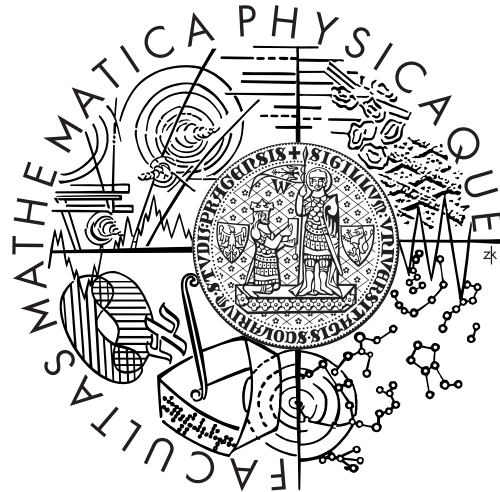


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Marie Běhounková

Seismická tomografická inverze syntetických dat

Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Hana Čížková, Dr.

Konzultant: Doc. RNDr. Ctirad Matyska, DrSc.

Studijní program: Geofyzika

Na tomto místě chci poděkovat všem, kteří mi pomohli a podporovali mě během mého studia. Zejména bych ráda poděkovala vedoucí své diplomové práce Mgr. Haně Čížkové, Dr. za čas a péči, které mi věnovala po celou dobu mého studia a hlavně v jeho závěru. Dále bych chtěla poděkovat konzultantovi Doc. RNDr. Ctiradu Matyskovi, DrSc. za rady a připomínky během mé práce.

RNDr. Ludkovi Klimešovi, DrSc. bych chtěla poděkovat za poskytnutí a seznámení s programem pro výpočet drah dvoubodových paprsků z balíku SW3D. Chtěla bych mu také poděkovat za uvedení do problematiky inverze seismických vlnových polí. Mgr. Petru Bulantovi, Dr. děkuji za vyjasnění problémů při práci s výše uvedeným programem.

Dále bych chtěla poděkovat všem za podnětné prostředí, zejména Doc. RNDr. Ondřeji Čadkovi, CSc. za diskuse týkající se problematiky obrácených úloh a RNDr. Ladislavu Hanykovi, Ph.D. za pomoc s vizualizací dat a s řešením technických problémů při programování.

Chtěla bych také poděkovat všem spolužákům zejména Martinu Pauerovi za přátelskou atmosféru při studiu.

Práce vznikla za podpory projektu GAUK 230/2002.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 16. dubna 2004

Marie Běhounková

Obsah

1	Úvod	9
1.1	Motivace	9
1.2	Cíl práce	10
2	Kinematická seismická tomografie	13
2.1	Úvod	13
2.2	Teorie kinematické seismické tomografie	14
2.3	Parametrizace	15
2.3.1	Konstrukce nerovnoměrné báze	15
2.3.2	Algoritmus slučování	16
2.4	Formulace úlohy	19
2.4.1	Konstrukce matice \mathbf{G} pomocí základní báze	20
2.5	Řešení	20
2.6	Numerické metody	21
2.6.1	Singulární dekompozice (SVD)	22
2.6.2	LSQR	23
2.7	Regularizace	23
2.8	Výpočet rychlosti	24
3	Syntetická úloha	25
3.1	Výběr zdrojů a přijímačů	25
3.2	Výpočet paprsků v referenčním modelu	26
3.3	Syntetické modely seismických rychlostí	27
3.4	Výpočet časů příchodu	28
3.5	Výpočet matice \mathbf{G}	29
3.5.1	Reprezentace matice \mathbf{G}	30
3.6	Porovnání syntetického a výsledného modelu	30
4	Dvourozměrný kartézský model	35
4.1	Geometrie, parametry a numerické řešení	35
4.2	Rovnoměrné pokrytí paprsky	35
4.3	Nevhodná parametrizace	37
4.4	Regularizace pomocí SVD	41
4.5	Nerovnoměrná parametrizace	43
4.6	Vliv chyb	43

4.7	Zemi podobné rozložení	46
5	Osově symetrický sférický model	49
5.1	Úvod	49
5.2	Výběr zdrojů a přijímačů	49
5.3	Modely	50
5.4	Vliv parametrizace	52
5.5	Vliv hustoty pokrytí	54
5.6	Vliv velikosti koeficientu tlumení	57
5.7	Výsledky inverze pro různé syntetické modely odvozené z modelů plášťové konvekce	61
5.8	Standardní syntetické testy tomografie	72
6	Závěr	77
A	Obrazová příloha	81
	Literatura	89

Název práce: **Seismická tomografická inverze syntetických dat**

Autor: Marie Běhounková

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí diplomové práce: Mgr. Hana Čížková, Dr.

e-mail vedoucího: Hana.Cizkova@mff.cuni.cz

Abstrakt: Tomografické modely s vysokým rozlišením jsou v současné době schopny detekovat subdukované litosférické desky spojitě procházející až do hloubek kolem 1000 km, v některých oblastech i přes celý plášť. Tyto výsledky jsou obvykle interpretovány jako argument podporující celoplášťovou konvekci. V této práci jsme řešili syntetickou tomografickou inverzi pro vstupní rozložení anomálií seismických rychlostí odvozených z modelů plášťové konvekce s cílem zjistit, zda je tomografická inverze schopná rozlišit různé scénáře plášťového tečení. Používali jsme časy příchodu vln P a pP. Úlohu jsme řešili ve dvourozměrné kartézské a sférické oblasti. Používali jsme nerovnoměrnou buňkovou parametrizaci. Studovali jsme základní vlastnosti obrácené úlohy (vliv parametrizace, chyb časů příchodu, pokrytí paprsky, explicitní regularizace obrácené úlohy). Ve sférické oblasti jsme se zaměřili na schopnost inverze rozlišit modely vzniklé z různých scénářů plášťové konvekce (celoplášťová konvekce a konvekce s nepropustným rozhraním v hloubce 1000 km nebo 670 km pro různé viskozní profily). Řešení obrácené úlohy se velmi dobře shoduje se vstupními anomáliemi (seismicky rychlé i pomalé anomálie) v hloubkách menších než přibližně 1000 km. Ve větších hloubkách nejsme schopni detekovat úzké vertikální anomálie; horizontální a silné vertikální útvary rozlišíme. V modelu s nepropustným kompozitním rozhraním s termální vazbou v hloubce 670 km (hloubka, kde má inverze dobré rozlišení) se termálně indukované útvary jeví jako spojitě procházející přes toto rozhraní.

Klíčová slova: seismická tomografie, syntetická inverze, nerovnoměrná parametrizace, styl plášťové konvekce

Title: **Seismic tomographic inversion of synthetic data**

Author: Marie Běhounková

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Mgr. Hana Čížková, Dr.

Supervisor's e-mail address: Hana.Cizkova@mff.cuni.cz

Abstract: High-resolution tomographic models detect subducted slabs continuously passing to the depth of 1000 km and in some regions through the whole mantle. These results are often interpreted as an argument for the whole mantle convection. In this work, we perform a synthetic tomographic inversion for several seismic velocity models derived from different mantle convection models. We investigate the ability of tomographic inversion to distinguish between different styles of mantle convection. In 2-D Cartesian and spherical models with irregular cell parameterization, we study basic properties of the inverse problem (influence of parameterization, picking errors, ray coverage, explicit regularization). In a spherical model, we explore the influence of tomographic filtering (by P and pP waves) on models derived from whole mantle convection and layered convection with an impermeable interface at the depth of 1000 km or 670 km. The resolution of the synthetic inversion is very good in the upper 1000 km for both seismically fast and slow anomalies. In the lower layer, however, we are not able to detect narrow vertical anomalies. We resolve horizontal and wide vertical anomalies there. For the seismic velocity model derived from a convection model with an impermeable chemical interface with thermal coupling at the depth of 670 km (where the resolution of the tomographic inversion is still good), resulting images of tomographic inversion can be interpreted as anomalies continuously passing through the whole mantle.

Keywords: seismic tomography, synthetic inversion, irregular parameterization, style of mantle convection

Kapitola 1

Úvod

1.1 Motivace

Kinematická seismická tomografie umožňuje získat třírozměrný obraz anomálií seismických rychlostí v zemském plášti. Toto rozložení anomálií seismických rychlostí odráží struktury vzniklé z plášťové konvekce. Seismické tomografické modely s vysokým rozlišením ukazují anomálie odpovídající subdukovaným litosférickým deskám procházející přes hranici v hloubce 670 km. V některých modelech je spojitost subdukované desky jasná až do hloubek (1700 ± 300) km [14], [29], v některých oblastech i přes celý plášť [3]. Jejich deskovitá struktura se však většinou ztrácí v hloubkách kolem 1000 km [3]. Dále lze pozorovat vzestupné proudy (plumy) procházející celým pláštěm [21]. Tyto výsledky se tedy zdají podporovat hypotézu o celoplášťové konvekci.

Proti existenci celoplášťového tečení jsou však některá geochemická pozorování (argumenty jsou shrnuty v článku [2]). Interpretace těchto geochemických pozorování předpokládají existenci oblasti v plášti, která se nepromíchává se zbytkem pláště (tzv. stabilní rezervoár). Obvykle se předpokládá, že tuto izolovanou oblast tvoří spodní vrstva pláště. Stále však není jasná hloubka rozhraní mezi těmito dvěma nepromíchávanými se vrstvami. Vhodným kandidátem se dříve zdálo rozhraní v hloubce okolo 670 km, kde dochází k výraznému nárůstu seismické rychlosti. Tomografické modely s vysokým rozlišením však ukazují listovitou strukturu subdukované desky spojitě procházející přes toto rozhraní ze svrchního do spodního pláště. Rozhraní tedy zřejmě není silnou bariérou. Navíc vysokotlaké experimenty naznačují, že se v této hloubce nachází fázový přechod v materiálu pláště. Dalším kandidátem na nepropustnou bariéru je rozhraní v hloubce okolo 1000 km. Ačkoli seismická tomografie nalézá v hlubších partiích seismicky rychlé anomálie pod subdukčními zónami, v hloubkách okolo 1000 km dochází k poklesu amplitudy těchto anomálií, zvětší se jejich vlnová délka a ztrácí se deskovitá struktura (Spakman, osobní sdělení). Dále je tato hloubka rozhraní v souladu s výsledky analýzy seismické anizotropie [20] a inverze geoidu [33]. Argumenty pro existenci chemického rozhraní v hloubce kolem 1000 km jsou shrnuty v článku [2].

Jednou z možností, jak vysvětlit rozpor mezi interpretacemi geochemických dat a seismickými tomografickými modely, je tedy existence nepropustného chemického

(kompozitního) rozhraní v hloubce asi 1000 km. Seismicky rychlé anomálie procházející zdánlivě spojitě do spodního pláště by pak mohly být vysvětleny jako útvary indukované termální vazbou na nepropustném rozhraní [7]. Aby bylo možné v tomografickém obrazu pláště rozhodnout, zda se v dané hloubce nachází nepropustné rozhraní, potřebujeme vědět, zda má tomografická inverze v této hloubce dostatečné rozlišení. Autoři tomografických modelů proto uvádějí při konstrukci trojrozměrných modelů z reálných dat syntetické testy rozlišení. Tyto testy poskytují vodítko pro posouzení rozlišení výsledných útvarů. Nicméně se provádí pouze omezené množství testů. Jako vstupní modely se pro tyto syntetické testy používají uměle navržené struktury (jejich vlnová délka je větší nebo rovna vlnové délce použité parametrizace) nebo struktury odvozené z výsledků inverze reálných dat. Tyto modely mají tedy omezenou vypovídací schopnost, protože jsou dobře postižitelné danou parametrizací (chyba rozvoje vstupního syntetického rozložení odchylek seismických rychlostí do bázových funkcí je menší než v případě reálných struktur).

Při posuzování rozlišení ve spodním plášti je obtížné zvolit vstupní strukturu pro syntetickou inverzi. Nevíme, zda jsou zde desky skutečně spojitě nebo jde pouze o termálně indukované anomálie, dále zde může docházet např. k zesílení anomálií díky nárůstu viskozity. V této práci jako vstup syntetického testu volíme fyzikální model odvozený z modelu termální konvekce v plášti podobně jako Bunge a Davies [5]. Parametry plášťového tečení však nejsou příliš jasné – existuje zřejmě celá řada přípustných modelů. Proto řešíme syntetickou tomografickou inverzi pro řadu vstupních rozložení anomálií seismických rychlostí vzešlých z různých modelů termální a termo-chemické konvekce.

1.2 Cíl práce

V této práci řešíme kinematickou tomografickou inverzi pro syntetická data. Nejprve ve velmi zjednodušených modelech vstupních anomálií zkoumáme vlastnosti obrácené úlohy. Na dvourozměrné obdélníkové a dvourozměrné sférické oblasti studujeme vliv parametrizace, vliv explicitní regularizace, vliv hustoty pokrytí paprsky a vliv chyby dat.

V osově symetrickém modelu pak řešíme inverzní úlohu pro vstupní anomálie seismických rychlostí odvozené z různých modelů termální či termo-chemické konvekce [8]. Používáme formulaci co nejbližší formulaci Bijwaarda a kol. [3] (nerovnoměrná buňková parametrizace, inverze vln P a pP).

Uvažujeme celoplášťové modely termální konvekce a vrstevnaté modely termo-chemické konvekce s rozhraním v hloubkách 1000 km nebo 670 km s různou vazbou na nepropustném rozhraní určenou viskozním profilem (mechanická či termální vazba). Na základě výsledků obrácené úlohy se snažíme určit, zda jsou tato rozhraní s různými typy vazby detekovatelná pomocí seismické tomografické inverze. Úlohu řešíme pouze na dvourozměrných oblastech (na obdélníku a mezikruží). Třírozměrná úloha je časově i výpočetně velmi náročná. Omezením na dvourozměrnou oblast můžeme provést širší parametrickou studii pro více vstupních modelů.

V kapitole 2 uvádíme formulaci obrácené úlohy pro nerovnoměrnou parametrizaci

a dále postup konstrukce nerovnoměrné parametrizace. Dále zde uvádíme použité numerické metody a způsob explicitní regularizace.

Kapitola 3 popisuje výběr zdrojů a přijímačů pro dvourozměrné úlohy a výpočet syntetických časů příchodu. Je zde také uveden přepočet variace teploty vzniklé z modelování plášťové konvekce na odchylky seismických rychlostí. Dále zde uvádíme definici korelace a procent vysvětlených dat.

Kapitola 4 je věnována velmi zjednodušenému dvourozměrnému problému řešenému na obdélníkové oblasti. Tato část slouží k základnímu seznámení s vlastnostmi obrácené úlohy. Protože obsahuje velmi malý počet modelových parametrů, můžeme tuto úlohu řešit přesnými metodami.

Kapitola 5 se zabývá obrácenou úlohou pro dvourozměrný sférický model. Popisujeme zde výsledky inverze pro řadu vstupních syntetických modelů seismických anomálií odvozených z různých modelů termální a termo-chemické konvekce.

Kapitola 2

Kinematická seismická tomografie

2.1 Úvod

Seismické vlny šířící se Zemí přinášejí informace o struktuře zemského nitra. Kinematická seismická tomografie používá časy příchodu seismických vln k určení třírozměrného rozložení rychlostí seismických vln v zemském plášti, staničních korekcí, anizotropie a k opravě lokací zemětřesení. Řešení těchto problémů je svázané.

Určení rozložení anomálií seismických rychlostí je náročná a nejednoznačná obrácená úloha. Řešení závisí na použité metodě tomografické inverze. Klíčová je zejména volba parametrizace, použitých seismických fází a minimalizační podmínky (obvykle se používá minimalizace rozdílu pozorovaných a predikovaných dat ve smyslu L_2 normy, ale existují i práce užívající jiné normy např. Vasco a kol. [30], navrhuující L_P , $P = 1.2$).

Pro parametrizaci modelu seismických rychlostí se používají funkce s globální nebo lokální bází. Jako bázové funkce s globálním nosičem se obvykle používají sférické harmonické funkce laterálně a ortogonální polynomy nebo spliny v radiálním směru. Laterální rozlišení těchto modelů je dané stupněm rozvoje, vlnová délka rozlišení je dána vzorcem $\lambda = \frac{2\pi r}{l}$, kde l je maximální stupeň harmonického rozvoje (Dziewonski [10] $l=6$, Su a kol. [26] $l=12$, Li a Romanowicz [18] $l=12$). Jako bázové funkce s lokálním nosičem se používají buňky (čtyřstěny, pravoúhlé buňky) s konstantní odchylkou pomalosti nebo spliny interpolující hodnoty mezi body na mříži. Nejčastěji používanou parametrizací do bázových funkcí s lokálním nosičem je rozdělení zkoumané oblasti na nepřekrývající se pravidelné pravoúhlé buňky např.: Inoue a kol. [12] – model pro rychlosti P vln pro plášť, parametrizace $5.6^\circ \times 5.6^\circ$ na rovníku a (30 – 330) km radiálně; Vasco a kol. [31] – model pro rychlosti P a S vln pro celou Zemi, parametrizace $6^\circ \times 6^\circ$ na rovníku a (35 – 400) km radiálně, anizotropie vnitřního jádra, topografie rozhraní (440 km, 660 km, jádro - plášť, vnitřní - vnější jádro); Vasco a kol. [32] – model pro rychlosti P a S vln pro celou Zemi, laterální rozlišení $3^\circ \times 3^\circ$ na rovníku pro plášť, $6^\circ \times 6^\circ$ na rovníku pro jádro a (35 – 400) km radiálně, anizotropie vnitřního jádra, topografie rozhraní (440 km, 660 km, jádro - plášť, vnitřní - vnější jádro); van der Hilst a kol. [28] – model pro rychlosti P vln pro plášť, parametrizace $2^\circ \times 2^\circ$ na rovníku a ~ 200 km radiálně; Kárason a van der Hilst [15] – model pro rychlosti P vln pro plášť, parametrizace $3^\circ \times 3^\circ$ na rovníku a ~ 150 km

radiálně.

