Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Juraj Hartman

Počítání složitosti množin

Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2015

Děkuji doc. Miroslavu Zelenému za vedení a cenné připomínky.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Počítání složitosti množin

Autor: Juraj Hartman

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Katedra matematické analýzy

Abstrakt: V této práci nejdříve popíšeme tzv. borelovskou hierarchii množin v metrickém prostoru a dokážeme několik jejích vlastností. Dále pro konkrétní borelovské podmnožiny konkrétních metrických prostorů (euklidovského prostoru reálných čísel a prostoru kompaktních podmnožin polského prostoru s Vietorisovou topologií) určíme, kde se v této hierarchii nacházejí, tj. určíme takovou třídu borelovské hierarchie, že se v ní daná množina nachází a nenachází se ve všech menších třídách vzhledem k inkluzi, což lze považovat vyjádření její složitosti. Nakonec uvedeme příklad neborelovské koanalytické podmnožiny prostoru kompaktních podmnožin polského prostoru s důkazem její koanalytičnosti.

Klíčová slova: metrický prostor, borelovské množiny, analytické množiny

Title: Complexity of sets

Author: Juraj Hartman

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. RNDr. Miroslav Zelený, Ph.D., Department of Mathematical Analysis

Abstract: In this thesis we first introduce Borel hierarchy of sets in metric spaces and prove some of its properties. Then for special Borel subsets of special metric spaces (Euclidean space of real numbers and the hyperspace of compact subsets of a Polish space with Vietoris topology) we find out where they are in Borel hierarchy, i. e. we find out the class of Borel hierarchy, in which they are, and such that they are in no smaller class with respect to inclusion, which can be understood as an expression of its complexity. Finally we give an example of a coanalytic subset of the hyperspace of compact subsets of a Polish space, which is not Borel, with the proof of its coanalyticity.

Keywords: metric space, Borel sets, analytic sets

Obsah

Kapitola 1

Borelovská hieararchie v metrických prostorech

1.1 Zavedení a vlastnosti

Definice Buď X metrizovatelný topologický prostor. Definujme induktivně následující třídy podmnožin X.

$$\Sigma_1^0(X) := \{A \subseteq X, A \text{ je otevřená}\}.$$

Máme-li ordinální číslo $1 \leq \alpha < \omega_1$, kde ω_1 je nejmenší nespočetný ordinál, položme

$$\Pi_\alpha^0(X) := \{X \setminus A, A \in \Sigma_\alpha^0(X)\},$$

a pro $1 < \alpha < \omega_1$ položme

$$\Sigma_\alpha^0(X) := \{\bigcup_{n\in\omega} A_n; \forall n \in \omega : A_n \in \Pi_{\alpha_n}^0(X) \wedge \alpha_n < \alpha\}.$$

Dále označme

$$\Delta_\alpha^0(X) := \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X).$$

Soubor těchto systémů nazýváme *borelovská hierarchie.*

Bude ještě užitečné zapsat

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha^0(X) &= \{X \setminus \bigcup_{n\in\omega} A_n; \forall n \in \omega : A_n \in \Pi_{\alpha_n}^0(X) \wedge \alpha_n < \alpha\} \\ &= \{\bigcap_{n\in\omega}(X \setminus A_n); \forall n \in \omega : A_n \in \Pi_{\alpha_n}^0(X) \wedge \alpha_n < \alpha\} \\ &= \{\bigcap_{n\in\omega} A_n; \forall n \in \omega : A_n \in \Sigma_{\alpha_n}^0(X) \wedge \alpha_n < \alpha\}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde druhá rovnost plyne z De Morganových pravidel.

Tvrzení 1.1 Buď (X, ρ) metrický prostor. Pak pro každé ordinální číslo $1 \leq \alpha < \omega_1$ platí

$$\Sigma_\alpha^0(X) \cup \Pi_\alpha^0(X) \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0(X).$$

