OPONENTSKÝ POSUDEK BAKALÁŘSKÉ PRÁCE „IDEMPOTENTNÍ IDEÁLY V CELOČÍSELNÉ GRUPOVÉ ALGEBŘE SYMETRICKÉ GRUPY“

Práce Dominika Lachmana zkoumá platnost hypotézy, podle níž by každý oboustranný idempotentní ideál grupového okruhu $\mathbb{Z}S_n$ měl generovat v $\mathbb{Q}S_n$ buď nevlastní ideál, nebo ideál augmentační. Závěrečný výpočet dekompozičních matic pomocí Braeurových charakterů provedený v softwaru Magma ukazuje, že pro $n = 5$ hypotéza platí, zatímco pro $n = 7$ nikoliv. Převod vyšetřování oboustranných idempotentních ideálů v $\mathbb{Z}S_n$ (či přesněji, jejich souvislosti s idempotentními ideály v $\mathbb{Q}S_n$) na počítání dekompozičních matic je ovšem velmi netriviální. Podrobnému teoretickému popisu této (vícekrokové) transformace je věnována většina předkládaného textu.

Bakalářská práce má příjemně přímočarou strukturu, která čtenáři umožňuje bez většího úsilí sledovat hlavní myšlenku a neztratit se v občasné techničtější pasáži. Po krátké motivační části a formulaci hypotézy následuje postupné převádění problému. Nejprve do lokálního případu: místo vyšetřování grupového okruhu $\mathbb{Z}S_n$ a jeho idempotentních ideálů se zkoumají idempotentní ideály v okruzích $\mathbb{Z}_{(p)}S_n$ pro prvočísla $p \leq n$. V dalším se pak využije faktu, že okruhy $\mathbb{Z}_{(p)}S_n$ jsou noetherovské a semiperfektní. V těchto okruzích máme totiž k dispozici přehledný popis konečně generovaných projektivních modulů a víme (věta 13), že každý idempotentní ideál je stopovým ideálem nějakého konečně generovaného projektivního modulu.

V další fázi bylo nutné rozklíčovat, co se děje s konečně generovanými projektivními moduly nad $\mathbb{Z}_{(p)}S_n$ při aplikaci funktoru $- \otimes_{\mathbb{Z}_{(p)}} \mathbb{Q}$. Tomu se věnuje druhá kapitola, kde se celý problém redukuje na spočtení (matice) jednoho konkrétního homomorfismu mezi jistými (volnými) Grothendieckovými grupami. Ukazuje se, že tato matice je maticí transponovanou k tzv. dekompoziční matici, o jejímž výpočtu (s pomocí Braeurových charakterů) pojednává podkapitola 2.3.

Ve třetí kapitole je následně popsán vlastní výpočet idempotentních ideálů v $\mathbb{Z}S_n$ pro $n = 5$ a $n = 7$, zatímco čtvrtá kapitola sestává toliko z tabulek Braeurových charakterů použitých při tomto výpočtu.

Student musel načíst a následně přehledně zpracovat vcelku netriviální penzum teorie k tomu, aby mohl provést výpočet, který – snad poněkud překvapivě – vyvrátil původní hypotézu pro $n = 7$, ačkoliv bylo známo, že tato platí pro menší hodnoty n. Práce je hezky vystavěná, je poznat, že autor rozumí pojmům, o nichž referuje. Množství překlepů je přiměřené rozsahu práce.

Za menší negativa textu Dominika Lachmana považuji především anglický abstrakt a stránku 34 s literaturou, kde u článků schází paginace. Dále potom nešťastné užívání spojení „sjednotíme-li“ ve významu „ztotožníme-li“. Tu a tam se vyskytne i menší nekonzistentnost ve značení, např. oddělovací znak ve složených závorkách v důkazu lemmatu 1 či $Ch(KG)$ ve větě 31, které je zavedeno dříve jako $ch(KG)$. Celkově oceňuji spíše minimalistický přístup, kdy se nebuduje zbytnělá terminologie a značení, které se posléze prakticky nevyužijí. Na několika místech by si ale značení, po mém soudu, přece jen menší komentář zasloužilo: kupříkladu užití $\mathbb{Z}[V_i]$ na straně 16 dole (a dále v lemmatu 18).

Celkově ale text Dominika Lachmana „Idempotentní ideály v celočíselné grupové algebře symetrické grupy“ považuji za velice kvalitní a jednoznačně jej **doporučuji**

uznat jako bakalářskou práci. Na uchazeče o titul Bc. bych měl následující dotazy:

1) V odstavci, který na straně 8 následuje za lemmatem 5, zmiňujete, že v následující kapitole ukážete, že pro R DVR a G konečnou grupu platí $J(R)G \subseteq J(RG)$. Odkazujete se konkrétně na lemma 2.1, což je jistě překlep; mohl byste upřesnit, o jaký výsledek z kapitoly 2 se jedná?

2) Na straně 16, na konci prvního odstavce podkapitoly 2.2 zavádíte pro každý S-modul M značení $[M]$. Co když ovšem M není izomorfní žádnému modulu ze skeletálně malé kategorie C?

3) Závěr podkapitoly 3.1: který idempotentní ideál konkrétně vyvrací hypotézu, již v práci zkoumáte? J_1, nebo J_2?

4) Proč jste se rozhodl užít značení $Mod(R)$ a $Proj(R)$ pro kategorie konečně generovaných (resp. projektivních) R-modulů, když je obvyklým územ užívat pro případ konečné generovanosti (což je totéž jako konečná prezentovanost, ve Vašem noetherovském případě) značení s malými počátečními písmeny?

5) V práci v podstatě u všech nedokazovaných tvrzení poctivě odkazujete na zdroj, kde lze důkaz dohledat. Ovšem, jak jsem pochopil, je i několik dokázaných tvrzení přebráno z již existující literatury; kupříkladu lemma 23 je, tuším, z [3] stejně jako lemma 24. Mohl byste přesněji identifikovat své vlastní výsledky v práci?

V Praze dne 24. srpna 2015

Mgr. Jan Šaroch, Ph.D.