Rozložení zdrojů a přijímačů je ovšem vázáno zejména na subdukční zóny a kontinenty a pokrytí Země paprsky je tedy velmi nehomogenní. Při rovnoměrné parametrizaci je rozlišení silně omezeno špatně pokrytými oblastmi. Proto se v posledních letech začala používat nerovnoměrná parametrizace – v dobře pokrytých oblastech se volí malé diskretizační buňky umožňující vysoké rozlišení, ve špatně pokrytých oblastech jsou buňky naopak velké (Bijwaard a kol. [3], Montelli a kol. [21], Abers a Roecker [1] a Widiyantoro a van der Hilst [34]).

2.2 Teorie kinematické seismické tomografie

Zabýváme se jednoduchou syntetickou úlohou. Předpokládáme, že polohy stanic a zdrojů známe přesně. Staniční korekce a anizotropii neuvažujeme.

Čas příchodu seismické vlny závisí na rychlosti šíření seismických vln podél paprsku a na geometrii paprsku, která opět závisí na rychlosti šíření seismických vln. Můžeme tedy psát

$$T = \int_L s dl + \varepsilon, \quad L = L(s), \quad (2.1)$$

kde T je čas příchodu, L dráha paprsku, $s = s(\mathbf{r})$ pomalost (převrácená hodnota rychlosti), dl integrační krok podél paprsku a ε chyba odečtu.

Dále definujeme čas příchodu seismického paprsku T_0 v referenčním modelu

$$T_0 = \int_{L_0} s_0 dl_0, \quad L_0 = L_0(s_0), \quad (2.2)$$

kde \bullet_0 značí hodnoty v referenčním modelu.

Variace seismické rychlosti pak závisejí na rozdílu (reziduu) d pozorovaného a referenčního času příchodu. Pomocí (2.1) a (2.2) můžeme psát

$$d = T - T_0 = \int_L s dl - \int_{L_0} s_0 dl_0 + \varepsilon. \quad (2.3)$$

Abychom mohli určit pomalost (a tedy i rychlost) inverzí této rovnice, musíme linealizovat integrál (2.1) kolem referenční dráhy paprsku L_0 . Tuto aproximaci můžeme provést za předpokladu, že rozdíl mezi skutečnou dráhou L a referenční dráhou L_0 paprsku je malý. Musí tedy platit

$$\left| \frac{s - s_0}{s_0} \right| \ll 1. \quad (2.4)$$

Za této podmínky lze rovnici (2.3) přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} d &= \int_{L_0} s dl_0 + \xi - \int_{L_0} s_0 dl_0 + \varepsilon \\ d &= \int_{L_0} (s - s_0) dl_0 + \xi + \varepsilon = \int_{L_0} \Delta s dl_0 + \xi + \varepsilon, \end{aligned} \quad (2.5)$$

kde ξ je aproximační chyba, která je díky Fermatovu principu vyššího řádu.

2.3 Parametrizace

Rozložení odchylek pomalosti je spojité. Abychom mohli problém numericky řešit, musíme provést diskretizaci. Odchylku Δs rozvineme do báze $\{c_j\}_{j=1}^M$ [4]

$$\Delta s(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^M \Delta s_j c_j(\mathbf{r}) + \zeta(\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

kde Δs_j jsou koeficienty rozvoje a $\zeta(\mathbf{r})$ je chyba rozvoje.

Zkoumanou oblast rozdělíme do nepravidelných nepřekrývajících se buněk – j -tá buňka tvoří nosič j -té bázové funkce c_j . Bázová funkce c_j je konstantní a je definována jako

$$c_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} C_j^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{r} \text{ uvnitř } j\text{-té buňky} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \quad (2.7)$$

kde C_j je objem j -té buňky. Definujeme-li na objemu zkoumané oblasti V skalární součin jako

$$(f, g) = \int_V f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})dV, \quad (2.8)$$

potom báze c_j splňuje podmínku ortonormality $(c_i, c_j) = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kroneckerovo delta.

2.3.1 Konstrukce nerovnoměrné báze

Pro konstrukci nerovnoměrné báze používáme schéma, které navrhli Abers a Roecker [1] a v globální seismické tomografii ho poprvé použili Bijwaard a kol. [3].

Buňky nerovnoměrné báze se podle tohoto postupu vytváří spojováním malých buněk rovnoměrné základní báze. Nejprve zavedeme základní bázi $\{b_j\}_{j=1}^{M_B}$, například rozdělením zemského pláště na vrstvy a každou vrstvu pak na pravoúhlé buňky s konstantním úhlovým krokem. Nosičem základní bázové funkce b_j je j -tá pravidelná nepřekrývajících se buňka. Definujeme

$$b_j(\mathbf{r}) = \begin{cases} B_j^{-\frac{1}{2}} & \mathbf{r} \text{ uvnitř } j\text{-té základní buňky} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \quad (2.9)$$

kde B_j je objem j -té základní buňky. Ze základní báze sestavíme nepravidelnou bázi $\{c_k\}_1^M$, $M < M_B$ – sloučíme několik základních buněk b_j do jedné nepravidelné buňky c_k . Vztah mezi c_k a b_j je dán rovnicí

$$\begin{aligned} c_k(\mathbf{r}) &= \sum_{j=1}^{M_B} P_{kj} b_j(\mathbf{r}), & P_{kj} &= (c_k, b_j) = \frac{B_j^{\frac{1}{2}}}{C_k^{\frac{1}{2}}} \Delta_{kj}, \\ C_k &= \sum_{j=1}^{M_B} \Delta_{kj} B_j, \end{aligned} \quad (2.10)$$

P_{kj} označuje projekční matici, pro Δ_{kj} platí

$$\Delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } b_j \text{ tvoří } c_k \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} . \quad (2.11)$$

Daný prvek základní báze $\{b_j\}_{j=1}^{M_B}$ může být součástí pouze jednoho prvku nerovnoměrné báze $\{c_k\}_{k=1}^M$ – každý sloupec j matice Δ obsahuje pouze jeden nenulový prvek (obrázek 2.1), proto můžeme matici Δ zapsat jako vektor $p(j)$, $j = 1, \dots, M_B$. Každý prvek vektoru $p(j)$ obsahuje hodnotu danou číslem buňky nerovnoměrné báze c_k , kterou tvoří – $p(j) = k$, $k \in \{1, \dots, M\}$ ¹.

Vektor $p(j)$ jsme pro velmi jednoduchý dvourozměrný kartézský model hledali ručně. Pro osově symetrický sférický model obsahující více parametrů, jsme používali automatický algoritmus slučování.

$$\Delta = \begin{pmatrix} & j \\ & \downarrow \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ k \rightarrow & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \end{pmatrix}$$

vektor $p(j) = k$

Obrázek 2.1: Struktura matice Δ

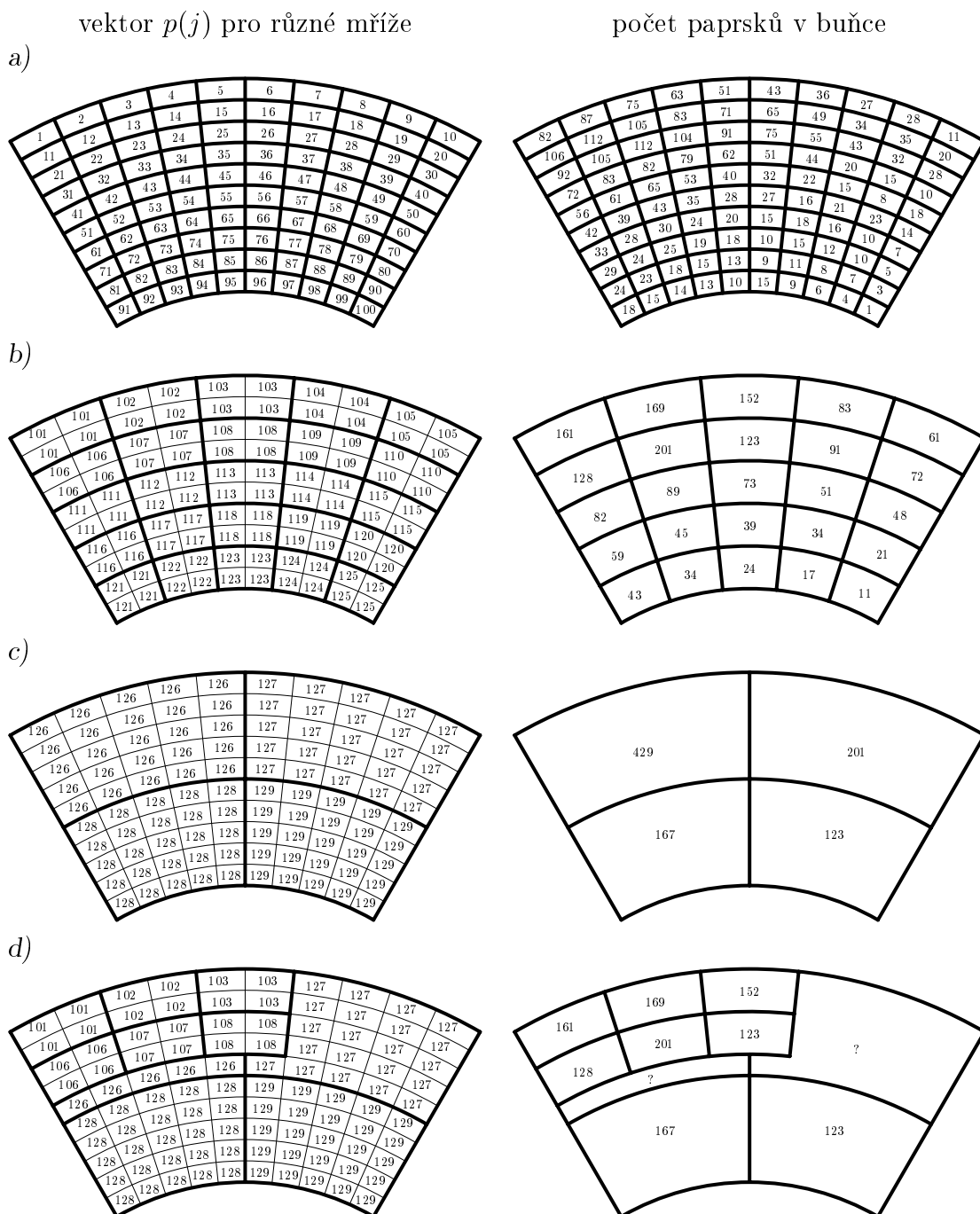
2.3.2 Algoritmus slučování

Algoritmus slučování je založen na principu navrženém Spakmanem a Bijwaardem [25]. Studovanou oblast rovnoměrně rozdělíme na $K \cdot L$ buněk základní mříže (K úhlových částí a L částí v radiálním směru). Zvolíme P násobků základní mříže $n_i = (k_i, l_i)$, $i = 1, \dots, P$ (K a L jsou celočíselné násobky k_i , respektive l_i), n_1 značí nejhrubší mříž, n_P nejjemnější mříž.

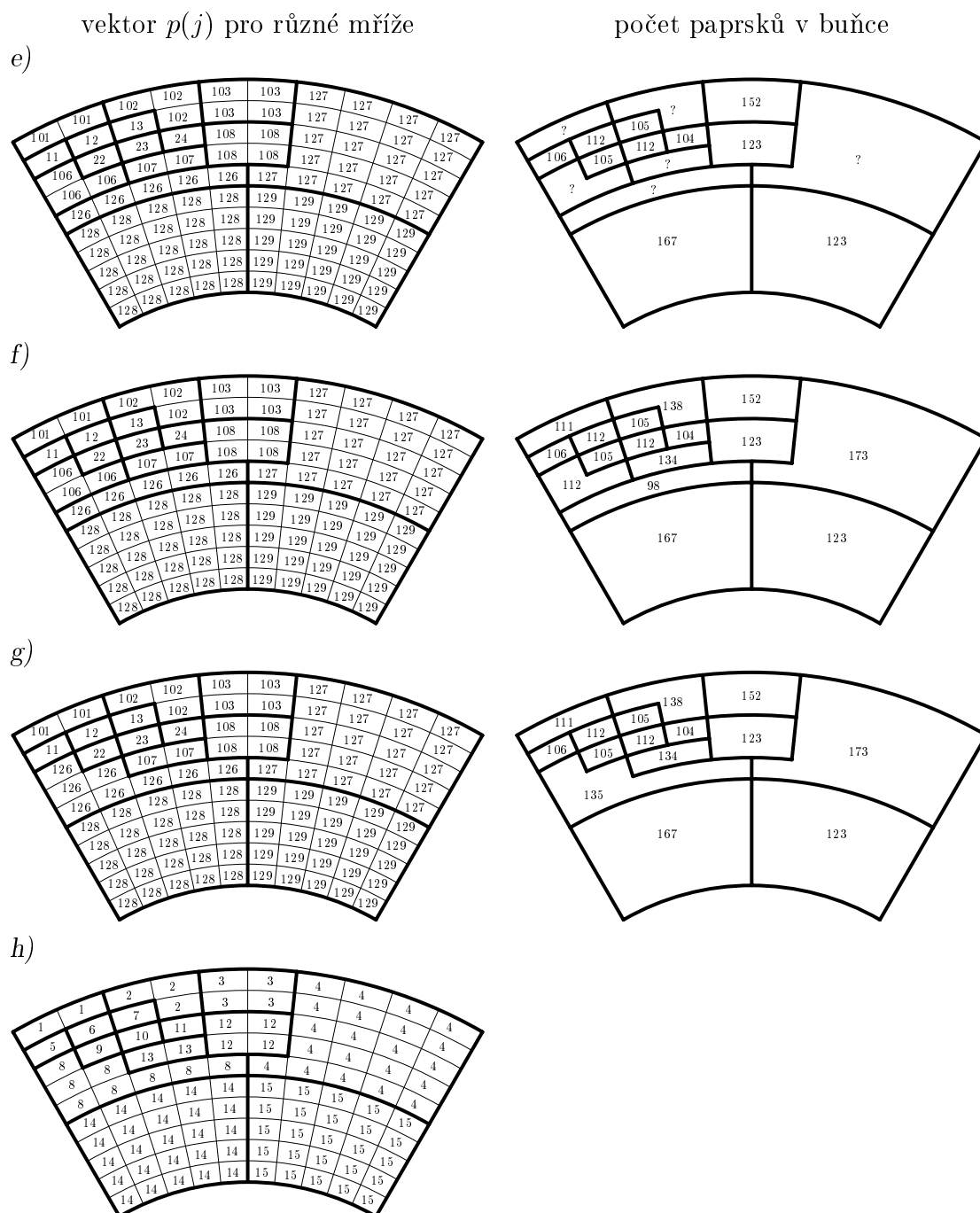
Dále stanovíme podmínku na minimální počet paprsků v každé buňce (můžeme však zvolit i jiný požadavek). Poté určíme funkční hodnoty vektorů $p_i(j)$, $i = 1, \dots, P$ pro všechny násobky n_i . Hodnoty volíme tak, aby se žádná neopakovala, tím se vyhneme stejnému označení pro více nerovnoměrných buněk. Dále pro každou mříž vypočítáme počet paprsků v buňce (či jinou hodnotu odpovídající zadané podmínce). V nultém (inicializačním) kroku položíme $p(j) = p_1(j)$ (inicializujeme vektor $p(j)$ pomocí hodnot nejhrubší sítě). Dále postupujeme pomocí dvou cyklů: vnější cyklus $i = 2, \dots, P$ (cyklus přes mříže) a vnitřní cyklus $j = 1, \dots$, počet buněk i -té mříže (cyklus přes počet buněk i -té mříže). Pokud j -tá buňka i -té mříže splňuje zadanou podmínku, aktualizujeme vektor $p(j)$ pomocí hodnot vektoru $p_i(j)$: $p(k) = p_i(k)$ pro všechna k základní mříže, které utváří j -tou buňku i -té mříže.

Po skončení cyklů vypočítáme počet paprsků v buňce pro aktualizovaný vektor $p(j)$. Takto získané buňky jsou již nepravidelné, avšak některé mohou být nedostatečně pokryté – nemusí splňovat zadanou minimální podmínku. Proto musíme

¹ $\Delta_{kj} = 1 \Leftrightarrow p(j) = k$



Obrázek 2.2: Algoritmus určení vektoru $p(j)$; příklad pro $P = 3$, $n_1 = (5, 5)$, $n_2 = (2, 2)$, $n_3 = (1, 1)$, podmínka: minimální počet paprsků v buňce 100; v levém sloupci jsou uvedeny hodnoty vektoru $p(j)$ – čísla v buňkách představují hodnotu vektoru $p(j)$; v pravém sloupci je počet paprsků v buňce – čísla v buňkách představují počet paprsků; a) určení vektoru $p_3(j)$ – základní mříž ($n_3 = (1, 1)$) a počet paprsků v buňce pro základní síť; b) určení vektoru $p_2(j)$ pro násobky $n_2 = (2, 2)$ a odpovídající počet paprsků; c) určení vektoru $p_1(j)$ pro násobky $n_1 = (5, 5)$ a odpovídající počet paprsků; inicializační hodnoty vektorů $p_i(j)$, $i = 1, \dots, P$ se neopakují (námi zvolená podmínka, není nutná); v nultém (inicializačním) kroku algoritmu položíme $p_1(j) = p(j)$ – inicializace pomocí nejhrubší sítě; d) aktualizace vektoru $p(j)$ pomocí hodnot $p_2(j)$ pro buňky splňující zadanou podmínku a odpovídající počet paprsků, e) aktualizace vektoru $p(j)$ pomocí hodnot $p_3(j)$ pro buňky splňující zadanou podmínku a odpovídající počet paprsků; f) vektor $p(j)$ stejný jako v případě e) a vypočtení počtu paprsků pro všechny (i nepravidelné) buňky popsané vektorem $p(j)$ z obrázku e); g) spojení nedostatečně pokrytých buněk a odpovídající počet paprsků (počet paprsků přepočten pro nově vzniklou buňku); h) závěrečné přecíslování.

