vhodné k matematizaci nejrůznějších neostrých jevů.

Jejich zobecněním vzniká přirozeně hierarchie deskriptivních tříd, kterou Petr Vopěnka popsal v kapitole II.9 (Vopěnka, 2011a). Jako součást této práce ještě uvádím důkaz následujícího tvrzení.<sup>15</sup>

**Věta 32.** *Nechť  $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbf{FN}}$  je posloupnost **A**-tříd. Potom*

$$\bigcap \{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbf{FN}} \quad \text{je } \mathbf{A}\text{-třída.}$$

*Důkaz.* Hledáme  $\pi\sigma$ -třidu  $\mathcal{Y}$  takovou, že  $\bigcap \{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbf{FN}} = \text{dom}(\mathcal{Y})$ .

Nechť  $\mathcal{X}_n = \text{dom}(\mathcal{Y}_n)$ , kde  $\mathcal{Y}_n$  je  $\pi\sigma$ -třída, tedy  $\mathcal{Y}_n = \bigcap_{k \in \mathbf{FN}} \bigcup_{l \in \mathbf{FN}} Y_n^{k,l}$ , kde  $Y_n^{k,l}$  jsou množiny. Nechť  $w$  je množina obsahující všechny definiční obory a obory hodnot  $Y_n^{k,l}$  a nechť  $\gamma \in \mathbf{IN}$ . Pro každé  $n, k, l \in \mathbf{FN}$  nyní zavedeme pomocnou množinu

$$Z_n^{k,l} = \{ \langle \{a_\beta\}_{\beta \in [\gamma]}, x \rangle \in w^{[\gamma]} \times w; \langle a_n, x \rangle \in Y_n^{k,l} \}.$$

Definujme  $\mathcal{Y} = \bigcap_{n,k \in \mathbf{FN}} \bigcup_{l \in \mathbf{FN}} Z_n^{k,l}$ , což je zřejmě  $\pi\sigma$ -třída. Dokážeme, že  $\mathcal{Y}$  je naše hledaná třída, tedy že platí  $\bigcap \{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbf{FN}} = \text{dom}(\mathcal{Y})$ .

Nechť nejprve  $x \in \bigcap \{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbf{FN}}$ . Pro každé  $n$  je  $x \in \mathcal{X}_n = \text{dom}(\mathcal{Y}_n)$ , existuje tedy  $b_n \in w$  takové, že  $\langle b_n, x \rangle \in \mathcal{Y}_n$ . Zřejmě pro každé  $n, k$  existuje  $l$  takové, že  $\langle b_n, x \rangle \in Y_n^{k,l}$ . Za použití tiché verze axiomu výběru definujeme posloupnost  $\{b_n\}_{n \in \mathbf{FN}}$ , která je stabilní. Nechť  $\{b_\beta\}_{\beta \in [\gamma]} \in w^{[\gamma]}$  je její libovolné prodloužení, jehož existenci zaručuje axiom prodloužení. Nyní snadno ověříme, že pro každé  $n, k$  existuje  $l$  takové, že  $\langle \{b_\beta\}_{\beta \in [\gamma]}, x \rangle \in Z_n^{k,l}$ . Odtud  $\langle \{b_\beta\}_{\beta \in [\gamma]}, x \rangle \in \mathcal{Y}$ . Právě jsme dokázali, že  $x \in \text{dom}(\mathcal{Y})$ .

Nechť naopak  $x \in \text{dom}(\mathcal{Y})$ . Potom najdeme  $c$  takové, že  $\langle c, x \rangle \in \mathcal{Y}$ . Pro každé  $n, k$  existuje  $l$  takové, že  $\langle c, x \rangle \in Z_n^{k,l}$ , tedy  $c \in w^{[\gamma]}$  a je tvaru  $\{c_\beta\}_{\beta \in [\gamma]}$ , kde  $\langle c_n, x \rangle \in Y_n^{k,l}$ . Pro každé  $n$  máme tedy  $\langle c_n, x \rangle \in \mathcal{Y}_n$ , tedy  $x \in \text{dom}(\mathcal{Y}_n) = \mathcal{X}_n$ . Ukázali jsme, že  $x \in \bigcap \{\mathcal{X}_n\}_{n \in \mathbf{FN}}$ . □

<sup>14</sup>Viz kapitola II.5.2 (Vopěnka, 2011a).