Důkaz. Zřejmě pro každé $1 \leq \alpha < \omega_1$ platí $\Pi^0_\alpha(X) \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}(X)$. Díky (1.1) také analogicky dostáváme $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}(X)$. $\Pi^0_\alpha(X) \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}(X)$ je snadný důsledek definice $\Pi^0_\alpha(X)$ a $\Pi^0_{\alpha+1}(X)$ a tvrzení $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}(X)$. Toto tvrzení nyní dokážeme indukcí.
Nejprve ukažme $\Sigma^0_1(X) \subseteq \Sigma^0_2(X)$, čili že každou otevřenou podmnožinu X lze zapsat jako sjednocení spočetně mnoha uzavřených množin v X. Buď $G \in \Sigma^0_1(X)$. Pro každé $n \in \omega\backslash\{0\}$ definujme množinu $F_n := \{x \in X, \rho(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{n}\}$. Označme $f_G(x) := \rho(x, X \setminus G)$. Pro každá $x, y \in X$ platí $|\rho(x,G) - \rho(y,G)| \leq \rho(x,y)$, z čehož plyne, že funkce g_G definovaná předpisem $g_G(x) := \rho(x,G)$ je 1-lipschitzovská, tedy spojitá, a tedy i funkce f_G je spojitá. Potom je $F_n = f_G^{-1}([\frac{1}{n}, \infty))$ spojitý vzor uzavřené množiny, tedy podle tvrzení z topologie uzavřená množina v X. Rozmyslíme si, že $G = \bigcup_{n\in\omega\backslash\{0\}} F_n$.
Nechť nejprve $x \in \bigcup_{n\in\omega\backslash\{0\}} F_n$, tedy $x \in F_n$ pro nějaké $n \in \omega\backslash\{0\}$. Protože $\rho(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{n} > 0$, nutně je $x \notin X \setminus G$, tedy $x \in G$ a tedy $\bigcup_{n\in\omega\backslash\{0\}} F_n \subseteq G$.
Nyní zvolme $x \in G$. Pak platí, že $d := \rho(x, X \setminus G) = \inf\{\rho(x,y), y \in X \setminus G\} > 0$. Kdyby totiž bylo $d = 0$, pak podle vlastnosti infima pro každé $r > 0$ existuje $y \in X \setminus G$, že $\rho(x,y) < r$, tedy $U(x,r) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$. Protože ale G je otevřená, existuje $r_0 > 0$, že $U(x,r_0) \subseteq G$. Podle předchozího ovšem $U(x,r_0) \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$, což je spor. Dále tedy jistě existuje $n_0 \in \omega\backslash\{0\}$, že $d > \frac{1}{n_0}$, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Potom však $x \in F_{n_0}$, tedy $x \in \bigcup_{n\in\omega\backslash\{0\}} F_n$, a tedy $G \subseteq \bigcup_{n\in\omega\backslash\{0\}} F_n$.
Indukční krok $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \Sigma^0_{\alpha+1}(X)$ pro každé $1 < \alpha < \omega_1$ je snadný důsledek definice $\Sigma^0_\alpha(X)$ a $\Sigma^0_{\alpha+1}(X)$. □

Poznámka: Pro obecné topologické prostory toto tvrzení (konkrétně $\Sigma^0_1(X) \subset \Sigma^0_2(X)$) neplatí. Vezmeme-li např. systém podmnožin T množiny X takové, že $|X| \geq 2$, definovaný jako $T := \{\emptyset, V, X\}$, kde V je neprázdná vlastní podmnožina X, je systém T zřejmě topologie na X (navíc není T2, ačkoli každý metrický prostor je T2, takže prostor (X,T) není metrizovatelný). V je otevřená, ale není typu F_σ, protože V kromě prázdné neobsahuje žádnou uzavřenou podmnožinu. Proto se v nemetrizovatelných topologických prostorech používají jiné hierarchie.

Připomeňme, že σ-algebra na X je takový systém S podmnožin X, že platí:
(i) $X \in S$
(ii) pokud $A \in S$, pak $X \setminus A \in S$
(iii) pokud $A_n \in S$ pro každé $n \in \omega$, pak $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in S$

Prvky nejmenší σ-algebry obsahující otevřené podmnožiny X se nazývají *borelovské* množiny. Tuto σ-algebru označme jako $B(X)$.

Všimněme si, že každá σ-algebra je uzavřena na operace, pomocí kterých jsou induktivně vytvořeny systémy množin v borelovské hierarchii. To je podstata důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 1.2 Je-li X metrický prostor, platí

$$B(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Delta^0_\alpha(X).$$

Důkaz. Nejdříve dokážeme druhou rovnost. Pro každé ordinální číslo $1 \leq \alpha < \omega_1$ máme dle Tvrzení 1.1 $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \Pi^0_{\alpha+1}(X)$, tedy $\Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha(X)$ a tedy

$\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X) \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha(X)$. Analogicky také s využitím Tvrzení 1.1 se dokáže opačná inkluse této rovnosti i třetí rovnost.
Zbývá ukázat první rovnost. $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X) \subseteq B(X)$ plyne okamžitě z předchozí poznámky. Pro důkaz $B(X) \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$ si stačí uvědomit, že $\Sigma^0_1(X) \subseteq \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$, což je zřejmé, a že $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$ je σ-algebra.
Zjevně $X \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$. Pokud $A \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$, existuje $\alpha < \omega_1$, že $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$, tudíž $X \setminus A \in \Pi^0_\alpha(X)$ a dle předchozí části $X \setminus A \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$, což dokazuje (ii). Pokud $A_n \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$ pro každé $n \in \omega$, existuje posloupnost ordinálů $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$, že $A_n \in \Sigma^0_{\alpha_n}(X)$. Z věty z teorie množin plyne, že existuje $\alpha_0 < \omega_1$, že $\alpha_0 > \alpha_n$ pro všechna $n \in \omega$. Vzhledem ke Tvrzení 1.1 pak $A_n \in \Sigma^0_{\alpha_0}(X)$ pro všechna $n \in \omega$, tedy $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \Sigma^0_{\alpha_0}(X)$ a tedy $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha(X)$, což dokazuje (iii). $\square$

Kapitola 2

Příklady borelovských množin

V této kapitole jakožto cvičení určíme složitosti jistých borelovských podmnožin jistých polských prostorů.

2.1 Základní příklady

Buď $\mathbb{R}$ množina všech reálných čísel s euklidovskou topologií ($\mathbb{R}^*$ značí rozšíření $\mathbb{R}$ o prvky ∞ a $-\infty$).