Obrázek 2.2: Algoritmus určení vektoru $p(j)$ – dokončení.

nedostatečně pokryté buňky spojit. Nalezneme nejméně pokrytou buňku k a všechny její sousedy. Tuto nejméně pokrytou k -tou buňku spojíme se sousedem (l -tá buňka) s nejmenším pokrytím – $p(j) = k$ pro všechna j tvořící l -tou buňku. Dále znovu spočítáme počet paprsků v této nově utvořené k -té buňce. Tento postup opakujeme do té doby, dokud všechny buňky nespĺňují zadanou minimální podmínku. Na závěr vektor $p(j)$ přečísľujeme tak, aby $p(j) = k$, $k \in \{1, \dots, M\}$. Příklad slučování buněk pomocí tohoto algoritmu je uveden na obrázku 2.2.

2.4 Formulace úlohy

Dosazením parametrizované odchylky pomalosti Δs (2.6) do vztahu pro reziduum d (2.5) dostáváme

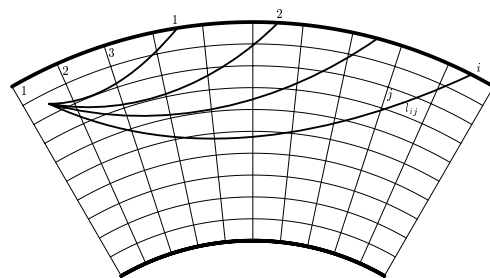
$$d = \sum_{j=1}^M \Delta s_j \left(\int_{L_0} c_j dl_0 \right) + \varepsilon + \xi + \bar{\zeta}, \quad (2.12)$$

kde platí $\bar{\zeta} = \int_{L_0} \zeta(\mathbf{r}) dl_0$.

Integrál bázové funkce podél paprsku je až na normovací konstantu roven délce paprsku v buňce. Rovnici (2.12) můžeme přepsat do tvaru

$$d = \sum_{j=1}^M \Delta s_j C_j^{-\frac{1}{2}} l_j + \varepsilon + \xi + \bar{\zeta}, \quad (2.13)$$

kde l_j je délka paprsku v j -té buňce. Budeme-li uvažovat N paprsků ($N > M$) a tedy i N reziduí můžeme vztah (2.13) zapsat jako



Obrázek 2.3: Konstrukce matice \mathbf{G}

$$d_i = \sum_{j=1}^M \Delta s_j C_j^{-\frac{1}{2}} l_{ij} + \varepsilon_i + \xi_i + \bar{\zeta}_i, \quad (2.14)$$

kde l_{ij} je délka i -tého paprsku v j -té buňce (viz obrázek 2.3), ε_i je chyba odečtu i -tého paprsku, ξ_i chyba linearizace L_i kolem L_{0i} a $\bar{\zeta}_i$ je integrál chyby rozvoje podél paprsku L_{0i} . Zavedeme označení

$$m_j = C_j^{-\frac{1}{2}} \Delta s_j, \quad (2.15)$$

kde m_j je j -tý modelový parametr – je to absolutní odchylka pomalosti od referenčního modelu v j -té buňce. Maticově pak vztah (2.14) přepíšeme jako

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gm} + \mathbf{e}, \quad (2.16)$$

kde $G_{ij} = l_{ij}$, $e_i = \varepsilon_i + \xi_i + \bar{\zeta}_i$.

2.4.1 Konstrukce matice \mathbf{G} pomocí základní báze

Dosadíme-li do rovnice (2.12) ze vztahu (2.10), pak pro i -tý paprsek ($i = 1, \dots, N$) platí

$$\begin{aligned} d_i &= \sum_{j=1}^M \Delta s_j C_j^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{M_B} B_k^{\frac{1}{2}} \Delta_{jk} \int_{L_{0i}} b_k dl + \varepsilon_i + \xi_i + \bar{\zeta}_i \\ d_i &= \sum_{j=1}^M \Delta s_j C_j^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{M_B} \Delta_{jk} l_{ik}^B + \varepsilon_i + \xi_i + \bar{\zeta}_i, \end{aligned} \quad (2.17)$$

kde l_{ik}^B jsou elementy dráhy i -tého paprsku v k -té elementární buňce. Porovnáním (2.14) a (2.17) dostáváme vztah

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^{M_B} \Delta_{jk} l_{ik}^B, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}^B \mathbf{\Delta}^T. \quad (2.19)$$

Ze vztahu (2.18) je patrné, že element matice l_{ij} lze získat sečtením všech elementů l_{ik}^B , pro které platí $b_k \subset c_j$.

Hlavní výhodou této reprezentace je možnost použití maticových elementů l_{ij}^B jednou vypočítaných v základní rovnoměrné bázi pro různé projekční matice (různé parametrizace), aniž bychom museli znovu provádět časově náročný výpočet drah paprsků.

2.5 Řešení

Problém (2.16) je přeurený – počet dat N je větší než počet parametrů M – obrázek 2.4. Pokud je $\mathbf{e} \neq 0$ nikdy nemůžeme vystihnout všechna data \mathbf{d} . Proto za řešení problému (2.16) považujeme takový modelový vektor \mathbf{m} , který nejlépe vystihuje vektor reziduí \mathbf{d} ve smyslu L_2 normy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d} \end{pmatrix}_{N \times 1} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \end{pmatrix}_{N \times M} \begin{pmatrix} \mathbf{m} \end{pmatrix}_{M \times 1} + \begin{pmatrix} \mathbf{e} \end{pmatrix}_{N \times 1}$$

Obrázek 2.4: Přeurená úloha

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_{L_2} = \min. \quad (2.20)$$

Předpokládáme-li gaussovské rozložení chyb vektoru reziduí \mathbf{d} , můžeme dle [27] řešení obrácené úlohy vyjádřit následovně

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \mathbf{C}_{M'} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{d}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{C}_{M'} = \left(\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G} \right)^{-1}, \quad (2.22)$$

$$\sigma_M(\mathbf{m}) = \left((2\pi^{MN}) \det \mathbf{C}_{M'} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle)^T \mathbf{C}_{M'}^{-1} (\mathbf{m} - \langle \mathbf{m} \rangle) \right), \quad (2.23)$$

$$\langle \mathbf{d} \rangle = \mathbf{G} \langle \mathbf{m} \rangle, \quad (2.24)$$

kde $\langle \mathbf{m} \rangle$ je nejpravděpodobnější řešení, $\mathbf{C}_{M'}$ kovarianční matice nalezeného řešení, $\sigma_M(\mathbf{m})$ aposteriorní hustota pravděpodobnosti a \mathbf{C}_D je kovarianční matice vektoru reziduí \mathbf{d} , $\langle \mathbf{d} \rangle$ jsou rezidua predikovaná modelem $\langle \mathbf{m} \rangle$.

Pro každou kovarianční matici \mathbf{C} definovanou ve smyslu L_2 normy (viz [27] box 1.1 str. 18) platí

$$C^{ii} = (\sigma^i)^2, \quad (2.25)$$

diagonální členy jsou rovny kvadrátu standardní odchylky σ a

$$\rho^{ij} = \frac{C^{ij}}{\sigma^i \sigma^j}, \quad (2.26)$$

jsou korelační koeficienty.

Z rovnice (2.22) a vlastnosti kovarianční matice (2.25) lze jednoduše získat standardní odchylku (chybu) $\sigma_{M'}^j$ pro každý modelový parametr m_j .

Budeme-li předpokládat, že chyby dat jsou nezávislé ($\rho^{ij} = \delta_{ij}$), kovarianční matice \mathbf{C}_D má tvar

$$C_D^{ij} = (\sigma_D^i)^2 \delta_{ij}. \quad (2.27)$$

Pokud neznáme standardní odchylku (chybu) σ_D^i , budeme předpokládat, že časy příchodů mají stejnou chybu $\sigma_D^i = \sigma$, $\forall i$, tj. $\mathbf{C}_D = \sigma^2 \mathbf{I}$. Potom můžeme (2.21) a (2.22) napsat jako

$$\langle \mathbf{m} \rangle = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{C}_{M'} = \sigma^2 (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1}. \quad (2.29)$$

Pro odhad odchylky σ používáme vztah

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\langle d \rangle_i - d_i)^2}{N - M}}. \quad (2.30)$$

2.6 Numerické metody

Abychom získali řešení $\langle \mathbf{m} \rangle$, musíme nalézt inverzi matice $(\mathbf{G}^T \mathbf{C}_D^{-1} \mathbf{G})$, resp. $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$. Tyto matice jsou čtvercové a symetrické.

Pokud řešíme problém pro malý počet parametrů, lze inverzi řešit přesnými metodami např. Gaussovou eliminací nebo najít řešení $\langle \mathbf{m} \rangle$ pomocí singulární dekompozice. Pro velké problémy se dá pro inverzi symetrických matic využít iterativních metod, např. metody sdružených gradientů nebo LSQR [23].

Problémem formulace úlohy (odstavec 2.4) je, že ačkoli je formálně přeurčená, může být zároveň i špatně podmíněná. Řádky v matici \mathbf{G} mohou být závislé, při nevhodně zvolené parametrizaci může být úloha necitlivá na některé parametry modelu (buňky kterými neprochází žádný paprsek). Navíc, pokud je chyba \mathbf{e} (rovnice (2.16)) příliš velká, je nutné problém regularizovat – odstavec 2.7.

V této práci používáme pro výpočet řešení $\langle \mathbf{m} \rangle$ singulární dekompozici pro kartézský dvourozměrný problém s malým počtem modelových parametrů a LSQR pro dvourozměrnou sférickou úlohu.

2.6.1 Singulární dekompozice (SVD)

Singulární dekompozice ([22], [31]) je reprezentace matice $\tilde{\mathbf{G}}_{N \times M}$ pomocí součinu tří matic

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T, \quad (2.31)$$

kde $\mathbf{\Lambda}_{M \times M}$ je diagonální matice, pro matice $\mathbf{U}_{N \times M}$ a $\mathbf{V}_{M \times M}$ platí vztah ortogonality $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{M \times M}$, $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{M \times M}$. Rovnici (2.31) získáme řešením vlastního problému matice $\mathbf{A}_{(M+N) \times (M+N)}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{G}} \\ \tilde{\mathbf{G}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{G}} \\ \tilde{\mathbf{G}}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{v}_i \end{pmatrix}.$$

Výsledek lze zapsat pomocí dvou lineárních systémů

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{v}_i &= \lambda_i \mathbf{u}_i \\ \tilde{\mathbf{G}}^T \mathbf{u}_i &= \lambda_i \mathbf{v}_i, \end{aligned} \quad (2.33)$$

maticově pak

$$\tilde{\mathbf{G}} \mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \Rightarrow \tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T. \quad (2.34)$$

Pokud $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{C}_D^{-\frac{1}{2}} \mathbf{G}$, resp. $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}$, pak má řešení přeurčené úlohy (2.21), resp. (2.28) tvar

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{U}^T \tilde{\mathbf{d}}, \quad (2.35)$$

kde $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{C}_D^{-\frac{1}{2}} \mathbf{d}$, resp. $\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d}$. Podobně můžeme zapsat i vztahy (2.22), resp. (2.29) pro kovarianční matici $\mathbf{C}_{M'}$

$$\mathbf{C}_{M'} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-2} \mathbf{V}^T, \quad \text{resp.} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{C}_{M'} = \sigma^2 \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-2} \mathbf{V}^T. \quad (2.37)$$

Singulární dekompozice je přesná, ale časově náročná metoda a je vhodná pouze pro malé matice. Výhodou je, že získáme spektrum λ_i matice $\tilde{\mathbf{G}}$ a tím můžeme špatně podmíněnou úlohu regularizovat. K rozkladu matice $\tilde{\mathbf{G}}$ ve tvaru (2.31) jsme používali numerickou knihovnu [22].

Regularizace pomocí SVD

Pokud jsou některá vlastní čísla nulová nebo velmi malá můžeme pro inverzi použít pouze P vlastních čísel, která splňují podmínku $\lambda_i > \varepsilon$ (ε je zvolená hladina ořezání) a odpovídajících matic \mathbf{U}_P a \mathbf{V}_P . Pro řešení (2.35) můžeme psát

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \mathbf{V}_P \mathbf{\Lambda}_P^{-1} \mathbf{U}_P^T \tilde{\mathbf{d}}, \quad (2.38)$$

pro kovarianční matice $\mathbf{C}_{M'}$ (2.36), resp. (2.37)

$$\mathbf{C}_{M'} = \mathbf{V}_P \mathbf{\Lambda}_P^{-2} \mathbf{V}_P^T, \quad \text{resp.} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{C}_{M'} = \sigma^2 \mathbf{V}_P \mathbf{\Lambda}_P^{-2} \mathbf{V}_P^T. \quad (2.40)$$

2.6.2 LSQR

LSQR (Least Squares Regression) ([23], [37]) je iterativní algoritmus založený na bidiagonalizaci matice $\tilde{\mathbf{G}}$. Tato metoda je analyticky ekvivalentní metodě konjugovaných gradientů. Je však numericky stabilnější a vhodnější pro špatně podmíněné úlohy.

Pro k -tou iteraci lze matici $\tilde{\mathbf{G}}$ napsat jako

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{B}_k \mathbf{V}_k^T, \quad (2.41)$$

$\mathbf{V}_k^T \mathbf{V}_k = \mathbf{I}_k$, $\mathbf{U}_{k+1}^T \mathbf{U}_{k+1} = \mathbf{I}_{k+1}$, \mathbf{B}_k v k -té iteraci je bidiagonální matice o rozměrech $(k+1) \times k$

$$\mathbf{B}_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & & & \\ & & \beta_4 & \alpha_4 & & \\ & & & \beta_5 & \alpha_5 & \\ & & & & \beta_6 & \alpha_6 \\ & & & & & \beta_7 & \alpha_7 \\ & & & & & & \beta_8 & \alpha_8 \\ & & & & & & & \beta_9 & \alpha_9 \\ & & & & & & & & \beta_{10} & \alpha_{10} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Řešení $\langle \mathbf{m} \rangle_k$ hledáme ve tvaru

$$\langle \mathbf{m} \rangle_k = \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k, \quad (2.43)$$

kde pro \mathbf{y}_k platí

$$\|\beta_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{B}_k \mathbf{y}_k\|_{L_2} = \min, \quad (2.44)$$

β_1 získáme z prvního iteračního kroku $\beta_1 \mathbf{u}_1 = \tilde{\mathbf{d}}$, $\|\mathbf{u}_1\| = 1$.

Pro nalezení přibližného řešení $\langle \mathbf{m} \rangle_k$ používáme numerickou knihovnu [37] zahrnující i explicitní regularizaci (odstavec 2.7).

2.7 Regularizace

I přes použití nerovnoměrné parametrizace, je stále potřeba používat regularizaci pro potlačení vlivu chyb \mathbf{e} . Cílem regularizace je potlačit (tlumit) oscilace modelu

a nalézt "rozumně" hladké řešení. Regularizaci používáme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} \\ \lambda \mathbf{D} \end{pmatrix} \mathbf{m} + \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

kde λ je tlumící parametr (váha tlumení), \mathbf{D} je matice tlumících koeficientů. Řešení $\langle \mathbf{m} \rangle$ pak minimalizuje výraz

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_{L_2}^2 + \lambda^2 \|\mathbf{D}\mathbf{m}\|_{L_2}^2 = \min. \quad (2.46)$$

Snažíme se tedy co nejlépe vystihnout data \mathbf{d} a zároveň s vahou λ minimalizovat $\mathbf{D}\mathbf{m}$. Jako matice tlumících koeficientů \mathbf{D} se obvykle používá 3D Laplaceův operátor [21], koeficienty druhých derivací v laterárním směru [3] nebo jednotková matice [32].

V této práci používaný podprogram pro LSQR [37] obsahuje regularizaci pro $\mathbf{D} = \mathbf{I}$. Řešíme tedy úlohu

$$\|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_{L_2}^2 + \lambda^2 \|\mathbf{m}\|_{L_2}^2 = \min. \quad (2.47)$$

Snažíme se co nejlépe vystihnout rezidua \mathbf{d} a s váhovým koeficientem λ minimalizovat vektor modelových parametrů.

Používání regularizace může být ovšem problematické – dodáváme nefyzikální apriorní informaci. Abychom se vyhnuli používání regularizace, museli bychom používat jinou formulaci obrácené úlohy – např. zahrnutím kovarianční funkce prostředí [17].

