Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Práce s číselnými a algebraickými výrazy na základní škole

Working with numerical and algebraic expressions in the compulsory education

Bc. Lenka Pantůčková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy - matematika

2017

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Jarmily Novotné, CSc., za použití uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato diplomová práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne 21. 4. 2017

Lenka Pantůčková

Poděkování

Ráda bych poděkovala prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za pomoc při vedení diplomové práce. Cením si času, připomínek a poskytnutých informací, které vedly k vypracování této práce.

Dále bych chtěla poděkovat RNDr. Františku Mošnovi, Ph.D., za cenné rady a doporučení, které mi pomohly se zpracováním statistické části.

Abstrakt

Název práce: Práce s číselnými a algebraickými výrazy na základní škole

Autor: Bc. Lenka Pantůčková

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Diplomová práce se zabývá číselnými a algebraickými výrazy na základní škole. Teoretická část je věnována rámcovým vzdělávacím programům pro základní vzdělávání a pro gymnázia. Dále je zmíněna propedeutika algebraických výrazů na 1. a 2. stupni. Jsou zde uvedeny nejčastější chyby při úpravách algebraických výrazů. Jsou zmíněny také významy, jakých může nabývat proměnná. Poslední podkapitola teoretické části se zabývá statistikou, která je dále použita ve vyhodnocování výsledků experimentu. V experimentální části jsou nejdříve uvedeny cíle a metody výzkumu. Dále jsou představeny vybrané základní školy, které se účastnily experimentu. Provedena je také analýza učebnic matematiky pro 8. ročník (především kapitol, které se týkají výrazů), podle kterých se vyučují třídy na těchto vybraných školách. Představen je také test, který byl předložen 128 žákům. Další podkapitoly jsou věnovány hypotézám a očekávaným chybám v jednotlivých podúlohách. Na závěr experimentální části jsou uvedené výsledky, které vyplynuly z vyhodnocení testu.

Klíčová slova: číselné a algebraické výrazy, didaktický test, chyby při úpravách algebraických výrazů

Abstract

Title: Working with numerical and algebraic expressions in the compulsory education

Author: Bc. Lenka Pantůčková

Department: Department of Mathametics and Mathematical Education

Supervisor: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

This Diploma Thesis deals with numerical and algebraic expressions in elementary school. The theoretical part deals with the framework educational programme for elementary education and grammar schools. It further mentions the propaedeutic of algebraic expressions at the first and second levels. It also introduces the most frequent mistakes done in calculating algebraic expressions. Meanings for the variable are stated as well. The last pre-chapter of the theoretical part is focused on statistics, which is further used for the experiment result evaluation. The experimental part first states the aims and methods of the research. Selected elementary schools taking part in the experiment are further introduced. An analysis of mathematics text books for the eighth grade (mainly chapters concerning the algebraic expressions), the selected schools use in their lessons, is also carried out. The experimental part also introduces the test presented to 128 pupils. Further pre-chapters are devoted to hypotheses and expected mistakes in single subtasks. In the conclusion of the experimental part results consequent upon the test evaluation are stated.

Keywords: numerical and algebraic expressions, didactic test, mistakes when modifying algebraic expressions

OBSAH

1 Úvod

Když jsem přemýšlela, jaké téma si zvolím pro svou diplomovou práci, jedním z hlavních faktorů byl výběr škol, na kterých provedu vlastní experiment. Vzhledem k tomu, že mám dobré kontakty na základních školách, rozhodla jsem se, že svoji diplomovou práci zaměřím právě na žáky základních škol. Základní školy, které jsem do experimentu zařadila, jsou ZŠ Mikulova v Praze, ZŠ Jesenice v Jesenici a ZŠ Benešova v Třebíči. Důvod vybrání těchto tří konkrétních základních škol je blíže popsán v podkapitole 3.4 Základní školy, které se účastnily experimentu.

Téma číselné a algebraické výrazy jsem si vybrala zaprvé proto, že mě zajímalo už od základní školy, a zadruhé toto téma osobně považuji za stěžejní téma, které provází žáky dalším studiem matematiky. Výrazy jsou totiž na základní škole propedeutikou například lineárních rovnic, usnadňují zápisy a řešení některých slovních úloh nebo je používáme při zápisu a poté výpočtu objemu a povrchu těles. Na střední škole, především na gymnáziích, jsou výrazy propedeutikou například kvadratických, exponenciálních nebo logaritmických rovnic, objevují se u kuželoseček nebo v analytické geometrii.

Cílem diplomové práce bylo sestavit vlastní didaktický test, na základě kterého bych vyhodnotila, jaké nejčastější chyby žáci dělají při řešení algebraických výrazů. Dalším cílem bylo analyzování učebnic 8. ročníku a konkrétně kapitol, které se týkají algebraických výrazů. Také mě zajímalo, která třída dosáhne nejvyššího průměrného počtu bodů na žáka a zda mezi těmito výsledky budou velké rozdíly.

Diplomová práce je rozdělena na dvě hlavní části – teoretickou a experimentální. V teoretické části se zabývám číselnými a algebraickými výrazy v RVP[1] pro základní vzdělávání a v RVP pro gymnázia, dále uvádím propedeutiku algebraických výrazů, chyby při úpravách algebraických výrazů a vybranou teorii ze statistiky, kterou dále používám ve vyhodnocování experimentu. V experimentální části uvádím cíle a metody experimentu, didaktický test, který byl předložený žákům, a představuji základní školy, které se účastnily experimentu. Dále analyzuji učebnice matematiky pro 8. ročník (konkrétně

[1] rámcový vzdělávací program

kapitoly s algebraickými výrazy), podle kterých se na těchto základních školách učí, a výsledky experimentu, které jsem vyhodnotila z nasbíraných dat.

2 Teoretická část

Teoretická část diplomové práce je věnována nejdříve číselným a algebraickým výrazům v RVP pro základní vzdělávání a v RVP pro gymnázia, kde představuji, jak se kurikulární dokumenty zabývají právě číselnými[2] a algebraickými výrazy[3]. Zmíněna je také propedeutika algebraických výrazů, kde uvádím, jaké učivo předchází práci s algebraickými výrazy. Dále se zabývám nejčastějšími chybami, které žáci mohou udělat při práci s algebraickými výrazy, a uvádím významy, jakých může nabývat proměnná. V poslední podkapitole teoretické části se věnuji statistickým pojmům, které následně využívám v experimentální části.

2.1 Číselné a algebraické výrazy v RVP

S číselnými a algebraickými výrazy se žáci setkávají na základních i na středních školách, proto jsem tuto kapitolu zpracovávala z RVP pro základní vzdělávání a z RVP pro gymnázia. Zaměřila jsem se na oblasti, které se týkají číselných a algebraických výrazů. Dále jsem uvedla charakteristiku a cílové zaměření vzdělávací oblasti.

2.1.1 Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání[4]

RVP ZV z roku 2016 uvádí, že vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je na základních školách vybudována v první řadě na aktivních činnostech, které jsou charakteristické pro využití matematiky v reálném životě. Proto se v učebnicích, pracovních sešitech a různých výukových materiálech setkáváme často s úlohami, které žákům přiblíží využití daného tématu v reálném životě. Hlavní charakteristické rysy oblasti Matematika a její aplikace jsou podle RVP ZV z roku 2016 například:

[2] číselný výraz je zápis, který obsahuje čísla a početní operace mezi nimi

[3] algebraický výraz je zápis, který je tvořený z konstant a proměnných, mezi nimiž jsou vytvořeny pomocí algebraických operací a závorek smysluplné vztahy

[4] RVP ZV - zdroj: http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf

- poskytování vědomostí a dovedností, které žáci využijí v praktickém životě,
- vytváření předpokladů pro další úspěšné studium,
- důraz na porozumění základním myšlenkovým postupům, pojmům matematiky a jejich vztahům,
- osvojení pojmů, algoritmů, terminologie a symboliky.

Cílové zaměření oblasti Matematika a její aplikace vede k rozvoji klíčových kompetencí tím, že je žák veden například k:

- používání praktických dovedností jako jsou odhady, měření, orientace nebo porovnávání velikostí a vzdáleností,
- rozvíjení paměti pomocí numerických výpočtů,
- osvojování si matematických vzorců a algoritmů,
- rozvoj logického myšlení, argumentace, abstraktního myšlení,
- rozvíjení zkušeností s matematickým modelováním,
- odhadování výsledků,
- používání matematického jazyka,
- rozvoji sebedůvěry, vytrvalosti a přesnosti při řešení úloh.

Již na 1. stupni se žáci setkávají s číselnými výrazy v tématu Číslo a početní operace. Očekávané výstupy z 1. období (1. – 3. třída) z tohoto tématu jsou:

„ŽÁK:

- používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků,
- čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti,
- užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose,
- provádí zpaměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly,
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace.“ (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online], 2016, str. 31)

Očekávané výstupy z 2. období (4. a 5. třída) jsou:

„ŽÁK:

- využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení,
- provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel,
- zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel,
- řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel,
- modeluje a určí část celku, používá zápis ve formě zlomku,
- porovná, sčítá a odčítá zlomky se stejným jmenovatelem v oboru kladných čísel,
- přečte zápis desetinného čísla a vyznačí na číselné ose desetinné číslo dané hodnoty,
- porozumí významu znaku „–“ pro zápis celého záporného čísla a toto číslo vyznačí na číselné ose.“ (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online], 2016, str. 32)

Na téma Číslo a početní operace na 1. stupni navazuje téma Číslo a proměnná na 2. stupni. Očekávané výstupy z tohoto tématu jsou:

„ŽÁK:

- provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu,
- zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulátor,
- modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel,
- užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek–část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem),
- řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů,
- řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek),

- matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním,
- formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav,
- analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel.“ (Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online], 2016, str. 34)

Téma výrazy na 2. stupni je blíže specifikováno jako číselný výraz a jeho hodnota, proměnná, výrazy s proměnnými a mnohočleny.

2.1.2 Rámcový vzdělávací program pro gymnázia[5]

RVP pro gymnázia opět uvádí charakteristiku a cílové zaměřené vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace stejně jako RVP pro základní vzdělávání. Při porovnání RVP G s RVP ZV má RVP G stručnější charakteristiku vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Hlavní charakteristické rysy jsou například:

- rozvíjení a prohlubování pochopení kvantitativních a prostorových vztahů reálného světa,
- schopnost geometrického vhledu,
- vytváření hypotéz,
- deduktivní úvahy,
- rozvíjení abstraktního a analytického myšlení, logického usuzování,
- schopnost formulace problému a strategie jeho řešení,
- aktivní ovládnutí matematických pojmů a dovedností.

Cílové zaměřené Matematiky a její aplikace je utváření a rozvíjení klíčových kompetencí tím, že se žák vede například k:

- vytváření zásoby matematických pojmů, vztahů, algoritmů a metod řešení úloh,
- analyzování problému a vytváření plánu řešení,

[5] RVP G

- rozvoji logického myšlení a úsudku, vytváření hypotéz na základě zkušenosti nebo pokusu,
- přesnému vyjadřování a zdokonalování grafického projevu,
- zdůvodňování matematických postupů, k obhajobě vlastního postupu,
- rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti.

Očekávané výstupy z tématu Číslo a proměnná jsou:

„ŽÁK:

- užívá vlastnosti dělitelnosti přirozených čísel,
- operuje s intervaly, aplikuje geometrický význam absolutní hodnoty,
- provádí operace s mocninami a odmocninami, upravuje číselné výrazy,
- odhaduje výsledky numerických výpočtů a efektivně je provádí, účelně využívá kalkulátor,
- upravuje efektivně výrazy s proměnnými, určuje definiční obor výrazu,
- rozkládá mnohočleny na součin vytýkáním a užitím vzorců, aplikuje tuto dovednost při řešení rovnic a nerovnic,
- řeší lineární a kvadratické rovnice a nerovnice, řeší soustavy rovnic, v jednodušších případech diskutuje řešitelnost nebo počet řešení,
- rozlišuje ekvivalentní a neekvivalentní úpravy,
- geometricky interpretuje číselné, algebraické a funkční vztahy, graficky znázorňuje řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav,
- analyzuje a řeší problémy, v nichž aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav.“ (Balada, 2007, str. 23)

Učivo výrazy s proměnnými je blíže specifikováno jako mnohočleny, lomené výrazy, výrazy s mocninami a odmocninami.

2.2 Propedeutika algebraických výrazů

Propedeutika algebraických výrazů se objevuje již při výuce matematiky na 1. stupni základní školy, kde se žáci seznamují s tématem Číslo a početní operace. Žáci nejdříve pracují s přirozenými čísly, poté se seznamují s čísly celými a racionálními. S celými čísly se žáci seznamují například na stupnici teploměru, na řídící desce výtahu nebo při počítání dluhů. V oboru kladných čísel se žáci seznamují s racionálními čísly například při označování určité části celku (celek může být například koláč, pizza, dort, čokoláda…). Na 2. stupni se k těmto číselným oborům přidávají navíc iracionální čísla. Cílem je žáky naučit porovnávat, zaokrouhlovat, sčítat, odčítat, násobit a dělit čísla v různých číselných oborech.

Propedeutikou algebraických výrazů jsou především číselné výrazy, se kterými se žáci setkávají již na 1. stupni. Číselné výrazy provází žáky v podstatě celým studiem matematiky. Další oblastí, která by se dala zařadit do propedeutiky algebraických výrazů, jsou typy úlohy, ve kterých žáci mají za úkol vyřešit úlohy na zobecňování. Mezi tyto typy úloh můžeme zařadit například slovní úlohy, které žáci mohou řešit pomocí tabulky. Z vlastní zkušenosti při výuce algebraických výrazů vím, že když si žáci k dané úloze vytvoří tabulku se vztahy pro konkrétní objekty, snáze tuto úlohu pak zobecňují. Dále do propedeutiky algebraických výrazů spadají vzorce (například pro obvody a obsahy rovinných útvarů nebo pro povrchy a objemy těles). Se vzorci pro obvod trojúhelníku, čtverce a obdélníku a se vzorci pro obsah čtverce a obdélníku se žáci seznamují již na 1. stupni základní školy.

2.3 Chyby při úpravách algebraických výrazů

Podle Hejného (Hejný, 1990) je důležité, aby v chybném postupu žáka byl učitel schopný přesně najít místo, kde žák udělal chybu. Proto je pro učitele důležité vědět, jaké typy chyb se mohou u žáků nejčastěji vyskytnout. Následující výčet nejčastějších chyb je výsledkem vyhodnocení více než tisíce žákovských chyb při úpravách algebraických výrazů. U každého typu chyby je uvedeno, jakými ilustracemi jsou tyto chyby doplněny v (Hejný, 1990).

1) numerické chyby

$6(x+2) = 6x + 14$

$(4x-7)(x-4) = 4x^2 - 4x - 7x + 28$

2) úkonové chyby

$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 3$

$12 - (x+5) = 12 - x + 5$

$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a}{b}$

3) grafické chyby – vznikají nedbalým zápisem, škrtáním, přepisováním a grafickým přelínáním zápisů

4) chyby velkých skoků – žák se dopustí chyby ve snaze udělat úpravu zahrnující více kroků naráz

$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{3-x}{x+4} = 1 \Rightarrow \frac{x^2+6x+4+2x^2-5x+3}{(2x-1)(x+4)} = 1$

5) strategické chyby

(a) $x^2 + xy + z^2 = 2$

(b) $y^2 + xy - z^2 = -2$

(c) $y^2 - 3xy = 4$

$\Longrightarrow$ (a) + (b) $\Longrightarrow (x+y)^2 = 0 \Longrightarrow y = -x$

$\Longrightarrow z = \pm\sqrt{2}$

$\Longrightarrow x = \pm 1$

6) bezradnost a bloudění – nejsou to chyby v pravém slova smyslu, ale jen ztráta orientace, neschopnost najít cestu k řešení

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 0 \Longrightarrow (x^2+3x+2)(x^2+7x+12) = 0$

$$\frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{(a-b)^2} = \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{(a-b)(a-2b)}{a^2 - 2ab + b^2} = \frac{a^2 - 3ab + 2b^2}{(a-b)^2}$$

7) jiné chyby – sem zařadíme všechny chyby, které nepatří do žádného z předcházejících druhů, například roztržitost při opisování zadání nebo chybné zápisy dobře míněných postupů

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} = \frac{4-6}{24} = -\frac{2}{24} = -\frac{1}{12} : \frac{1}{2} = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$$

2.4 Algebraické výrazy

V této podkapitole se věnuji myšlenkám z knihy Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků a její 6. kapitole Počátky algebraické činnosti: algebraizace a algebraické úpravy v řešeních žáků 2. stupně. Autorka této kapitoly Jana Žalská uvádí, že důležitým cílem algebraického myšlení je schopnost žáků používat a interpretovat jazyk algebry (jazyk spojený s proměnnou, později s funkcemi). Základní algebraické činnosti jsou předpokladem pro úspěšné zvládnutí většiny matematických oblastí (včetně těch, které jsou obsaženy ve vzdělávacím obsahu středních a vysokých škol).

Souvislost mezi výukou algebry a předchozími zkušenostmi žáků s řešením aritmetických a geometrických úloh má dva důležité důsledky:

„Zaprvé, pokud jsou žákovy aritmetické (a geometrické) znalosti osvojeny nesprávně nebo pouze povrchně (formálně), budou působit jako překážka v činnosti na algebraické úrovni. Druhý důsledek plyne z rozdílů podstat aritmetických a algebraických činností.“ (Vondrová & Rendl, 2015, str. 322)

Pro budování algebraických poznatků je nutné zvládnutí aritmetické symboliky. Nejdříve se žáci seznamují se symboly v oboru přirozených čísel, později přicházejí čísla desetinná, racionální a záporná. První symboly, s kterými se žáci seznamují, jsou například zlomková čára, desetinná čárka, mocněnec, odmocnítko pro druhou mocninu nebo závorky.

Proměnná jako základní algebraický prvek může mít různé významy.

„Proměnná vystupuje jako:

- zobecněné číslo,
- zástupce množiny hodnot, kterých může nabýt daný referent (veličina, množství, míra atd.) při popisu vztahů,
- neznámá (tj. hledaná odpověď na otázku, v podobě konkrétních hodnot),
- součást systému, který podléhá pravidlům transformace a ekvivalence (tj. prvek struktury), např. při provádění rozkladu mnohočlenu na součin.“ (Vondrová & Rendl, 2015, str. 324)

Tyto různé významy proměnné mají vliv na problémy žáků, protože role proměnné se v průběhu jejich studia mění. Proměnná jako zobecněné číslo znamená, že „písmeno“ může zastupovat více než jednu hodnotu. Naopak proměnná jako neznámá znamená, že „písmeno“ může nabývat právě jedné hodnoty.

Řešení algebraických a aritmetických úloh se liší tím, že aritmetická úloha vyžaduje operace se známými čísly za účelem získání dalšího čísla a algebraická operace vyžaduje komplexnější postup. Žáci, kteří jsou zvyklí pracovat pouze s aritmetickými úlohami, přenášejí své zkušenosti do úloh algebraických a mívají sklony vypočítat konkrétní hodnotu výrazu, i když nemají zadané hodnoty proměnných.

Dembyová (1997) ukazuje, že žáci mají potíže s pochopením symbolu „rovná se“. Ve svém výzkumu se ptala žáků (13-15 let), kteří úspěšně provedli algebraickou úpravu výrazu, zda jsou si původní a konečný výraz rovny. Většina žáků na tuto otázku nedokázala odpovědět nebo odpověděli špatně. Žáci byli dokonce přesvědčeni, že pokud dosadí do konečného i původního výrazu konkrétní čísla, výsledek nemusí být stejný.

Ve výzkumu Vondrové a Žalské (Rendl & Vondrová, 2013) probíhaly rozhovory s učiteli matematiky na 2. stupni ZŠ a odpovídajících ročníků gymnázií. Tito učitelé byli jednotní v postoji k náročnosti úpravy výrazů. Potvrzovali, že pro žáky je úprava výrazů náročná proto, že musí využít kombinace znalostí a dovedností, které ne vždy mají osvojeny (jako pořadí operací, práce se závorkami, se zlomky nebo zápornými čísly). Naopak jen málo učitelů by zařadilo číselné výrazy do oblasti, v které se dají tyto znalosti upevnit. Z rozhovorů s učiteli dále vyplynulo, že dalším kritickým místem jsou slovní úlohy (například úlohy na společnou práci nebo úlohy o pohybu).

Následující tabulka 1 je převzatá z knihy (Vondrová & Rendl, 2015, str. 330) a ukazuje položky online dotazníku pro učitele matematiky týkající se výuky algebraických výrazů.

	Počet	Souhlasí	Nesouhlasí
Pro porozumění úpravám algebraických výrazů pomáhá žákům poukazování na souvislosti s příslušnými úpravami číselných výrazů.	244	95 %	5 %
Pro porozumění úpravám algebraických výrazů pomáhá žákům metafora „jablíčka a hruštičky“, tj. nahrazování písmen abstraktních proměnných konkrétním předmětem (nebo přesněji jeho názvem).	243	93 %	7 %
U algebraických výrazů využívám jejich geometrická znázornění (geometrické reprezentace).	228	54 %	46 %
Úlohy na zobecnění číselných pravidelností (např. číselných řad) jsou pro pochopení proměnné důležité.	228	83 %	17 %
Při výuce slovních úloh žákům doporučuji, aby v úloze vyhledali slova odkazující k určité početní operaci.	239	78 %	22 %
Pro řešení slovních úloh je důležité řešení vzorových (typových) úloh.	244	92 %	8 %
Zápis zadání slovní úlohy (slovy nebo obrázkem) je pro proces žákovského řešení důležitý.	244	97 %	3 %
Je důležité vyučovat slovní úlohy podle jednotlivých typů.	244	82 %	18 %

Tabulka 1 - Online dotazník pro učitele matematiky (Vondrová & Rendl, 2015, str. 330)

2.5 Statistická část

Pro vyhodnocení nasbíraných dat jsem využila program Microsoft Excel. V něm jsem použila několik funkcí, které mi pomohly data vyhodnotit. V následujících podkapitolách vymezím pojmy, s kterými jsem v experimentální části dále pracovala. Patří mezi ně především aritmetický průměr, Pearsonův korelační koeficient a krabicové grafy.