(i) Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, zřejmě platí $(a, b) \in \Sigma^0_1(\mathbb{R})$ a $(a, b) \notin \Pi^0_1(\mathbb{R})$. Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, zřejmě platí $[a, b] \in \Pi^0_1(\mathbb{R})$ a $[a, b] \notin \Sigma^0_1(\mathbb{R})$. Dále pro každé $a \in \mathbb{R}$ zřejmě platí $(-\infty, a] \in \Pi^0_1(\mathbb{R})$ a $(-\infty, a] \notin \Sigma^0_1(\mathbb{R})$, $[a, \infty) \in \Pi^0_1(\mathbb{R})$ a $[a, \infty) \notin \Sigma^0_1(\mathbb{R})$.

(ii) Pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, zřejmě $[a, b) \notin \Sigma^0_1(\mathbb{R})$, $[a, b) \notin \Pi^0_1(\mathbb{R})$, $(a, b] \notin \Sigma^0_1(\mathbb{R})$ a $(a, b] \notin \Pi^0_1(\mathbb{R})$, ale $[a, b) \in \Sigma^0_2(\mathbb{R})$, protože $[a, b) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}}[a, b - \frac{1}{n}]$, a také $[a, b) \in \Pi^0_2(\mathbb{R})$, protože $[a, b) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}}(a - \frac{1}{n}, b)$. Analogicky se ukáže, že $(a, b] \in \Delta^0_2(\mathbb{R})$.

(iii) Je známým faktem, že mezi každými dvěma různými reálnými čísly se nachází aspoň jedno racionální číslo a aspoň jedno iracionální číslo. To znamená, že neexistuje nedegenerovaný interval obsahující jen racionální čísla nebo jen iracionální čísla. Proto pro množinu všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$ platí $\mathbb{Q} \notin \Sigma^0_1(\mathbb{R})$ (opak by vyžadoval existenci nedegenerovaného (otevřeného) intervalu obsahujícího jen racionální čísla) a $\mathbb{Q} \notin \Pi^0_1(\mathbb{R})$ (opak by vyžadoval existenci nedegenerovaného (otevřeného) intervalu obsahujícího jen iracionální čísla). Dále platí $\mathbb{Q} \in \Sigma^0_2(\mathbb{R})$, protože je spočetná a tedy je spočetným sjednocením jednobodových množin, a každá jednobodová množina je uzavřená v $\mathbb{R}$. Ale $\mathbb{Q} \notin \Pi^0_2(\mathbb{R})$.

2.2 Prostor kompaktních množin

Nechť X je polský prostor, tj. separabilní topologický prostor metrizovatelný úplnou metrikou. Označme $K(X)$ množinu všech kompaktních podmnožin X. Na $K(X)$ zavedeme tzv. Vietorisovu topologii, jejíž subbázi tvoří množiny typu

$$\{L \in K(X); L \cap V \neq \emptyset\} \text{ a } \{L \in K(X); L \subseteq V\},$$

kde $V \subseteq X$ je otevřená. Tedy bázová množina Vietorisovy topologie je množina typu

$$\{L \in K(X); L \subseteq V_0 \wedge \forall i \in \{1, \dots, n\} : L \cap V_i \neq \emptyset\}$$

kde $V_0, \dots, V_n$ jsou otevřené podmnožiny X.
Zvolme úplnou kompatibilní metriku ρ na X takovou, že $\mathrm{diam}_\rho X \leq 1$ a pomocí ní definujme zobrazení $h : K(X) \times K(X) \to [0, \infty)$ předpisem

$$h(L, M) = \begin{cases} \max(\sup_{x \in M} \rho(x, L), \sup_{y \in L} \rho(y, M)), & \text{pokud } L \neq \emptyset \wedge M \neq \emptyset, \\ 0, & \text{pokud } L = M = \emptyset, \\ 1, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak h je úplná metrika na $K(X)$ kompatibilní s Vietorisovou topologií a $K(X)$ je rovněž polský prostor.
Důkaz separability $K(X)$ lze nalézt v odstavci 4.22 v knize [1] a důkaz úplné metrizovatelnosti $K(X)$ v odstavci 4.25 v knize [1].

Cvičení 2.1 Množina $W_1 := \{L \in K(\mathbb{R}); \lambda(L) = 0\}$, kde λ je Lebesgueova míra, je typu G_δ v $K(\mathbb{R})$.
Řešení Je známým faktem, že Lebesgueova míra v $\mathbb{R}^m$, $m \in \omega \setminus \{0\}$, je regulární, z čehož plyne, že pro libovolnou měřitelnou $L \subseteq \mathbb{R}^m$ platí

$$\lambda(L) = \inf\{\lambda(M); M \text{ je otevřená v } \mathbb{R}^m, L \subseteq M\}.$$

Platí, že

$$W_1 = \{L \in K(\mathbb{R}); \forall \varepsilon > 0\ \exists M \subseteq \mathbb{R} : M \text{ je otevřená} \wedge \lambda(M) < \varepsilon \wedge L \subseteq M\}. \quad (2.1)$$

