OPONENTSKÝ POSUDEK BAKALÁŘSKÉ PRÁCE „STRUKTURA NEKOMUTATIVNÍCH TĚLES“

Tomáš Reichel se ve své práci věnuje jednomu z možných způsobů, jak konstruovat nekomutativní tělesa. Konkrétně jde o případ, kdy má sestrojovaný objekt konečný stupeň rozšíření nad svým centrem.

Kýžené nekomutativní těleso dostaneme, kdykoliv máme k dispozici cyklické rozšíření $F < E$ komutativních těles stupně $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a prvek $a \in F^*$ takový, že n je nejmenší přirozené číslo, pro něž je $a^n \in \mathrm{Im}(N_{E/F})$. To říká (po drobné opravě) věta 7 v předkládané práci. Prokázat, že struktura zavedená ve znění této věty je skutečně nekomutativním tělesem, je relativně netriviální a většina práce je věnována právě tomuto úkolu.

Při cestě za důkazem věty 7 autor čerpal výhradně z monografie [1] (Richard Pierce, Associative algebras, Graduate Texts in Mathematics), kde je ovšem celá problematika pojatá výrazně obecněji a užitá terminologie je pro studenta bakalářského studia z větší části nová. To se projevilo i na výsledném textu, z nějž je patrné, že autor s mnoha pojmy spíše zápolí bez jejich většího pochopení.

Strukturou práce proniká znatelná míra bezradnosti a negativně se na ní nejspíš projevil i nedostatek času, který si Tomáš Reichel ponechal na sepsání finální verze textu. Již kapitola 1, která obsahuje základní definice a tvrzení, působí nepříliš jednotně. Začíná definicí okruhu a nekomutativního tělesa, kde by již bylo lze mít námitky k formalismu na řádku, kde se mluví o existenci inverzního prvku k nenulovým. Samotné rozhodnutí označovat „division ring“ jako „nekomutativní těleso“ nepovažuji za příliš šťastné vzhledem k tomu, že division ring může být klidně komutativní. Definice (pravého/levého) modulu není uvedena, což by zase tolik nevadilo, ovšem od první definice na straně 4 dále následuje série rušivých nepřesností/nedotaženostı́:

Předně by stálo za to učinit alespoň poznámku o tom, že v definici F-algebry se vyskytuje znak $\cdot$ ve třech různých významech. Proč není řečeno, co je to ten izomorfismus F-algeber? A skutečně každé takové zobrazení mezi F alegebrami A a B budeme značit $A \simeq B$? Proč jsou v následující definici najednou symboly pro násobení změněny z $\cdot$ na . a v dalším lemmatu jsou již bez varování vypuštěny úplně? Důkaz lemmatu 3 připouští $a = 0$. Následují dvě definice, kde se nepochopitelně nejprve značí těleso jako F a podruhé zase jako K; proč není značení sjednoceno? Oddělovacím symbolem ve složených závorkách je nejprve (docela často používaná) dvojtečka a záhy, v definici Galoisovy grupy, již čárka, která je přinejmenším nedoporučeníhodná. V následující definici se mluví o algebraickém uzávěru dvou těles najednou atd. A to jsme stále na straně 4.

V první definici na následující straně chybí označení pro R-modul, pro nějž chceme definovat pojem jednoduchosti; nemluvě o tom, že nulový modul se většinou za jednoduchý nepovažuje. Z definice bezprostředně následující by si pak neznalý čtenář mohl důvodně odnést poznatek, že okruh R se nazve polojednoduchý, pokud je R_R polojednoduchý pravý R-modul, zatímco R se nazývá totálně rozložitelný, je-li pro změnu ${}_RR$ polojednoduchý levý R-modul.

O nepřesnostech v dalších třech kapitolách referuje téměř vyčerpávajícím způsobem posudek vedoucího. Za sebe bych doplnil ještě druhý řádek na straně devět, kde a vystupuje ve dvou významech, poslední větu druhé kapitoly na straně 10, která trochu úsměvně odůvodňuje, proč nemůžeme zkonstruovat něco, co prokazatelně (dle Wedderburnovy věty) neexistuje, a poslední odstavec vlastního autorova důkazu lemmatu 14, kde by rozhodně stálo za to vysvětlit čtenáři číslování prvků bází maticových okruhů.

Kromě jednoduchého, navýsost standardního příkladu s kvaterniony v práci citelně schází příklad netriviální aplikace hlavní věty. Nebylo by snad tak obtížné vyjít např. z rozkladového rozšíření polynomu $x^3 - 3x - 1$ nad $\mathbb{Q}$, které je stupně 3, najít potřebné a a předvést, jak se ve výsledném nekomutativním tělese počítá. Tím spíše, že „zajímavé konkrétní příklady nekomutativních těles“ jsou uvedeny v oficiálním zadání bakalářské práce, konkrétně v zásadách pro vypracování.

Lze diskutovat o tom, že téma práce bylo příliš obsáhlé či obtížné, a proto výsledný text trpí některými nedostatky. Výčtem nepřesností výše z úvodní kapitoly jsem se snažil poukázat na fakt, že student není schopen pracovat jistě ani se základními pojmy, formulovat korektně definice a užívat jednotné standardní matematické značení. Je možné, že některé ze zmíněných prohřešků bylo možno odfiltrovat, pokud by si autor ponechal více času na sepsání a následnou podrobnou revizi textu práce.

Předkládaný text Tomáše Reichela nazvaný „Struktura nekomutativních těles“ **přes četné výhrady doporučuji připustit k obhajobě**, ovšem očekávám, že se student poctivě vypořádá s připomínkami a dotazy v posudku vedoucího a nadto ještě s následujícími třemi otázkami:

1) Odkud se vzalo u ve formulaci věty 7, resp. o jaký matematický objekt se jedná, např. je to prvek množiny E či (nosiče) grupy G?

2) Na straně 5 dole definujete pojem ostře maximálního podtělesa. O tomto pojmu ovšem není v celé práci dokázáno jediné tvrzení. Objeví se jen krátce a velmi služebně v důkazu tvrzení 20. Proč jste vůbec tento pojem zaváděl?

3) Vysvětlil byste, proč bylo nutné dělat ve 4. kapitole odbočku ke kohomologickým grupám? Lemma 19 jste beztak nedokazoval, a tak jste mohl prostě celou dobu v důkazu hlavní věty pracovat s relativní Brauerovou grupou (bez přechodu k izomorfní grupě H^2), přičemž byste využil bez důkazu zformulovaného „izomorfního obrazu“ lemmatu 19.

V Praze dne 28. srpna 2015 Mgr. Jan Šaroch, Ph.D.