<sup>15</sup>Je to důkaz tvrzení II.9.14 (Vopěnka, 2011a), který je v pramenu chybný. Všechny pojmy, na které se v důkazu odkazují a které nejsou součástí kapitoly II.9, lze najít v tomto pramenu. Jmenovitě tichá verze axiomu výběru se nachází na str. 108, definice stabilnosti funkce na str. 75 a axiom prodloužení na str. 76.

# Závěr

V této práci jsme navázali na diferenciální počet reálných funkcí jedné proměnné způsobem, jak ho zavedl v *Calculus Infinitesimalis* Petr Vopěnka.<sup>16</sup> Pro reálné funkce více proměnných jsme zavedli pojem spojitosti, parciální derivace, derivace podle vektoru a derivace funkce v bodě. Poukázali jsme na lokální charakter těchto vlastností a ukázali jsme základní vztahy mezi nimi.

Na větách, jakými jsou Bolzanova věta o mezihodnotě či Lagrangeova věta o přírůstku funkce, jsme ukázali sílu naší metody, kdy nahlížíme tyto funkce dvojitým způsobem, jednou jako nekonečné antické funkce (chápané tradičním způsobem jako nekonečné) a podruhé jako jejich konečné (množinové) rozšíření v klasickém světě.

Formulací a důkazem vět o implicitní funkci a o inverzní funkci pomocí pojmu monády ukazujeme jiný způsob pohledu na tyto věty, který vystihuje jejich lokální charakter přímo a nekomplikuje jeho popis tradičním rozlišováním několika různých do sebe určitým způsobem vnořených otevřených okolí.

Na tuto práci se dá navázat dalším zkoumáním podmínek, za kterých je reálná funkce bijekcí monády bodu na monádu obrazu bodu, a to nejen funkcí antických, ale zejména funkcí klasických, kterým jsme se zde takřka nevěnovali.

Právě pomocí analýzy klasických funkcí (jakou je např. Diracova delta funkce) by se dalo velmi přispět ke zjednodušení popisu jevů, které se snaží modelovat funkcionální analýza.

Také pojmu mříže jsme se zde dotkli jen okrajově. Jeho dalším zkoumáním a nalézáním spojitostí vlastností klasických funkcí s jejich vlastnostmi omezenými na mříž, by se dal nejen vystavět integrální kalkulus reálných funkcí více proměnných, ale daly by se hledat i aplikace pro numerickou matematiku.

---

<sup>16</sup>Konkrétně (Vopěnka, 2010).

# Seznam použité literatury

- VOPĚNKA, P. (2008). *Pojednání o jevech povstávajících na množstvích*. Druhé vydání. OPS, Plzeň a Nymburk. ISBN 978-80-87269-02-2.
- VOPĚNKA, P. (2010). *Calculus infinitesimalis. Pars prima, Úvod do diferenciálního počtu reálných funkcí jedné proměnné*. Druhé opravené a dopracované vydání. OPS, Kanina. ISBN 978-80-87269-09-1.
- VOPĚNKA, P. (2011a). *Velká iluze matematiky XX. století a nové základy*. První vydání. Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni a Nakladatelství Koniáš, Plzeň. ISBN 978-80-261-0074-4.
- VOPĚNKA, P. (2011b). *Calculus infinitesimalis. Pars secunda, Integrál reálné funkce jedné proměnné*. První vydání. Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni a OPS, Plzeň-Kanina. ISBN 978-80-87269-16-9.
- ZAJÍČEK, L. (2007). *Vybrané partie z matematické analýzy pro 2. ročník*. Druhé upr. vydání. MATFYZPRESS, Praha. ISBN 978-80-7378-027-2.