Posudek vedoucího bakalářské práce
Idempotentní ideály v celočíselné algebře symetrické grupy
Dominika Lachmana

Předložená práce vyvrací hypotézu, že pro každé $n \geq 5$ a ideál $I = I^2$ okruhu $\mathbb{Z}S_n$ je $\mathbb{Q}I$ buď 0, celé $\mathbb{Q}S_n$ nebo augmentační ideál A_n, tedy jádro homomorfismu $\mathbb{Q}S_n \to \mathbb{Q}(S_n/A_n)$.

Motivací pro hypotézu je výsledek R.G. Swana publikovaný v roce 1963, podle kterého je každý projektivní $\mathbb{Z}G$-modul buď konečně generovaný nebo volný, pokud G je konečná řešitelná grupa. Výsledek zmiňuje H. Bass v článku *Big projective modules are free* a dodává, že to bude nepochybně pravda i pro všechny konečné grupy. Za necelých dvacet let se však ukázalo, že opak je pravdou - pokud konečná grupa G není řešitelná bude existovat projektivní $\mathbb{Z}G$-modul, který není ani volný, ani konečně generovaný. Přesto je možné v některých případech 'nekonečně generované' projektivní $\mathbb{Z}G$-moduly klasifikovat (např. pokud $G = A_5$). Klíčovou roli zde hrají právě idempotentní ideály a platnost zkoumané hypotézy by dávala naději na alespoň rámcové zvládnutí tohoto problému pro symetrické grupy. Výsledek práce kolegy Lachmana ukazuje, že situace je bohužel mnohem složitější.

Vlastní práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole jsou představeny abstraktní nástroje teorie okruhů doplněné o několik konkrétních výpočtů, které budou potřeba později. Druhá kapitola obsahuje stručný výklad pojmů z modulárních reprezentací grup. Třetí kapitola ukazuje platnost hypotézy pro $n = 5$ a pro $n = 7$ je nalezen ideál vyvracející zmíněnou hypotézu.

Úroveň práce je výborná. Autor dokázal zapracovat do textu poměrně složitou a rozsáhlou teorii, aniž by neúnosně zvětšil rozsah práce, vše je přitom vyloženo srozumitelně. Z textu je patrné dobré porozumění dané problematiky. Dále oceňuji, že po hrubém vysvětlení metody výpočtu pracoval kolega Lachman zcela samostatně. V textu zůstalo několik nepřesností, např.

- Na straně 2, předposlední řádek: Aby platilo $m(gh) = (mg)h$, musí se místo $\varphi(g)$ objevit $\varphi(g^{-1})$.
- Na straně 7 v popisu pojmu primitivní idempotent má být 'netriviální rozklad na součet dvou ortogonálních idempotentů', např. když $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ je $(1,0,0) = (1,1,1) + (0,1,1)$.
- Na straně 11 zobrazení mezi $Id(\mathbb{Z}S_n)$ a $\prod_{p\in\mathbb{P},p\leq n} Id(\mathbb{Z}_{(p)}S_n)$ není bijekce, ale vnoření, jehož obraz popisuje Věta 2.

Celkově si myslím, že jde o velice kvalitní práci, která by po určitém dotažení asi obstála i jako práce diplomová. Práci proto doporučuji uznat jako bakalářskou s hodnocením

V Praze, 28. 8. 2015

Pavel Příhoda