2.8 Výpočet rychlosti

Modelový parametr $\langle m \rangle_j$ obsahuje absolutní odchylku pomalosti od referenčního modelu v j -té buňce. Zvykem je uvádět výsledek v relativních odchylkách rychlosti δv . Výsledek inverze proto převádíme na relativní odchylku rychlosti δv podle vzorce

$$\begin{aligned} \Delta v(\mathbf{r}) &= v(\mathbf{r}) - v_0(r) \\ \Delta v(\mathbf{r}) &= -\langle m \rangle_j(\mathbf{r}) v_0^2(r) \\ \delta v(\mathbf{r}) &= \frac{\Delta v(\mathbf{r})}{v_0(r)} = -\langle m \rangle_j(\mathbf{r}) v_0(r), \end{aligned} \quad (2.48)$$

kde \mathbf{r} je v j -té buňce, $v(\mathbf{r})$ celková rychlost v bodě \mathbf{r} , $v_0(r)$ je referenční rychlost. Tyto vzorce lze odvodit pomocí Taylorova rozvoje za předpokladu (2.4).

Kapitola 3

Syntetická úloha

Konstrukci modelu pro syntetickou tomografickou inverzi můžeme rozdělit do několika kroků (viz schéma na obrázku 3.1):

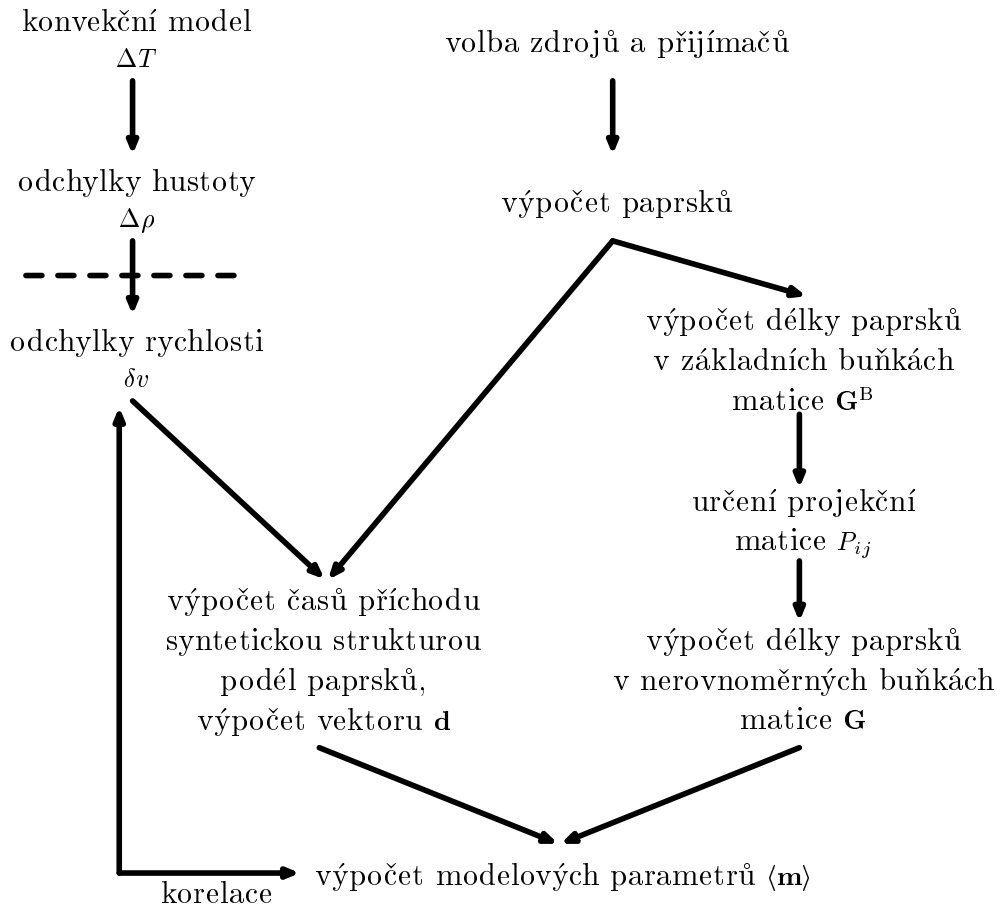
1. výběr zdrojů a přijímačů,
2. výpočet paprsků v referenčním modelu,
3. výpočet seismických rychlostí v syntetickém modelu,
4. výpočet reziduí \mathbf{d} časů příchodu v syntetickém modelu,
5. výpočet matice \mathbf{G} ,
6. řešení obrácené úlohy,
7. porovnání řešení a syntetického (počátečního) modelu.

3.1 Výběr zdrojů a přijímačů

Ve dvourozměrném kartézském modelu testujeme vlastnosti jednoduchého inverzního problému. Zdroje a přijímače jsme zvolili buď rovnoměrně podél hranic oblasti nebo náhodně. Při náhodném rozložení zdrojů dostáváme nerovnoměrné pokrytí studované oblasti paprsky, pokrytí ovšem není tak výrazně nehomogenní jako v Zemi.

Cílem dvourozměrné osově symetrické úlohy je studovat rozlišení metody v podmínkách podobných Zemi. Proto jsme se v dvourozměrném sférickém modelu snažili napodobit silně nerovnoměrné rozložení zdrojů a přijímačů tak, jak je pozorujeme na Zemi. Zdroje a přijímače pro naši inverzi jsme vybírali ze sítě ISC [13] (obrázek A.1¹). Zvolili jsme hlavní rovinu definovanou pomocí dvou bodů A a B . Tyto body jsme vybírali tak, aby byla hlavní rovina přibližně kolmá na subdukční zóny a aby jeden z bodů definujících rovinu splýval s geodynamickým polem [19], neboť se v Zemi v jejich blízkosti zřejmě nachází silné vzestupné proudy, jaké se často objevují i v ose osově symetrického modelu termální konvekce. Dále jsme si zvolili pološířku pásu kolem hlavní roviny a vybrali jsme zdroje a přijímače v zadaném pásu kolem hlavní roviny. Stanovili jsme minimální magnitudo m_B^{\min} a vybírali jen ohniska zemětřesení s magnitudem větším než m_B^{\min} . Dále jsme stanovili minimální

¹Obrázky číselné A.x jsou uvedeny v příloze A.



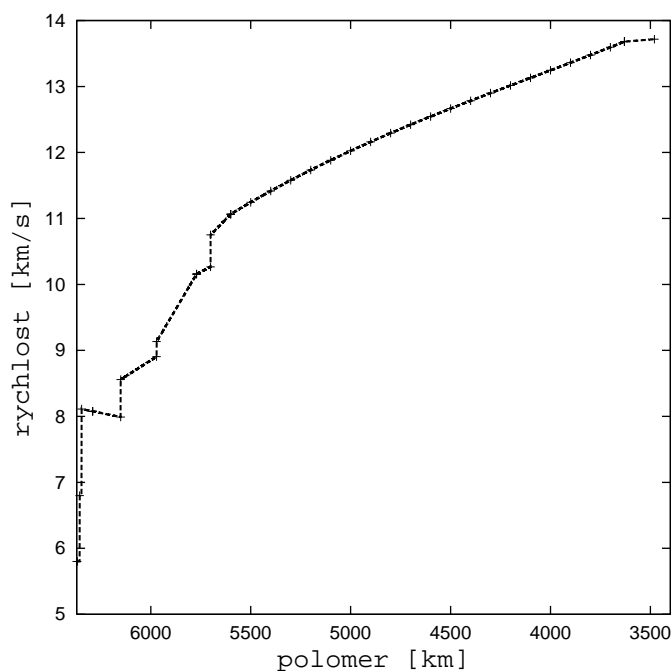
Obrázek 3.1: Schéma řešení syntetického problému

vzdálenost mezi přijímači a mezi ohnisky, tak abychom se vyvarovali téměř identických paprsků (a tedy závislých řádků v matici \mathbf{G}). Protože je konvekční model osově symetrický, použili jsme z takto vybraných zdrojů a přijímačů pouze polovinu; ty jsme pak zrcadlově promítli kolem bodu, který splývá s geodynamickým pólem. Kombinaci parametrů omezujících počet zdrojů a přijímačů volíme tak, aby byl poměr počtu zdrojů a přijímačů přibližně 10:1 (tento poměr je přibližně stejný jako při určování reálných laterálních variací rychlostí ve třírozměrné Zemi). Konkrétní volba zdrojů a přijímačů je uvedena v odstavci 5.2.

3.2 Výpočet paprsků v referenčním modelu

Ve dvourozměrném kartézském modelu předpokládáme konstantní referenční rychlost, proto je tvar paprsků velmi jednoduchý – přímkový.

Ve dvourozměrném sférickém modelu předpokládáme hloubkově závislou referenční rychlost $v_P = v_P(r)$. Jako referenční model používáme PREM [9] pro P vlny bez vrstvy oceánu (obrázek 3.2). Pro výpočet paprsků používáme program SW3D-CD-6 [6], [36].



Obrázek 3.2: Referenční rychlost - PREM

3.3 Syntetické modely seismických rychlostí

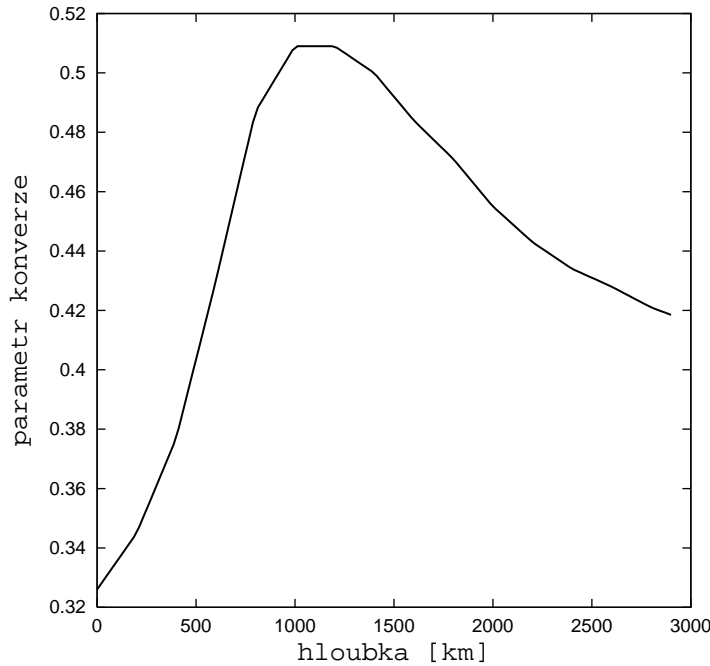
Pro výpočet časů příchodu používáme tři druhy syntetických modelů rozložení seismických rychlostí:

- umělý rychlostní model (anomálie seismických rychlostí jsou dány buďto jednoduchou analytickou funkcí nebo uměle navrženou po částech konstantní funkcí),
- seismický tomografický model (anomálie seismických rychlostí jsou odvozeny z třírozměrného tomografického modelu [28]),
- model odvozený z termální konvekce.

Umělý rychlostní model se skládá ze syntetických útvarů neodpovídající skutečným strukturám odchylek pomalostí v Zemi. Používáme ho k základnímu testování vhodnosti použití parametrizace v závislosti na vlnové délce umělé struktury a rozlišení, dále pomocí tohoto typu modelů provádíme standardní syntetické testy používané v globální tomografii (např. šachovnicový test).

Seismický tomografický model [28] používáme jako vstupní model pro otestování rozlišitelnosti Zemi podobných struktur. Model [28] byl parametrizován v buňkách $2^\circ \times 2^\circ$ na rovníku. Jako syntetický model používáme rozvoje tohoto modelu do sférických harmonických funkcí do stupně 50.

Modely odvozené z termální konvekce [8] jsou syntetické příklady představující možnou strukturu v zemské plášti. Na těchto modelech budeme ověřovat, zda se tomografické inverzi podaří rozlišit různé styly plášťové konvekce.



Obrázek 3.3: Parametr konverze [16]

Výsledkem modelování termální konvekce je rozložení teplotních anomálií $\Delta T(\mathbf{r})$ v plášti. Tyto anomálie potřebujeme převést na odchylky seismických rychlostí. Za předpokladu, že hustotní i rychlostní anomálie jsou způsobeny pouze variacemi teploty dostáváme

$$\Delta\rho(\mathbf{r}) = -\rho_M\alpha\Delta T(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

kde ρ_M je referenční hustota v konvekčním modelu, $\rho_M = 4500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; α objemová teplotní roztažnost, $\alpha = 1.4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$. Relativní anomálie seismických rychlostí jsou pak s odchylkami hustoty svázány vztahem

$$\frac{\Delta\rho(\mathbf{r})}{\rho_0(r)} = p_k(r) \frac{\Delta v(\mathbf{r})}{v_0(r)}, \quad (3.2)$$

kde $\rho_0(r)$ a $v_0(r)$ jsou referenční hustota a rychlost (PREM [9]) a p_k je parametr konverze získaný z vysokotlakých experimentů [16]. Hloubkový průběh parametru je uvedený na obrázku 3.3.

3.4 Výpočet časů příchodu

Syntetické časy příchodu (rezidua) počítáme integrací odchylek pomalostí Δs podél referenčního paprsku L_0

$$d_i = \int_{L_{0i}} \Delta s(\mathbf{r}) dl_{0i}. \quad (3.3)$$

Uvažujeme tedy pouze lineární úlohu pro pomalosti: $L = L_0$, aproximační chyba ξ_i je nulová. Navíc rezidua známe přesně (až na numerickou chybu integrace), dostáváme tedy

$$e_i = \bar{\zeta}_i, \quad (3.4)$$

nevysvětlitelná část reziduí \mathbf{d} je způsobena pouze chybou rozvoje původního rozložení do báze $\{c_j\}_{j=1}^M$. Tato chyba však může být velmi velká zejména ve špatně pokrytých oblastech, kde jsou parametrizační buňky velké.

Chceme-li uvažovat i chybu odečtu ε_i , musíme ji uměle zahrnout do synteticky vypočítaných reziduí. Pomocí generátoru pseudonáhodných čísel vytvoříme N reálných čísel x_i s normálním rozložením se středem $\mu = 0$ a standardní chybou $\sigma^2 = 1$. Čas šíření s chybou T_i^ε definujeme jako

$$T_i^\varepsilon = T_i + x_i \frac{kT_i}{3}, \quad (3.5)$$

T_i^ε leží s 99.7% pravděpodobností v intervalu $((1-k)T_i, (1+k)T_i)$, viz schématický obrázek 3.4. Pro reziduum s chybou \mathbf{d}^ε platí

$$d_i^\varepsilon = d_i + x_i \frac{kT_i}{3}, \quad (3.6)$$

kde d_i značí přesná syntetická data. Zahrneme-li chybu dat, část nevysvětlitelných reziduí se skládá z chyby odečtu ε_i a integrálu chyby rozvoje $\bar{\zeta}_i$

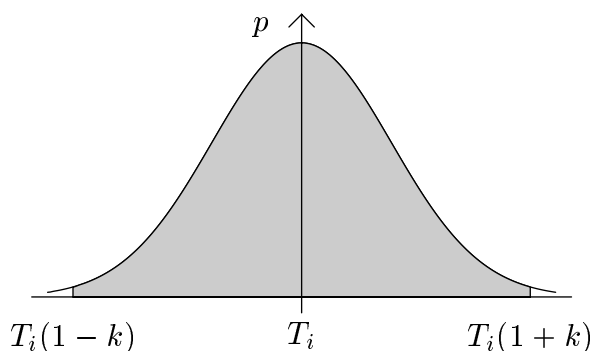
$$\begin{aligned} e_i &= \varepsilon_i + \bar{\zeta}_i, \\ e_i &= x_i \frac{kT_i}{3} + \bar{\zeta}_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Pro standardní odchylku datového vektoru σ_D^i ze vztahu (2.27) uvažujeme

$$\sigma_D^i = \frac{kT_i}{3}. \quad (3.8)$$

3.5 Výpočet matice \mathbf{G}

K výpočtu matice \mathbf{G} musíme nejprve určit prvky matice \mathbf{G}^B . Základní báze funkce b_j jsou konstantní a mají lokální nosič, díky tomu má element l_{ij}^B jednoduchou geometrickou interpretaci – značí délku i -tého paprsku v j -té buňce. Základní báze funkce b_j mají navíc jednoduchý tvar popsatelný pomocí čtyř ohraničujících křivek (úsečka, část kružnice). Výpočet je tedy relativně jednoduchý. (V nepravidelné bázi se buňka nedá jednoduše popsat pomocí čtyř křivek, výpočet elementů by byl proto náročnější.)



Obrázek 3.4: Zahrnutí chyby

Poté zvolíme podmínku pro slučovací algoritmus – obvykle se volí podmínka na minimální počet paprsků v buňce. Zkoušeli jsme však i jiné podmínky – podmínku na minimální celkovou délku paprsků v buňce. Při této podmínce dostáváme relativně malé buňky i ve špatně pokrytých oblastech (danou buňkou prochází málo paprsků s velkou celkovou délkou). Jako další jsme zadali podmínku na minimální veličinu D v dané buňce (D je rovna celkové délce paprsků v buňce normované odmocninou z obsahu dané buňky). Nicméně výsledná nerovnoměrná parametrizace je podobná jako pro podmínku na minimální počet paprsků v buňce. Dále budeme uvádět pouze výsledky pro podmínku na minimální počet paprsků v buňce. Minimální počet paprsků budeme volit podobně jako Bijwaard v práci [4] v kinematické seismické tomografii (500–1000 paprsků v buňce).

Určíme-li různé vektory $p(j)$ můžeme sečtením členů matice \mathbf{G}^B podle vzorce (2.18) určit matici \mathbf{G} pro různé parametrizace. Chceme-li, aby báze $\{c_j\}_{j=1}^M$ byla rovnoměrná, položíme $M = M_B$, $p(j) = j, j = 1, \dots, M$.