Nechť $m = 1$ a $L \in K(\mathbb{R})$ je taková, že $\lambda(L) = 0$. Potom dle předchozího a vlastnosti infima pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $M \subseteq \mathbb{R}$ otevřená, že $L \subseteq M$ a $\lambda(M) < \varepsilon$. Naopak, nechť $L \in K(\mathbb{R})$ náleží do množiny na pravé straně výrazu (2.1). Protože L je kompaktní, je uzavřená, tedy borelovská, a tedy lebesgueovsky měřitelná. Pokud by platilo $\lambda(L) > 0$, existovala by otevřená množina $M \subseteq \mathbb{R}$ taková, že $L \subseteq M$ a $\lambda(M) < \lambda(L)$. Jenže potom z monotonie míry máme $\lambda(L) \leq \lambda(M)$, což je spor, a tak tedy $\lambda(L) = 0$.
Pro každé $n \in \omega \setminus \{0\}$ nyní definujme

$$G_n := \{L \in K(\mathbb{R}); \exists M \subseteq \mathbb{R} : M \text{ je otevřená} \wedge \lambda(M) < \frac{1}{n} \wedge L \subseteq M\}.$$

Ukážeme, že $W_1 = \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} G_n$ a že pro každé $n \in \omega \setminus \{0\}$ je G_n otevřená v $K(\mathbb{R})$.
Nechť $L \in W_1$. Zvolíme-li $\varepsilon = \frac{1}{n}$ pro libovolné $n \in \omega \setminus \{0\}$, dostaneme ihned, že $L \in G_n$, a tedy $W_1 \subseteq \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} G_n$.
Nechť naopak $L \in \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} G_n$. Protože $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, máme-li libovolné $\varepsilon > 0$, jistě existuje $n_0 \in \omega \setminus \{0\}$, že $\frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$. Jelikož $L \in G_{n_0}$, plyne odtud, že $L \in W_1$, a tedy $W_1 \supseteq \bigcap_{n \in \omega \setminus \{0\}} G_n$.
Nyní vyjádříme

$$G_n = \bigcup_{\substack{M \text{ je otevřená v } \mathbb{R} \\ \wedge \lambda(M) < \frac{1}{n}}} \{L \in K(\mathbb{R}); L \subseteq M\}.$$

Odtud plyne, že G_n je otevřená v $K(\mathbb{R})$, protože $\{L \in K(\mathbb{R}); L \subseteq M\}$ jsou bázové množiny Vietorisovy topologie.

Připomeňme, že podmnožina M topologického prostoru X je *hustá v X* právě, když $\overline{M} = X$, a *řídká v X* právě, když $X \backslash \overline{M}$ je hustá v X.

Tvrzení 2.1 Nechť X je topologický prostor. Pak množina $M \subseteq X$ je hustá v X právě, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subseteq X$ platí $G \cap M \neq \emptyset$.

Důkaz. Pro $x \in X$ platí, že $x \in \overline{M}$ právě, když pro každé otevřené okolí U bodu x je $U \cap M \neq \emptyset$. Odtud tvrzení ihned plyne, protože každá neprázdná otevřená množina $G \subseteq X$ je okolí nějakého bodu X. $\square$

Značení: Je-li $L \in K(X)$, h Hausdorffova metrika na $K(X)$ a $r > 0$, pak $U_h(L, r) := \{M \in K(X); h(L, M) < r\}$.

Tvrzení 2.2 Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak množina $M \subseteq X$ je řídká právě, když pro každou neprázdnou otevřenou množinu $G \subseteq X$ existuje neprázdná otevřená množina $H \subseteq G$, že $H \cap M = \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť M je řídká, tj. $X \backslash \overline{M}$ je hustá. Je-li $G \subseteq X$ libovolná neprázdná otevřená, potom dle Tvrzení 2.1 $H := G \cap (X \backslash \overline{M}) \neq \emptyset$. H je otevřená, protože $X \backslash \overline{M}$ je otevřená ($\overline{M}$ je uzavřená). Protože $M \subseteq \overline{M}$, je $H \subseteq X \backslash \overline{M} \subseteq X \backslash M$, a tedy $H \cap M = \emptyset$.
$\Leftarrow$ Nechť $G \subseteq X$ je libovolná neprázdná otevřená. Najdeme $H \subseteq G$ neprázdnou otevřenou, že $H \cap M = \emptyset$. Potom také $H \cap \overline{M} = \emptyset$. Kdyby ne, tak existuje $x \in H \cap \overline{M}$. Protože H je otevřená, existuje $\delta > 0$, že $U(x, \delta) \subseteq H$, a protože $x \in \overline{M}$, tak $U(x, \delta) \cap M \neq \emptyset$, což je ale spor s $H \cap M = \emptyset$. $H \cap \overline{M} = \emptyset$ je ekvivalentní s $H \subseteq X \backslash \overline{M}$. Tedy nakonec dostáváme, že $G \cap (X \backslash \overline{M}) \neq \emptyset$, což dle Tvrzení 2.1 charakterizuje $X \backslash \overline{M}$ jako hustou množinu, a tedy M je řídká množina. $\square$

Až do konce kapitoly bude X polský prostor. X obsahuje spočetnou hustou podmnožinu $D := \{x_n, n \in \omega\}$. Definujme množinový systém $B := \{U(x, r); x \in D, r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)\}$. Potom B tvoří (spočetnou) bázi otevřených množin X. Očíslujme její prvky: $B = \{B_m; m \in \omega\}$.