2.5.1 Aritmetický průměr

„Aritmetický průměr $\bar{x}$ z číselných hodnot $x_1, x_2, x_3, \ldots$ lze vypočítat podle vzorce

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

kde n je celková četnost všech hodnot. Pro součet všech hodnot $x_i (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ užíváme často znaku $\sum_{i=1}^{n} x_i$.“ (Chráska, 2016, str. 40)

Vzorec poté můžeme zapsat ve tvaru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2.5.2 Směrodatná (standardní) odchylka a rozptyl

Ve vzorcích se bude objevovat i směrodatná odchylka, která udává míru variability pro data, která byla nasbíraná. Rozptyl značíme s^2 a používáme vzorec

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2,$$

kde n je četnost dvojic hodnot a x je hodnota proměnných.

Pro výpočet odchylky pak pouze použijeme druhou odmocninu z rozptylu

$$s_x = \sqrt{s_x^2}.$$

2.5.3 Korelace

V experimentální části diplomové práce jsem potřebovala určit, zda spolu nasbíraná data souvisí. Pro závislost dvou jevů se používá pojem korelace, jejíž hodnota udává, zda jsou dva jevy závislé či nikoliv.

(Mošna, 2010) uvádí, jakých hodnot může korelační koeficient nabývat a jak poznáme, zda jsou dané jevy závislé nebo nezávislé.

„Nabývá hodnoty mezi -1 a 1. Korelace blízká 1 naznačuje, že veličiny jsou na sobě závislé přímo úměrně, korelace blízká -1 pak značí závislost nepřímou, korelace kolem 0 vypovídá o nezávislosti veličin." (Mošna, 2010, str. 47)

(Chráska, 2016) dodává, že:

„Čím více se vypočítaná hodnota koeficientu korelace blíží hodnotě 1 (nebo -1), tím těsnější je vztah mezi proměnnými (jevy), které srovnáváme.

Kladný výsledek vypovídá, že vyšším hodnotám jedné proměnné odpovídají také spíše vyšší hodnoty druhé proměnné a zároveň nižším hodnotám první proměnné odpovídají také nižší hodnoty druhé proměnné.

Jestliže je koeficient korelace záporný, znamená to, že mezi proměnnými, které srovnáváme, je negativní (opačný) vztah. V tomto případě vysokým hodnotám jedné proměnné odpovídají spíš nižší hodnoty druhé proměnné a naopak." (Chráska, 2016, str. 108).

2.5.4 Pearsonův korelační koeficient

Pro výpočet Pearsonova korelačního koeficientu potřebujeme znát hodnotu kovariance, která charakterizuje variabilitu hodnot v případě, že máme u každého objektu dvě naměřené hodnoty. Kovarianci s_{xy} počítáme následujícím způsobem:

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

- n je četnost dvojic hodnot
- x_i, y_i jsou hodnoty obou proměnných naměřené na jednom objektu (dvojice hodnot)
- $\bar{x}$ je průměrná hodnota jedné proměnné
- $\bar{y}$ je průměrná hodnota druhé proměnné

Pearsonův korelační koeficient určuje sílu vztahu mezi dvěma náhodnými spojitými proměnnými X a Y.

„Personův koeficient korelace r_p vypočítáme jako poměr kovariance s_{xy} a součinu směrodatných odchylek obou proměnných." (Chráska, 2016, str. 107)

$$r_p = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

2.5.5 Testování významnosti Pearsonova korelačního koeficientu – Studentův t-test

Samotné vypočítání Pearsonova korelačního koeficientu a z něj získaná závislost či nezávislost dvou jevů ještě nutně nemusí znamenat, že mezi těmito dvěma jevy existuje skutečný a smysluplný vztah. Příčinou vysoké korelace může být někdy působení jiné, nekontrolované proměnné.

Proto významnou roli při hodnocení vypočítaného koeficientu korelace hraje testování jeho statistické významnosti. K tomuto ověřování se nejčastěji používá testového kritéria t.

Nejdříve tedy spočítáme korelační koeficient a následným testem zjistíme, zda mezi dvěma jevy existuje statisticky významný vztah.

Nejdříve musíme zformulovat nulovou a alternativní hypotézu. Nulová hypotéza je hypotéza, kterou chceme ověřit, a dále ji budeme značit H_0. Alternativní hypotéza popírá platnost nulové hypotézy a dále ji budeme značit H_1. Při testování hypotéz se rozhodujeme, zda nulovou hypotézu H_0 zamítneme nebo nezamítneme.

„Hladina významnosti je pravděpodobnost, že neoprávněně (nesprávně) odmítneme nulovou hypotézu. Tuto pravděpodobnost lze volit podle situace (její závažnosti), ve většině pedagogických výzkumů se však pracuje na hladině významnosti 0,05 (5 %) nebo 0,01 (1 %).“ (Chráska, 2016, str. 66)

Při testování statistické významnosti Pearsonova korelačního koeficientu ve svém experimentu budu počítat s hladinou významnosti $\alpha = 0{,}05$.

O přijetí nebo zamítnutí nulové hypotézy můžeme rozhodnout pomocí následujícího výpočtu testového kritéria t:

$$t = \frac{r_p}{\sqrt{\frac{1 - r_p^2}{n - 2}}}$$

Vypočítanou hodnotu testového kritéria srovnáme s kritickou hodnotou tohoto kritéria. Kritickou hodnotu kritéria $t_\alpha(n-2)$ vypočítá například program Microsoft Excel, při zadání n (počet měření) a α (hladina významnosti).

Pokud je vypočítaná hodnota testového kritéria v absolutní hodnotě vyšší než kritická hodnota tohoto kritéria, odmítáme nulovou hypotézu a přijímáme alternativní hypotézu. Naopak pokud by byla hodnota testového kritéria v absolutní hodnotě menší než kritická hodnota tohoto kritéria, nulovou hypotézu přijmeme.

2.5.6 Krabicové grafy

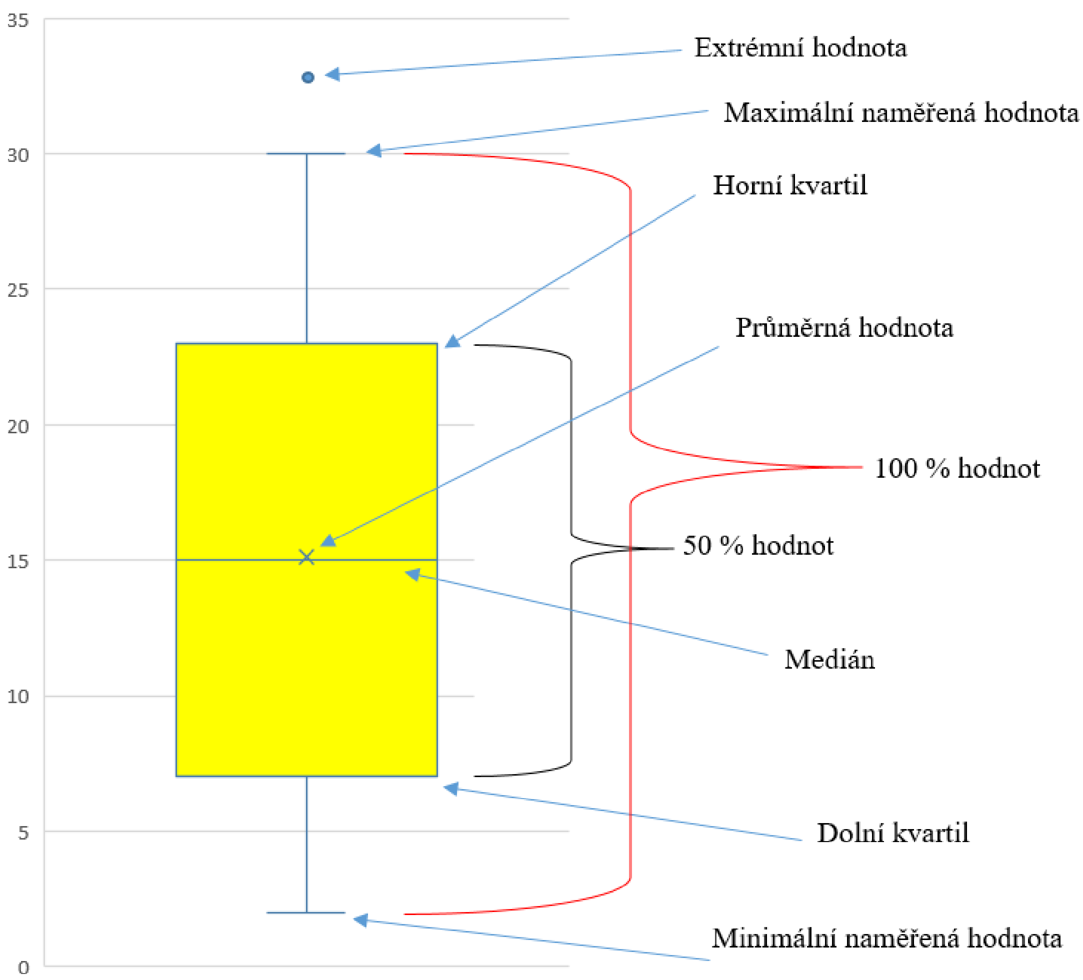
Ve své diplomové části jsem využila také krabicových grafů, které slouží k lepší vizualizaci rozložení daných výsledků. Krabicový graf poskytuje důležité informace, které z nasbíraných výsledků nemusí být na první pohled zřejmé. Jsou jimi například maximální a minimální hodnota, rozsah mezi maximální a minimální hodnotou, průměr, medián nebo hodnoty, které se vyskytují v prostředních 50 % hodnotách. Pro správné pochopení krabicového grafu potřebujeme pojmy jako horní a dolní kvartil, které Chráska (2016) definuje takto:

„Dolní kvartil Q_1 je hodnota, která odděluje čtvrtinu nejmenších hodnot, a horní kvartil Q_3 je hodnota, která odděluje čtvrtinu největších hodnot.“ (Chráska, 2016)

Krabicovým grafům se někdy také říká kvartilové grafy, protože se v nich vyskytuje horní a dolní kvartil.

Krabicové grafy jsou výhodné tehdy, pokud potřebujeme porovnat výsledky několika měření. V této diplomové práci jsou krabicové grafy využity k porovnání výsledků jednotlivých tříd v podkapitole 3.6 Výsledky experimentu.

Krabicový graf je podrobněji popsán v obrázku 1, který jsem sama vytvořila a upozornila jsem na hodnoty, kvůli kterým je krabicový graf velmi často využíván.



Obrázek 1 - Popis krabicového grafu

3 Experimentální část

Ve druhé části diplomové práce se zabývám vlastním experimentem, který byl proveden ve třech základních školách u žáků 9. ročníku. Sestavila jsem vlastní didaktický test, který byl předložen 128 žákům. Test se skládá celkem z 5 úloh. Na konci testu byli žáci požádáni, aby odpověděli na čtyři doplňující uzavřené otázky. Pro vyhodnocení nasbíraných údajů z testu jsem použila program Microsoft Excel, ve kterém jsem využila několik funkcí a vytvořila jsem zde grafy, které jsou v dalších podkapitolách použity.

Experimentální část je nejdříve věnována cílům a metodám experimentu. V další podkapitole jsou shrnuty úlohy v testu, kde představuji zadání jednotlivých úloh, uvádím jejich správná řešení a stanovím hypotézy, které budu ověřovat. Dále také představuji základní školy, které se účastnily experimentu, a uvádím důvody, proč jsem si vybrala pro svůj experiment právě tyto školy. Poté se zabývám analýzou učebnic matematiky 8. ročníku (především kapitol s tématem výrazy), se kterými pracují základní školy, na nichž jsem prováděla svůj experiment. Tyto učebnice následně porovnám a představuji strukturu jejich členění. Na konci experimentální části uvádím výsledky experimentu, kde vyhodnocuji jednotlivých žáků a tříd. Tyto výsledky uvádím v tabulkách a krabicových grafech. Vyhodnoceny jsou také doplňující uzavřené otázky. Jejich výsledky jsou představeny ve formě tabulek a histogramů četnosti odpovědí. Používám také Pearsonův korelační koeficient k ověření, zda mezi výsledky žáků v testu a jejich odpověďmi na doplňující uzavřené otázky existuje statisticky významná závislost.

3.1 Cíle experimentu

Hlavním cílem experimentu bylo zjistit úroveň žáků, jednotlivých tříd a škol v oblasti číselných a algebraických výrazů. Dalším cílem bylo vyhodnocení jednotlivých úloh a celkového testu z hlediska úspěšnosti tříd. Dále byla provedena analýza chyb, kterých se žáci při řešení úloh nejčastěji dopustili. Cílem doplňujících otázek bylo zjistit, jak žáci hodnotí obtížnost testu, jak dobře dokáží odhadnout správnost svých řešení a zda existuje závislost mezi jejich známkou z matematiky na konci 8. ročníku s výsledky tohoto testu.

3.2 Metody experimentu

Pro experiment jsem zvolila kvantitativní metodu výzkumu - samostatnou písemnou práci a krátký dotazník s uzavřenými otázkami. Test jsem vytvořila samostatně, pro inspiraci zadání úloh jsem použila učebnice matematiky, které se používají ve třídách, které se účastnily experimentu. Žáci měli za úkol vyřešit test, který obsahoval 5 úloh (každá úloha se skládala z několika podúloh) a odpovědět na doplňující uzavřené otázky.

Test byl žákům zadán v hodinách matematiky. Čas, který žáci měli pro vypracování, byl 45 minut. Při testu žáci nesměli používat kalkulačky ani tabulky.

U každé úlohy jsem vždy vyhodnotila počet bodů každého žáka a následně jsem spočítala průměrný počet bodů na žáka v každé třídě, protože počty žáků se v jednotlivých třídách lišily. Průměrný počet bodů jsem do výsledků experimentu uváděla i v procentech. Dále jsem podle hypotéz vyhodnocovala určité podúlohy. Výsledky vyhodnocených hypotéz jsou uvedeny v tabulkách u každé úlohy. Také jsem k vyhodnocení použila krabicové grafy, které porovnávají výsledky žáků v jednotlivých třídách. Doplňující otázky v testu byly vyhodnoceny pomocí četnosti odpovědí a také použitím Pearsonova korelačního koeficientu pro zjištění závislosti mezi nasbíranými daty.

3.3 Úlohy v testu

V této podkapitole jsou uvedeny jednotlivé testové úlohy, jejich bodové hodnocení a výsledky jednotlivých úloh. U každé úlohy je uveden důvod, proč jsem ji do testu zařadila, a jaká jsem měla očekávání u žákovských řešení. Dále jsou u každé úlohy uvedeny chyby, které jsem předpokládala, že se v řešeních budou vyskytovat.

Jak již bylo zmíněno v podkapitole 3.2 Metody experimentu, test pro tento experiment jsem sestavila sama na základě prostudování učebnic matematiky pro 2. stupeň. Vybrala jsem úlohy, o kterých jsem si myslela, že by měly být zařazeny v testu, který je tematicky zaměřený na číselné a algebraické výrazy. Tyto úlohy jsem vybírala na základě prostudování učebnic matematiky a na základě vlastní zkušenosti. Inspirovala jsem se některými zadáními z prostudovaných učebnic a upravila jsem je do podoby, v jaké jsem tyto úlohy chtěla využít. Například jsem změnila konkrétní čísla a znaménka tak, abych si ověřila hypotézu pro předpokládané chyby žáků.

Plný počet bodů žáci dostali v případě, že měli správné postupy a výsledky. Některé úlohy byly sestaveny tak, aby žáci mohli psát přímo výsledky. Jiné úlohy vyžadovaly postupná řešení a mezivýpočty – v takových případech buď žáci měli uvedené mezivýpočty přímo v testech, nebo na zvláštních podepsaných papírech, které odevzdávali společně s testem. U složitějších úloh jsem tedy měla k dispozici i postupy žákovských řešení. Žák dostal úměrně snížený počet bodů, pokud měl správně jen část řešení. V případě, že nebylo uvedeno žádné řešení a výsledek chyběl, žák nedostal body žádné. Jako nejvyšší úspěšnost úlohy ze všech úloh v testu dále budu označovat nejvyšší průměrnou procentuální úspěšnost přepočítanou na jednoho žáka (ze všech 128 žáků). Naopak nejnižší úspěšnost úlohy ze všech úloh v testu budu označovat nejnižší průměrnou procentuální úspěšnost přepočítanou na jednoho žáka. Žáci mohli získat celkem 43 bodů. Test v podobě, v jakém ho zpracovávali žáci, je uveden v příloze č. 1.

3.3.1 Úloha 1

První úloha obsahuje šest podúloh, které jsou zaměřené na práci s číselnými výrazy a přednosti početních operací. Jednotlivé úlohy obsahují celá čísla, zlomky i desetinná čísla. <u>Maximální počet bodů za první úlohu je 6</u>, za každou podúlohu žák mohl dostat jeden bod. První úloha slouží jako motivace pro další úlohy, protože žákům 9. ročníku by tyto úlohy neměly dělat žádné problémy.

Zadání úlohy 1

Vypočítej:

a) $6 + (-4) =$

b) $-3 - (-10) =$

c) $-4 + \frac{1}{2} =$

d) $-2\frac{2}{5} - (-4,4) =$

e) $8 : (-2) + 0,6 =$

f) $-10 - (6,5 \cdot 2) =$

Výsledky úlohy 1

a) 2

b) 7

c) $-\frac{7}{2}$

d) 2

e) $-3{,}4$

f) -23

Hypotéza a předpokládané chyby žákovských řešení úlohy 1

U první úlohy jsem předpokládala nejvyšší úspěšnost ze všech úloh v testu. Vzhledem k tomu, že podúloha d) obsahuje smíšený zlomek a desetinné číslo, dalším cílem bylo zjistit, jaký postup řešení žáci zvolí - zda budou při postupu používat převedení desetinného čísla na zlomek nebo převedení zlomku na desetinné číslo.

Z vlastní zkušenosti jsem se domnívala, že pokud se v této úloze nějaké chyby vyskytnou, budou to především chyby z nepozornosti, například přehlédnutí znaménka mínus nebo záměna aritmetické operace plus a krát.

3.3.2 Úloha 2

Ve druhé úloze bylo úkolem žáků určit podmínky, pro které má zadaný algebraický výraz smysl. Druhá úloha obsahuje pět podúloh, které jsou gradované. Maximální počet bodů za druhou úlohu je 7. Podúlohy a), b), e) jsou hodnoceny jedním bodem. Podúlohy c), d) jsou hodnoceny dvěma body, protože podúloha c) obsahuje dvě podmínky a podúloha d) obsahuje odmocninu ve jmenovateli.

Tato úloha byla do testu zařazena, protože měla ukázat, v jakých typech úloh žáci při určování podmínek algebraických výrazů dělají nejčastěji chyby.

Zadání úlohy 2

Urči podmínky, pro které má daný výraz smysl:

a) $\frac{30}{x}$

b) $\frac{5a-8}{b-6}$

c) $\frac{3-9u}{v^2-4}$

d) $\frac{5r}{\sqrt{s+3}}$

e) $\frac{8k}{11}$

Výsledky úlohy 2

a) $x \neq 0$

b) $b \neq 6$

c) $v \neq 2, v \neq -2$

d) $s \in (-3, \infty)$

e) žádná podmínka

Hypotéza a předpokládané chyby žákovských řešení úlohy 2

Ve druhé úloze jsem předpokládala nejčastější problémy žáků s řešením podúlohy c), d). V podúloze c) jsem očekávala, že žáci ve většině případů zapíší jako řešení pouze řešení $v \neq 2$ a zapomenou na druhé řešení $v \neq -2$. U podúlohy d) jsem se domnívala, že žáci přehlédnou odmocninu a budou s výrazem pracovat, jako kdyby ve jmenovateli odmocnina nebyla. Dalším předpokladem bylo, že někteří žáci budou určovat navíc podmínky z čitatele jednotlivých zlomků - tuto chybu jsem očekávala nejčastěji u podúlohy e).

3.3.3 Úloha 3

Ve třetí úloze bylo úkolem žáků doplnit tabulku a dosadit hodnoty y z prvního řádku tabulky. V zadání se vyskytovala celá čísla a zlomky. Žáci měli řešení zapsat v základním tvaru, pokud jejich výsledky neodpovídaly základnímu tvaru zlomku, nedostali plný počet bodů. Maximální počet bodů za třetí úlohu je 10. Každý správný výsledek byl ohodnocen půl bodem.

Zadání úlohy 3

Doplň tabulku (výsledky dopočítej do základního tvaru; pokud je potřeba, urči podmínky, pro které má výraz smysl):

y	5	-2	0	$\frac{1}{2}$	$(-4)^2$
$3y$					
$-\frac{y}{4}$					
$-y+5$					
$\frac{10}{3y^2}$					

Tabulka 2 - Zadání Úlohy 3

Výsledky úlohy 3

y	5	-2	0	$\frac{1}{2}$	$(-4)^2$
$3y$	15	-6	0	$\frac{3}{2}$	48
$-\frac{y}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{8}$	-4
$-y+5$	0	7	5	$\frac{9}{2}$	-11
$\frac{10}{3y^2}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{5}{6}$	nemá řešení	$\frac{40}{3}$	$\frac{5}{384}$

Tabulka 3 - Výsledky Úlohy 3

Hypotéza a předpokládané chyby žákovských řešení úlohy 3

Jednou z chyb, kterou jsem očekávala od žáků, bylo špatné pochopení zadání nebo nepochopení zadání vůbec. Na prvním stupni žáci vyplňují podobné tabulky, které jsou ale často zaměřeny na sčítání, odčítání nebo násobení řádků a sloupců. Žáci, kteří se s podobnou tabulkou na dosazování nesetkali, s ní mohli mít problémy. Dalšími očekávanými chybami byly chyby z nepozornosti (například přehlédnutí znaménka mínus) nebo chyby při provádění matematických operací (doplnění tabulky vyžaduje soustředění a pečlivou kontrolu jednotlivých kroků, krácení některých zlomků do základního tvaru bylo náročnější). Tabulka byla sestavena tak, aby se v ní vyskytovala i podúloha, která nemá řešení (viz 5. řádek, 4. sloupec tabulky). Zde jsem očekávala, že žáci budou jako chybná řešení uvádět 0.