3.5.1 Reprezentace matice \mathbf{G}

Pracujeme-li s velkým počtem parametrů a paprsků můžeme mít problémy s dostatkem paměti počítače. Matice \mathbf{G}^B a \mathbf{G} jsou však velmi řídké (v příkladech uvedených v kapitole 5 se počet nenulových elementů matice \mathbf{G}^B pohybuje v řádu procent), můžeme tedy použít komprimovaný formát matic. Používáme-li k řešení inverzního problému iterativních metod (opakovaně násobíme maticí \mathbf{G} či \mathbf{G}^T), urychlíme i výpočet řešení. K výpočtům používáme komprimovaný řádkový formát (CSR) a numerickou knihovnu SPARSKIT [24].

3.6 Porovnání syntetického a výsledného modelu

Řešíme-li syntetickou úlohu, známe vstupní i výsledné rozložení odchylek. Můžeme tak jednoduše určit úspěšnost inverze pomocí korelačního koeficientu ρ . Korelační koeficient dvou reálných funkcí $f(\mathbf{r})$ a $g(\mathbf{r})$ zavedeme vztahem

$$\rho = \frac{\int_V f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})dV}{\|f\| \cdot \|g\|}, \quad (3.9)$$

$$\|f\| = \left(\int_V f(\mathbf{r})f(\mathbf{r})dV \right)^{\frac{1}{2}},$$

kde dV je element oblasti ($dV = dx dy$ pro dvourozměrný kartézský model a $dV = r dr d\theta$ pro dvourozměrný sférický model).

Pro sféricky symetrický model se výrazně mění pokrytí paprsky s hloubkou. Proto kromě korelačního koeficientu ρ počítaného přes celou oblast V určíme i hloubkový průběh korelace $\rho(r)$

$$\rho(r) = \frac{\int_0^{2\pi} f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})r d\theta}{\|f\|_{\Omega(r)} \cdot \|g\|_{\Omega(r)}}, \quad (3.10)$$

$$\|f\|_{\Omega(r)} = \left(\int_0^{2\pi} f(\mathbf{r})f(\mathbf{r})r d\theta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dále zavádíme průměrné rozložení anomálií pomalosti pro danou parametrizaci

$$\bar{f}_i = \frac{\int_{C_i} f(\mathbf{r}) dV}{C_i}, \quad (3.11)$$

kde \bar{f}_i značí průměrnou hodnotu funkce f v i -té buňce o objemu C_i . Toto průměrné rozložení vstupních anomálií pomalosti je nejlepší možný výsledek, jaký bychom mohli v ideálním případě tomografickou inverzí pro danou parametrizaci získat, protože chyba jeho rozvoje do bázových funkcí je nulová. Pro koeficient rozvoje Δs_i platí

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \int_V c_i f(\mathbf{r}) dV \\ &= C_i^{-\frac{1}{2}} \int_{C_i} f(\mathbf{r}) dV = C_i^{\frac{1}{2}} \bar{f}_i. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Přepíšeme-li tento vztah pomocí definice (2.15), dostáváme

$$m_i = \bar{f}_i. \quad (3.13)$$

Průměrná hodnota $f(\mathbf{r})$ v i -té buňce znamená (až na normovací konstantu) velikost koeficientu rozvoje syntetického rozložení anomálií pomalostí $f(\mathbf{r})$ do i -té bázové funkce. Chyba rozvoje ζ je tedy rovna

$$\zeta(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) - \bar{f}(\mathbf{r}), \quad (3.14)$$

kde $\bar{f}(\mathbf{r}) = \bar{f}_i$, pro \mathbf{r} v i -té buňce.

Pro úplnost uvádíme nejenom korelaci původního \times výsledného rozložení odchylek pomalostí, ale i korelaci výsledného \times průměrného a původního \times průměrného rozložení odchylek pomalostí.

Korelace původního a průměrného rozložení odchylek navíc dává odhad velikosti integrálu kvadrátu chyby rozvoje přes studovanou oblast – $\int_V \zeta^2 dV$. Podobně jako koeficienty rozvoje funkce $f(\mathbf{r})$ odchylek anomálií můžeme vypočítat koeficienty rozvoje průměrného rozložení $\bar{f}(\mathbf{r})$

$$\Delta \bar{s}_i = C_i^{\frac{1}{2}} \bar{f}_i. \quad (3.15)$$

Díky definici průměrného rozložení (3.11) víme, že rozvoj je přesný (chyba rozvoje je nulová). Korelace průměrného a původního rozložení je definovaná vztahem.

$$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}} = \frac{\int_V \bar{f}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r})}{\|\bar{f}(\mathbf{r})\| \cdot \|f(\mathbf{r})\|}. \quad (3.16)$$

Čitatel I výrazu (3.16) můžeme pomocí rozvoje do bázových funkcí napsat jako

$$\begin{aligned} I &= \int_V \left[\left(\sum_{i=1}^M \Delta \bar{s}_i c_i \right) \left(\sum_{j=1}^M \Delta s_j c_j + \zeta(\mathbf{r}) \right) \right] dV \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \Delta \bar{s}_i \Delta s_j \int_V c_i c_j dV + \sum_{i=1}^M \Delta \bar{s}_i \int_V \zeta(\mathbf{r}) c_i dV. \end{aligned}$$

Díky omezenému nosiči a ortonormalitě básových funkcí c_i a vlastnosti chyby rozvoje $\int_V \zeta(\mathbf{r})c_i dV = 0$ platí

$$I = \sum_{i=1}^M \Delta \bar{s}_i \Delta s_i. \quad (3.17)$$

Dosazením rozvoje funkcí do vztahu pro normu funkce $f(\mathbf{r})$ a $\bar{f}(\mathbf{r})$ dostáváme

$$\|f(\mathbf{r})\|^2 = \sum_{i=1}^M \Delta s_i \Delta s_i + \int_V \zeta^2(\mathbf{r}) dV. \quad (3.18)$$

$$\|\bar{f}(\mathbf{r})\|^2 = \sum_{i=1}^M \Delta \bar{s}_i \Delta \bar{s}_i. \quad (3.19)$$

Dosazením (3.17), (3.18) a (3.19) do vztahu pro korelaci původního a průměrného rozložení (3.16) dostáváme

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^M \Delta \bar{s}_i \Delta s_i}{\left(\sum_{i=1}^M \Delta \bar{s}_i \Delta \bar{s}_i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^M \Delta s_i \Delta s_i + \int_V \zeta^2(\mathbf{r}) dV \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.20)$$

Použitím (3.12) a (3.15) v (3.20) můžeme psát

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sum_{i=1}^M \bar{f}_i^2 C_i}{\left(\sum_{i=1}^M \bar{f}_i^2 C_i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^M \bar{f}_i^2 C_i + \int_V \zeta^2(\mathbf{r}) dV \right)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\int_V \zeta^2(\mathbf{r}) dV}{\sum_{i=1}^M \bar{f}_i^2 C_i} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{I_C}{J} \right)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Veličina I_C odpovídá kvadrátu normy chyby rozložení $f(\mathbf{r})$ a veličina J kvadrátu normy vystižitelné části rozložení $f(\mathbf{r})$. Čím je poměr těchto veličin $\frac{I_C}{J}$ větší (chyba převažuje nad vysvětlitelnou částí) tím je menší korelace a naopak. Pro vztah (3.21) je dále zajímavé uvažovat několik speciálních případů:

1. Pokud je chyba rozvoje ζ nulová a pokud existuje alespoň jedno i takové, že platí $\bar{f}_i \neq 0$, potom pro korelaci průměrného a původního rozložení anomálií platí $\rho=1$.²
2. Uvažujme počáteční rozložení anomálií $f(\mathbf{r})$ téměř nevystižitelné pomocí básových funkcí c_i , tj. platí

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{r}) &\rightarrow f(\mathbf{r}) \\ \bar{f}_i &\rightarrow 0 \quad \forall i, \quad J = \sum_{i=1}^M \bar{f}_i^2 C_i \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pokud je navíc I_C nenulové, potom platí

$$\lim_{J \rightarrow 0} \rho = 0.$$

²Pokud by takovéto i neexistovalo a chyba rozvoje ζ by byla nulová, pak by nemělo smysl tuto obrácenou úlohu řešit – odchylky pomalostí by byly všude nulové.

Jako další charakteristiku výsledku obrácené úlohy zavádíme procento vysvětlených dat p

$$p = \left(1 - \frac{\|\langle \mathbf{d} \rangle - \mathbf{d}\|^2}{\|\mathbf{d}\|^2} \right) \cdot 100\%, \quad (3.22)$$

které udává procento pozorovaných dat \mathbf{d} vysvětlených pomocí modelu $\langle \mathbf{m} \rangle$. Tato veličina není však příliš vhodná pro ověření úspěšnosti inverze – její velikost závisí na počtu stupňů volnosti: čím je $N - M$ menší, tím je procento vysvětlených dat větší. Přesto je výhodné tuto veličinu uvádět zejména pro odhad nejlepší velikosti váhového koeficientu regularizace λ – paprsky i buňky jsou fixované a procento vysvětlených dat je závislé na velikosti tlumícího váhového koeficientu λ .

Kapitola 4

Dvourozměrný kartézský model

4.1 Geometrie, parametry a numerické řešení

V této části se budeme zabývat velmi zjednodušeným příkladem – zkoumaná oblast je dvourozměrná a čtvercová. Referenční rychlost v modelu předpokládáme konstantní $v_0 = \text{konst.}$ Tento předpoklad neodpovídá reálné situaci v Zemi ($v_0 = v_0(r)$). I přes tato zjednodušení však můžeme pozorovat základní vlastnosti obrácené úlohy – citlivost úlohy na pokrytí paprsky, parametrizaci (závislost vlnové délky struktury a parametrizace) a na vliv chyb.

Modelovou čtvercovou oblast jsme rozdělili na 8×8 , 12×12 , 16×16 nebo 35×35 částí. Počet parametrů je tedy velmi malý, což nám umožňuje používat přesné metody pro výpočet inverze.

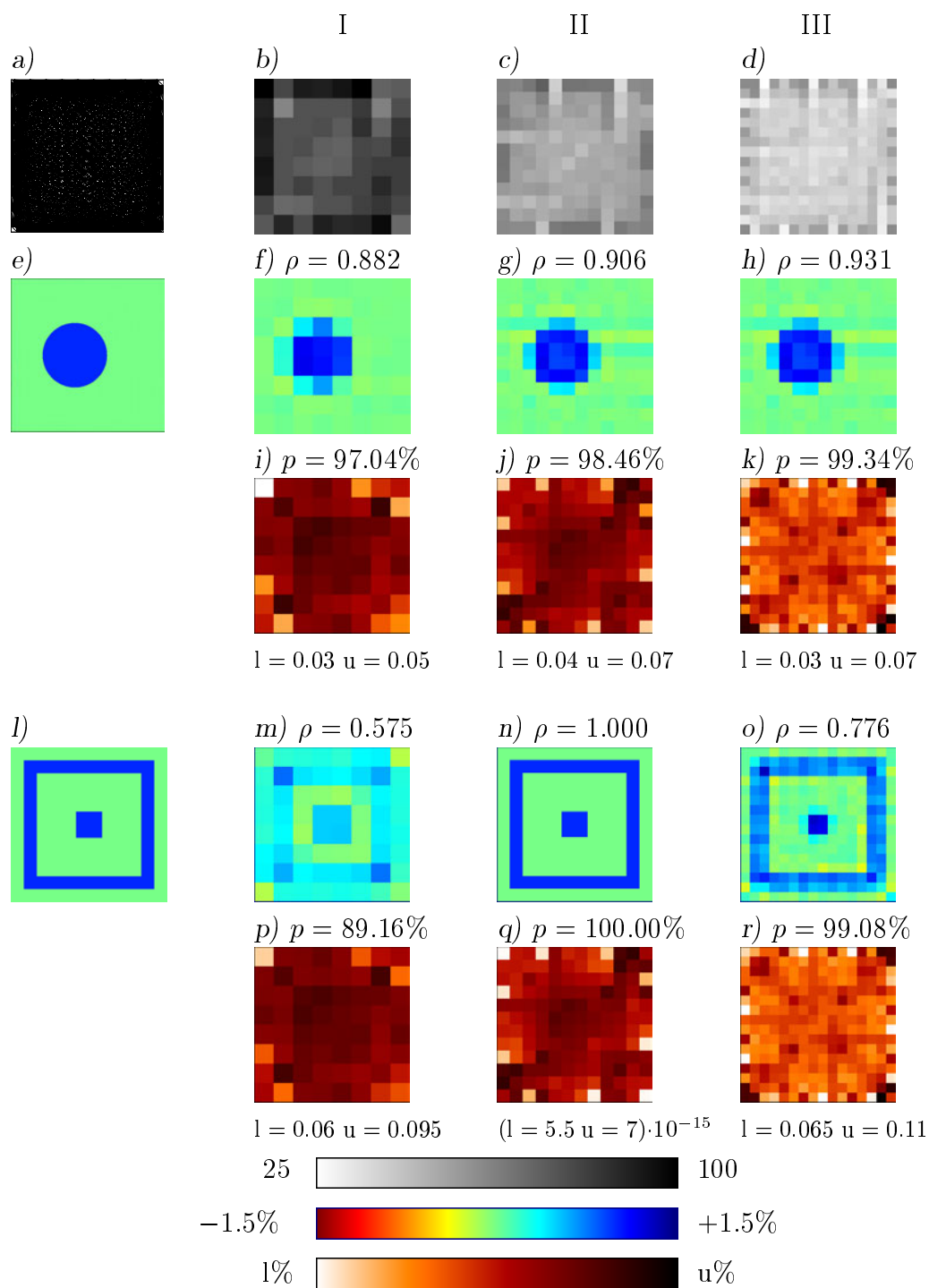
Jak jsme již uvedli, pro řešení inverzní úlohy používáme singulární dekompozici. Zkoušeli jsme však i výpočet pomocí Gaussovy eliminace. Výsledky inverze jsou pro obě metody u dobře podmíněné úlohy stejné. Pro velmi špatně podmíněné úlohy se výsledky liší díky numerické chybě. Nevýhodou singulární dekompozice je její větší časová náročnost. SVD nám však díky znalosti spektra matice $\tilde{\mathbf{G}}$ nabízí možnost regularizace (viz odstavec 2.6.1).

4.2 Rovnoměrné pokrytí paprsky

Pokryjeme-li zkoumanou oblast dostatečně (vzhledem k použité parametrizaci) a rovnoměrně paprsky, můžeme předpokládat, že matice \mathbf{G} bude dobře podmíněná. Výsledek obrácené úlohy tedy bude závislý zejména na chybě rozvoje ζ původního rozložení do bázových funkcí.

Pro základní test vlivu parametrizace jsme zvolili velmi jednoduché uspořádání. Po obvodu jsme rovnoměrně rozmístili 40 bodů, které jsou zdroji i přijímači zároven. Celkový počet paprsků je 600^1 (obrázek 4.1a). Toto rozmístění nám zajistilo rovnoměrné pokrytí buněk paprsky pro všechny používané parametrizace (obrázek 4.1b–d). Počáteční rozložení odchylek jsme zvolili velmi jednoduché – jsou to

¹po vynechání paprsků jdoucích po obvodu



Obrázek 4.1: Výsledky inverze pro pravidelné pokrytí paprsky; a) rozložení paprsků; sloupec I – parametrizace 64, II – parametrizace 144, III – parametrizace 256; b)–d) počet paprsků v buňce; e) rozložení odchylek rychlostí; f)–h) výsledky obrácené úlohy a korelace s původním rozložením; i)–k) chyby řešení pro rozložení e), p udává procenta vysvětlených dat pro danou inverzi; l) rozložení odchylek rychlostí; m)–o) výsledky obrácené úlohy a korelace s původním rozložením; p)–r) chyby řešení pro rozložení l), p udává procenta vysvětlených dat pro danou inverzi.

po částech konstantní funkce. Rozložení 4.1e je zvoleno tak, aby se nedalo vystihnout pomocí žádné zvolené parametrizace, rozložení 4.1l je naopak navrženo tak, aby chyba rozvoje ζ byla nulová pro parametrizaci obsahující 144 buněk.

Výsledky obrácené úlohy a její chyby jsou znázorněny na obrázku 4.1. Pro rozložení 4.1e znamená zvyšování počtu parametrů (zvyšování rozlišení) snižování chyby rozvoje ζ . Výsledek (obrázek 4.1f–h) se tedy zlepšuje se zvyšujícím se rozlišením – roste korelace ρ původního a výsledného rozložení pomalosti. Procenta vysvětlených dat p také rostou při zvyšování rozlišení – zvyšujeme počet parametrů M a zároveň zůstává stejný počet paprsků N – klesá počet stupňů volnosti $N-M$.

Pro rozložení odchylek rychlostí 4.1l dostáváme dokonalý výsledek ($\rho = 1.0$) pro parametrizaci obsahující 144 buněk (obrázek 4.1n) – chyba rozvoje ζ je díky naší volbě nulová, můžeme vystihnout všechna data \mathbf{d} . Velikost chyb výsledného rozložení je tedy velmi malá – velikost standardní odchylky σ získaná ze vztahu (2.30) odráží pouze velikost numerické chyby inverze. Výsledek 4.1m s chybou 4.1p (pro parametrizaci obsahující 64 buněk) naopak dosahuje malé korelace ρ . Charakteristická vlnová délka syntetického vstupního rozložení je menší než velikost buňky v poměru 3:2, chyba rozvoje syntetické struktury do báze $\{c_j\}_{j=1}^{64}$ je velká. Nemůžeme tedy dobře vystihnout dané syntetické rozložení. Pro výsledek obrácené úlohy pro parametrizaci obsahující 256 buněk 4.1o s chybou 4.1r dostáváme již příznivější výsledek – chyba rozvoje ζ je menší než pro parametrizaci 64, vlnová délka syntetického rozložení odchylek pomalostí je větší než velikost buňky v poměru 3:4.