Cvičení 2.2 Množina

$$W_2 := \{L \in K(X); L \text{ je řídká v } X\}$$

je typu G_δ v $K(X)$.

Tvrzení 2.3 Množina $M \subseteq X$ je řídká právě, když pro každé $n \in \omega$ existuje $m \in \omega$, že $B_m \subseteq B_n$ a $B_m \cap M = \emptyset$.

Důkaz. $\Rightarrow$ Bud' $n \in \omega$. Dle Tvrzení 2.2 pak existuje neprázdná otevřená množina $H \subseteq B_n$, že $H \cap M = \emptyset$. Je $H = \bigcup_{j \in I} B_j$, kde $I \subseteq \omega$ a $I \neq \emptyset$. Vezmeme-li libovolné $m \in I$, tak $B_m \cap M = \emptyset$, protože $H \cap M = \emptyset$, a $B_m \subseteq H \subseteq B_n$.
$\Leftarrow$ Buď $G \subseteq X$ otevřená neprázdná, tedy $G = \bigcup_{j \in J} B_j$, kde $J \subseteq \omega$ a $J \neq \emptyset$. Zvolme opět libovolné $n \in J$. Dle předpokladu potom existuje $m \in \omega$, že $B_m \subseteq B_n \subseteq G$ a $B_m \cap M = \emptyset$. Tedy M je řídká dle Tvrzení 2.2. $\square$

Poznámka. Tvrzení 2.3 platí pro libovolnou spočetnou bázi X.

Řešení Cvičení 2.2 Podle Tvrzení 2.3 platí

$$W_2 = \{L \in K(X); \forall n \in \omega\ \exists m \in \omega : B_m \subseteq B_n \wedge B_m \cap L = \emptyset\}.$$

Pro $n \in \omega$ označme

$$G_n := \{L \in K(X); \exists m \in \omega, B_m \subseteq B_n, B_m \cap L = \emptyset\}.$$

Pak zjevně $W_2 = \bigcap_{n \in \omega} G_n$.
Nyní ukážeme, že pro každé $n \in \omega$ je G_n otevřená v $K(X)$, a to tak, že ukážeme její otevřenost vzhledem k Hausdorffově metrice h na $K(X)$.
Buď $L \in G_n$. Tedy máme $m \in \omega$, že $B_m \subseteq B_n$ a $B_m \cap L = \emptyset$. Vezměme $\delta := \operatorname{dist}(L, B_m)$.
Je-li $\delta > 0$, potom existuje $\varepsilon \in (0, \delta)$, že pro každou $M \in U_h(L, \varepsilon)$ je $M \cap B_m = \emptyset$, takže $U_h(L, \varepsilon) \subseteq G_n$. Skutečně, je-li $h(M, L) < \varepsilon$, z definice Hausdorffovy metriky plyne, že pro každé $x \in M$ je $\rho(x, L) < \varepsilon$. Pokud by existovalo $x \in M \cap B_m$, pak dle předchozího bychom měli $\rho(x, L) \geq \delta$, což je spor.
Nechť nyní $\delta = 0$. Jako r označme poloměr otevřené koule B_m, tj. $B_m = U(x_k, r)$ pro nějaké $k \in \omega$. Potom $U(x_k, \frac{r}{2})$ je také prvek báze B, řekněme B_{m_0}, protože $r \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ a tedy $\frac{r}{2} \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$, a zjevně $B_{m_0} \subseteq B_m \subseteq B_n$. Dále platí $\operatorname{dist}(L, B_{m_0}) > 0$. Kdyby ne, tj. kdyby $\operatorname{dist}(L, B_{m_0}) = 0$, tak pak podle vlastnosti infima existují $x \in L$ a $y \in B_{m_0}$ tak, že $\rho(x, y) < \frac{r}{2}$. Z trojúhelníkové nerovnosti potom máme $\rho(x, x_k) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_k) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} < r$, tedy $x \in B_m$, což je spor s $L \cap B_m = \emptyset$. Tudíž dle předchozího odstavce existuje $\varepsilon \in (0, \infty)$, že pro každou $M \in U_h(L, \varepsilon)$ je $M \cap B_{m_0} = \emptyset$, takže $U_h(L, \varepsilon) \subseteq G_n$.

Cvičení 2.3 Množina $W_3 := \{L \in K(\mathbb{R}); L \text{ je konečná}\}$ je typu F_σ v $K(\mathbb{R})$. Jedná se o speciální verzi cvičení 4.30 z knihy [1].
Řešení Zřejmě lze zapsat $W_3 = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, kde

$$F_n := \{L \in K(\mathbb{R}); |L| \leq n\}.$$

Ukážeme, že pro každé $n \in \omega$ je F_n uzavřená v $K(\mathbb{R})$, tak, že ukážeme, že $G_n := K(\mathbb{R}) \backslash F_n$ je otevřená v $K(\mathbb{R})$.