3.3.4 Úloha 4

Čtvrtá úloha je zaměřena na porozumění matematickému textu a obsahuje 4 podúlohy. <u>Maximální počet bodů je 8.</u> Za každou podúlohu žák mohl dostat dva body. Úkolem žáků bylo zapsat a poté vyřešit danou úlohu. Za správný zápis dostali žáci 1 bod, za vyřešení také 1 bod. Pokud někteří žáci uvedli přímo správné řešení (bez zápisu), přiřadila jsem jim plný počet bodů, protože jsem předpokládala, že správně pochopili zadání. Chtěla jsem, aby žáci nejdříve vytvořili správný zápis zadání, protože pokud by výsledek nebyl správně, mohla bych lépe odhadnout, kde se v jejich postupu vyskytla chyba.

Zadání úlohy 4

Zapiš a vypočítej:

a) Druhá mocnina součtu čísel 5 a 3.

b) Druhá odmocnina rozdílu čísel 25 a 9.

c) Absolutní hodnota z podílu čísel (-8) a 4.

d) Součin třetí odmocniny čísla 8 a proměnné x.

Výsledky úlohy 4

a) $(5+3)^2 = 64$

b) $\sqrt{25-9} = 4$

c) $\left|\frac{(-8)}{4}\right| = 2$

d) $\sqrt[3]{8} \cdot x = 2x$

Hypotéza a předpokládané chyby žákovských řešení úlohy 4

Úloha byla do testu zařazena, protože cílem bylo zjistit, zda žákům dělá problémy slovní formulace zadání (například druhá mocnina, druhá odmocnina, absolutní hodnota…). Osobně bych tuto celkovou Úlohu 4 zařadila k těm jednodušším (například ve srovnání s úlohou 3 nebo úlohou 5), protože tato úloha nebyla náročná na numerické počítání a nevyžadovala velkou trpělivost při řešení. Očekávala jsem také méně numerických chyb než například u úlohy 3. Dalšími chybami, o kterých jsem si myslela, že se v této úloze vyskytnou, bylo špatné pořadí jednotlivých výpočtů: u podúlohy a) jsem se domnívala, že žáci nejdříve spočítají druhé mocniny čísel 5 a 3, teprve poté vypočítají jejich součet. V podúloze b) jsem předpokládala, že někteří žáci nejdříve spočítají odmocniny z čísel 25 a 9 a pak vypočítají rozdíl těchto čísel. Podúloha b) byla záměrně zadána tak, aby odmocnina rozdílu dvou čísel byla přirozené číslo. Výsledek podúlohy c) se nezmění, jestliže změníme pořadí operací. Takže pokud žáci napsali přímo výsledek bez postupu, nedalo se zjistit, v jakém pořadí jednotlivé kroky prováděli. U podúlohy d) jsem předpokládala, že by žáci mohli udělat numerickou chybu ve výpočtu třetí odmocniny čísla 8 nebo nebudou vědět, jak danou podúlohu zapsat, protože v předchozích podúlohách se vyskytují konkrétní čísla, ale zde je proměnná x.

3.3.5 Úloha 5

Pátou úlohu bych osobně označila jako nejobtížnější úlohu z celého testu, protože nejdříve je potřeba správně dosadit a následně upravit algebraické výrazy. Z vlastní zkušenosti vím, že žáci mají problém už i se správným dosazením jednoho algebraického výrazu do druhého. Pátá úloha obsahuje 6 podúloh, které se vztahují ke dvěma různým zadáním. Za každou podúlohu jsou dva body, zpravidla žáci dostali jeden bod za správné dosazení a druhý bod za správnou úpravu algebraického výrazu. <u>Maximální počet bodů je 12.</u> Touto úlohou jsou ověřovány znalosti žáků při úpravě mnohočlenů. V této úloze jsem také očekávala velké množství různých postupů a výsledků. Úlohy jsou náročné časově i početně.

Zadání úlohy 5

Dosaď a vypočítej:

a) $A = 4ab^2, \quad B = 2a - 3b + 5$

a1) $A - B =$

a2) $-A^2 =$

a3) $A \cdot B =$

b) $M = \dfrac{3x - 10y}{3}, \quad N = \dfrac{x^2 - x}{2}$

b1) $M - 4N =$

b2) $N^2 =$

b3) $3M \cdot N =$

Výsledky úlohy 5

a1) $4ab^2 - 2a + 3b - 5$

a2) $-16a^2b^4$

a3) $8a^2b^2 - 12ab^3 + 20ab^2$

b1) $\frac{9x - 6x^2 - 10y}{3}$

b2) $\frac{x^4 - 2x^3 + x^2}{4}$

b3) $\frac{3x^3 - 3x^2 - 10x^2y + 10xy}{2}$

Hypotéza a předpokládané chyby žákovských řešení úlohy 5

V této úloze jsem očekávala nejvíce chyb z celého testu, protože se zde vyskytují proměnné s vyššími mocninami než v ostatních úlohách. Žáci tudíž mohli snadněji udělat chybu v postupu. Dalším důvodem, proč jsem očekávala v této úloze více chyb než v ostatních úlohách, bylo to, že správné vyřešení úlohy spočívá ve dvou krocích (dosazení a vyřešení). Předpokládala jsem, že tato úloha bude mít nejnižší úspěšnost. Také jsem předpokládala, že někteří žáci vyřeší jen část úloh nebo cvičení nevyřeší vůbec. Vzhledem k tomu, že pátá úloha byla poslední úlohou v testu, očekávala jsem, že by se mohlo stát, že některým žákům na tuto úlohu nezůstane dostatek času. U podúloh a1), a2) jsem předpokládala, že žáci udělají chybu při práci se znaménky. V podúlohách a3), b1), b3) jsem očekávala chybu až při úpravách výrazů. U podúlohy b2) jsem předpokládala, že by se žáci mohli dopustit chyby při umocnění dvojčlenu, který v sobě už obsahoval druhou mocninu.

3.3.6 Doplňující uzavřené otázky

Na konec testu byly zařazeny tyto 4 doplňující uzavřené otázky, kdy žáci měli zakroužkovat odpověď podle svého názoru:

1) Jak obtížný ti připadal test?

snadný spíše snadný průměrný spíše obtížný obtížný

2) Tipoval(a) jsem:

(téměř) celý test víc jak polovinu testu polovinu testu méně jak polovinu testu netipoval jsem (téměř) vůbec

3) Kolik procent testu podle tebe máš správně?

100 % - 80 % 79 % - 60 % 59 % - 40 % 39 % - 20 % 19 % - 0 %

4) Na konci osmého ročníku jsem na vysvědčení měl(a):

1 2 3 4 5

Pomocí těchto otázek jsem zjišťovala, jak žáci zpětně hodnotili náročnost testu a jak odhadovali svoji procentuální úspěšnost.

3.4 Základní školy, které se účastnily experimentu

Experimentu se účastnili žáci 9. ročníku ze 6 tříd ve 3 různých základních školách. Tyto školy byly vybrány pro jejich různorodost – každá z nich se nachází v jiném městě, jedna základní škola je spojena se základní uměleckou školou a jedna základní škola má třídu s rozšířenou výukou cizích jazyků. Následující text obsahuje několik informací o základních školách, jejichž deváté třídy se do výzkumu zapojily, a důvod, proč byly tyto školy vybrány.

a) Na Základní škole Mikulova v Praze[6] učím již druhým rokem matematiku a semináře z matematiky. S kolegy, kteří učí matematiku v devátých třídách, jsem se domluvila na spolupráci při zadávání testu. Tito učitelé byli ochotní věnovat jednu hodinu matematiky tomuto experimentu.

   ZŠ Mikulova v Praze má 18 tříd na prvním stupni a 9 tříd na druhém stupni. Školu navštěvuje celkem 654 žáků. Škola je zapojena do projektů Rodiče vítáni, Skutečně zdravá škola, Ovoce do škol, Dotované školní mléko a Aktivní škola. Žáci devátých tříd dále musejí vypracovat absolventské práce, jejichž cílem je propojení vyučovaných předmětů, a především zpracování plnohodnotné práce na zadané téma. Ve škole funguje také přípravná třída, kam mají možnost chodit děti s odkladem povinné školní docházky. V současné době tuto třídu navštěvuje 15 dětí.

   V devátém ročníku jsou 2 třídy – 9. A, 9. B. Ve třídě 9. A psalo test k experimentu 8 dívek a 10 chlapců, celkem tedy 18 žáků. Ve třídě 9. B test psalo 9 dívek a 10 chlapců, celkem tedy 19 žáků.

b) Základní školu a Základní uměleckou školu Jesenice v Jesenici[7] jsem si pro experiment vybrala proto, že tato škola se nachází v malém městě, je spojená se základní uměleckou školou a spolužák z PedF UK, který na této škole učí, mi zprostředkoval možnost testovat jejich deváté třídy.

   ZŠ a ZUŠ Jesenice má 25 tříd na prvním stupni a 9 tříd na druhém stupni. Školu navštěvuje celkem 873 žáků. Škola je zapojena například do projektů Párová výuka, Škola pro každého nebo Jazyky bez hranic. Žáci devátých tříd musejí vypracovat tzv. oborovou práci na téma, které si zvolí u konkrétního vyučujícího. V rámci oborové práce žáci projdou několika exkurzemi, přednáškami či cvičeními, které se týkají jejich práce.

   Základní umělecká škola má kapacitu 350 žáků a poskytuje základní umělecké vzdělání ve čtyřech oborech – hudebním, výtvarném, literárně-dramatickém a tanečním.

[6] http://www.zsmikulova.cz/
[7] http://jesenickaskola.cz/

V devátém ročníku ZŠ jsou dvě třídy – 9. A, 9. B. Ve třídě 9. A psalo test 13 dívek a 14 chlapců, celkem tedy 27 žáků. Ve třídě 9. B psalo test 10 dívek a 12 chlapců, celkem tedy 22 žáků.

c) Třetí škola, kterou jsem si pro experiment vybrala, je Základní škola Benešova v Třebíči[8], kterou jsem jako žákyně navštěvovala. Spojila jsem se s učiteli, kteří mě na této škole učili, a poprosila jsem je o spolupráci. Testy s potřebnými informacemi a instrukcemi jsem jim poslala mailem a poté jsem si přijela až pro vyplněné testy.

   Základní škola Benešova v Třebíči má 15 tříd na prvním stupni a 11 tříd na druhém stupni. Školu navštěvuje celkem 655 žáků. Na škole je v každém ročníku (kromě prvního a druhého ročníku) jedna třída s rozšířenou výukou cizích jazyků[9] a jedna třída s rozšířenou výukou tělesné výchovy se zaměřením na atletiku. ZŠ Benešova má několik partnerských škol v zahraničí, například ve Velké Británii, Rakousku, Německu, Dánsku, Slovensku nebo Ukrajině. Na prvním stupni se zavádí prvky Daltonské výuky[10]. Škola je zapojena například do projektu Zdravá záda – cvičení s míči nebo Interaktivní škola. Žáci devátého ročníku musí vypracovat závěrečnou seminární práci na téma, které vypsal některý z učitelů.

   Na ZŠ Benešova jsou 3 deváté třídy, z nichž jsem si pro výzkum vybrala dvě – 9. A a 9. C. Třída 9. C je třída s rozšířenou výukou cizích jazyků a test psalo 12 dívek a 8 chlapců, celkem tedy 20 žáků. Třída 9. A je třída bez zaměření a test psalo 9 dívek a 13 chlapců, celkem tedy 22 žáků.

Výzkumu se celkem účastnilo 128 žáků 9. ročníků.

---

[8] http://www.zsbenesova.cz/

[9] Pokud žáci chtějí od 3. třídy studovat ve třídě s rozšířenou výukou cizích jazyků, musí ve druhé třídě složit přijímací zkoušky z českého jazyka, matematiky a anglického jazyka.

[10] Daltonská výuka je vzdělávací metoda, ve které se plně podporuje aktivní práce žáků. Základem této metody jsou 3 principy – zodpovědnost, samostatnost a spolupráce. (viz zdroj http://www.czechdalton.cz/o-daltonu/)

3.5 Analýza učebnic pro ZŠ

V této podkapitole se zaměřím na analýzu učebnic matematiky pro 8. ročník, protože v tomto ročníku se na základních školách, které se účastnily experimentu, vyučují algebraické výrazy. Analyzovala jsem celkem 3 řady učebnic matematiky pro 8. ročník, protože každá ze tří základních škol učí podle jiné řady učebnic. Také jsem provedla porovnání těchto učebnic, protože každá učebnice má odlišné řazení obsahu vyučované látky. Základní škola Benešova učí podle řady učebnice nakladatelství Fortuna (Coufalová & kol, 2007). Základní škola Jesenice má řadu učebnice nakladatelství Prometheus (Odvárko & Kadleček, 2012). Na základní škole Mikulova se učí podle řady učebnic nakladatelství Prodos (Molnár & kol, 2000).

S číselnými a algebraickými výrazy se žáci setkávají blíže v osmém ročníku, kdy se učí pracovat s proměnnou a hlouběji pochopit její význam. S proměnnou se žáci setkávají ale již na 1. stupni ZŠ, například:

- při řešení slovních úloh (označení toho, co neznají),
- při porovnávání čísel (najdi alespoň tři čísla x taková, že vyhovují zadání: $x > 10$),
- při řešení jednoduchých rovnic (Jaké číslo patří místo y, aby rovnice dávala smysl: $30 - y = 19$),
- při výpočtu obvodů a obsahů čtverců a obdélníků.

3.5.1 Řada učebnic nakladatelství Prodos (ZŠ Mikulova)

Výrazy v této řadě učebnic jsou uvedeny v učebnici pro 8. ročník a jsou členěny do 7 podkapitol – Číselné výrazy, Výrazy s proměnnými, Mnohočleny, Sčítání a odčítání mnohočlenů, Násobení mnohočlenů, Dělení mnohočlenu jednočlenem a Souhrnná cvičení.

V 1. podkapitole Číselné výrazy autoři uvádějí definici číselného výrazu. Tato podkapitola je zaměřená především na procvičení a zopakování základních pojmů a znalostí z oblasti číselných výrazů. Jsou zde cvičení, která opakují pojmy jako součet, rozdíl, součin, podíl a pořadí početních operací. Tyto pojmy budou důležité v dalších podkapitolách pro práci s algebraickými výrazy. Autoři zde uvádějí definici pro číselný výraz:

„Číselný výraz je sestaven z čísel, znamének početních operací a závorek.“ (Molnár & kol, 2000, str. 19)

Úvod ve 2. podkapitole Výrazy s proměnnými je připodobňován k posloupnosti číselných výrazů, kdy se jedno číslo s každým rostoucím členem posloupnosti zvětšuje ($3 + \mathbf{2} \cdot 8;\ 3 + \mathbf{3} \cdot 8;\ 3 + \mathbf{4} \cdot 8;\ 3 + \mathbf{5} \cdot 8; \dots$). Autor upozorňuje na zobecnění úlohy a na číslo, které se s každým členem posloupnosti zvětšuje, označí x a nazve ho proměnná:

„Číselnou hodnotu písmena x proměňujeme, proto se x nazývá proměnnou. Výraz, ve kterém je některé číslo nahrazeno písmenem, se nazývá výraz s proměnnou.“ (Molnár & kol, 2000, str. 21)

Dále je v učebnici připomenuto, že výrazy s proměnnou už žáci znají například jako součin proměnných $a \cdot b$, kde a, b byly strany obdélníku.

Cvičení ve 2. podkapitole jsou zaměřena na rozlišení číselných výrazů a výrazů s proměnnou nebo na vypočítání číselné hodnoty výrazů s proměnnou po dosazení konkrétního čísla místo proměnné.

3. podkapitola Mnohočleny je věnovaná pochopení výrazu mnohočlen, jednočlen, dvojčlen, trojčlen a koeficient. Autoři vysvětlují tyto pojmy a ukazují je na konkrétních případech. Použity jsou také dvě úmluvy. První úmluva se týká úsporného zápisu, kdy místo $x \cdot y$ budou autoři zapisovat pouze xy. U druhé úmluvy se definuje koeficient jako číslo, kterým násobíme proměnnou (nebo více proměnných). V zápisu pak koeficientem začínáme, takže místo $x5$ se bude zapisovat $5x$.

Cvičení ve 3. podkapitole se zaměřují na úsporný zápis, počet členů ve výrazu a hodnotu výrazu po dosazení konkrétního čísla.

Ve 4. podkapitole Sčítání a odčítání mnohočlenů je jako úvodní úloha prezentována slovní úloha, v které různě staré děti používají k výpočtu úlohy různé zápisy. Například úloha: 4 hvězdičky plus 5 hvězdiček je dohromady 9 hvězdiček. Žák na první stupni by si úlohu mohl přepsat například takto: $4☆+5☆=9☆$. Naopak žák v 8. třídě už by mohl použít výrazy s proměnnými a úlohu zapsat takto: $4h+5h=9h$. Následuje věta, že:

„Členy se stejnou proměnnou můžeme sčítat a odčítat.“ (Molnár & kol, 2000, str. 23)

Po této úvodní úloze a větě pro sčítání a odčítání členů se stejnou proměnnou je v učebnici uvedena série úloh, které slouží především k upevnění nově nabytých vědomostí. Jedná se o sčítání a odčítání výrazů s proměnnými, o ověření, zda se zjednodušené výrazy sobě rovnají a o úpravu složitějších výrazů.

V 5. podkapitole Násobení mnohočlenů je jako úvodní úloha použitý zápis součtu dvou dvojčlenů dvěma různými způsoby.

I. způsob: $(x+4y)+(x+4y)=x+4y+x+4y=2x+8y$

II. způsob: $(x+4y)+(x+4y)=2(x+4y)$

Autoři uvádějí, že násobení výrazu v závorce uděláme tak, že roznásobíme každý člen výrazu číslem před závorkou.

$$2(x+4y)=2x+2\cdot 4y=2x+8y$$

Stejný postup při násobení platí pro násobení -1.

$$-1(x+3)=-1\cdot x+(-1)\cdot 3=-x-3$$

Následuje úmluva o zkráceném zápisu při násobení:

„Zápis $1\cdot a$ zkráceně zapíšeme a, stejně zápis $-1\cdot a$ zkráceně zapíšeme $-a$.“ (Molnár & kol, 2000, str. 25)

V této podkapitole je také definován opačný mnohočlen:

„Mnohočlen vynásobený číslem -1 se nazývá opačný mnohočlen (k danému mnohočlenu).“ (Molnár & kol, 2000, str. 25)

Další úmluva se týká opět krácených zápisu:

„Zápis $-1(x+y)$ můžeme nahradit zápisem $-(x+y)$. Naopak také zápis $-(a+b)$ můžeme nahradit zápisem $-1(a+b)$.“ (Molnár & kol, 2000, str. 25).

Následuje několik cvičení zaměřených na procvičení opačných mnohočlenů, odstraňování závorek, roznásobování a zjednodušování zápisu mnohočlenů. Jedno ze cvičení je určeno k doplnění čísla před závorku tak, aby se výraz po roznásobení rovnal výrazu na pravé straně rovnosti. Žáci se tímto cvičením lépe připraví k pochopení pojmu vytknutí čísla:

„Říkáme, že z výrazu $6x+2y$ jsme vytkli číslo 2. Máme pak:
$6x+2y=2(3x+y)$.“ (Molnár & kol, 2000, str. 26)

Opět je zde několik cvičení k prohloubení nových znalostí o vytýkání.

Dále je v učebnici uvedeno roznásobení mnohočlenu dvojčlenem:

I. $(a+4)\cdot(b+6)=a\cdot(b+6)+4\cdot(b+6)=ab+6a+4b+24$,

II. $(a+4)\cdot(b+6)=(a+4)\cdot b+(a+4)\cdot 6=ab+4b+6a+24$.

Autoři uvádějí, že jsme vynásobili všechny členy navzájem, tudíž můžeme zkráceně zapisovat (podle toho, kterou závorkou roznásobujeme):

I. $(a+4)\cdot(b+6)=ab+6a+4b+24$,

II. $(a+4)\cdot(b+6)=ab+4b+6a+24$.

Na konci této podkapitoly je opět uvedeno několik úloh k procvičení roznásobování mnohočlenu mnohočlenem.

Cvičení na začátku 6. podkapitoly Dělení mnohočlenu mnohočlenem nejdříve opakují dělení jednočlenu číslem. Poté se přechází k dělení dvojčlenu číslem. V této podkapitole je uvedena pouze jedna důležitá poznámka od autorů:

„Dělit můžeme také proměnnou, ale musíme si pamatovat: jmenovatel se nesmí rovnat nule.“ (Molnár & kol, 2000, str. 27)

Následující cvičení jsou zaměřená na dělení nejdříve jednočlenu proměnnou, poté dvojčlenu proměnnou. Zároveň je v zadání uvedeno, že žáci mají určit podmínky, které musí platit pro jmenovatele.

V poslední 7. podkapitole Souhrnná cvičení je uvedeno několik cvičení, ve kterých si žáci zopakují a ještě více procvičí látku, kterou se v předchozích podkapitolách naučili. Je to tedy především práce s číselnými výrazy a pořadí početních operací, dále výpočet hodnoty výrazu po dosazení čísla za proměnnou, zjednodušování zápisu mnohočlenů, součet, rozdíl a součin mnohočlenů.

Po celé kapitole Výrazy následuje kapitola Lineární rovnice, kde žáci budou moct využít znalosti, které právě získali.