Výsledné chyby jsme počítali podle vztahu (2.37). Rozložení chyb výsledných odchylek anomálií je díky rovnoměrnému pokrytí paprsky homogenní. Struktura chyb je pro dané rozložení a danou parametrizaci stejná, liší se pouze konstanta σ odrážející schopnost dané parametrizace vystihnout pozorovaná data \mathbf{d} .

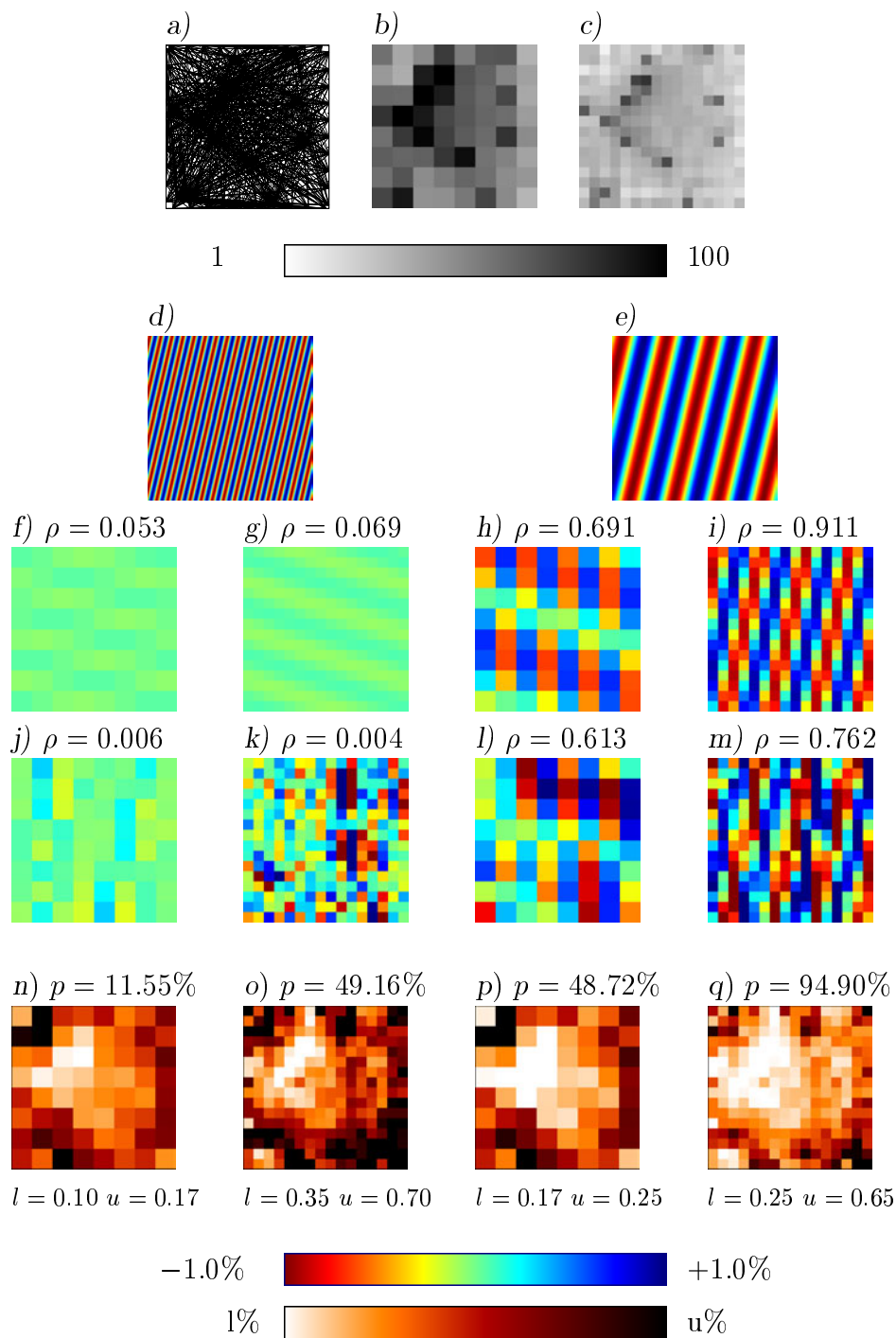
Uvedené příklady ilustrují závislost zvolené parametrizace (tj. závislost chyby rozvoje původního rozložení do zvolené báze) na výsledek inverze. Pokud je to tedy možné (máme dostatečně velké pokrytí paprsky a dostatečnou výpočetní kapacitu počítače), je nutné vyzkoušet několik parametrizací.

4.3 Nevhodná parametrizace

Jak bylo uvedeno v předchozí části, výsledek inverze závisí na chybě rozvoje ζ původního syntetického rozložení do báze.

V této části se proto budeme podrobněji zabývat vlivem nevhodné parametrizace (chyba rozvoje ζ syntetického rozložení do báze, je v některých uvedených příkladech velmi velká – $\zeta(\mathbf{r}) \approx \Delta s(\mathbf{r})$, Δs je odchylka pomalosti syntetického rozložení). Jako počáteční syntetické rozložení jsme si vybrali funkci sinusového průběhu. Používali jsme dvě parametrizace – 64 a 256 buněk (viz obrázek 4.2b a 4.2c). Pro první rozložení 4.2d jsme určili periodu tak, aby byl n -násobek periody přibližně roven velikosti buňky pro parametrizaci 64 a 256. Pro rozložení 4.2e jsme tuto podmínku neuplatňovali.

Průměrné rozložení (určené podle vzorce (3.11)) pro danou vstupní strukturu a danou parametrizaci je uvedeno na obrázku 4.2f–i. Korelace průměrného a pů-



Obrázek 4.2: Vliv nevhodné parametrizace: *a)* pokrytí paprsky; *b)* a *c)* hustota paprsků pro parametrizaci 64, resp. 256; *d)*–*e)* rozložení odchylek rychlostí; *f)* (parametrizace 64) a *g)* (parametrizace 256) – průměrné rozložení a korelace s původním rozložením *e)*; *h)* (parametrizace 64) a *i)* (parametrizace 256) – průměrné rozložení a korelace s původním rozložením *f)*; *j)*–*m)* výsledky obrácené úlohy a korelace s původním rozložením; chyby řešení *n)*–*q)*; ρ – korelační koeficient, p – procenta vysvětlených dat.

vodního rozložení 4.2d je díky nevhodné volbě parametrizace velmi malá – chyba rozvoje ζ tohoto rozložení do bazových funkcí je velmi velká (velikost chyby může být stejně velká jako amplituda syntetického rozložení anomálií). Pro anomálie 4.2e dosahují korelace řádově vyšších hodnot, chyba rozvoje ζ je menší než v předchozím případě.

Rozložení paprsků pro výpočet inverze je uvedeno na obrázku 4.2a. Počet paprsků pokrývající oblast je 560 (40 rovnoměrně umístěných přijímačů na hranicích a 14 náhodně umístěných zdrojů uvnitř oblasti). Počet paprsků v buňce pro obě parametrizace je znázorněn na obrázku 4.2b a 4.2c.

rozložení	parametrizace	
	64	256
4.2d	průměrné – výsledné 4.2f – 4.2j	průměrné – výsledné 4.2g – 4.2k
	$\rho = 0.1095$	$\rho = 0.0513$
4.2e	průměrné – výsledné 4.2h – 4.2l	průměrné – výsledné 4.2i – 4.2m
	$\rho = 0.8868$	$\rho = 0.8363$

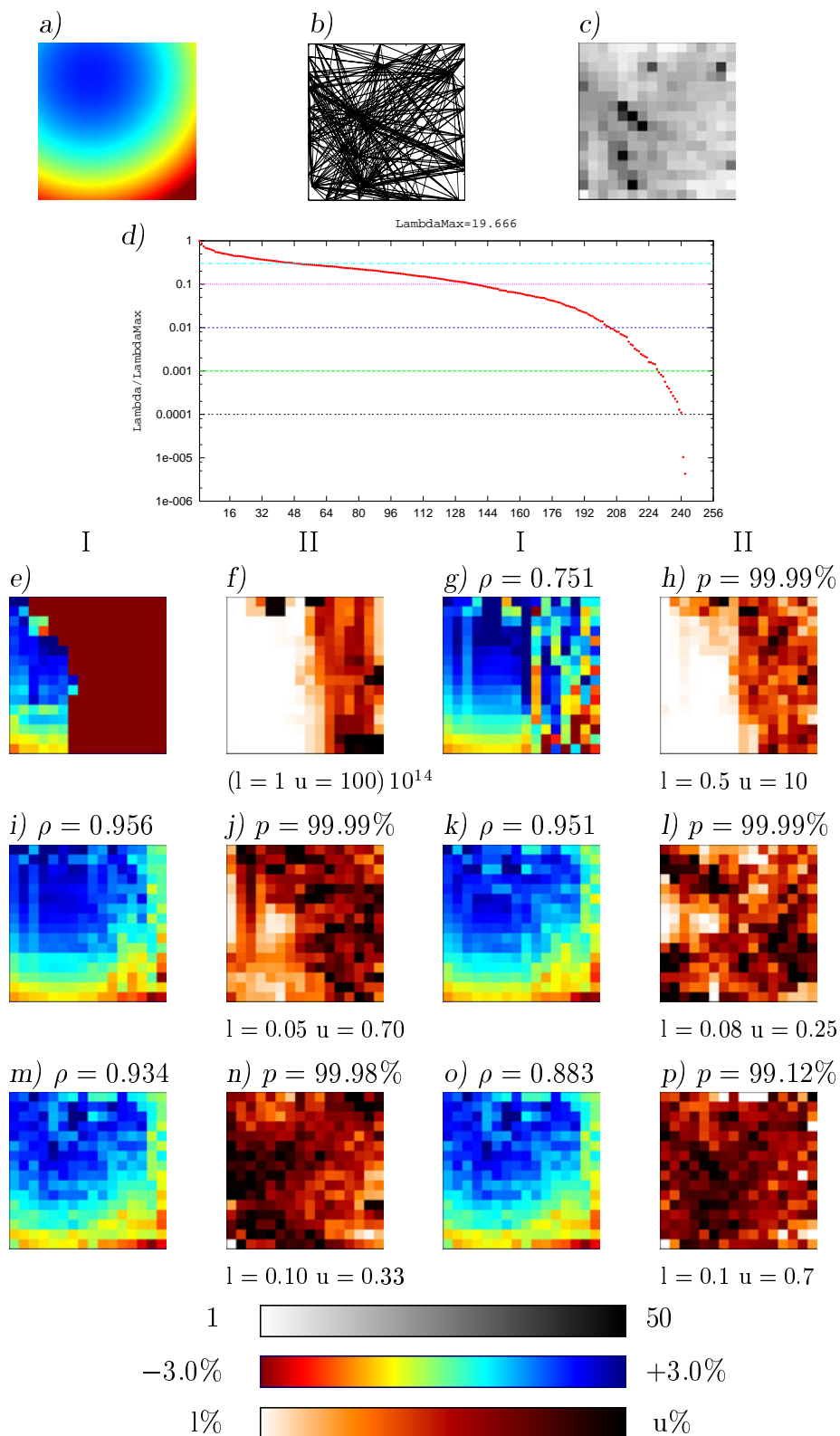
Tabulka 4.1: Korelace mezi průměrným rozložením a řešením obrácené úlohy

Výsledky a chyby obrácené úlohy jsou uvedeny na obrázku 4.2j–m a 4.2n–q. Výsledky inverze pro rozložení 4.2d pro obě uvedené parametrizace dosahují téměř nulové korelace s původním rozložením, tak jak jsme díky naší počáteční volbě periody syntetického rozložení očekávali. Velmi malé hodnoty dosahuje také korelace mezi průměrným a výsledným rozložením viz tabulka 4.1. Pokud tedy nelze pomocí dané parametrizace vystihnout původní rozložení (chyba rozvoje ζ je velká), inverze nemá smysl.

Chyba rozvoje rozložení 4.2e do bazových funkcí pro parametrizaci obsahující 64 či 256 buněk je menší než v předchozím případě (korelace průměrného a původního rozložení vzrostla), výsledek inverze se výrazně zlepšil s klesající chybou rozvoje původního rozložení do dané báze.

Výsledné chyby jsme počítali podle vzorce (2.37). Rozložení chyb výsledných odchylek anomálií již není tak homogenní jako v předchozím příkladě (používáme mírně nerovnoměrné pokrytí paprsky – nejmenší chyba je v místě nejvyššího pokrytí paprsky). Relativně vysoká hodnota chyb výsledného rozložení je dána malou schopností dané parametrizace vystihnout pozorovaná data (σ je vysoké).

Řešíme-li obrácenou úlohu musíme dávat pozor na volbu parametrizace. Dosažuje-li výsledek malé korelace s průměrným nebo počátečním rozložením, musíme, pokud je to možné, zvolit jiné bazové funkce nebo zvýšit rozlišení (je-li oblast dostatečně pokrytá paprsky). Pokud bychom neřešili syntetickou úlohu (neznali bychom počáteční rozložení), museli bychom vyzkoušet různá rozlišení či parametrizace nebo odhadnout charakteristickou vlnovou délku rozložení anomálií pomocí nějaké nezávislé informace o předpokládaných rozměrech útvarů.



Obrázek 4.3: Výsledky regularizace pomocí SVD pro parametrizaci 256; a) rozložení odchylek rychlostí; b) pokrytí paprsky; c) hustota paprsků; d) normovaná vlastní čísla; sloupce I výsledky obrácené úlohy, sloupce II chyby; e)–f) výsledek inverze a chyba pro inverzi bez ořezání; g)–h) výsledek inverze a chyba pro $\epsilon = 0.0001$; i)–j) výsledek inverze a chyba pro $\epsilon = 0.001$; k)–l) výsledek inverze a chyba pro $\epsilon = 0.01$; m)–n) výsledek inverze a chyba pro $\epsilon = 0.1$; o)–p) výsledek inverze a chyba pro $\epsilon = 0.3$; ρ – korelace výsledného a původního rozložení; p – procento vysvětlených odchylek.

4.4 Regularizace pomocí SVD

Dosud jsme se zabývali pouze příklady s dobře podmíněnou maticí \mathbf{G} . Studovaná oblast byla rovnoměrně a dostatečně pokrytá paprsky a velikost vlastních čísel se lišila maximálně o dva řády. Pokud je však v některé oblasti nedostatečné pokrytí, může se matice \mathbf{G} stát špatně podmíněnou – velikost vlastních čísel se může lišit o mnoho řádů. Je tedy nutné úlohu regularizovat (viz odstavec 2.6.1).