Při zavádění Hausdorffovy metriky h na $K(\mathbb{R})$ se předpokládá, že metrika ρ na $\mathbb{R}$, pomocí které je h definována, splňuje $\operatorname{diam}_\rho \mathbb{R} \leq 1$, což euklidovská metrika nesplňuje. Proto, budeme-li chtít h používat, musíme nejprve najít jinou úplnou metriku na $\mathbb{R}$ kompatibilní s euklidovskou, která toto splňovat bude.
Položme $\rho(x, y) := \min(|x - y|, 1)$. Pak ρ je metrika na $\mathbb{R}$ a $\operatorname{diam}_\rho(\mathbb{R}) = 1$. Protože $U(x, r) = (x - r, x + r)$ pro libovolný $x \in \mathbb{R}$ a $r \leq 1$, je metrika ρ úplná a kompatibilní s euklidovskou metrikou.

Nechť $n \in \omega$ a $L \in G_n$, což znamená, že $|L| > n$. Všimněme si, že pro všechna $n \in \omega$ platí $G_{n+1} \subseteq G_n$.
Nechť $\{x_1, ..., x_{n+1}\} \subseteq L$, kde $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$. Položme

$$\varepsilon := \min\{\frac{1}{3} \min\{\rho(x_{k+1}, x_k); k \in \{1, \ldots, n\}\}, 1\}.$$

Potom $U(x_k, \varepsilon)$ pro $k = 1, \dots, n$ jsou po dvou disjunktní otevřené množiny. Vezměme dále $M \in K(\mathbb{R})$ libovolnou nejvýše n-prvkovou. Ať je rozmístění bodů M a bodů $\{x_1, ..., x_{n+1}\}$ jakékoli, vždy bude existovat $k_0 \in \{1, \dots, n+1\}$, že $U(x_{k_0}, \varepsilon) \cap M = \emptyset$. To ale potom znamená, že $\rho(x_{k_0}, M) \geq \varepsilon$, a tudíž $h(L, M) \geq \varepsilon$. Tedy $U_h(L, \varepsilon) \subseteq G_n$ a G_n je otevřená.

Kapitola 3

Analytické množiny

V této kapitole uvedeme příklad neborelovské koanalytické množiny s důkazem její koanalytičnosti. Důkaz je zpracován dle odstavce 27.5 (Hurewiczova věta) v knize [1], přičemž zde jsou podrobně odůvodněny kroky, které jsou v příslušném odstavci jen zmíněny.

Definice Nechť X je polský prostor. Množinu $A \subseteq X$ nazveme *analytickou*, pokud existuje polský prostor Y a spojité zobrazení $f : Y \to X$ tak, že $f(Y) = A$. Třídu všech analytických podmnožin X označíme jako $\Sigma_1^1(X)$. Množinu $A \subseteq X$ nazveme *koanalytickou*, pokud $X \backslash A$ je analytická. Třídu všech koanalytických podmnožin X označíme jako $\Pi_1^1(X)$.

Cvičení 3.1 Nechť X je polský prostor. Potom množina

$$S := \{L \in K(X); L \text{ je spočetná}\}$$

je koanalytická v $K(X)$.

Definice Topologický prostor X se nazývá *perfektní*, pokud žádný z jeho prvků není izolovaný, tj. pro každý $x \in X$ každé jeho otevřené okolí obsahuje aspoň jeden prvek $y \in X$, že $y \neq x$. Množinu $P \subseteq X$ nazveme perfektní v X, pokud P chápaný jako podprostor X je perfektní a P je uzavřená v X.

Lemma 3.1 Nechť X je polský prostor. Uzavřená množina $P \subseteq X$ je perfektní právě, když pro libovolnou spočetnou bázi $\{B_m; m \in \omega\}$ prostoru X platí

$$\forall n \in \omega : (B_n \cap P \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists k, m \in \omega : (B_k \cap B_m = \emptyset \wedge B_k \cup B_m \subseteq B_n \wedge B_k \cap P \neq \emptyset \wedge B_m \cap P \neq \emptyset)).$$

Znění tohoto lemmatu se doslova vyskytuje v důkazu 27.5 v knize [1].

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $P \subseteq X$ je perfektní a $B_n \cap P \neq \emptyset$ pro nějaké $n \in \omega$. Tedy existuje $x \in B_n \cap P$. Protože B_n je otevřené okolí x a P je perfektní, existuje $y \in B_n \cap P$, že $y \neq x$. Protože X je metrizovatelný a tudíž T2 prostor a B_n je otevřená, existuje otevřené okolí U bodu x a otevřené okolí V bodu y tak, že $U \cap V = \emptyset$ a $U \cup V \subseteq B_n$. Dále jistě existují $k, m \in \omega$, že $x \in B_k \subseteq U$ a $y \in B_m \subseteq V$. Zřejmě $B_k \cap P \neq \emptyset$ a $B_m \cap P \neq \emptyset$, čímž je dokázáno, že B_k a B_m mají požadované vlastnosti.

$\Leftarrow$ Nechť P není perfektní, tedy existuje izolovaný bod $p \in P$, a tudíž existuje otevřené okolí U bodu p takové, že $(U\backslash\{p\}) \cap P = \emptyset$. Dále existuje $n \in \omega$, že platí $p \in B_n \subseteq U$, tedy i $(B_n\backslash\{p\}) \cap P = \emptyset$. Nechť $k, m \in \omega$. Pokud platí $B_k \cap B_m = \emptyset \wedge B_k, B_m \subseteq B_n \wedge B_k \cap P \neq \emptyset$, potom nutně $B_m \cap P = \emptyset$. Pokud platí $B_k \cap P \neq \emptyset \wedge B_m \cap P \neq \emptyset$, potom buď $k = m$, pak ale $B_k \cap B_m \neq \emptyset$, nebo pokud $B_k \cap B_m = \emptyset$, pak neplatí $B_k \subseteq B_n$ nebo neplatí $B_m \subseteq B_n$. $\square$

Lemma 3.2 Nechť X je polský prostor. Pak třída $\Pi^0_2(X)$ je uzavřená na konečná sjednocení a spočetné průniky.