Výuka algebraických výrazů v této učebnici je rozdělena do více kapitol. Například výrazy s druhou mocninou a odmocninou nejsou uvedeny ve 2. kapitole Výrazy, ale ve 4. kapitole Druhá mocnina a odmocnina. V této podkapitole se žáci setkávají s výrazy, kde se proměnné vyskytují vyšších mocninách než v prvních. Tato podkapitola začíná uvedením číselných výrazů a jejich opakováním. Žáci si v prvních cvičeních opakují znalosti mocnin a odmocnin. Poté se přejde k návodu, jak sčítat a odčítat výrazy, které obsahují mocniny proměnných:

> „Sčítat (odčítat) můžeme pouze výrazy se stejnou proměnnou ve stejné mocnině.“
> (Molnár & kol, 2000, str. 57)

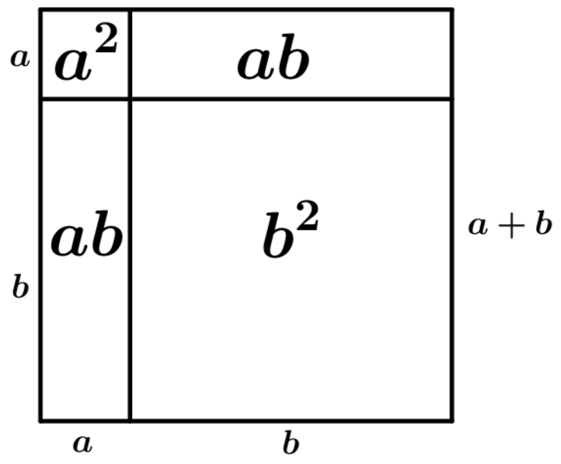
Následující dvě cvičení jsou věnovaná úpravě výrazů, které obsahují mocniny proměnných.

Pak jsou žákům předloženy vzorce:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad [1]$$

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b). \qquad [2]$$

Vzorce jsou žákům předloženy i postupem, jak se odvozují z obrázku. Autoři postupují pomocí výpočtu obsahu čtverce a obdélníku (viz obrázek 2).



Obrázek 2 – Druhá mocnina součtu proměnných (Molnár & kol, 2000, str. 57)

„Strana čtverce má velikost $(a + b)$, obsah čtverce je pak $S = (a + b) \cdot (a + b)$

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Na obrázku vidíme:

- a^2… obsah malého čtverce
- $2ab$… obsah dvou obdélníků
- b^2... obsah velkého čtverce“ (Molnár & kol, 2000, str. 57)

Dále je v učebnici uveden vzorec pro rozdíl druhých mocnin proměnných. Následují cvičení, které procvičují upravování výrazů podle vzorců [1], [2]. Nejedná se o slovní úlohy, ale pouze o úpravu výrazů buď rozložením podle vzorce, nebo úpravou mnohočlenu na součin.

3.5.2 Řada učebnic nakladatelství Prometheus (ZŠ Jesenice)

Řada učebnic nakladatelství Prometheus je pro 8. ročník členěna do tří dílů:

1. Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, výrazy
2. Lineární rovnice, základy statistiky
3. Kruh, kružnice, válec, konstrukční úlohy

V analýze číselných a algebraických výrazů této řady učebnic jsem se zaměřila pouze na 1. díl učebnice matematiky pro 8. ročník, protože právě v tomto dílu se nachází téma výrazy. Tato učebnice je rozdělena do několika kapitol, výrazů se týkají dvě kapitoly, a to 4. kapitola Výrazy a 5. kapitola Mnohočleny. Kapitola Výrazy je rozdělena do 4 podkapitol – Číselné výrazy, Výrazy s proměnnými, Výrazy v matematice i v životě a Úlohy na závěr. Kapitola Mnohočleny je rozdělena do 6 podkapitol – Co je mnohočlen, Sčítání a odčítání mnohočlenů, Násobení mnohočlenů, Rozklad mnohočlenu na součin, Vzorce usnadňují úpravy a Úlohy na závěr.

1. podkapitola Číselné výrazy je zaměřená na opakování číselných výrazů, které už žáci znají. Jsou zde zařazena cvičení s druhou mocninou, druhou odmocninou a také cvičení na procvičení odstraňování závorek. Autoři uvádí návod, jak počítat hodnotu výrazu, který obsahuje nebo neobsahuje závorky.

„Ve výrazu bez závorek nejprve umocňujeme a odmocňujeme, potom násobíme a dělíme a nakonec sčítáme a odčítáme. Ve výrazu se závorkami nejprve počítáme hodnoty výrazů v závorkách – odstraňujeme závorky.“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 40)

V této podkapitole jsou zařazeny i úlohy, v nichž mají žáci za úkol najít chybu v už zapsaném výpočtu a opravit ji. Tato úloha se už na první pohled liší od ostatních, protože žáci mají pouze kontrolovat již napsaný postup.

Jsou zde i úlohy, které jsou zaměřené na správnou terminologii, která se týká výrazů, jako součet, rozdíl, součin, podíl, ale i dvojnásobek, trojnásobek, druhá mocnina, druhá odmocnina.

Autoři se zaměřují i na práci se závorkami, kdy žákům zdůrazňují, že existuje více typů závorek a jak se s nimi dále pracuje.

„Závorky jsou (okrouhlé), [hranaté] a {složené}. Při odstraňování závorek

- začneme okrouhlými, které jsou nejvíce „uvnitř“,
- pak odstraníme hranaté závorky
- a nakonec vypočítáme hodnotu výrazu vytvořeného ve „vnějších“ složených závorkách.“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 43)

Ve 2. podkapitole Výrazy s proměnnými je jako úvodní motivační úloha uvedena slovní úloha, kdy je proměnná použita tak, jak s ní žáci pracovali již na 1. stupni ve slovních úlohách. Tato podkapitola je zaměřena především na výpočet hodnoty výrazu. Autoři opět dodávají návod, jak žáci hodnotu výrazu spočítají.

„Jak vypočítáš hodnotu výrazu se dvěma proměnnými a, b pro $a = 16$ a $b = 23$?

$$50 \cdot a + 30 \cdot b$$

- Dosadíš do výrazu za a číslo 16 a za b číslo 23

$$50 \cdot 16 + 30 \cdot 23$$

- a vypočítáš hodnotu získaného číselného výrazu:

$$50 \cdot 16 + 30 \cdot 23 = 1\,490$$“

(Odvárko & Kadleček, 2012, str. 45)

Ve 3. podkapitole Výrazy v matematice i v životě se nachází různé typy slovních úloh, kdy žáci řeší tyto úlohy pomocí výrazů. Nejdříve jsou v této podkapitole uvedeny úlohy, s kterými se žáci setkají v matematice a využívají se v nich výrazy. Jsou to například úlohy, v kterých žáci počítají:

- výšku a obsah rovnostranného trojúhelníku
- úhlopříčku ve čtverci
- stěnovou a tělesovou úhlopříčku v krychli

Dále jsou uvedeny úlohy, které žáci už znají nebo se s nimi teprve setkají v životě. Jedná je o úlohy například:

- výpočet daně z louky
- výpočet daně ze stavebního pozemku
- výpočet slevy při nákupu

Ve 4. podkapitole Úlohy na závěr je uvedeno několik úloh, které slouží k procvičení právě získaných znalostí. Jedná se především o výpočet hodnoty číselných výrazů nebo o slovní úlohy využívající výrazy.

V kapitole Mnohočleny je jako první zařazena podkapitola Co je mnohočlen, která je ve svých úlohách zaměřena především na správnou terminologii ohledně mnohočlenů. Jako motivační úloha je použita úloha, v které je zobrazeno těleso složené ze dvou kvádrů a žáci mají za úkol slovně popsat geometrický význam předepsaných výrazů. Tato úloha žákům přiblíží, že s mnohočleny již dříve pracovali, pouze nevěděli, jak se jim odborně říká. Pod touto úlohou autoři uvádějí definice jednočlenu:

„Jednočlen je výraz, která se dá zapsat jako:

- číslo $3; -5{,}23; -\frac{7}{9}$
- proměnná $a; b; x; y$
- součin čísel a proměnných $8 \cdot x; -3 \cdot a \cdot b^2$

Číslo, které se vyskytuje v jednočlenu, nazýváme koeficient.

$$6 \cdot x^2 \qquad y = 1 \cdot y \qquad -a^2 \cdot b = (-1) \cdot a^2 \cdot b$$

koeficient“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 52)

Autoři dále upozorňují na to, že nejlepší zápis je stručný zápis:

„Součiny stejných proměnných zapisujeme jako mocniny:

$$2 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = 2 \cdot a^2 \cdot b^2$$

Tečky označující násobení obvykle vynecháváme:

$2 \cdot a^2 \cdot b^2 = 2a^2b^2$ “ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 52)

Další úlohy jsou směřované k tomu, aby žáci co nejstručněji zapsali daný jednočlen. V této podkapitole je také uvedená definice mnohočlenu, a to, že mnohočlen je jednočlen nebo výraz, který lze zapsat jako součet jednočlenů. Autoři dále předkládají několik konkrétních jednočlenů, dvojčlenů, trojčlenů a čtyřčlenů, aby si žáci mohli lépe propojit definici a konkrétní mnohočlen.

Další poznámka, kterou autoři vložili do této kapitoly, je, že závorky u záporných koeficientů vynecháváme. Například $6a^2 + (-5)b$ zapisujeme jako $6a^2 - 5b$.

Ve 2. podkapitole Sčítání a odčítání mnohočlenů je jako motivační úloha uvedena opět úloha s kvádry, kdy mají žáci vyjádřit obsahy jejich stěn a pak vypočítat jejich povrch. Pod touto úlohou je uveden následující zápis, který uvádí konkrétní příklad, jak sčítat a odčítat mnohočleny:

$$2n^2 + 6n - 2n + n^2 = (2n^2 + n^2) + (6n - 2n) = 3n^2 + 4n$$

Poté je uvedeno jedno cvičení na sčítání a odčítání mnohočlenů a jedno cvičení na nalezení chyb už v zapsaných výpočtech. Až po těchto dvou cvičeních autoři uvádějí návod na sčítání a pak i na odčítání mnohočlenů:

„Odstraníme závorky, najdeme členy, ve kterých jsou stejné proměnné ve stejných mocninách, tyto členy sečteme (odečteme).“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 55)

„Odstraníme závorky, dále pokračujeme jako při sčítání mnohočlenů.“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 57)

Další definice ani návody už v této podkapitole uvedeny nejsou, následují ale 3 stránky úloh určené k procvičení sčítání a odčítání mnohočlenů. Jedná se o geometrické úlohy, slovní úlohy, úlohy na výpočet hodnoty mnohočlenů a úlohy, při nichž mají žáci za úkol kontrolovat již provedené výpočty.

Ve 3. podkapitole Násobení mnohočlenů se autoři nejdříve zaměřili na násobení jednočlenů a dodávají, že:

„Při násobení jednočlenů můžeme koeficienty i proměnné libovolně sdružovat a zaměňovat jejich pořadí.“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 58)

Opět následuje několik úloh, které mají procvičit násobení jednočlenů mezi sebou.

Ve druhé části této podkapitoly je zařazen návod na násobení mnohočlenu jednočlenem:

„Mnohočlen násobíme jednočlenem tak, že vynásobíme jednočlenem každý člen mnohočlenu a získané jednočleny sečteme.

$$(3x^2 + 5xy - 2x) \cdot 6yz = 3x^2 \cdot 6yz + 5xy \cdot 6yz - 2x \cdot 6yz =$$

$= 18x^2yz + 30xy^2z - 12xyz$“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 59)

Následuje několik úloh na procvičení násobení mnohočlenu jednočlenem, autoři před těmito cvičeními dodávají, že při násobení mnohočlenu -1 se znaménka všech členů v mnohočlenu změní v opačná.

Třetí část této podkapitoly je zaměřená na násobení mnohočlenu mnohočlenem:

„Mnohočlen vynásobíme mnohočlenem tak, že každý člen jednoho mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého mnohočlenu a získané jednočleny sečteme.

$$(4x - 2y + 3) \cdot (x + y) = 4x \cdot x - 2y \cdot x + 3 \cdot x + 4x \cdot y - 2y \cdot y + 3 \cdot y =$$

$$= 4x^2 - 2xy + 3x + 4xy - 2y^2 + 3y =$$

$= 4x^2 - 2y^2 + 2xy + 3x + 3y$“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 60)

Autoři také ilustrují různé postupy při násobení mnohočlenů na konkrétní úloze, kdy ukazují dva žáky, z nichž jeden roznásobuje levou závorkou a druhý pravou závorkou, ale oba dospějí ke stejnému výsledku.

Ke konci této podkapitoly je uvedeno několik úloh *pro přemýšlivé*. Tyto úlohy jsou věnovány mnohočlenům v geometrii, konkrétně při výpočtu obsahu pravoúhelníku, pokud zvětšujeme nebo zmenšujeme jeho strany. Další úloha *pro přemýšlivé* se týká výpočtu součinu dvojčlenů pomocí vzorce pro obsah obdélníku – tato úloha je zde vypočítaná a žák má určit, zda je postup správný nebo ne.

Ve 4. podkapitole Rozklad mnohočlenu na součin je jako úvodní úloha uveden problém, kdy chceme dvojčlen zapsat jako součin mnohočlenů a žák má rozhodnout, který ze tří postupů je správný. Po této úvodní úloze autoři dávají návod, jak by žáci měli v dalších cvičeních postupovat:

„Při rozkladu mnohočlenu na součin budeme vytýkat před závorku všechny činitele, které se vyskytují ve všech členech mnohočlenu.

$$18abc + 21bcd = 3 \cdot 6 \cdot abc + 3 \cdot 7 \cdot bcd = 3bc \cdot (6a + 7d)$$“

(Odvárko & Kadleček, 2012, str. 63)

Následují úlohy, které jsou zaměřené na vytknutí před závorku a rozložení na součin. Autoři uvádějí i podrobnější návod, jak postupovat při vytýkání:

„Rozklad mnohočlenu na součin vytýkáním před závorku

$$9x^2y^2 - 18x^2y + 15xy$$

- Koeficienty rozložíme na součiny prvočísel, mocniny rozepíšeme jako součiny základů,

$$3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y + 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y$$

- najdeme společné činitele všech členů,

$$3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot y + 3 \cdot 5 \cdot x \cdot y$$

- vytkneme všechny společné činitele před závorku,

$$3 \cdot x \cdot y \cdot (3 \cdot x \cdot y - 2 \cdot 3 \cdot x + 5)$$

- výsledný výraz napíšeme co nejstručněji.

$3xy \cdot (3xy - 6x + 5)$“ (Odvárko & Kadleček, 2012, str. 64)

Další úlohy jsou gradované a postupně mají žáci za úkol rozkládat na součin dvojčleny, trojčleny a nakonec čtyřčleny.

V 5. podkapitole Vzorce usnadňují úpravy je učebnice zaměřena na vzorce pro druhé mocniny dvojčlenů, a to na vzorce

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Autoři uvádí několik typů úloh, které se liší zadáním. Žáci mají počítat podle vzorce a zapsat výsledek, doplnit správné výrazy místo otazníku, zkontrolovat již předepsané výpočty nebo uvést protipříklady k některým výrokům.

Žáci se v této podkapitole setkávají také se vzorcem

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2.$$

V krátké 6. podkapitole Úlohy na závěr je výčet úloh, které mají zopakovat prozatím získané poznatky – vypočítání hodnoty dvojčlenu, sčítání a odčítání mnohočlenů, násobení jednočlenů a mnohočlenů nebo rozklad na součin.

3.5.3 Řada učebnic nakladatelství Fortuna (ZŠ Benešova)

Učebnice matematiky pro 8. ročník nakladatelství Fortuna má jeden díl. Kapitola s tématem Výrazy je členěna do 7 podkapitol – Číselné výrazy, Výrazy s proměnnými, Sčítání a odčítání výrazů, Násobení a dělení mnohočlenů jednočlenem, Násobení mnohočlenu mnohočlenem, Vzorce pro úpravu výrazů a Opakování.

1. podkapitola Číselné výrazy je zaměřena na opakování základních pojmů, které by žáci měli znát již z předchozích ročníků. Jedná se především o součet, rozdíl, součin, podíl, druhou mocninu a druhou odmocninu. Autoři jako poznámku uvádí, že z čísel, znamének početních operací a závorek sestavujeme číselné výrazy. Dále je přiblížena tabulka, v které jsou sepsané konkrétní číselné výrazy a jejich pojmenování.

„Výraz pojmenováváme podle operace, kterou provádíme poslední.“ (Coufalová & kol, 2007, str. 99)

Cvičení, které dále následuje, je zaměřeno právě na pojmenovávání číselných výrazů. Na konkrétní úloze je také ukázáno, čemu se říká číselný výraz a co je číselná hodnota výrazu.

V další opakovací části této podkapitoly se autoři zaměřili na pořadí provádění operací u výrazů se závorkami:

„Nejprve provedeme početní výkony v závorkách. U výrazů s různými druhy závorek počítáme v tomto pořadí:

1. Určíme hodnotu výrazu v kulatých závorkách.
2. Určíme hodnotu výrazu v hranatých závorkách.
3. Určíme hodnotu výrazu ve složených závorkách.“ (Coufalová & kol, 2007, str. 100)

Je uvedeno také pořadí provádění operací u výrazů bez závorek:

„Násobení a dělení má přednost před sčítáním a odčítáním. Umocňování a odmocňování má přednost před násobením a dělením.“ (Coufalová & kol, 2007, str. 100)

V učebnici je také uvedeno, čemu se říká opačné číslo ke druhé mocnině a co je druhá mocnina záporného čísla.

-6^2… opačné číslo ke druhé mocnině čísla 6

$-6^2 = -(6^2) = -36$

(-6^2)…druhá mocnina záporného čísla (-6)

$(-6)^2 = 36$

Následuje několik úloh, které jsou zaměřené na pořadí provádění operací v číselných výrazech. V této podkapitole jsou uvedeny i slovní úlohy, v kterých mají žáci za úkol zapsat číselný výraz, který odpovídá popsané situaci, a určit číselnou hodnotu tohoto výrazu.

Ve 2. podkapitole Výrazy s proměnnými je jako úvodní motivační úloha uvedena slovní úloha, která při zobecnění vede k využití proměnné. Tato úloha je v učebnici vyřešena a postup je zde podrobně popsaný, takže žáci snadněji pochopí, co je číselný výraz a co je výraz s proměnnými. Za touto úlohou je uvedena věta, jak z číselného výrazu vytvoříme výraz s proměnnými a jak získáme číselnou hodnotu výrazu s proměnnými.

„Jestliže v číselném výrazu nahradíme jedno nebo více konkrétních čísel písmenem, vznikne výraz s proměnnými.

Jestliže do výrazu s proměnnými dosadíme za všechny proměnné konkrétní čísla, dostaneme hodnotu výrazu pro danou hodnotu proměnné.“ (Coufalová & kol, 2007, str. 102)

Následuje série úloh, v kterých mají žáci za úkol rozhodnout, zda se jedná o číselný výraz nebo o výraz s proměnnou, určovat počet proměnných ve výrazech, vypočítat hodnotu výrazu pro uvedené hodnoty proměnné nebo vyjádřit pomocí proměnné slovní zápis.

Dále se v této podkapitole objevuje definice pro jednočlen a mnohočlen:

„Jednočlen - výraz, který obsahuje jenom číslo, jenom proměnnou, jejich součin, podíl, mocninu nebo odmocninu.

Mnohočlen – součet nebo rozdíl několika jednočlenů.“ (Coufalová & kol, 2007, str. 104)

Na konkrétním jednočlenu je pak ukázáno, co je koeficient a co proměnná.

$$6 \cdot x$$

koeficient proměnná

- dvojčlen: $2 \cdot x + 1$
- jednočlen: $3 \cdot y$
- součin dvojčlenu a jednočlenu: $(2 \cdot x + 1) \cdot (3 \cdot y)$
- součin dvojčlenů: $(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot x + 1)$

V této učebnici je také uvedeno zkracování zápisů a opačné výrazy k původním výrazům:

- $3 \cdot a \cdot b = 3ab$
- $x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y = x^3y^2$
- $(-2) \cdot k \cdot l = -2kl$
- $3x \rightarrow -3x$
- $-6x \rightarrow 6x$
- $(a + b) \rightarrow -(a + b)$

Ve 3. podkapitole Sčítání a odčítání výrazů není uvedena žádná motivační úloha, ale autoři začínají tuto podkapitolu tabulkou 4, která uvádí postup při sčítání a odčítání jednočlenů a mnohočlenů.

a) **Sčítání a odčítání jednočlenů** Sčítat a odčítat můžeme jednočleny, které mají stejnou proměnnou ve stejné mocnině. • sečteme (odečteme) koeficienty • mocninu proměnné opíšeme	$2a^2 + 5a^2 = 7a^2$ $1{,}4p - 0{,}8p = 0{,}6p$ $5x^2 + 3x^3$ nemůžeme sečíst $4a^2 + 3x^2$ nemůžeme sečíst
b) **Sčítání mnohočlenů** • Odstraníme závorky • Jednočleny sečteme nebo odečteme	$(3x + 2) + (5 - 2x) =$ $= 3x + 2 + 5 - 2x =$ $= 3x - 2x + 2 + 5 = x + 7$
c) **Odčítání mnohočlenů** • Přičteme opačný mnohočlen • Změníme znaménka všech jednočlenů v závorce • Získaný výraz přičteme	$(3x + 2) - (5 - 2x) =$ $= (3x + 2) + (-5 + 2x) =$ $= 3x + 2 - 5 + 2x = 5x - 3$

Tabulka 4 - Sčítání a odčítání jednočlenů a mnohočlenů (Coufalová & kol, 2007, str. 105)

Autoři také uvádí poznámku, že při odečítání mnohočlenů odčítáme postupně každý jeho člen. V této podkapitole už nejsou žádné další poznámky ani definice a je zde pouze výčet úloh, které slouží pro sčítání a odčítání mnohočlenů nebo k zapsání opačných výrazů. Na konci podkapitoly jsou zařazeny dvě slovní úlohy, kdy žáci mají určit součet tří a čtyř po sobě jdoucích čísel, jestliže poslední z nich označíme a.

Ve 4. podkapitole Násobení a dělení mnohočlenů jednočlenem také není uvedena žádná motivační úloha a rovnou je žákům předložena tabulka 5, která přesně popisuje, jak se násobí a dělí jednočleny.