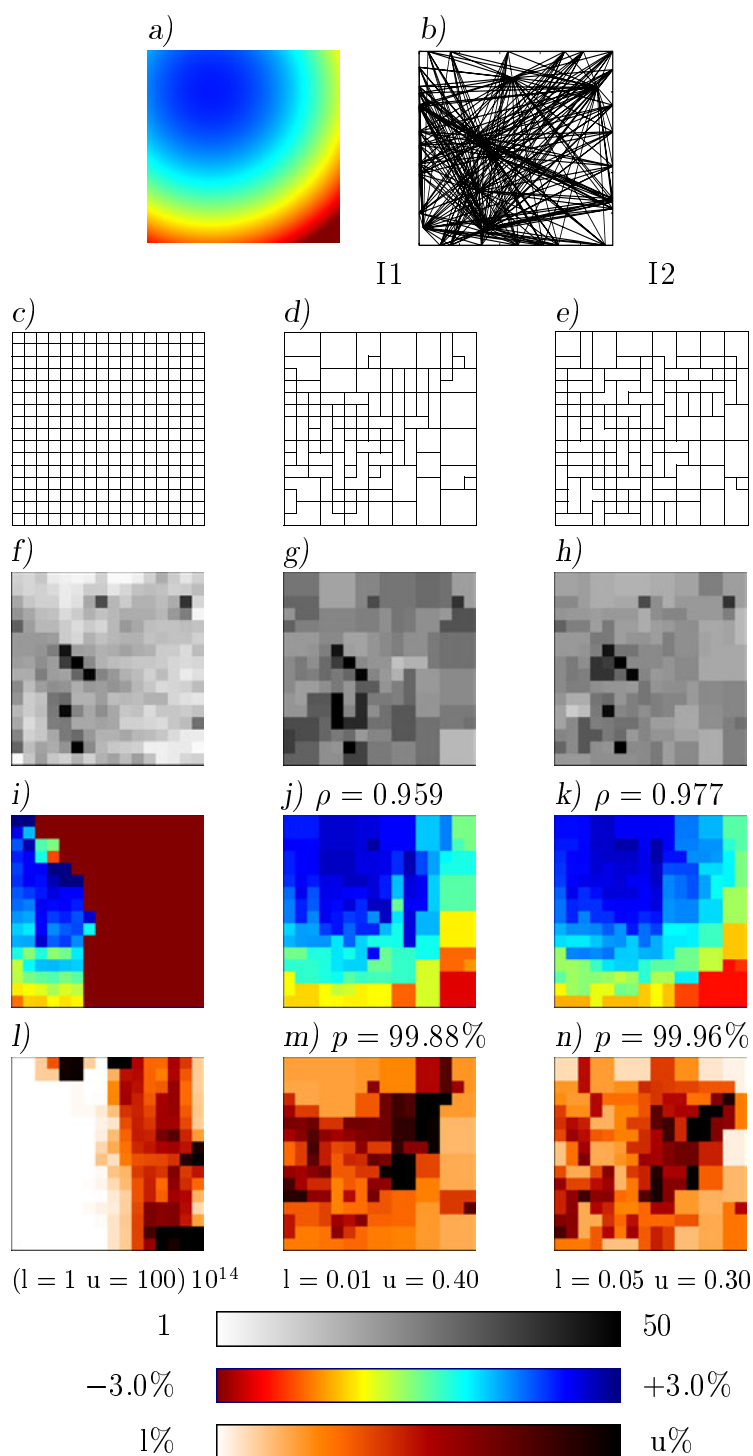
Příklad použití regularizace je uveden na obrázku 4.3. Vstupní rozložení anomálií seismických rychlostí 4.3a se snažíme rekonstruovat pomocí rozložení paprsků 4.3b – ve studované oblasti jsme náhodně rozmístili 9 zdrojů (uvnitř oblasti) a 30 přijímačů (po obvodu oblasti), celkový počet paprsků je 270. Počet paprsků v buňce pro zvolenou parametrizaci s 256 buňkami je ukázán na obrázku 4.3c. Minimální a maximální počet paprsků v buňce je 1 resp. 49. Spektrum matice \mathbf{G} , normované vzhledem k největšímu vlastnímu číslu λ_{\max} , je uvedeno na obrázku 4.3d. Nejmenší vlastní číslo je o 17 řádů menší než největší – můžeme ho tedy vzhledem k numerické chybě považovat za nulové. Jako počáteční rozložení (viz obrázek 4.3a) jsme použili funkci gaussovského tvaru. Tato funkce je dostatečně hladká vzhledem k použité parametrizaci, chyba rozvoje ζ tedy není příliš velká. Na obrázcích 4.3e a 4.3f je uveden výsledek inverze a chyba pro případ bez regularizace (pro tento výsledek neuvádíme velikost korelace ani procenta vysvětlených dat, není splněn základní předpoklad (2.4): $\frac{\Delta s}{s_0} \ll 1$). Výsledek obrácené úlohy je díky špatné podmíněnosti matice \mathbf{G} velmi špatný. Pro toto rozložení paprsků a parametrizaci je tedy nutné použít regularizaci – pro inverzi používáme pouze P vlastních čísel splňujících podmínku $\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}} > \varepsilon$. Pro regularizaci jsme zvolili různé hladiny ořezání ε vlastních čísel (viz obrázek 4.3d):

1. $\varepsilon_1=0.0001$ – výsledek a chyba viz obrázek 4.3g–h,
2. $\varepsilon_2=0.001$ – výsledek a chyba viz obrázek 4.3i–j,
3. $\varepsilon_3=0.01$ – výsledek a chyba viz obrázek 4.3k–l,
4. $\varepsilon_4=0.1$ – výsledek a chyba viz obrázek 4.3m–n,
5. $\varepsilon_5=0.3$ – výsledek a chyba viz obrázek 4.3o–p.

Postupným odstraňováním malých vlastních čísel se výsledek zlepšuje – nejvyšší korelace je pro ořezání vlastních čísel na hladině ε_2 a ε_3 . Pro hladinu ořezání ε_3 však dostáváme nejmenší chybu – tento výsledek tedy považujeme za nejlepší. Dalším ořezáním vlastních čísel již začneme odstraňovat užitečné informace a výsledek se začíná opět zhoršovat – korelace klesá. Zvyšujeme-li hladinu ořezání ε , procenta vysvětlených dat p klesají – snažíme se vysvětlit stále menší část dat.

Výsledné chyby jsme počítali ze vzorce (2.37) pro příklad bez regularizace ($\varepsilon = 0$) a podle vzorce (2.40) pro příklad s ořezáváním. Díky nehomogennímu pokrytí studované oblasti paprsky, dostáváme velmi vysokou chybu ve špatně pokryté oblasti (chyby pro SVD s ořezáním po hladinu ε_2 , obrázek 4.3f, 4.3h a 4.3j). Postupným odstraňováním malých vlastních čísel se rozložení chyb stává více homogenní.

Pomocí metody singulární dekompozice lze obrácenou úlohu regularizovat, avšak hledání optimální hladiny regularizace (ořezání) může být problematické – tato hladina je pro různé příklady různě velká. Tato metoda regularizace je vhodná pouze pro problémy s malým počtem parametrů, protože SVD je časově náročná metoda.



Obrázek 4.4: Vliv nerovnoměrné parametrizace: a) počáteční rozložení odchylek rychlostí; b) pokrytí paprsky; c) parametrizace obsahující 256 buněk; d) parametrizace obsahující 99 buněk; e) parametrizace obsahující 122 buněk; f)–h) hustota paprsků pro parametrizace c)–e); i)–k) výsledky obrácené úlohy pro parametrizace c)–e); l)–n) chyby řešení pro parametrizace c)–e); ρ – korelace výsledného a původního rozložení; p – procento vysvětlených odchylek.

4.5 Nerovnoměrná parametrizace

Pokud je zkoumaná oblast pokryta paprsky nerovnoměrně, je pro rovnoměrnou parametrizaci limitujícím faktorem nejhůře pokrytá oblast. Proto je vhodnější zvolit parametrizaci odrážející pokrytí paprsky – v dobře pokrytých oblastech volíme velké rozlišení, ve špatně pokrytých naopak malé. Konstrukce takovéto nerovnoměrné báze je popsána v odstavci 2.3.1. Vektor $p(j)$ (určuje konstrukci nerovnoměrné báze ze základní báze) jsme hledali tak, aby se počet paprsků v jednotlivých buňkách příliš nelišil.

Vstupní struktura (obrázek 4.4a) a pokrytí paprsky (oblast pokrývá 270 paprsků, obrázek 4.4b) je stejné jako v předchozím odstavci. Základní báze je zvolená stejně jako báze pro rovnoměrnou parametrizaci obsahující 256 buněk – obrázek 4.4c. Hustota paprsků je pro tuto parametrizaci uvedena na obrázku 4.4f. Počet paprsků v buňce se pohybuje v intervalu od 1 do 49. Řešíme-li inverzi pro tento příklad bez regularizace, dostáváme velice špatný výsledek (viz předchozí odstavec).

Při použití nerovnoměrných parametrizací (obrázek 4.4d a 4.4e), dostaneme vysoké rozlišení v dobře pokrytých oblastech. Použitá parametrizace I1 (obrázek 4.4d) obsahuje 99 a parametrizace I2 (obrázek 4.4e) 122 buněk. Počet paprsků v buňce se pohybuje v rozmezí 14 až 65 pro parametrizaci I1 (obrázek 4.4g), resp. 18 až 67 pro parametrizaci I2 (obrázek 4.4h). Pro nerovnoměrnou parametrizaci jsme eliminovali buňky velmi málo pokryté – rozložení počtu paprsků v buňkách je rovnoměrnější než pro pravidelnou parametrizaci, vlastní čísla matice \mathbf{G} se liší maximálně o dva řády.

Výsledky inverze a chyby jsou uvedeny na obrázku 4.4j a 4.4m pro parametrizaci I1 a na obrázku 4.4k a 4.4n pro parametrizaci I2. Obě výsledná rozložení anomálií seismických rychlostí mají vysokou korelaci se vstupním rozložením. Procento vysvětlených dat p je vyšší pro parametrizaci I2 – počet buněk je větší než v případě I1, máme tedy menší počet stupňů volnosti.

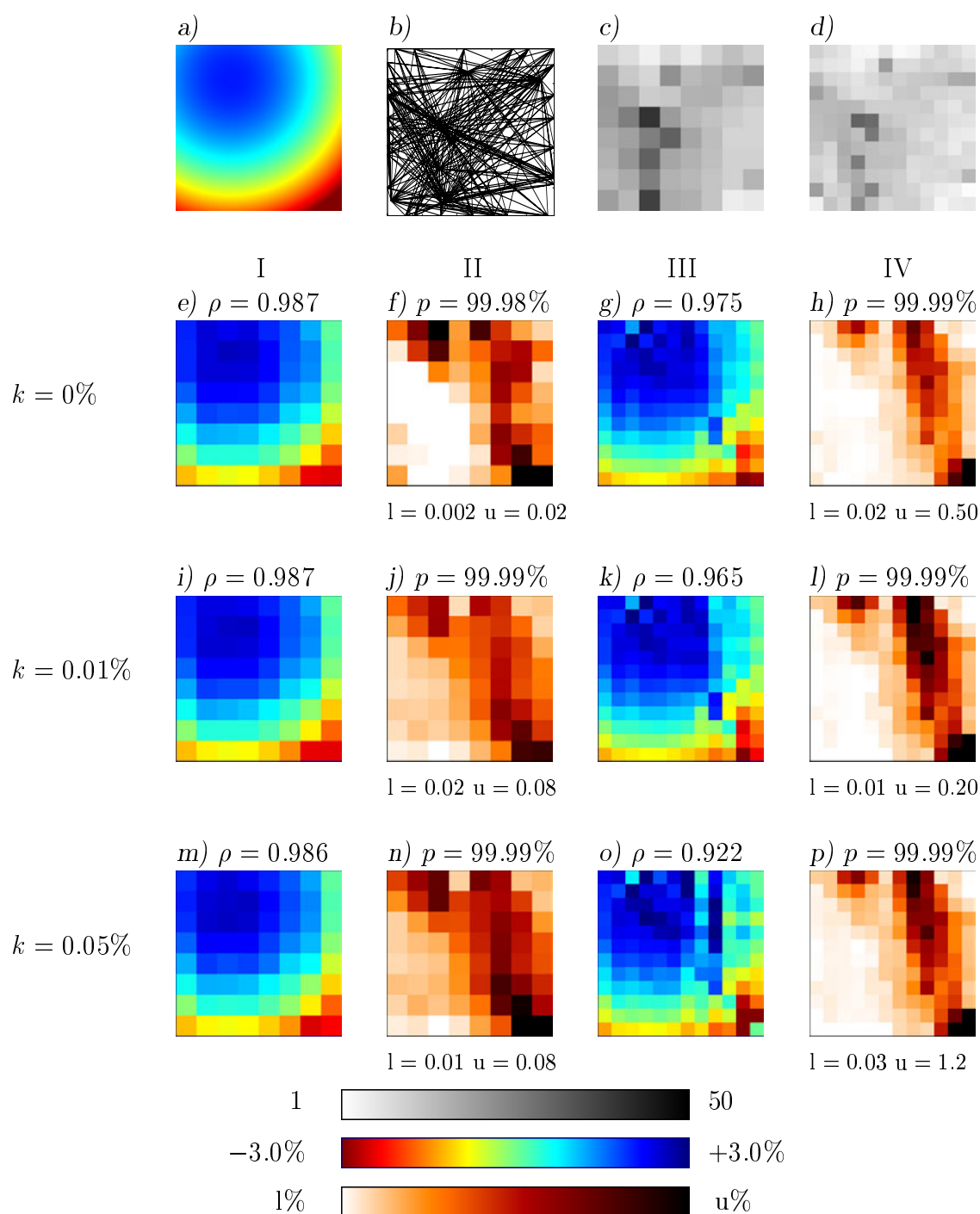
Výsledné chyby jsme počítali opět ze vzorce (2.37). Pro rovnoměrnou parametrizaci je pokrytí paprsky nedostatečné – dostáváme velkou chybu ve špatně pokryté oblasti viz obrázek 4.4l. V případě nerovnoměrné parametrizace dostáváme rovnoměrnější rozdělení chyb (obrázek 4.4m a 4.4n), stále je však velikost chyby závislá na pokrytí dané buňky paprsky.

Velkou výhodou použití nerovnoměrné parametrizace je vysoké rozlišení v dobře pokrytých oblastech. Pokud bychom používali rovnoměrnou parametrizaci, museli bychom použít regularizace, abychom dosáhli stejného rozlišení.

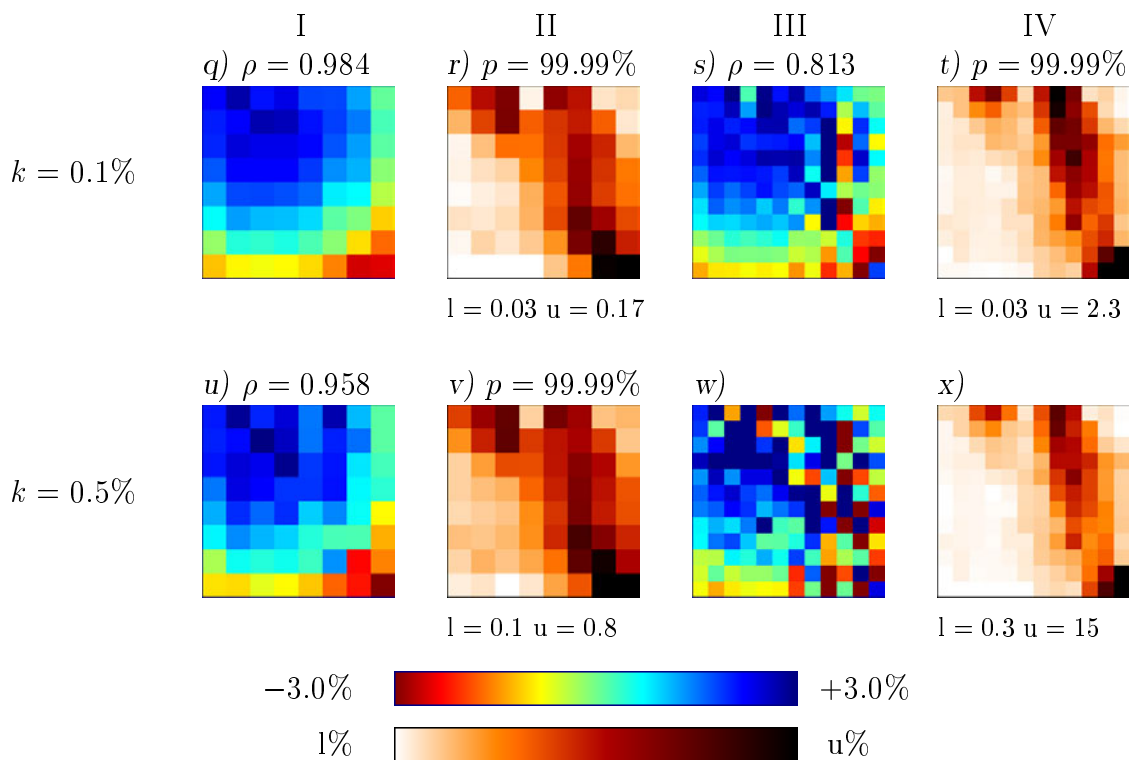
4.6 Vliv chyb

V této části se budeme zabývat vlivem chyb ε_i časů příchodů T_i na řešení obrácené úlohy. Dosud jsme řešili obrácenou úlohu pro ideální data – neobsahovala žádnou chybu. Nyní jsme uměle zahrnuli i vliv chyb (viz odstavec 3.4).

Na obrázku 4.5 jsou uvedeny výsledky obrácené úlohy pro rozložení paprsků použité i v předchozí části (oblast pokrývá 270 paprsků, obrázek 4.5b). Pro zvolené



Obrázek 4.5: Vliv nepřesnosti dat na výsledek obrácené úlohy; a) rozložení odchylek rychlostí; b) pokrytí paprsky; c) a d) hustota paprsků pro 64, resp. 144 parametrů; sloupec I, resp. III výsledky obrácené úlohy pro 64, resp. 144 parametrů; sloupec II, resp. IV absolutní velikost chyby řešení pro parametrizaci 64, resp. 144; k – parametr velikosti chyby (viz odstavec 3.4); ρ – korelační koeficient; p – procento vysvětlených dat.



Obrázek 4.5: Vliv nepřesnosti dat na výsledek obrácené úlohy – dokončení.

parametrizace s 64 buňkami a s 144 buňkami jsou počty paprsků v buňce zobrazeny na obrázku 4.5c a 4.5d. Podmíněnost matic pro tyto parametrizace je dobrá (vlastní čísla se liší maximálně o jeden, resp. dva řády pro parametrizaci 64, resp. 144). Jako počáteční rozložení jsme opět zvolili gaussovskou funkci znázorněnou na obrázku 4.5a. Chybu výsledného rozložení jsme počítali podle vzorce (2.37) pro $k = 0\%$ a podle vzorce (2.36) pro $k > 0\%$ (pro standardní odchylku σ_D^i platí vztah (3.8)).

Na obrázku 4.5e–h jsou znázorněny výsledky inverze a chyby pro ideální případ bez chyb ($k = 0\%$). Vidíme, že výsledky pro obě parametrizace dosahují vysoké korelace s původním rozložením, tak jak jsme očekávali – chyba rozvoje ζ je malá a podmíněnost matic dobrá.

Pro parametrizaci 64 (obrázky 4.5I a 4.5II) dosahuje velikost korelace výsledného a původního rozložení stále přibližně stejně velké hodnoty pro $k \leq 0.1\%$. Výsledek pro hodnotu $k = 0.5\%$ dosahuje stále vysoké korelace, avšak velikost chyb se zvětšila. Pro parametrizaci 144 (obrázky 4.5III a 4.5IV) se korelace téměř nemění až do hodnoty $k = 0.01\%$. S dalším zvyšováním chyb začne korelace poměrně rychle klesat. Výsledky obrácené úlohy pro parametrizaci 144 jsou tedy více citlivé na vliv chyb než pro parametrizaci 64. Důvodem tohoto jevu je horší podmíněnost matice \mathbf{G} pro parametrizaci 144. Pro parametrizaci obsahující 144 buněk neuvádíme pro $k = 0.5\%$ korelační koeficient ani procento vysvětlených dat – výsledek inverze je špatný, korelace menší než nula a výsledné rozložení nesplňuje základní podmínku (2.4) $\frac{\Delta s}{s_0} \ll 1$.