Důkaz. Nechť $F, G \in \Pi^0_2(X)$, tj. $F = \bigcap_{n\in\omega} F_n$ a $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n$, kde pro všechna $n \in \omega$ jsou F_n a G_n otevřené v X. Dle distributivity průniku a sjednocení potom $F \cup G = (\bigcap_{n\in\omega} F_n) \cup (\bigcap_{m\in\omega} G_m) = \bigcap_{n\in\omega}(F_n \cup (\bigcap_{m\in\omega} G_m)) = \bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{m\in\omega}(F_n \cup G_m)$, což je průnik spočetně mnoha otevřených množin, tedy $F \cup G \in \Pi^0_2(X)$.
Nechť pro každé $n \in \omega$ je $A_n \in \Pi^0_2(X)$, tj. $A_n = \bigcap_{m\in\omega} A^m_n$, kde pro každé $m \in \omega$ je A^m_n otevřená. Pak $\bigcap_{n\in\omega} A_n = \bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{m\in\omega} A^m_n$ je také průnik spočetně mnoha otevřených množin, tedy $\bigcap_{n\in\omega} A_n \in \Pi^0_2(X)$. $\square$

Tvrzení 3.3 Nechť X je polský prostor. Potom množiny

$$G := \{L \in K(X); L \text{ je perfektní}\}$$

a

$$H := \{L \in K(X); L \text{ je perfektní} \wedge L \neq \emptyset\}$$

jsou typu G_δ v $K(X)$.

Důkaz. S ohledem na Lemma 3.1 pro $n \in \omega$ definujme

$$G_n := \{L \in K(X); B_n \cap L \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\exists k, m \in \omega : (B_k \cap B_m = \emptyset \wedge B_k \cup B_m \subseteq B_n \wedge B_k \cap L \neq \emptyset \wedge B_m \cap L \neq \emptyset)\}.$$

Zřejmě lze zapsat $G_n = U_n \cup V_n$, kde $U_n := \{L \in K(X); B_n \cap L = \emptyset\}$ a $V_n := \{L \in K(X); \exists k, m \in \omega(B_k \cap B_m = \emptyset \wedge B_k \cup B_m \subseteq B_n \wedge B_k \cap L \neq \emptyset \wedge B_m \cap L \neq \emptyset)\}$.
Ukážeme, že U_n a V_n jsou typu G_δ v $K(X)$.
$K(X)\backslash U_n = \{L \in K(X); B_n \cap L \neq \emptyset\}$ je bázová, tedy otevřená podmnožina $K(X)$, takže U_n je uzavřená a tedy dle Tvrzení 1.1 typu G_δ v $K(X)$.
Dále platí

$$V_n = \bigcup_{\substack{B_k \cap B_m = \emptyset \\ \wedge B_k \cup B_m \subseteq B_n}} \{L \in K(X); B_k \cap L \neq \emptyset \wedge B_m \cap L \neq \emptyset\}.$$

V_n je tedy sjednocení bázových množin $K(X)$, tedy otevřená množina v $K(X)$ a tudíž opět podle Tvrzení 1.1 typu G_δ v $K(X)$.
Jelikož $K(X)$ je polský prostor, podle Lemmatu 3.2 pro každé $n \in \omega$ platí $G_n \in \Pi^0_2(K(X))$, a protože zjevně $G = \bigcap_{n\in\omega} G_n$, tak i $G \in \Pi^0_2(K(X))$.
Co se týče množiny H, platí $H = G\backslash\{\emptyset\} = G \cap (K(X)\backslash\{\emptyset\})$, tedy i $H \in \Pi^0_2(K(X))$, protože $\{\emptyset\}$ je uzavřená v $K(X)$ a tedy $(K(X)\backslash\{\emptyset\})$ je otevřená a tedy typu G_δ v $K(X)$. $\square$

Jako $(K(X))^2$ označme prostor $K(X) \times K(X)$ se součinovou topologií.

Tvrzení 3.4 Nechť X je polský prostor. Potom množina $F := \{(L, M) \in (K(X))^2; L \subseteq M\}$ je uzavřená v $(K(X))^2$.
Znění tohoto tvrzení se vyskytuje ve cvičení 4.29 (ii) v knize [1].