Násobení jednočlenů • vynásobíme koeficienty • vynásobíme mocniny se stejným základem	$4 \cdot 5k = 20k$ $6x^2y \cdot 3xy^3 = 18x^3y^4$
Dělení jednočlenů • vydělíme koeficienty • vydělíme mocniny se stejným základem	$8x^2 : 4 = 2x^2$ $10a^3b : 2ab = 5a^2 \quad (a \neq 0, b \neq 0)$

Tabulka 5 - Násobení a dělení jednočlenů (Coufalová & kol, 2007, str. 106)

Pod tabulkou je v učebnici uvedena poznámka, že výraz, který dělíme, se nesmí rovnat nule. Je zde také zapsán předpoklad, že tato podmínka je u dalších cvičení splněna, tudíž žáci nemusí podmínky zapisovat. Podle mého názoru to není vhodné, protože čím více žáci budou zapisovat podmínky, tím lépe si zvyknou, že u dělení se podmínky zapisují. Tato poznámka s předpokladem splnění podmínek pouze žáky vede k tomu, že si zafixují, že se podmínky u dělení určovat nemusí.

Následuje série úloh, které jsou zaměřené na násobení a dělení jednočlenů, v posledním cvičení se ještě navíc přidává výpočet hodnoty výrazu po dosazení konkrétního čísla.

Druhá část této podkapitoly je věnovaná násobení a dělení mnohočlenu jednočlenem. Autoři opět neuvádí žádnou úvodní úlohu, ale přímo se odkazují na tabulku 6, ve které žákům předkládají, jak mají při násobení a dělení mnohočlenu jednočlenem postupovat.

Násobení mnohočlenu jednočlenem (roznásobení součtu nebo rozdílu) • Jednočlenem vynásobíme každý člen mnohočlenu • Vzniklé součiny sečteme (odečteme)	$3(a+b) = 3a + 3b$ $x(2x+1) = 2x^2 + x$ $2a(a-b) = 2a^2 - 2ab$
Dělení mnohočlenu jednočlenem (různým od nuly) • Jednočlenem vydělíme každý člen mnohočlenu • Vzniklé podíly sečteme (odečteme)	$(10a+5):5 = 2a+1$ $(4x^2+x):x = 4x+1$ $(x \neq 0)$ $(6x^3 - 9x^2):3x^2$ $= 2x - 3$ $(x \neq 0)$

Tabulka 6 - Násobení a dělení mnohočlenů (Coufalová & kol, 2007, str. 107)

Následuje série úloh, které jsou zaměřené na násobení a dělení mnohočlenu jednočlenem. Úlohy jsou jednotvárné, navzájem si podobné. Na konci tohoto bloku úloh jsou dvě slovní úlohy, ve kterých nejdříve žáci zapíší daný mnohočlen a poté násobí nebo dělí podle konkrétního zadání.

Další částí této podkapitoly je vytýkání před závorku. V učebnici je opět žákům předložena tabulka, v které je popsán postup při vytýkání a konkrétní příklady. Pak následují opět jednotvárná cvičení, která jsou zaměřená na vytýkání.

V krátké 5. podkapitole Násobení mnohočlenů mnohočlenem opět není uvedena žádná úvodní motivační úloha, ale přímo konkrétní postup při násobení mnohočlenu mnohočlenem.

„Prvním členem prvního dvojčlenu násobíme každý člen druhého dvojčlenu. Druhým členem prvního dvojčlenu násobíme každý člen druhého dvojčlenu. Vzniklé součiny sečteme.“ (Coufalová & kol, 2007, str. 111)

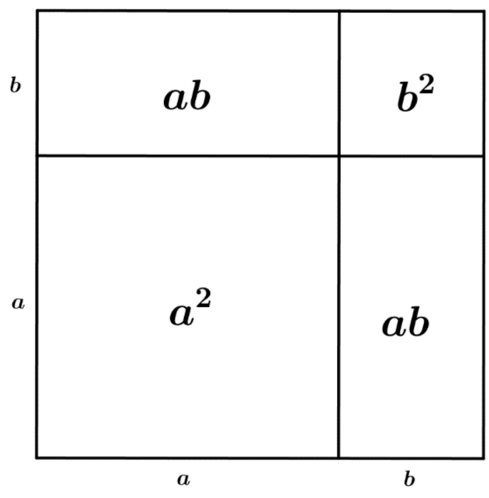
Následuje série několika cvičení, v kterých si žáci procvičují násobení mnohočlenů mnohočlenem. Cvičení jsou opět jednotvárná, žádná slovní úloha se zde nenachází.

V 6. podkapitole Vzorce pro úpravu výrazů se žáci setkávají se vzorci

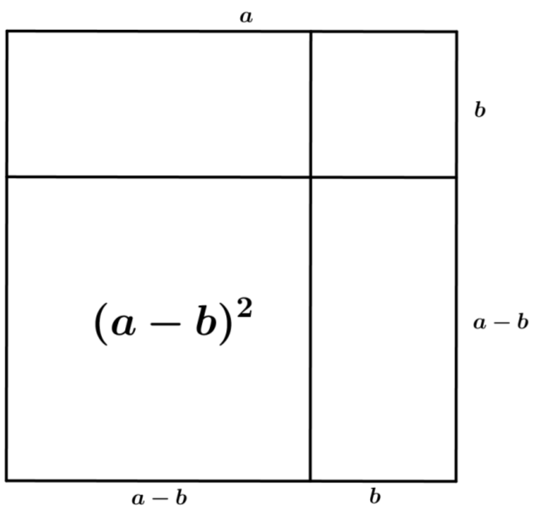
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$,

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

Vzorce $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ jsou v učebnici vyobrazeny i graficky (viz obrázky 3 a 4).



Obrázek 3 - Druhá mocnina součtu proměnných (Coufalová & kol, 2007, str. 112)



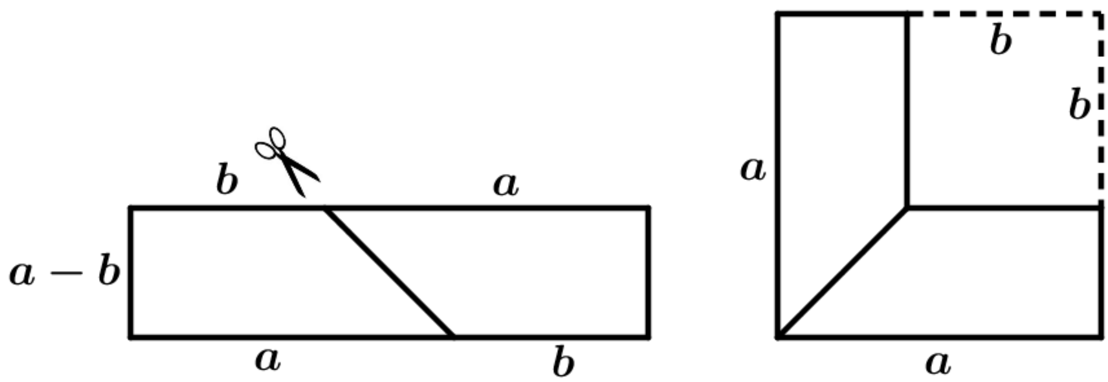
Obrázek 4 - Druhá mocnina rozdílu proměnných (Coufalová & kol, 2007, str. 113)

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$$
$$= a^2 + a\cdot b + b\cdot a + b^2 =$$
$$= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) =$$
$$= a^2 - a\cdot b - b\cdot a + b^2 =$$
$$= a^2 - a\cdot b - a\cdot b + b^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Následující série úloh je zaměřena přímo na použití vzorce pro konkrétní příklady. Objevují se ale i úlohy, kdy žáci mají doplnit vynechaná místa v rovnostech nebo vzorec použít právě pro rozklad mnohočlenu na součin dvou dvojčlenů.

Vzorec $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$ pro rozdíl druhých mocnin proměnných a, b je i v tomto případě v učebnici uveden následujícím obrázkem 5 a postupem:



Obrázek 5 - Rozdíl druhých mocnin proměnných (Coufalová & kol, 2007, str. 114)

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - a\cdot b + b\cdot a - b^2 = a^2 - a\cdot b + a\cdot b - b^2 = a^2 - b^2$$

Následující stránka učebnice je věnovaná úlohám na procvičení tohoto vzorce, úlohy jsou jednotvárné, není zde žádná slovní úloha.

Poslední 7. podkapitola Opakování zahrnuje několik úloh, které procvičují získané znalosti z oblasti výrazů. Zde už se slovní úlohy vyskytují. Za tímto blokem úloh je nadpis *Pro chytré hlavy* a pod ním jsou uvedeny tři slovní úlohy. Těmito cvičeními kapitola s Výrazy končí.

3.5.4 Porovnání analyzovaných učebnic

Téma číselné a algebraické výrazy, které jsem analyzovala ze tří řad učebnic matematiky pro 8. ročník, se liší už v obsahu. Do tabulky 7 jsem uvedla pořadí, v jakém jednotlivé řady učebnic mají svoji látku strukturovanou.

Prodos	Prometheus	Fortuna
Shrnutí a opakování učiva 7. ročníku	Druhá mocnina a druhá odmocnina	Opakování ze 7. ročníku
Výrazy	Pythagorova věta a její užití	Druhá mocnina a odmocnina
Lineární rovnice	**Výrazy**	Pythagorova věta
Druhá mocnina a odmocnina	Mnohočleny	Mocniny s přirozeným mocnitelem
Pythagorova věta a její využití	Mocniny s přirozeným mocnitele	Kruh, kružnice
Množiny	Řešení rovnic	**Výrazy**
Kruh a kružnice	Rovnice kolem nás	Válec
Mocniny s přirozeným mocnitelem	Základy statistiky	Lineární rovnice
Množiny bodů dané vlastnosti	Kružnice a kruh	Konstrukční úlohy
Konstrukční úlohy	Válec	Statistika
Statistika	Konstrukční úlohy	
Válec	Množiny bodů	

Tabulka 7 – Obsah analyzovaných učebnic matematiky pro 8. ročník

Z tabulky 7 vyplývá, že každá učebnice zařadila téma výrazy jinam. V učebnici Prodos jsou výrazy probírány hned jako první nové téma po zopakování znalostí ze 7. ročníku. Naopak v učebnicích nakladatelství Prometheus a Fortuna jsou výrazy zařazeny až za téma druhá mocnina a odmocnina, což se promítá v úlohách, v kterých si žáci tuto látku procvičují. V učebnicích Prodos jsou v kapitole Výrazy procvičovány pouze proměnné v první mocnině. Rozšíření této látky následuje až v kapitole Druhá mocnina a odmocnina v podkapitole Výrazy s druhou mocninou a odmocninou.

Učebnice Fortuna jako jediná z těchto tří učebnic má zařazené téma mocniny s přirozeným mocnitelem již před téma výrazy. Pro žáky pak je pravděpodobně snazší pracovat s výrazy, které mají mocninu v proměnné, protože s mocninami podobně pracovali již v číselných výrazech.

Z těchto tří učebnic se mi nejvíce líbilo zpracování tématu výrazy v učebnici nakladatelství Prometheus, protože je graficky zajímavější než zbylé dvě učebnice. V této jediné učebnici se vyskytují například obrázky ke slovním úlohám. Slovní úlohy v této učebnici mi připadaly zajímavé, originální, a především jich byl zařazen dostatečný počet. Žáci tak nemají pocit, že pouze upravují výrazy, ale lépe si představí, kde se s danou tematikou potkají v reálném životě.

Učebnice Fortuna je podle mého názoru nejstručnější, protože se zde nevyskytuje dostatek slovních úloh, v kterých by žáci algebraické výrazy sami vytvářeli. V této učebnici mají žáci pouze pracovat s předloženými výrazy, ale nepředstaví si používání algebraických výrazů v reálném životě. Vzhledem k tomu, že učebnice je zpracována ve formátu A5, je text na jednotlivých stránkách velice zhuštěný, někdy působí nepřehledným dojmem a vyvolává pocit, že autoři se snažili vložit co nejvíce informací, návodů a úloh na jednu stránku.

Učebnice Prodos naopak působí přehledným dojmem. Osobně se mi ale nelíbí, že výrazy jsou rozděleny do dvou částí. V kapitole výrazy se žáci učí pracovat pouze s výrazy, jejichž proměnná obsahuje první mocninu. S vyššími mocninami u proměnných se žáci setkávají až v kapitole Druhá mocnina a odmocnina. Na této učebnici se mi nelíbí členění jednotlivých kapitol. Preferovala bych pořadí témat tak, jak je má řazena učebnice Fortuna, kdy se výrazy probírají celkově až po skončení témat jako druhá mocnina a odmocnina a mocniny s přirozeným mocnitelem. Podle mého názoru jsou poté žáci mnohem lépe připraveni zvládnout náročnější úlohy s výrazy.

3.6 Výsledky experimentu

V této podkapitole jsou představeny výsledky žáků a škol v rámci jednotlivých úloh i testu jako celku. U každé úlohy je uvedena třída, která získala nejnižší a nejvyšší průměrný počet bodů na žáka. Pro lepší vizualizace výsledků jednotlivých tříd jsem využila krabicových grafů, které dobře znázorňují vyhodnocená data. Dále jsou u jednotlivých úloh vyhodnoceny cíle a hypotézy, které jsem stanovila.

3.6.1 Úloha 1

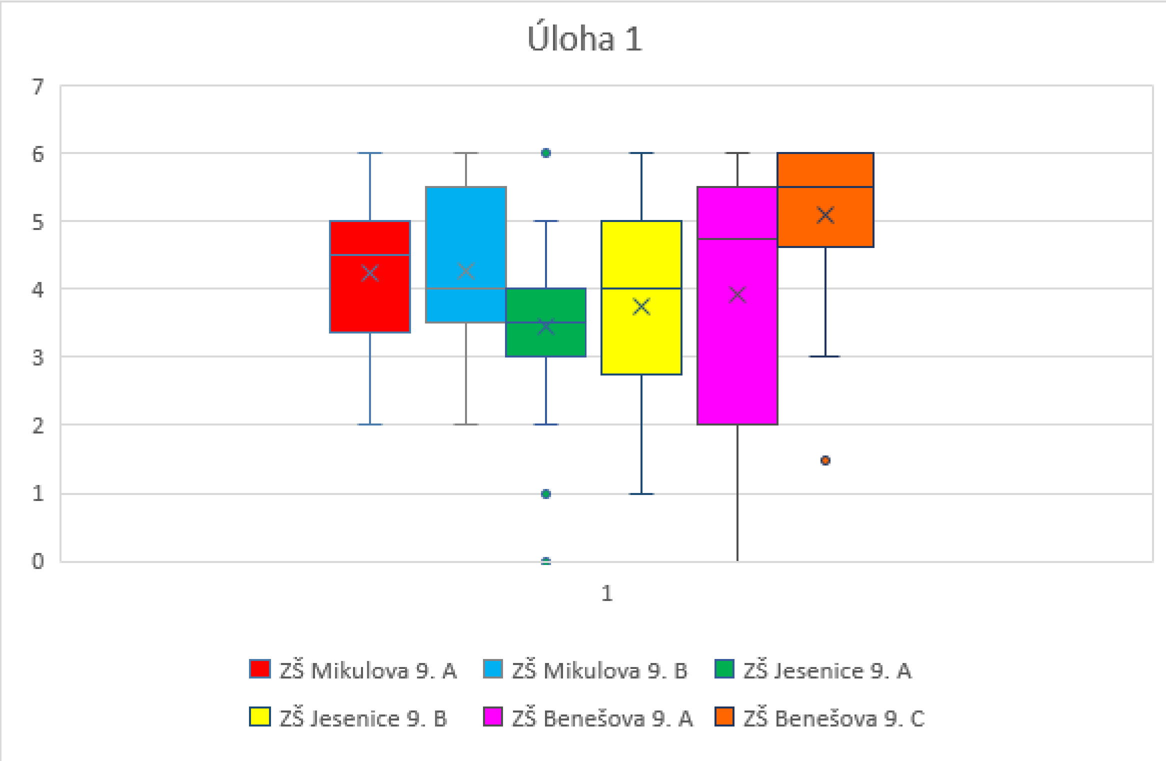
Nejvyšší počet bodů, jakého žáci mohli v první úloze dosáhnout, byl 6. Tohoto maximálního počtu bodů dosáhlo 22 žáků (z celkového počtu 128 žáků). Nejvyšší průměrný počet bodů získala třída 9. C ze ZŠ Benešova, kde byla úspěšnost 85 % s průměrným počtem 5,1 bodů na žáka. V této třídě dosáhlo maximálního počtu bodů 9 žáků (z uvedených 22). Naopak nejnižší průměrný počet bodů na žáka získala třída 9. A ze ZŠ Jesenice, a to s úspěšností 57,72 %, což je 3,46 bodů na žáka. Rozdíl v úspěšnosti mezi nejlepším a nejhorším výsledkem jednotlivých tříd je 27,28 %. Úspěšnost jednotlivých tříd a celková úspěšnost první úlohy je uvedena v tabulce 8.

Aritmetický průměr	Body	%
ZŠ Mikulova 9. A	4,25	70,83
ZŠ Mikulova 9. B	4,26	71,05
ZŠ Jesenice 9. A	3,46	57,72
ZŠ Jesenice 9. B	3,75	62,5
ZŠ Benešova 9. A	3,93	65,53
ZŠ Benešova 9. C	5,1	85
Celkový průměr na žáka	**4,08**	**68**

Tabulka 8 - Úspěšnost žáků v Úloze 1

Z grafu 1, v kterém je uvedený krabicový graf Úlohy 1, lze vyčíst, že třída 9. C ZŠ Benešova dosáhla v této úloze naprosto nejlepších výsledků. Její dolní kvartil má hodnotu

3, což znamená, že druhý nejnižší počet bodů dosažený žáky v této třídě byl 3. Extrémní hodnota 1,5 značí, že právě jeden žák dosáhl 1,5 bodu z této úlohy. Můžeme si také všimnout, že u žáků v pěti ze šesti tříd (kromě třídy 9. B ZŠ Mikulova) je hodnota mediánu vyšší než hodnota aritmetického průměru, což znamená, že více než polovina žáků ve třídách dosáhla vyššího než průměrného počtu bodů získaného v dané třídě.



Graf 1 - Krabicový graf Úlohy 1

Podúloha d) obsahuje smíšený zlomek a desetinné číslo. Mým cílem bylo zjistit, kolik žáků bude postupovat buď převodem smíšeného zlomku na desetinné číslo, nebo převodem desetinného čísla na zlomek. Z nasbíraných výsledků vyplynulo, že žáci, kteří v této úloze uvedli i svůj postup, více tíhli k převodu desetinného čísla na zlomek. U této podúlohy se žádný výsledek ani postup neobjevil u 42,19 % žáků (54 žáků). 7,03 % (9 žáků) zapsalo přímo výsledek (ať už správný nebo špatný) bez postupu. Převod zlomku na desetinné číslo se objevil u 18,75 % žáků (24 žáků) a převod desetinného čísla na zlomek použilo 32,03 % žáků (41 žáků). Výsledky podúlohy d) jsou uvedeny v tabulce 9.

Pokud bychom použili pouze výsledky žáků, u nichž se z postupu dalo zjistit, zda převáděli zlomky na desetinné číslo nebo naopak, pak 100 % je 65 žáků. 63,08 % žáků se rozhodlo převést desetinné číslo na zlomek a 36,96 % žáků zvolilo převedení zlomku na desetinné číslo.

Převod desetinného čísla na zlomek ale použilo více žáků pouze ve třídách 9. A a 9. C ze ZŠ Benešova. U žáků ze ZŠ Mikulova a ZŠ Jesenice převažoval převod zlomku na desetinné číslo. V těchto třídách se ale zase vyskytovalo více žáků, kteří se rozhodli příklad nepočítat vůbec.

Podúloha d)	Převod na zlomek	Převod na des. číslo	Zápis výsledku bez postupu	Žádný postup ani výsledek
ZŠ Mikulova 9. A	2	7	3	6
ZŠ Mikulova 9. B	2	7	1	9
ZŠ Jesenice 9. A	5	6	2	14
ZŠ Jesenice 9. B	1	4	1	16
ZŠ Benešova 9. A	13	0	1	8
ZŠ Benešova 9. C	18	0	1	1
Celkem	**41** (32,03 %)	**24** (18,75 %)	**9** (7,03 %)	**54** (42,19 %)

Tabulka 9 - Úloha 1 - podúloha d)

Dalším předpokladem pro první úlohu bylo dosažení nejvyšší úspěšnosti ze všech úloh v testu. Tuto hypotézu jsem po vyhodnocení všech úloh testu ověřila. Celková úspěšnost správného řešení této úlohy byla 68 %, což je nejvyšší úspěšnost ze všech úloh. Další úlohy měly úspěšnost 55,14 % (2. úloha), 50,6 % (3. úloha), 45,13 % (4. úloha) a 30,08 % (5. úloha).

Chyby, které se v první úloze vyskytly, byly především numerické chyby a chyby velkých skoků, které jsem uvedla v teoretické části v podkapitole 2.3 Chyby při úpravách algebraických výrazů. Hodně žáků se rozhodlo, že budou u některých podúloh psát přímo výsledky. Vzhledem k tomu, že si nikam nezapisovali mezivýpočty a snažili se veškeré kroky vyřešit v hlavě, někteří z nich se dopustili právě chyby velkých skoků.

3.6.2 Úloha 2

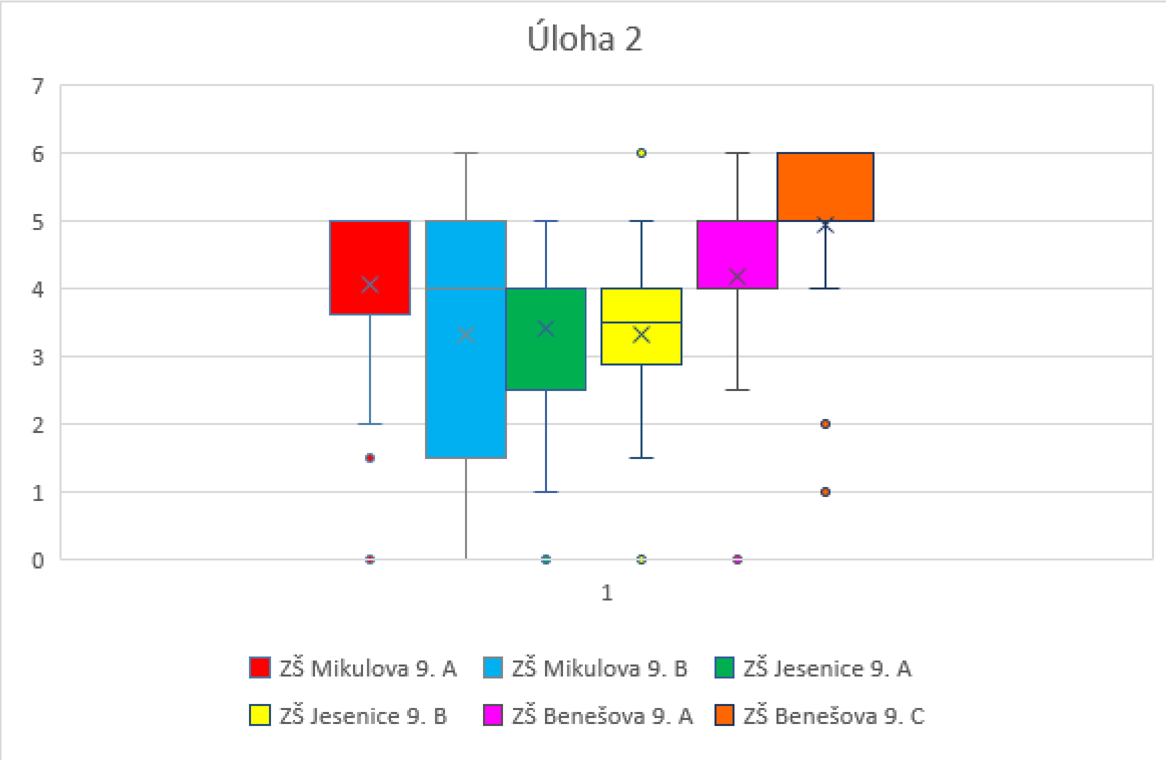
Nejvyšší počet bodů ve druhé úloze byl 7, kterého nedosáhl žádný žák ze 128 žáků. Nejvyšší počet bodů, jakého žáci v této úloze dosáhli, byl 6. Tohoto počtu bodů dosáhlo 17 žáků, z nichž 8 žáků bylo ze třídy 9. C ZŠ Benešova.

Nejvyšší průměrný počet bodů na žáka opět získala třída 9. C ze ZŠ Benešova, kde byla úspěšnost 70,71 % s průměrným počtem 4,95 bodů na žáka. Naopak nejnižší úspěšnost měla třída 9. B ze ZŠ Jesenice, kde byla úspěšnost 47,73 % s průměrným počtem 3,34 bodů na žáka. Rozdíl v úspěšnosti mezi nejlepším a nejhorším výsledkem tříd je 22,98 %. Úspěšnost jednotlivých tříd je uvedena v tabulce 10.

Aritmetický průměr	Body	%
ZŠ Mikulova 9. A	4,06	57,94
ZŠ Mikulova 9. B	3,34	47,74
ZŠ Jesenice 9. A	3,43	48,94
ZŠ Jesenice 9. B	3,34	47,73
ZŠ Benešova 9. A	4,18	59,74
ZŠ Benešova 9. C	4,95	70,71
Celkový průměr na žáka	**3,86**	**55,14**

Tabulka 10 - Úspěšnost žáků v Úloze 2

Z grafu 2, kde je zobrazen krabicový graf Úlohy 2, se dá snadno vyčíst, že nejlepšího výsledku opět dosáhla třída 9. C ZŠ Benešova. Její aritmetický průměr i medián převyšuje tyto hodnoty u ostatních tříd. Můžeme si také všimnout, že nejvyššího dosaženého počtu bodů dosáhli žáci právě ve čtyřech ze šesti tříd (kromě 9. A ZŠ Mikulova a 9. A ZŠ Jesenice). Oproti tomu nulový počet bodů získali žáci v pěti ze šesti tříd (kromě 9. C ZŠ Benešova).



Graf 2 - Krabicový graf Úlohy 2

U podúlohy c) jsem předpokládala, že většina žáků zapíše správně pouze jednu ze dvou podmínek, a to $v \neq 2$.

Z vyhodnocených dat vyplývá, že pouze podmínku $v \neq 2$ zapsalo více žáků než obě podmínky. Pouze podmínku $v \neq 2$ uvedlo 38 žáků, obě podmínky mělo správně 26 žáků. Naopak pouze podmínku $v \neq -2$ uvedl pouze 1 žák ze 128 žáků. Téměř polovina žáků (63 žáků) uvedla jiné nebo špatné řešení. Ve třídě 9. C ze ZŠ Benešova byl opět nejvyšší počet žáků, kteří měli tuto úlohu správně. Naproti tomu téměř celá třída 9. A ze ZŠ Mikulova uvedla jako správné řešení pouze kladnou podmínku a žádný žák z této třídy nezapsal obě podmínky. Přehled počtu žáků k jednotlivým řešením podúlohy c) je uveden v tabulce 11.

Po opravení úlohy 2 jsem se rozhodla, že navíc ještě vyhodnotím, kolik žáků udělalo chybu, když do podmínek zahrnuli i nulové body z čitatele. Celkem 19 žáků (14,84 %) mělo ve svých výsledcích uvedené podmínky i z čitatele. 7 žáků uvedlo podmínku pouze v podúloze e). Zbylých 12 žáků mělo chybu i podúlohách a), b), c) nebo d).

Podúloha c)	$v \neq 2$	$v \neq -2$	$v \neq 2 \wedge v \neq -2$	Jiné nebo špatné řešení
ZŠ Mikulova 9. A	15	0	0	3
ZŠ Mikulova 9. B	4	0	5	10
ZŠ Jesenice 9. A	5	0	3	19
ZŠ Jesenice 9. B	8	0	2	12
ZŠ Benešova 9. A	1	0	6	15
ZŠ Benešova 9. C	5	1	10	4
Celkem	**38** (29,69 %)	**1** (0,78 %)	**26** (20,31 %)	**63** (49,22 %)

Tabulka 11 - Úloha 2 - podúloha c)

3.6.3 Úloha 3

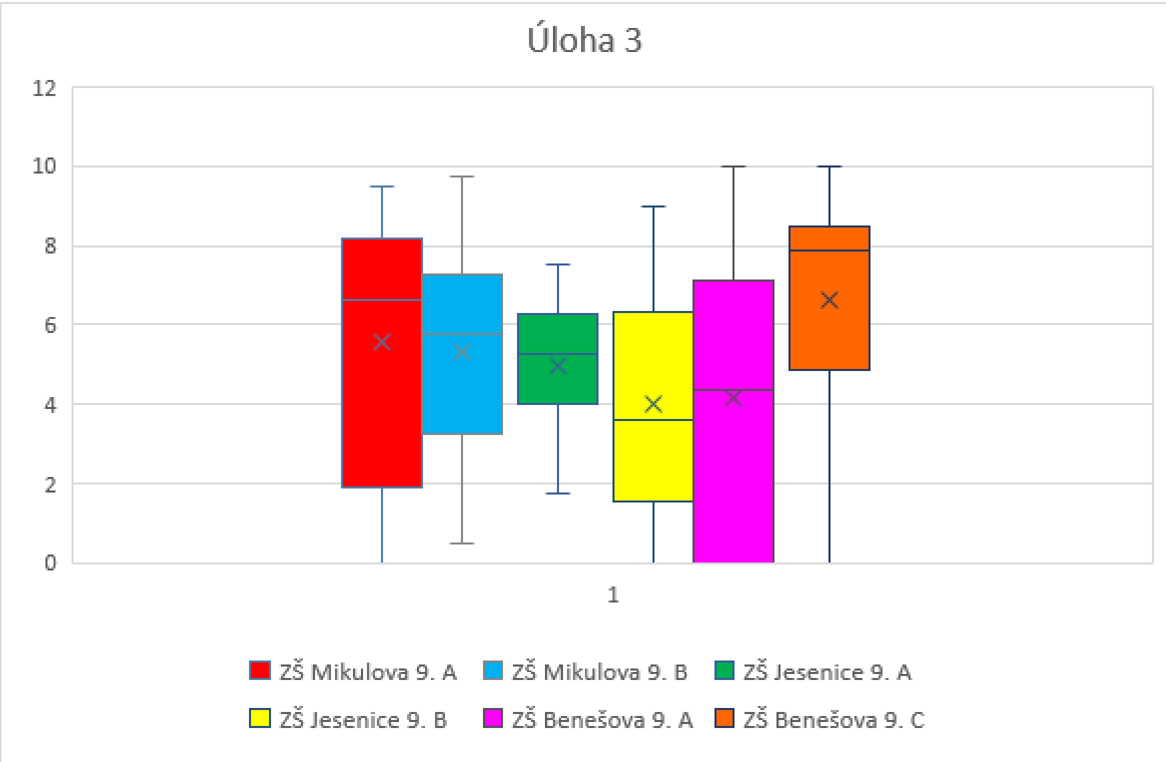
Maximálního počtu bodů, který ve třetí úloze byl 10 bodů, dosáhli pouze 3 žáci ze 128 žáků. Tito 3 žáci chodí na ZŠ Benešova (2 žáci jsou z 9. C, 1 žák je z 9. A).

Nejlepšího výsledku opět dosáhla třída 9. C ze ZŠ Benešova, kde byla úspěšnost 66 % s průměrným počtem 6,6 bodů na žáka. Nejhoršího výsledku dosáhla třída 9. B ze ZŠ Jesenice, kde byla úspěšnosti 40,23 % s průměrným počtem 4,02 body na žáka. Rozdíl mezi nejlepším a nejhorším výsledkem tříd je 25,77 %. Úspěšnost jednotlivých tříd je uvedena v tabulce 12.

Z grafu 3, v kterém je zobrazen krabicový graf Úlohy 3, jsou vidět podstatně vyrovnanější výsledky mezi třídami než u Úloh 1 a 2. Můžeme vyčíst, že plného počtu bodů dosáhli žáci z obou tříd ZŠ Benešova. V žádné jiné škole nebyl žák, který by plného počtu bodů dosáhl. U třídy 9. A ZŠ Benešova ale můžeme vidět, že několik žáků dosáhlo nulového počtu bodů, protože dolní kvartil je roven 0. U pěti ze šesti tříd (kromě třídy 9. B ZŠ Jesenice) je medián vyšší než aritmetický průměr bodů na žáka. U třídy 9. C ZŠ Benešova je tento rozdíl nejmarkantnější.

Aritmetický průměr	Body	%
ZŠ Mikulova 9. A	5,57	55,69
ZŠ Mikulova 9. B	5,3	53,03
ZŠ Jesenice 9. A	4,95	49,54
ZŠ Jesenice 9. B	4,02	40,23
ZŠ Benešova 9. A	4,18	41,77
ZŠ Benešova 9. C	6,6	66
Celkový průměr na žáka	**5,06**	**50,6**

Tabulka 12 - Úspěšnost žáků v Úloze 3



Graf 3 - Krabicový graf Úlohy 3

V této úloze jsem se zaměřila především na podúlohu, která je v pátém řádku a čtvrtém sloupci tabulky, kterou měli žáci vyplnit. Z vyhodnocených dat je zřejmé, že největší počet žáků zvolilo 0 jako řešení této podúlohy. Zadání nepochopilo, a tudíž úlohu špatně řešilo, 16 žáků. U těchto žáků se jednalo o chybu, kdy místo dosazování y z prvního řádku tabulky zvolili postup, kdy násobili řádky a sloupce tabulky. U této podúlohy je tedy úspěšnost řešení 13,28 %. Řešením žáků, kteří tuto podúlohu správně vyřešili, bylo buď zapsání podmínky, která odporovala zadání, nebo formulaci, že podúloha nemá řešení. Počty žáků k jednotlivým řešením jsou v tabulce 13.

	Počet žáků
Žáci špatně vyřešili podúlohu – jejich výsledek byl 0	46 (35,94 %)
Žáci uvedli správné řešení (buď zapsali podmínku, nebo uvedli, že podúloha nemá řešení)	17 (13,28 %)
Žáci špatně vyřešili podúlohu – jejich výsledek byl jiný než 0	25 (19,53 %)
Žáci neměli podúlohu vyřešenou	24 (18,75 %)
Výsledky žáků odpovídají tomu, že nedosazovali y z prvního řádku, ale násobili řádky a sloupce mezi sebou	16 (12,5)

Tabulka 13 - Podúloha v Úloze 3

3.6.4 Úloha 4

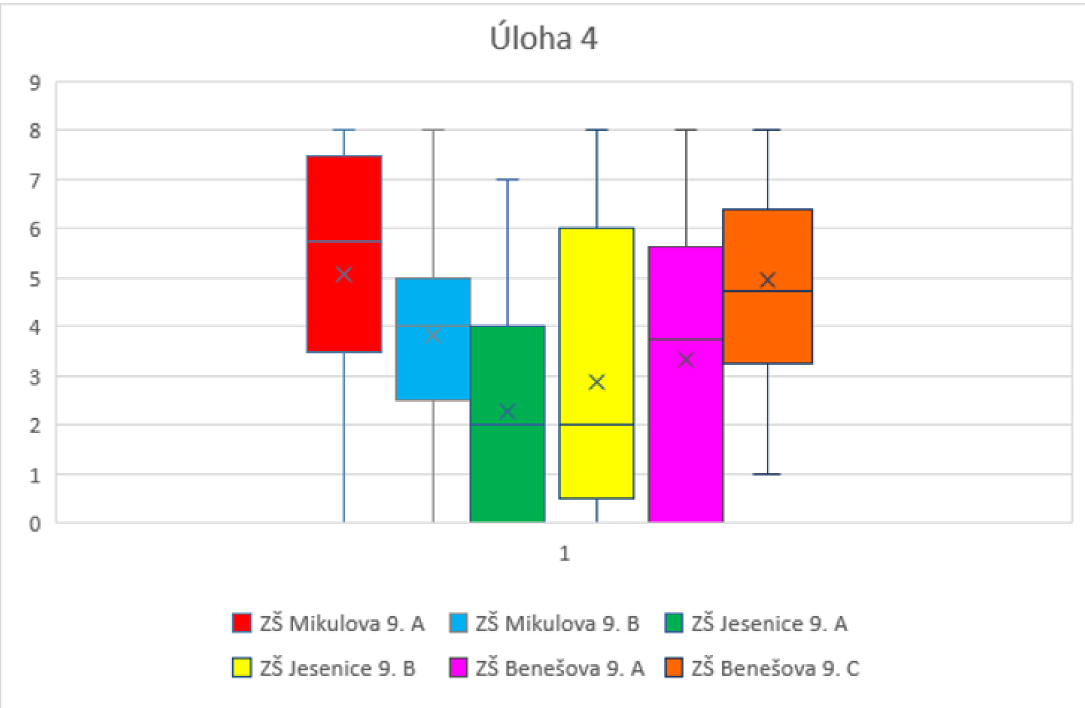
Čtvrtá úloha nevyžadovala složité matematické operace, ale byla zaměřena na matematickou terminologii. Obsahovala 4 podúlohy, z nichž za každou bylo možné získat 2 body, celkem tedy 8 bodů. Maximálního počtu bodů dosáhlo celkem 10 žáků ze 128.

V této jediné úloze z celého testu nedosáhla nevyššího průměrného počtu bodů třída 9. C ze ZŠ Benešova. Nejlepšího výsledku dosáhla třída 9. A ze ZŠ Mikulova, kde byla úspěšnost 63,54 % s průměrným počtem bodů 5,08 na žáka. Nejnižší úspěšnost byla ve třídě 9. A, a to 28,7 % s průměrným počtem bodů 2,3 na žáka. Rozdíl úspěšnosti mezi nejlepším a nejhorším výsledkem tříd je 34,84 %. Úspěšnost jednotlivých tříd je uvedena v tabulce 14.

Aritmetický průměr	Body	%
ZŠ Mikulova 9. A	5,08	63,54
ZŠ Mikulova 9. B	3,84	48,03
ZŠ Jesenice 9. A	2,3	28,7
ZŠ Jesenice 9. B	2,89	36,08
ZŠ Benešova 9. A	3,32	41,48
ZŠ Benešova 9. C	4,98	62,19
Celkový průměr na žáka	**3,61**	**45,13**

Tabulka 14 - Úspěšnost žáků v Úloze 4

Z grafu 4, v kterém je zobrazen krabicový graf Úlohy 4, můžeme vyčíst, že nejlepších výsledků dosáhla třída 9. A ze ZŠ Mikulova. Maximálního počtu bodů dosáhli žáci v pěti třídách ze šesti (kromě třídy 9. A ze ZŠ Jesenice). Naopak nulového počtu bodů nedosáhli pouze žáci 9. C ZŠ Benešova. Právě ve třech třídách ze šesti (9. A a 9. B ZŠ Mikulova a 9. A ZŠ Benešova) byla hodnota mediánu vyšší než aritmetický průměr bodů.



Graf 4 - Krabicový graf Úlohy 4

Četnosti řešení podúlohy a) jsou blíže popsány v tabulce 15. U této podúlohy jsem považovala za špatná řešení především to, že žáci místo druhé mocniny součtu dvou čísel nejdříve spočítají druhé mocniny těchto čísel a až pak je sečtou. Tuto chybu udělalo 10 žáků, což je 7,81 % žáků. U této podúlohy byla také největší úspěšnost správného řešení. Celkem 89 žáků správně vyřešilo tuto podúlohu.

Podúloha a)	Správné řešení	Chyba $5^2 + 3^2$	Jiná chyba/nemá řešení
ZŠ Mikulova 9. A	15	1	2
ZŠ Mikulova 9. B	16	0	3
ZŠ Jesenice 9. A	16	2	9
ZŠ Jesenice 9. B	10	3	9
ZŠ Benešova 9. A	14	3	5
ZŠ Benešova 9. C	18	1	1
Celkem	**89**	**10**	**29**

Tabulka 15 - Úloha 4 - podúloha a)

U podúlohy b) jsem se zaměřila na výskyt podobné chybu jako v podúloze a). Z nasbíraných dat jsem vyhodnotila, kolik žáků místo druhé odmocniny rozdílu dvou čísel nejdříve počítalo druhé odmocniny těchto čísel a poté rozdíl odmocnin. Této chyby se dopustilo celkem 9 žáků, což je 7,03 % žáků. Při opravování této podúlohy jsem zjistila, že se u 19 žáků objevila chyba, že místo druhé odmocniny počítali druhou mocninu. Do tabulky 16 jsem tedy uvedla počty žáků v jednotlivých třídách, kteří se této chyby dopustili. Celkem se tato chyba objevila u 19 žáků, což je 14,84 % žáků. Téměř polovina všech žáků (59 žáků, což je 46,09 % žáků) mělo v této podúloze zapsané správné řešení.

Při opravování podúlohy c) se celkem u 13 žáků objevilo záporné řešení. Do tabulky 17 jsem tedy uvedla četnosti výskytu záporných řešení. Úspěšnost správného řešení této podúlohy je podobná jako úspěšnost v podúloze b). Celkem 56 žáků (43,75 % žáků) vyřešilo tuto podúlohu správně.

Podúloha b)	Správné řešení	Chyba $\sqrt{25}-\sqrt{9}$	Chyba – druhá mocnina místo druhé odmocniny	Jiná chyba/nemá řešení
ZŠ Mikulova 9. A	11	2	2	3
ZŠ Mikulova 9. B	10	0	4	5
ZŠ Jesenice 9. A	5	1	6	15
ZŠ Jesenice 9. B	6	3	3	10
ZŠ Benešova 9. A	13	2	1	6
ZŠ Benešova 9. C	14	1	3	2
Celkem	**59**	**9**	**19**	**41**

Tabulka 16 - Úloha 4 - podúloha b)

Podúloha c)	Správné řešení	Záporný výsledek	Jiná chyba/nemá řešení
ZŠ Mikulova 9. A	13	1	4
ZŠ Mikulova 9. B	7	1	11
ZŠ Jesenice 9. A	7	3	17
ZŠ Jesenice 9. B	10	1	11
ZŠ Benešova 9. A	6	6	10
ZŠ Benešova 9. C	13	1	6
Celkem	**56**	**13**	**59**

Tabulka 17 - Úloha 4 - podúloha c)

V podúloze d) jsem předpokládala, že žáci budou mít problém s výpočtem třetí odmocniny čísla 8. Správné řešení této podúlohy zapsalo pouze 24 žáků, což je 18,75 % žáků. U této podúlohy se opět vyskytl problém, že žáci místo třetí odmocniny čísla počítali jeho třetí mocninu. Této chyby se dopustilo celkem 22 žáků, což je 17,19 % žáků. Četnosti odpovědí k této podúloze jsou uvedeny v tabulce 18.