Důkaz. Je $(K(X))^2 \backslash F = \{(L, M) \in (K(X))^2; L \backslash M \neq \emptyset\}$.
Definujme zobrazení $\varphi : (K(X))^2 \times (K(X))^2 \to [0, \infty)$ předpisem

$$\varphi((L, M), (L', M')) := \max(h(L, L'), h(M, M')).$$

Pak φ je kompatibilní metrika na $(K(X))^2$. Ukážeme, že $(K(X))^2 \backslash F$ je otevřená vzhledem k φ.
Nechť $(L, M) \in (K(X))^2 \backslash F$. Označme $\varepsilon := \sup_{y \in L} \rho(y, M)$. Je $\varepsilon > 0$, protože existuje $x \in L \backslash M$ a tedy $\rho(x, M) > 0$. Kdyby totiž $\rho(x, M) = 0$, pak by platilo $x \in M$, protože M je uzavřená. Zvolme $\delta := \frac{\varepsilon}{4}$ a $\gamma := 3\delta = \frac{3\varepsilon}{4}$.
Vezměme libovolné $(L', M') \in U_\varphi((L, M), \delta)$. Tj. $h(L, L') < \delta$ a $h(M, M') < \delta$. Z vlastnosti suprema dostáváme, že existuje $x_0 \in L$ takové, že $\rho(x_0, M) > \gamma$. Dále $\rho(x_0, L') < \delta$, takže dle vlastnosti infima existuje $y_0 \in L'$ takové, že $\rho(x_0, y_0) < \delta$. Pro každé $z \in M$ platí $\rho(x_0, z) \geq \rho(x_0, M) > \gamma$ a tedy dle předchozího a trojúhelníkové nerovnosti $\rho(y_0, z) \geq \rho(z, x_0) - \rho(x_0, y_0) > \gamma - \delta = 2\delta$, z čehož plyne $\rho(y_0, M) \geq 2\delta > \delta$. To znamená, že $y_0 \notin M'$, protože pro každé $x \in M'$ platí $\rho(x, M) < \delta$. Tedy $L' \backslash M' \neq \emptyset$ a tudíž $U_\varphi((L, M), \delta) \subseteq (K(X))^2 \backslash F$. $\square$

Tvrzení 3.5 (Cantor-Bendixson) Nechť X je polský prostor. Potom X lze jednoznačně napsat ve tvaru $X = P \cup C$, kde P je perfektní v X, C je spočetná otevřená v X a $P \cap C = \emptyset$.
Znění a důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v odstavci 6.4 v knize [1].

Tvrzení 3.6 Nechť X je polský prostor. Potom $C \subseteq X$ je polský právě, když C je typu G_δ v X.
Znění a důkaz tohoto tvrzení lze nalézt v odstavci 3.11 v knize [1].

Tvrzení 3.7 Nechť X je polský prostor. Potom pro každou $F \in K(X)$ platí:

$$F \text{ je nespočetná} \Leftrightarrow \exists H \in K(X) : (H \subseteq F \wedge H \neq \emptyset \wedge H \text{ je perfektní}).$$

Znění tohoto tvrzení se doslova vyskytuje v důkazu 27.5 v knize [1].

Důkaz. $\Rightarrow$ Buď $F \in K(X)$ nespočetná. Jelikož F je uzavřená v X, podle Tvrzení 1.1 a Tvrzení 3.6 je F polský prostor. Dle Tvrzení 3.5 tedy platí, že $F = P \cup C$ s příslušnými vlastnostmi, a P je hledaná neprázdná perfektní množina.
$\Leftarrow$ Nechť $H \in K(X)$ je neprázdná perfektní splňující $H \subseteq F$, kde $F \in K(X)$. Jelikož H je uzavřená v X, opět podle Tvrzení 1.1 a Tvrzení 3.6 je H polský prostor. Dle věty 6.2 v knize [1] lze do H vnořit prostor 2^ω, tedy H je nespočetná množina a proto i F musí být nespočetná. $\square$

Řešení Cvičení 3.1 Ukážeme, že $K(X) \backslash S = \{L \in K(X); L \text{ je nespočetná}\}$ je analytická v $K(X)$.
Definujme množinu $Y := \{(L, M) \in (K(X))^2; M \subseteq L \wedge M \neq \emptyset \wedge M \text{ je perfektní}\}$.
Ukážeme, že $Y \in \Pi^0_2((K(X))^2)$.

Zřejmě lze zapsat $Y = Y_1 \cap Y_2$, kde $Y_1 := \{(L, M) \in (K(X))^2; M \subseteq L\}$ a $Y_2 := \{(L, M) \in (K(X))^2; M \neq \emptyset \wedge M$ je perfektní$\} = K(X) \times \{M \in K(X); M \neq \emptyset \wedge M$ je perfektní$\}$. Y_1 je podle Tvrzení 3.4 uzavřená a tedy typu G_δ v $(K(X))^2$. Y_2 je podle Tvrzení 3.3 kartézký součin dvou množin typu G_δ v $K(X)$, tedy množina typu G_δ v $(K(X))^2$.
Podle Tvrzení 3.6 je Y polský. Označíme-li jako $\pi : (K(X))^2 \to K(X)$ kanonickou projekci na první souřadnici, tj. $\pi(L, M) = L$, pak podle Tvrzení 3.7 platí $\pi(Y) = \{L \in K(X); \exists M \in K(X) : M \subseteq L \wedge M \neq \emptyset \wedge M$ je perfektní$\} = K(X) \backslash S$. Jelikož Y je polský a π je spojité zobrazení, je $K(X) \backslash S$ analytická.

Literatura

[1] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Graduate Texts in Mathematics 156. Springer-Verlag, New York, 1995.