Podúloha d)	Správné řešení	Třetí mocnina místo třetí odmocniny	Jiné řešení/nemá řešení
ZŠ Mikulova 9. A	7	2	9
ZŠ Mikulova 9. B	2	8	9
ZŠ Jesenice 9. A	1	7	19
ZŠ Jesenice 9. B	5	1	16
ZŠ Benešova 9. A	4	0	18
ZŠ Benešova 9. C	5	4	11
Celkem	**24**	**22**	**82**

Tabulka 18 - Úloha 4 - podúloha d)

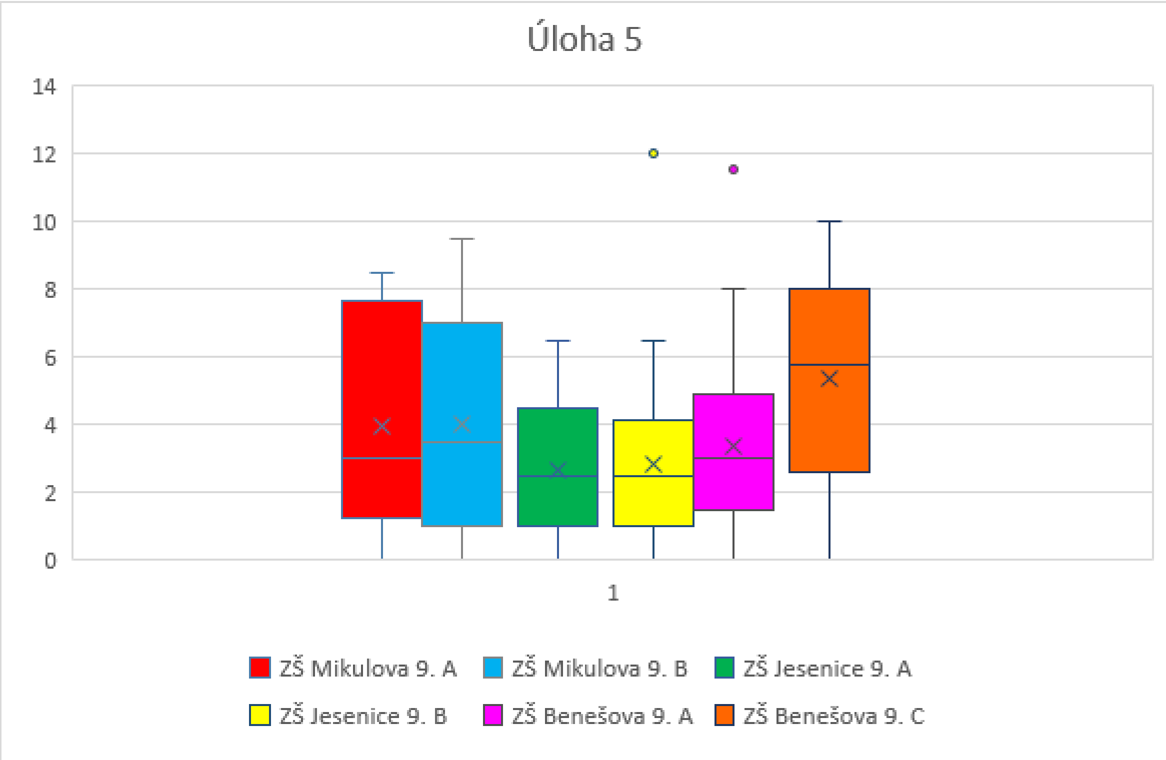
3.6.5 Úloha 5

Maximální počet bodů, který žáci mohli v páté úloze získat, byl 12 bodů. Tohoto počtu dosáhl 1 žák z 9. B ze ZŠ Jesenice. Nejlepšího výsledku dosáhla třída 9. C ze ZŠ Benešova, kde byla úspěšnost 44,58 % s průměrným počtem 5,36 bodů na žáka. Nejhorší výsledek měla třída 9. A ze ZŠ Jesenice, kde byla úspěšnost 22,07 % s průměrným počtem 2,65 bodu na žáka. Rozdíl úspěšnosti mezi nejlepším a nejhorším výsledkem tříd je 22,51 %. Úspěšnost jednotlivých tříd je uvedena v tabulce 19.

Aritmetický průměr	Body	%
ZŠ Mikulova 9. A	3,97	33,1
ZŠ Mikulova 9. B	4	33,33
ZŠ Jesenice 9. A	2,65	22,07
ZŠ Jesenice 9. B	2,87	23,86
ZŠ Benešova 9. A	3,34	27,84
ZŠ Benešova 9. C	5,36	44,58
Celkový průměr na žáka	**3,61**	**30,08**

Tabulka 19 - Úspěšnost žáků v Úloze 5

Z grafu 5, v kterém je zobrazen krabicový graf Úlohy 5, je vidět, že maximálního počtu bodů dosáhl pouze 1 žák, a to žák z 9. B ZŠ Jesenice. V každé ze šesti tříd se vyskytl alespoň jeden žák, který z této úlohy získal nulový počet bodů. Jako jediná má třída 9. C ZŠ Benešova hodnotu mediánu vyšší než aritmetický průměr bodů na žáka, což znamená, že v této třídě více než polovina žáků získala vyšší počet bodů, než byl průměrný počet bodů ve třídě.



Graf 5 - Krabicový graf Úlohy 5

Jedním z mých předpokladů bylo, že někteří žáci vynechají tuto úlohu nebo jim na ni nezbyde dostatek času. Tabulka 20 ukazuje, kolik žáků neřešilo podúlohy v této úloze. Nejvíce bylo žáků, kteří se snažili řešit všechny úlohy. Celkem jich bylo 68, což je 53,13 % žáků. Druhý nejvyšší počet žáků je zastoupený v posledním sloupci tabulky, který značí, kolik žáků neřešilo ani jednu z podúloh. Těchto žáků je 19, což je 14,84 % žáků.

Počet vynechaných podúloh	0	1	2	3	4	5	6
ZŠ Mikulova 9. A	10	2	1	1	2	0	2
ZŠ Mikulova 9. B	13	0	1	2	0	0	3
ZŠ Jesenice 9. A	12	1	5	5	0	0	4
ZŠ Jesenice 9. B	7	2	3	2	3	2	3
ZŠ Benešova 9. A	10	2	2	1	0	1	6
ZŠ Benešova 9. C	16	1	0	2	0	0	1
Celkem	**68**	**8**	**12**	**13**	**5**	**3**	**19**

Tabulka 20 - Počet vynechaných podúloh v Úloze 5

V podúlohách a1), a2) jsem předpokládala, že žáci budou mít chybu ve znaménkách. Tabulky 21 a 22 ukazují počty žáků, kteří měli chyby ve znaménkách. Více než polovina žáků (74 žáků, což je 57,81 % žáků) mělo v podúloze a1) chybu ve znaménku. Pouze 18 žáků (14,06 %) vyřešilo tuto podúlohu správně.

	Chyba ve znaménku	Správné řešení (není chyba ve znaménku)	Jiná chyba/nemá řešení
ZŠ Mikulova 9. A	11	4	3
ZŠ Mikulova 9. B	13	0	6
ZŠ Jesenice 9. A	18	1	8
ZŠ Jesenice 9. B	14	2	6
ZŠ Benešova 9. A	11	2	9
ZŠ Benešova 9. C	7	9	4
Celkem	**74**	**18**	**36**

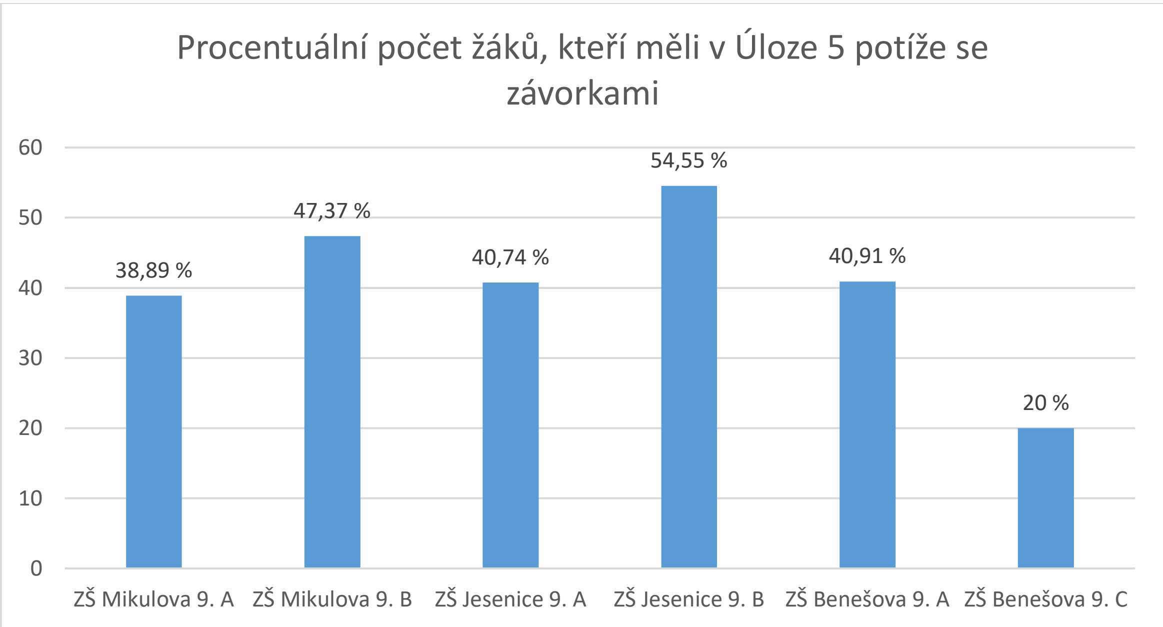
Tabulka 21 - Chyby ve znaménku v podúloze a1)

Chybu ve znaménku v podúloze a2) udělalo 29 žáků, což je 22,66 % žáků. Správně tuto podúlohu vyřešilo 34 žáků, což je 26,56 % žáků.

	Chyba ve znaménku	Správné řešení (není chyba ve znaménku)	Jiná chyba/nemá řešení
ZŠ Mikulova 9. A	3	5	10
ZŠ Mikulova 9. B	7	6	6
ZŠ Jesenice 9. A	3	7	17
ZŠ Jesenice 9. B	6	2	14
ZŠ Benešova 9. A	6	7	9
ZŠ Benešova 9. C	4	7	9
Celkem	**29**	**34**	**65**

Tabulka 22 - Chyby ve znaménku v podúloze a2)

Při opravování testů jsem došla k závěru, že hodně žáků dělá chyby při práci se závorkami. Jednalo se buď o vynechání závorek, nebo jejich špatné umístění (žáci například neuzávorkovali celý výraz, ale jen několik členů). Graf 6 ukazuje procentuální počet žáků jednotlivých tříd, kteří měli minimálně jednu chybu týkající se závorek v Úloze 5. Z grafu vyplývá, že nejlépe se závorkami dokáže pracovat třída 9. C ZŠ Benešova (20 % žáků udělalo alespoň jednu chybu týkající se závorek). Naopak více než polovina žáků (54,55 % žáků) z 9. B ZŠ Jesenice měla potíže se závorkami.



Graf 6 - Procentuální počet žáků, kteří měli v Úloze 5 potíže se závorkami

3.6.6 Doplňující uzavřené otázky

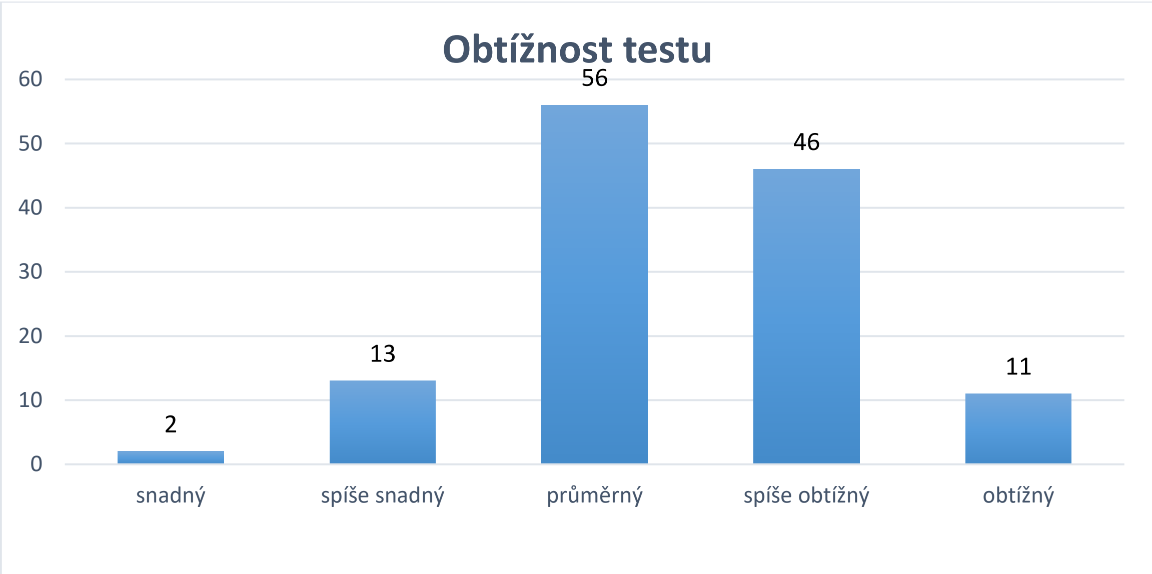
Na konec testu jsem zařadila doplňující uzavřené otázky, pomocí kterých jsem zjišťovala, jak by žáci zpětně zhodnotili obtížnost testu a jak by odhadli svoji procentuální úspěšnost. Nasbíraná data jsem vyhodnotila a uvedla do následujících tabulek, které ukazují absolutní četnosti odpovědí, které se vyskytovaly v jednotlivých třídách. Dále jsou uvedeny histogramy, které znázorňují absolutní četnost odpovědí všech žáků.

1) Jak obtížný ti připadal test?

Z tabulky 23 vyplývá, že nejvíce žáků zhodnotilo test jako průměrný (56 žáků) a spíše obtížný (46 žáků). V jednotlivých třídách se toto hodnocení lišilo, přesné četnosti odpovědí jsou uvedeny v tabulce 23. V grafu 7 je znázorněn histogram četnosti odpovědí na otázku 1.

	Snadný	Spíše snadný	Průměrný	Spíše obtížný	obtížný
ZŠ Mikulova 9. A	0	3	9	6	0
ZŠ Mikulova 9. B	0	1	6	8	4
ZŠ Jesenice 9. A	1	1	9	9	7
ZŠ Jesenice 9. B	1	0	8	13	0
ZŠ Benešova 9. A	0	3	14	5	0
ZŠ Benešova 9. C	0	5	10	5	0
Celkem	2	13	56	46	11

Tabulka 23 - Tabulka četnosti odpovědí na otázku 1



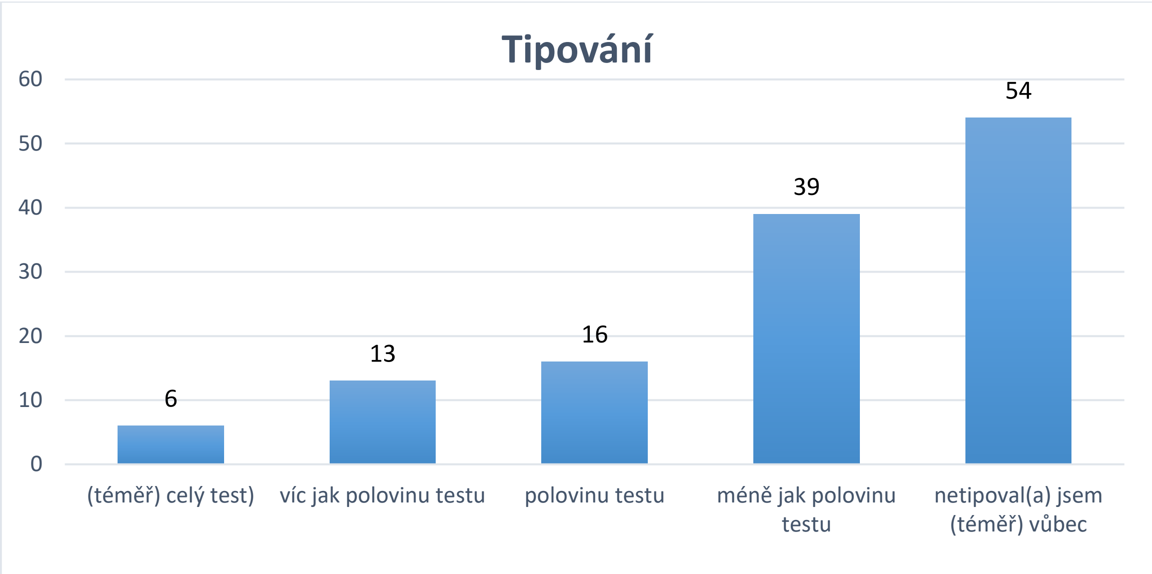
Graf 7 - Histogram četnosti odpovědí na otázku 1

2) Jak moc jsem tipoval(a)?

Tabulka 24 ukazuje četnosti odpovědí na druhou otázku v jednotlivých třídách. Nejčastější odpovědí žáků v pěti ze šesti tříd (kromě třídy 9. A ZŠ Benešova) bylo, že v testu netipovali (téměř) vůbec. Graf 8 ukazuje četnosti odpovědí všech žáků na otázku 2.

	(Téměř) celý test	Víc jak polovinu testu	Polovinu testu	Méně jak polovinu testu	Netipoval(a) jsem (téměř) vůbec
ZŠ Mikulova 9. A	1	1	2	5	9
ZŠ Mikulova 9. B	1	1	4	7	6
ZŠ Jesenice 9. A	2	6	4	6	9
ZŠ Jesenice 9. B	1	2	1	7	11
ZŠ Benešova 9. A	1	2	3	10	6
ZŠ Benešova 9. C	0	1	2	4	13
Celkem	6	13	16	39	54

Tabulka 24 - Tabulka četnosti odpovědí na otázku 2



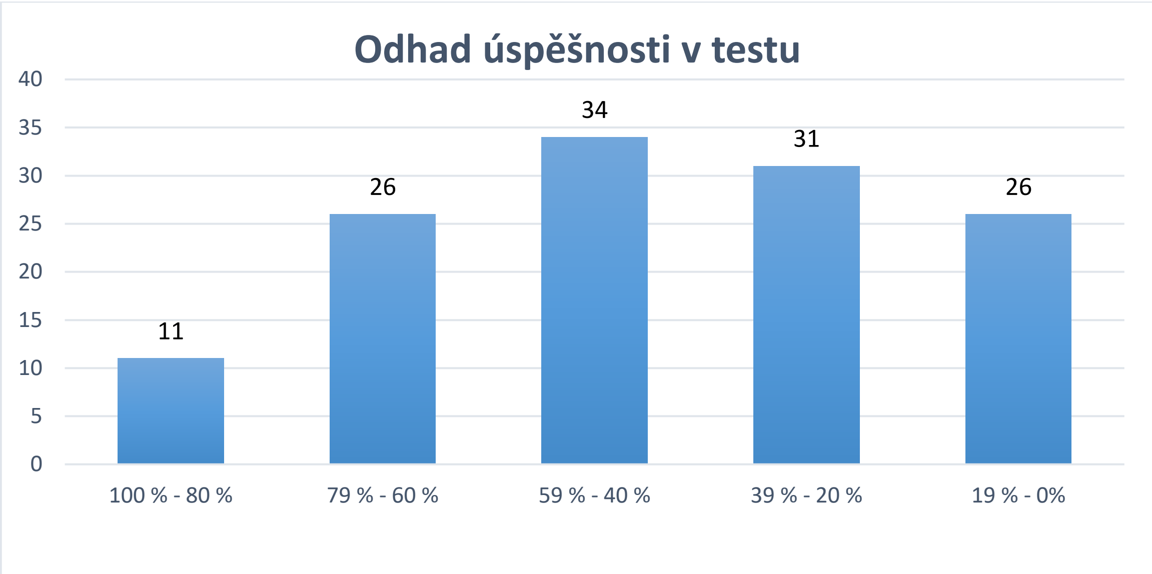
Graf 8 - Histogram četnosti odpovědí na otázku 2

3) Kolik procent testu máš podle tebe správně?

Tabulka 25 ukazuje četnosti odpovědí žáků v jednotlivých třídách na otázku 3. Graf 9 zobrazuje četnost odpovědí všech žáků, kteří řešili tento test. Nejvíce odpovědí je zastoupeno v prostředním intervalu, která udává úspěšnost mezi 40 % a 59 %.

	100 % - 80 %	79 % - 60 %	59 % - 40 %	39 % - 20 %	19 % - 0 %
ZŠ Mikulova 9. A	3	6	3	2	4
ZŠ Mikulova 9. B	0	3	7	4	5
ZŠ Jesenice 9. A	1	3	10	10	3
ZŠ Jesenice 9. B	1	4	2	6	9
ZŠ Benešova 9. A	2	1	7	8	4
ZŠ Benešova 9. C	4	9	5	1	1
Celkem	11	26	34	31	26

Tabulka 25 - Tabulka četnosti odpovědí na otázku 3



Graf 9 - Histogram četnosti odpovědí na otázku 3

U této otázky jsem vyhodnocovala pomocí Pearsonova koeficientu, zda existuje závislost mezi počtem bodů, který žáci získali v testu, a odhadem jejich úspěšnosti. Dále jsem v programu Microsoft Excel jsem spočítala, že

$$r_p = 0{,}67.$$

Bodové hodnocení z testu jsem pro lepší manipulaci s výsledky převedla na známky:

100 % - 80 % = 1,

79 % - 60 % = 2,

59 % - 40 % = 3,

39 % - 20 % = 4,

19 % - 0 % = 5.

Jako nulovou a alternativní hypotézu jsem stanovila:

H_0: Mezi počtem procent, které žáci z testu získali, a odhadem jejich procentuální úspěšnosti, není žádná závislost ($r_p = 0$).

H_1: Vypočítaná hodnota Pearsonova korelačního koeficientu vypovídá o vztahu mezi počtem procent, které žáci z testu dostali, a odhadem jejich procentuální úspěšnosti ($r_p \neq 0$).

Dále jsem vypočítala, že

$$|t| = 9{,}11,$$

$$t_{0,05}(126) = 1{,}98.$$

Jelikož hodnota testového kritéria v absolutní hodnotě je vyšší než hodnota kritického kritéria, nulovou hypotézu zamítáme a přijímáme alternativní.

Zjistila jsem tedy, že počet bodů žáků z testu a odhad jejich úspěšnosti je spíše přímo závislý. Žáci tedy celkem dobře odhadovali svoji úspěšnost.

Přesný odhad provedlo 55 žáků ze 128. Žáků, kteří se podceňovali a svoji úspěšnost odhadli hůře, než ve skutečnosti dopadli, bylo 40. Žáků, kteří se naopak přecenili a odhadli svoji úspěšnost lépe, než byly nakonec jejich výsledky, bylo 33. Přesné počty žáků a jejich odhadů jsou uvedeny v tabulce 26.

	Správný odhad	Podcenění	Přecenění
ZŠ Mikulova 9. A	8	5	5
ZŠ Mikulova 9. B	8	9	2
ZŠ Jesenice 9. A	10	6	11
ZŠ Jesenice 9. B	10	8	4
ZŠ Benešova 9. A	9	8	5
ZŠ Benešova 9. C	10	4	6
Celkem	55	40	33

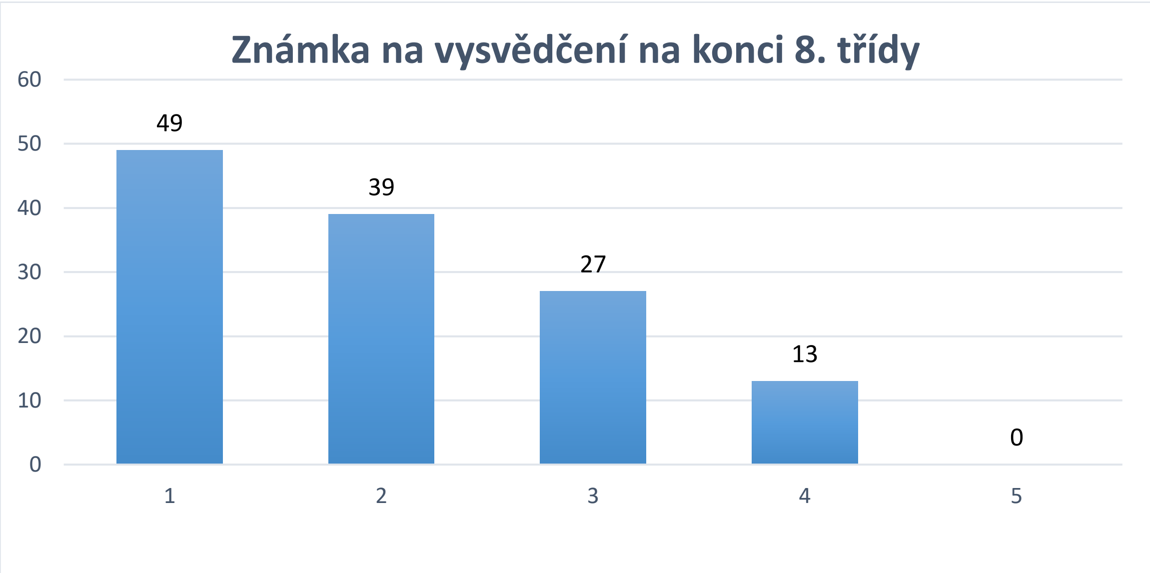
Tabulka 26 - Četnost správných odhadů, podcenění a přecenění

4) Co jsem měl(a) za známku na vysvědčení konci osmého ročníku?

Tabulka 27 ukazuje četnosti odpovědi na čtvrtou otázku. Graf 10 znázorňuje histogram četnosti odpovědí na čtvrtou otázku. Z grafu je zřejmé, že nejvíce žáků mělo na konci 8. ročníku na vysvědčení 1.

	1	2	3	4	5
ZŠ Mikulova 9. A	5	5	3	5	0
ZŠ Mikulova 9. B	6	6	5	2	0
ZŠ Jesenice 9. A	12	9	5	1	0
ZŠ Jesenice 9. B	10	6	5	1	0
ZŠ Benešova 9. A	4	8	7	3	0
ZŠ Benešova 9. C	12	5	2	1	0
Celkem	49	39	27	13	0

Tabulka 27 - Tabulka četnosti odpovědí na otázku 4



Graf 10 - Histogram četnosti odpovědí na otázku 4

U této otázky jsem měla za cíl zjistit, zda existuje závislost mezi počtem bodů, který žáci získali v testu, a známkou, kterou měli na konci 8. ročníku na vysvědčení. K tomuto vyhodnocení jsem opět použila Pearsonův korelační koeficient. V programu Microsoft Excel jsem spočítala, že

$$r_p = 0{,}7.$$

Jako nulovou a alternativní hypotézu jsem stanovila:

H_0: Mezi počtem procent, které žáci z testu dostali, a jejich známkou na vysvědčení na konci 8. ročníku z matematiky, není žádná závislost ($r_p = 0$).

H_1: Vypočítaná hodnota Pearsonova korelačního koeficientu vypovídá o vztahu mezi počtem procent, které žáci z testu dostali, a jejich známkou na vysvědčení na konci 8. ročníku z matematiky ($r_p \neq 0$).

Dále jsem vypočítala, že

$$|t| = 10{,}97,$$

$$t_{0{,}05}(126) = 1{,}98.$$

Jelikož hodnota testového kritéria v absolutní hodnotě je vyšší než hodnota kritického kritéria, nulovou hypotézu zamítáme a přijímáme alternativní.

Zjistila jsem tedy, že závislost mezi počtem bodů získaných v testu a známkou na konci 8. ročníku na vysvědčení se blíží přímé závislosti.

Stejnou známku z testu a na vysvědčení na konci 8. ročníku mělo celkem pouze 27. Žáků, kteří měli horší známku z testu než na vysvědčení na konci 8. ročníku, bylo 100. Pouze 1 žák (9. A ZŠ Mikulova) měl výslednou známku z testu lepší než známku na vysvědčení na konci 8. ročníku. Přesné počty žáků jsou uvedeny v tabulce 28.

	Stejná známka z testu a na vysvědčení	Horší známka z testu než na vysvědčení	Lepší známka z testu než na vysvědčení
ZŠ Mikulova 9. A	10	7	1
ZŠ Mikulova 9. B	5	14	0
ZŠ Jesenice 9. A	1	26	0
ZŠ Jesenice 9. B	1	21	0
ZŠ Benešova 9. A	4	18	0
ZŠ Benešova 9. C	6	14	0
Celkem	27	100	1

Tabulka 28 - Četnosti při porovnání známek z testu a na vysvědčení

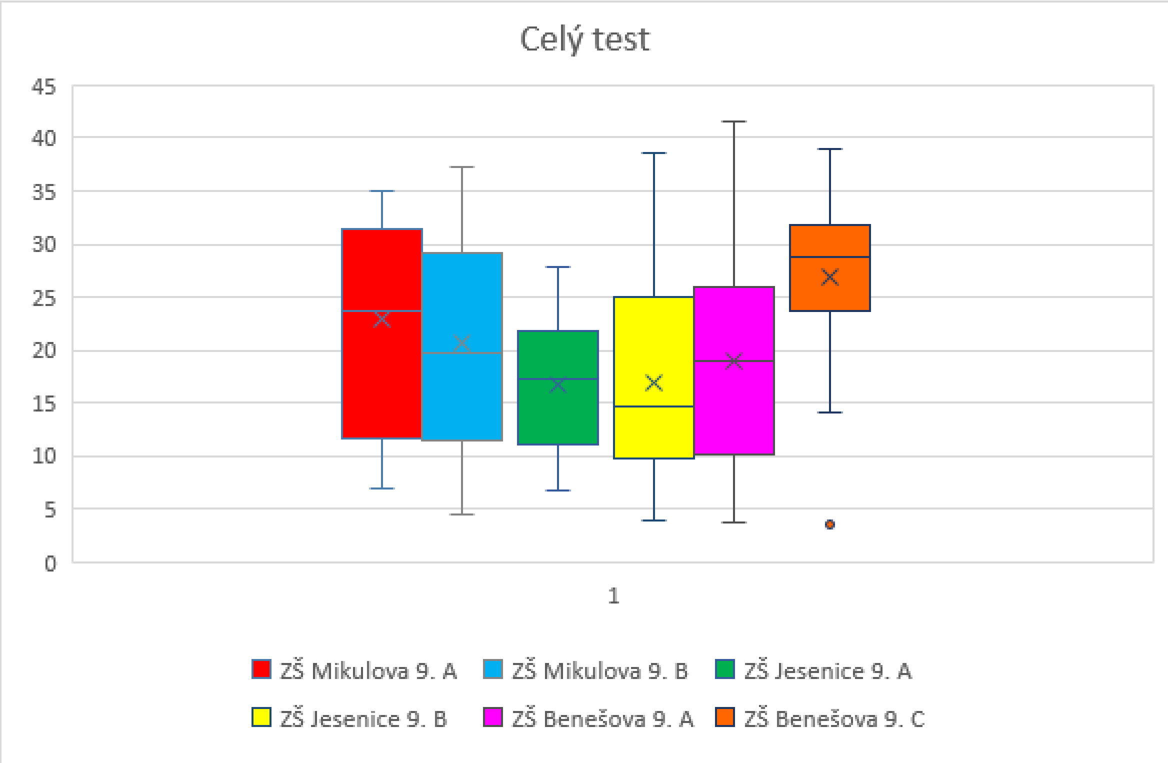
3.6.7 Diskuze výsledků experimentu

Maximální počet bodů z celého testu byl 43 bodů. Tohoto počtu bodů nedosáhl žádný žák. Nejlepšího výsledku v rámci celého testu dosáhla třída 9. C ze ZŠ Benešova, kde byla úspěšnost 62,74 % s průměrným počtem 26,98 bodů na žáka. Naopak nejnižší úspěšnost v rámci celého testu měla třída 9. A ze ZŠ Mikulova, kde byla úspěšnost 39,05 % s průměrným počtem 16,79 bodů na žáka. Průměrná úspěšnost na žáka je 47,01 % s průměrným počtem 20,22 bodů na žáka. Úspěšnost jednotlivých tříd je uvedena v tabulce 29.

Z grafu 11, který zobrazuje krabicový graf celého testu, vyplývá, že nejlepších výsledků dosáhla třída 9. C ZŠ Benešova. Hodnota mediánu i aritmetického průměru této třídy převyšuje tyto hodnoty ostatních tříd. Z grafu je také možné vyčíst, že žák, který dosáhl nejvyššího počtu bodů (41,5 bodů), je ze třídy 9. A ZŠ Benešova. Právě u tří ze šesti tříd (9. A ZŠ Mikulova, 9. A ZŠ Jesenice a 9. C ZŠ Benešova) je hodnota mediánu vyšší než hodnota aritmetického průměru. Pokud je hodnota mediánu vyšší než hodnota aritmetického průměru, znamená to, že více než polovina žáků ve třídě dosáhla vyššího průměrného počtu bodů, než je aritmetický průměr třídy. Ve třídě 9. A ZŠ Benešova se shoduje hodnota mediánu s aritmetickým průměrem bodů, což znamená, že přesně polovina žáků dosáhla vyššího průměrného počtu bodů, než je aritmetický průměr.

Aritmetický průměr	Body	%
ZŠ Mikulova 9. A	22,93	53,33
ZŠ Mikulova 9. B	20,75	48,26
ZŠ Jesenice 9. A	16,79	39,05
ZŠ Jesenice 9. B	16,86	39,21
ZŠ Benešova 9. A	18,95	44,07
ZŠ Benešova 9. C	26,98	62,74
Celkový průměr na žáka	**20,22**	**47,01**

Tabulka 29 - Úspěšnost žáků z celého testu



Graf 11 - Krabicový graf celého testu

3.6.8 Vyhodnocení stanovených předpokladů

Hypotézy jsem si stanovila ještě před tím, než jsem zadala testy do jednotlivých tříd. Tyto hypotézy jsou uvedeny v podkapitole 3.3 Úlohy v testu. Pro každou úlohu jsem zvlášť stanovila hypotézy a předpokládané nejčastější chyby žáků.

V úloze 1 jsem předpokládala nejvyšší úspěšnost ze všech úloh v testu. Dále jsem chtěla zjistit, jaký postup řešení žáci u podúlohy d) zvolí - zda budou při postupu používat převedení desetinného čísla na zlomek nebo převedení zlomku na desetinné číslo.

Předpoklad o nejvyšší úspěšnosti úlohy 1 se mi podařilo ověřit, protože průměrná procentuální úspěšnost na žáka v této úloze byla 68 % (u další úloh to bylo postupně 55,14 %, 50,6 %, 45,13 % a 30,08 %).

U podúlohy d) jsem z vyhodnocených testů zjistila, že 41 žáků (32,03 % žáků) preferovalo převod desetinného čísla na zlomek a 24 žáků (18,75 % žáků) převedlo zlomek na desetinné číslo. U zbylých 63 žáků (49,22 % žáků) se z postupu nedalo zjistit, který postup z těchto dvou použili.

V úloze 2 v podúloze c) jsem očekávala, že žáci ve většině případů zapíší jako řešení pouze řešení $v \neq 2$ a zapomenou na druhé řešení $v \neq -2$. U podúlohy d) jsem se domnívala, že žáci přehlédnou odmocninu a budou s výrazem pracovat, jako kdyby ve jmenovateli odmocnina nebyla. Dalším předpokladem bylo, že někteří žáci budou určovat navíc podmínky z čitatele jednotlivých zlomků - tuto chybu jsem očekávala nejčastěji u podúlohy e).

Celkem 38 žáků zapsali pouze podmínku $v \neq 2$ a nezapsali podmínku $v \neq -2$. Obě podmínky uvedlo 26 žáků a pouze podmínku $v \neq -2$ uvedl 1 žák.

Podúlohu d) žádný žák nevyřešil správně, někteří žáci uváděli pouze částečná řešení.

Dalším předpokladem bylo nejčastějším určování podmínek z čitatele u podúlohy e). U této podúlohy určilo podmínku z čitatele 19 žáků, z nich 7 žáků mělo chybu pouze v podúloze e), zbylých 12 žáků mělo chybu i v dalších podúlohách a), b), c) nebo d).

V úloze 3 jsem očekávala, že žáci špatně pochopí zadání nebo nepochopí zadání vůbec. Tabulka v úloze 3 byla sestavena tak, aby se v ní vyskytovala i podúloha, která nemá řešení (viz 5. řádek, 4. sloupec tabulky). Zde jsem očekávala, že žáci budou jako chybná řešení uvádět 0.

Žáků, kteří z jejich výsledků nepochopili zadání, bylo celkem 16. Tito žáci udělali chybu v tom, že násobili řádky a sloupce tabulky mezi sebou místo dosazování.

V podúloze, která neměla řešení, mělo správný výsledek pouze 17 žáků (13,28 % žáků). Chybnou odpověď 0, kterou jsem u žáků předpokládala, uvedlo 46 žáků (35,94 % žáků).

V úloze 4 jsem předpokládala, že žáci udělají chyby ve špatném pořadí jednotlivých výpočtů: u podúlohy a) jsem se domnívala, že žáci nejdříve spočítají druhé mocniny čísel 5 a 3, teprve poté vypočítají jejich součet. V podúloze b) jsem předpokládala, že někteří žáci nejdříve spočítají odmocniny z čísel 25 a 9 a pak vypočítají rozdíl těchto čísel. Podúloha b) byla záměrně zadána tak, aby odmocnina rozdílu dvou čísel byla přirozené číslo. U podúlohy d) jsem předpokládala, že by žáci mohli udělat numerickou chybu ve výpočtu třetí odmocniny čísla 8 nebo nebudou vědět, jak danou podúlohu zapsat, protože v předchozích podúlohách se vyskytují konkrétní čísla, ale zde je proměnná x.

Předpoklad o špatném pořadí jednotlivých výpočtů se potvrdila. U podúlohy a) 10 žáků nejdříve počítalo druhé mocniny a až poté součet těchto druhých mocnin. U podúlohy b) chyb ve špatném pořadí operací udělalo 9 žáků. U podúlohy d) 22 žáků počítalo místo třetí odmocniny třetí mocninu. Tato chyba se vyskytla i v předchozích podúlohách – například v podúloze b) počítalo druhou mocninu místo odmocniny 19 žáků.

V úloze 5 jsem předpokládala, že tato úloha bude mít nejnižší úspěšnost. Také jsem předpokládala, že někteří žáci vyřeší jen část úloh nebo cvičení nevyřeší vůbec. Vzhledem k tomu, že pátá úloha byla poslední úlohou v testu, očekávala jsem, že by se mohlo stát, že některým žákům na tuto úlohu nezůstane dostatek času. U podúloh a1), a2) jsem předpokládala, že žáci udělají chybu při práci se znaménky.

Předpoklad o nejnižší úspěšnosti této úlohy z celého testu se potvrdila. Tato úloha měla průměrnou procentuální úspěšnost 30,08 % na žáka.

Dále jsem vyhodnotila, kolik podúloh žáci vynechávali a nepočítali je. Všechny podúlohy úlohy řešilo 68 žáků, 1 podúlohu vynechalo 8 žáků, 2 podúlohy vynechalo 12 žáků, 3 podúlohy vynechalo 13 žáků, 4 podúlohy vynechalo 6 žáků, 5 podúloh vynechali 3 žáci a žádnou úlohu neřešilo 19 žáků.

Chybu ve znaménku v podúloze a1) udělalo celkem 74 žáků a v podúloze a2) 29 žáků.

4 Závěr

Cílem mé diplomové práce bylo zjistit, jak si vybraní žáci poradí s úlohami z oblasti číselných a algebraických výrazů. Dalším cílem bylo analyzování chyb a potvrzení či vyvrácení předem stanovených hypotéz.

V teoretické části diplomové práce jsem se věnovala číselným a algebraickým výrazům v RVP pro základní vzdělávání a pro gymnázia. Uvedla jsem také propedeutiku algebraických výrazů. Dále jsem představila chyby, které žáci mohou udělat při práci s algebraickými výrazy. Ukázala jsem významy, jakých může nabývat proměnná. Věnovala jsem se také statistickým pojmům, které jsem využila ve vyhodnocování experimentu.

V experimentální části jsem představila test, který jsem předložila celkem 128 žákům z devíti tříd ze tří základních škol. Test se skládal z pěti úloh a čtyř doplňujících uzavřených otázek. Každá úloha obsahovala několik podúloh. Test jsem následně vyhodnotila – u každé úlohy jsem vyhodnotila, jaká byla průměrná úspěšnost na žáka v jednotlivých třídách, a zaměřila jsem se na ověření hypotéz, které jsem si před testem stanovila. V experimentální části jsem se také zabývala představením základních škol, které se experimentu účastnily. Dále jsem analyzovala učebnice matematiky pro 8. ročník, konkrétně kapitoly, které se zabývají algebraickými výrazy. Tyto učebnice jsem následně porovnala. Podstatná část experimentální části diplomové práce se zabývá vyhodnocením experimentu. Představila jsem výsledky jednotlivých tříd a porovnala je mezi sebou. Také jsem vyhodnotila předpoklady a očekávání, které jsem si předem stanovila.

Z celého testu měla nejvyšší úspěšnost třída 9. C ZŠ Benešova, což je třída s rozšířenou výukou cizích jazyků. Doplňující uzavřené otázky ukázaly, že žáci zhodnotili test jako průměrně obtížný. Dále pomocí Pearsonova korelačního koeficientu jsem zjistila, že existuje přímá závislost mezi úspěšností jednotlivých žáků z testu a odhadem jejich úspěšnosti a také přímá závislost mezi úspěšností jednotlivých žáků z testu a jejich známkou z matematiky na konci 8. ročníku.

Pokud bych měla ještě někdy možnost provést a následně analyzovat podobný experiment, pravděpodobně bych vyměnila některé úlohy. Například místo poslední úlohy, kdy žáci měli za úkol dosadit jeden výraz do druhého a výsledný výraz upravit, bych zvolila úlohy, kdy bych ověřovala podobné znalosti, ale jednodušším způsobem. Některé podúlohy v testu bylo obtížné vyhodnocovat kvůli jejich náročnosti a zdlouhavému řešení. Proto bych do příštího experimentu zvolila více kratších a jednodušších podúloh.

Tento experiment považuji za přínosný z hlediska mého dalšího pedagogického vývoje, protože mi pomohl zlepšit se v analyzování chyb žáků v oblasti číselných a algebraických výrazů. Jako další přínos vidím to, že jsem získala cenné zkušenosti s tvorbou testů, které budu moci využít ve své další pedagogické činnosti.

5 Citovaná literatura

Balada, J. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze.

Coufalová, J., & kol. (2007). *Matematika 8: pro 8. ročník základní školy.* Praha: Fortuna.

Hejný, M. (1990). *Teória vyučovanie matematiky 2.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Chráska, M. (2016). *Metody pedagogického výzkumu.* Praha: Grada Publishing, a.s.

Molnár, J., & kol. (2000). *Matematika 8.* Olomouc: Prodos.

Mošna, F. (2010). *Statistické zpracování dat na PC: příručka k projektu Alma Mater Studiorum.* Praha: Univerzita v Praze - Pedagogická fakulta.

Odvárko, O., & Kadleček, J. (2012). *Matematika pro 8. ročník základní školy (1), Mocniny a odmocniny, Pythagorova věta, Výrazy.* Praha: Prometheus.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. (2016). Praha: MŠMT. Načteno z dostupné z http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2016.pdf

Rendl, M., & Vondrová, N. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta.

Vondrová, N., & Rendl, M. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum.

6 Přílohy

6.1 Příloha 1 – test zadaný žákům

1) Vypočítej:

Jméno: ______________________________

a) $6 + (-4) =$

b) $-3 - (-10) =$

c) $-4 + \frac{1}{2} =$

d) $-2\frac{2}{5} - (-4,4) =$

e) $8 : (-2) + 0,6 =$

f) $-10 - (6,5 \cdot 2) =$

2) Urči podmínky, pro které má výraz smysl:

a) $\frac{30}{x}$

b) $\frac{5a - 8}{b - 6}$

c) $\frac{3 - 9u}{v^2 - 4}$

d) $\frac{5r}{\sqrt{s + 3}}$

e) $\frac{8k}{11}$

3) Doplň tabulku (výsledky dopočítej do základního tvaru; pokud je potřeba, urči podmínky, pro které má daný výraz smysl):

y	5	-2	0	$\frac{1}{2}$	$(-4)^2$
$3y$					
$-\frac{y}{4}$					
$-y+5$					
$\frac{10}{3y^2}$					

4) Zapiš a vypočítej:

a) Druhá mocnina součtu čísel 5 a 3.

b) Druhá odmocnina rozdílu čísel 25 a 9.

c) Absolutní hodnota z podílu čísel (-8) a 4.

d) Součin třetí odmocniny čísla 8 a proměnné x.

5) Vypočítej:

a) $A = 4ab^2$, $B = 2a - 3b + 5$

a1) $A - B =$

a2) $-A^2 =$

a3) $A \cdot B =$

b) $M = \dfrac{3x - 10y}{3}$, $N = \dfrac{x^2 - x}{2}$

b1) $M - 4N =$

b2) $N^2 =$

b3) $3M \cdot N =$

Zakroužkuj odpovědi podle svého názoru:

1) Jak obtížný ti připadal test?

   snadný spíše snadný průměrný spíše obtížný obtížný

2) Tipoval(a) jsem:

   (téměř) celý test víc jak polovinu testu polovinu testu

   méně jak polovinu testu netipoval jsem (téměř) vůbec

3) Kolik procent testu podle tebe máš správně?

   100 % - 80 % 79 % -60 % 59 % - 40 %

   39 % - 20 % 19 % - 0 %

4) Na konci osmé třídy jsem na vysvědčení měl(a):

   1 2 3 4 5

7 Seznam tabulek

8 Seznam grafů

9 Seznam obrázků