Citlivost výsledku při řešení obrácené úlohy na velikost chyby odečtu závisí na podmíněnosti matice \mathbf{G} , tedy na hustotě pokrytí paprsky a na jejich rozložení.

4.7 Zemi podobné rozložení

Výsledek obrácené úlohy závisí na hustotě a rovnoměrnosti pokrytí (pro danou parametrizaci) a na chybě rozvoje původních anomálií pomalosti. Chceme-li k syntetickému testu použít Zemi podobné rozložení anomálií seismických rychlostí (s vlnovou délkou charakteristickou pro Zemi), můžeme jako vstup použít skutečný tomografický model Země nebo model odvozený z termální konvekce s parametry odpovídajícím Zemi.

Jako příklad Zemi podobného rozložení jsme zvolili strukturu odchylek pomalostí získanou z tomografického modelu [28]. Vybrali jsme tři řezy subdukčními zónami (oblast Japonska, Střední Ameriky a Tonga-Kermadec). Délka řezu je 70° a hloubka 2891 km. Tento výřez jsme převedli na čtverec představující námi zkoumanou oblast. Tuto oblast jsme rozdělili na 35×35 částí (toto rozdělení odpovídá velikosti buňky $2^\circ \times 83$ km – dosahujeme tedy přibližně stejného rozlišení jako původní model). Použitá počáteční rozložení odchylek jsou uvedena na obrázku 4.6e, 4.6i a 4.6m.

Studovanou oblast jsme náhodně pokryli 75 přijímači po obvodu oblasti a 75 zdroji uvnitř oblasti – oblast pokrývá celkově 5625 paprsků. Toto rozložení zdrojů a přijímačů tedy neodpovídá rozložení v Zemi, kde se zdroje nachází pouze přibližně v horní čtvrtině studované oblasti a přijímače jsou umístěny pouze na povrchu, pokrytí tedy v našem případě bude lepší. Počet paprsků v buňce je uveden na obrázku 4.6a. Pokrytí paprsky kvůli nepřehlednosti neuvádíme. Na obrázku 4.6b je zobrazena celková délka paprsků v buňce normovaná vzhledem k maximu. Dále uvádíme vertikální 4.6c a horizontální 4.6d průměty paprsků v buňce. Hodnoty jsou normované vzhledem k společnému maximu. Z těchto obrázků je vidět relativně rovnoměrné rozmístění paprsků v téměř celé oblasti. Výjimku tvoří oblast vpravo nahoře, kde je výrazně nízká hlavně horizontální složka paprsků.

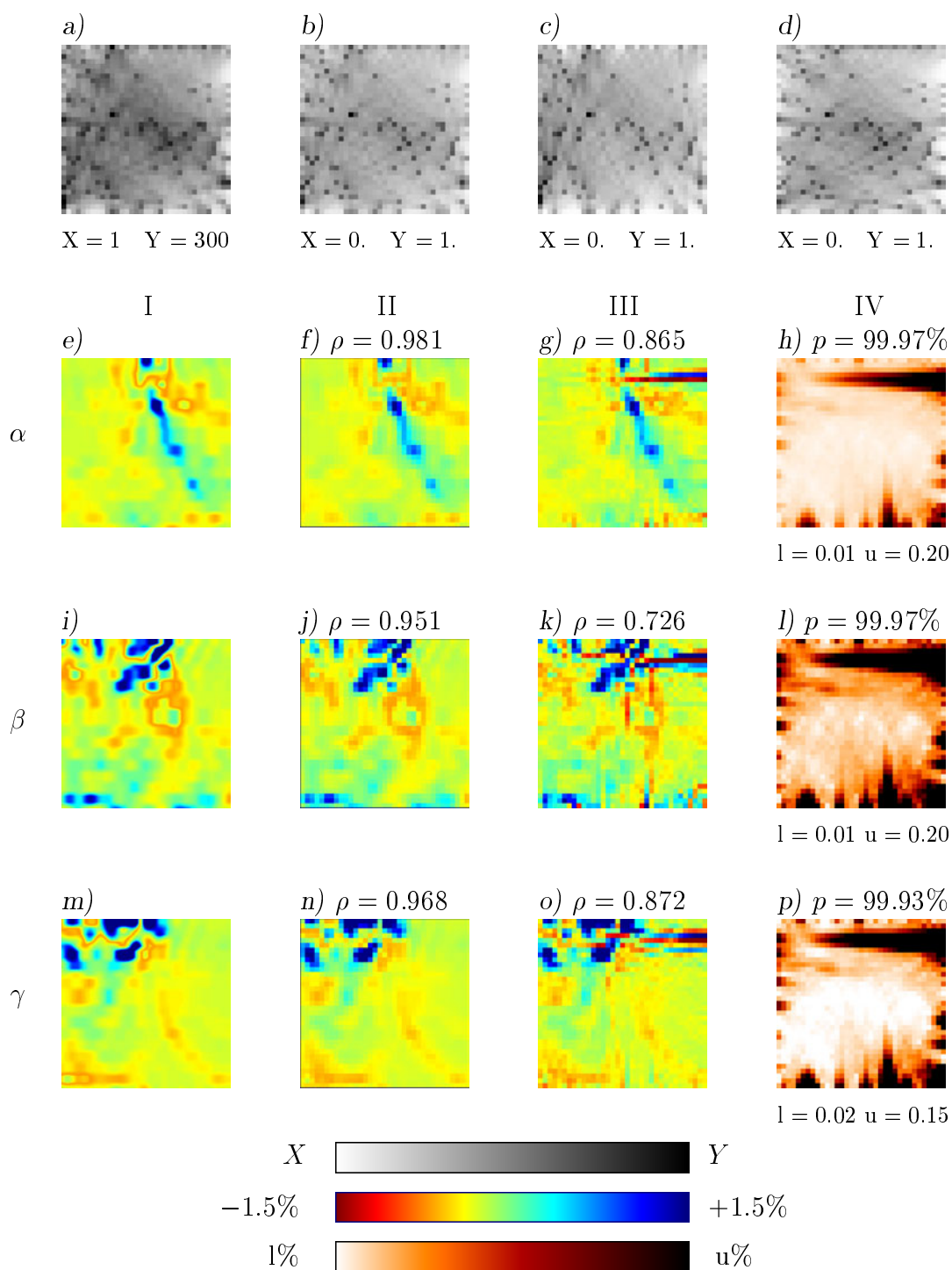
Průměrná rozložení jsou uvedena na obrázcích 4.6II. Korelace všech počátečních a průměrných rozložení je vysoká $\rho > 0.95$ – chyba rozvoje ζ je tedy malá. Výsledky inverze jsou uvedeny na obrázcích 4.6III. Korelace výsledného a původního, resp. výsledného a průměrného (viz tabulka 4.2) rozložení je stále vysoká. Avšak v pravé horní části se nachází výrazně špatně rozlišená oblast způsobená malým pokrytím dané části studované oblasti.

Chybu jsme opět určili ze vzorce (2.37). Hodnoty chyb jsou uvedeny na obrázcích 4.6IV. Největší chyby jsou v místech špatného pokrytí. Tyto oblasti se nacházejí zejména u okrajů oblasti, kde se nevyskytují přijímače.

Tento příklad ilustruje potřebu rovnoměrného pokrytí paprsky – oblast jsme pokryli relativně velkým (vzhledem k počtu modelových parametrů) počtem paprsků. Přesto dochází ke zhoršení výsledku díky nerovnoměrnému pokrytí paprsky.

průměrné \times výsledné
4.6f – 4.6g $\rho = 0.881$
4.6j – 4.6k $\rho = 0.763$
4.6n – 4.6o $\rho = 0.901$

Tabulka 4.2: Korelace mezi průměrným rozložením a řešením obrácené úlohy



Obrázek 4.6: Výsledky pro Zemi podobné vstupní rozložení; a) počet paprsků v buňce; b) celková délka paprsků v buňce normovaná vzhledem k maximu; c) a d) vertikální, resp. horizontální průmět celkové délky paprsků v buňce normovaný vzhledem ke společnému maximu; sloupec I – původní rozložení; sloupec II – průměrné rozložení a korelace ρ s původním rozložení; sloupec III – výsledek inverze a korelace ρ s původním rozložení; sloupec IV – chyby výsledného rozložení odchylek a procento p vysvětlených dat; řádek α oblast Střední Ameriky; řádek β oblast Japonska; řádek γ oblast Tonga–Kermadec.

Kapitola 5

Osově symetrický sférický model

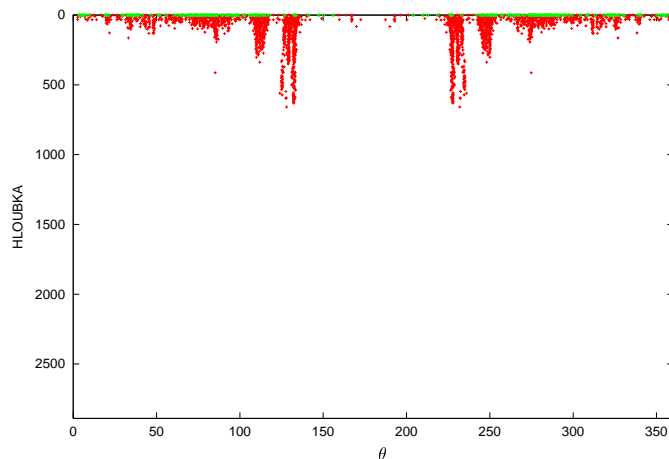
5.1 Úvod

V předchozí kapitole jsme zkoumali obecné vlastnosti obrácené úlohy ve velmi jednoduchém a zcela umělém modelu. V této kapitole se budeme zabývat rozlišitelností různých scénářů plášťové konvekce kinematickou seismickou tomografií v podmínkách podobných Zemi. Styl plášťové konvekce (charakteristické struktury) ovlivňuje řada parametrů (např. rozložení viskozity, vnitřní zdroje tepla). Dalším klíčovým faktorem ovlivňující termální strukturu pláště je charakter plášťové konvekce – vrstevnatost či celoplášťové tečení. Dále budeme studovat vliv parametrizace, velikosti explicitního tlumení a vliv pokrytí seismickými paprsky na výsledek obrácené úlohy. Omezujeme se však pouze na dvourozměrný osově symetrický případ – modely termální konvekce jsou osově symetrické. Trojrozměrná úloha je časově i paměťově velmi náročná – ve dvourozměrném zjednodušení můžeme provést širší parametrickou studii. I přes toto zjednodušení jsme se však snažili zachovat rozložení zdrojů a přijímačů podobné jako na Zemi (viz odstavec 5.2). K inverzi používáme P vlny a pro zdroje hlubší než 100 km i pP vlny pro epicentrální vzdálenosti větší než 25° (teleseismy). Pro mělké zdroje jsou P a pP vlny téměř identické, matice \mathbf{G} by tedy obsahovala závislé řádky.

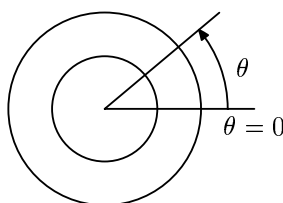
5.2 Výběr zdrojů a přijímačů

Postup výběru zdrojů a přijímačů pro dvourozměrnou úlohu je podrobně popsán v odstavci 3.1. Hlavní kružnici jsme definovali body $A = (10^\circ, 90^\circ)$ (geodynamický pól [19]) a $B = (135^\circ, 70^\circ)$. Hlavní rovina prochází oblastí Japonska a Střední Ameriky. Zdroje jsme vybírali pro magnitudo $m_B > 4.5$. Pološířku pásu kolem hlavní roviny jsme zvolili 8°. Minimální povolená vzdálenost zdrojů po promítnutí do hlavní roviny je 2° laterálně a 2 km radiálně, pro přijímače je to 0.5°. Zdroje a přijímače nacházející se v pásu kolem hlavní roviny jsou zobrazeny na obrázku A.2.¹ Dále jsme vybrali polovinu bodů (část obsahující oblast Japonska), tu jsme promítli zrcadlově kolem bodu A. Výsledné rozložení zdrojů a přijímačů je znázorněno na obrázku 5.1.

¹Obrázky číslované A.x jsou uvedeny v příloze A.



Obrázek 5.1: Hlubkové rozložení zdrojů a přijímačů, červeně vyznačeny zdroje, zeleně přijímače; definice úhlu θ viz obrázek 5.2



Obrázek 5.2: Definice úhlu θ

Toto rozložení obsahuje 2366 zdrojů a 184 přijímačů. V takto vybraném rozložení se nachází zdroje a přijímači špatně pokrytá oblast, která simuluje velmi řídké pokrytí oceánu podobně jako na Zemi.

5.3 Modely

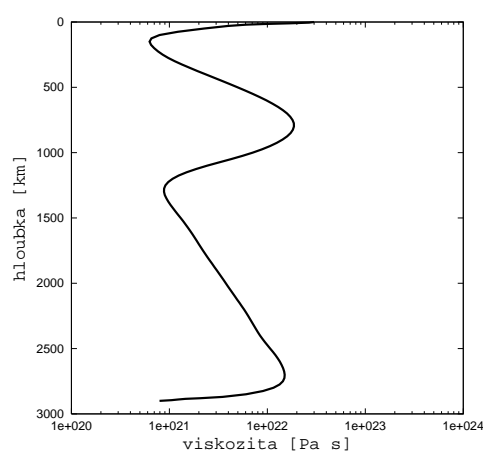
Syntetické vstupní rozložení anomálií seismických rychlostí odvozujeme z pěti modelů konvekce, čtyř vrstevnatých a jednoho celoplášťového. Vrstevnaté modely se liší hloubkou kompozitního rozhraní a viskozní strukturou (viz níže). Další parametry modelů jsou uvedeny v tabulce 5.1.

veličina		hodnota
d	tloušťka pláště	$2.9 \cdot 10^6 \text{ m}$
g	tíhové zrychlení	$9.8 \cdot \text{m s}^{-2}$
α	teplotní roztažnost	$1.4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$
β	kompozitní hustotní kontrast	0.03
R	vnitřní zahřívání	$3 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-3}$
κ	koeficient teplotní vodivosti	$2.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
ρ_M	hustota pláště	$4.5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
η	viskozita	
Ra	Rayleighovo číslo	$\frac{\rho_M g \alpha \Delta T d^3}{\kappa \eta}$

Tabulka 5.1: Parametry konvekčních modelů.

Model A

Model A je model kompozitní konvekce s rozhraním v hloubce 1000 km (viz schématický obrázek 5.3). Viskozita závisí na průměrné teplotě a tlaku v každé hloubce [8], proto se v termální hraniční vrstvě okolo kompozitního rozhraní vyvine nízkoviskozní kanál (obrázek 5.4). Díky jeho existenci dochází na rozhraní v hloubce 1000 km k termální vazbě mezi proudovými systémy v horní a dolní vrstvě – teplé anomálie nad rozhraním indukují teplé anomálie pod rozhraním a naopak. Rayleighovo číslo se s časem mění, průměrná hodnota je $Ra \simeq 2 \cdot 10^6$. Rozložení relativních odchylek seismických rychlostí vypočítaných z odchylek teplot ve dvou okamžicích časového vývoje jsou uvedena na obrázku A.3 (model A1 a A2).

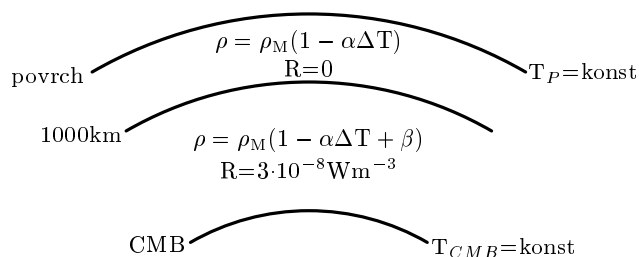


Obrázek 5.4: Hloubková závislost viskozity – model A.

opět o model s termální vazbou, průběh viskozity je podobný jako na obrázku 5.4, pokles viskozity se ale nachází v hloubce 670 km. Rozložení relativních odchylek seismických rychlostí vypočítaných z odchylek teplot ve dvou časových okamžicích jsou uvedena na obrázku A.3 (model A₆₇₀1 a A₆₇₀2).

Model B

Model B je rovněž model kompozitní konvekce s rozhraním v hloubce 1000 km. Hloubkový průběh viskozity je uveden na obrázku 5.6, viskozita je v celém plášti konstantní až na litosféru,

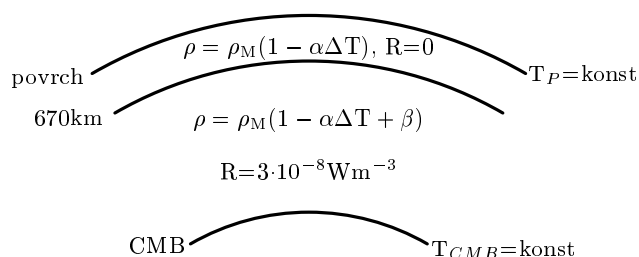


Obrázek 5.3: Schéma konvekčního modelu A, B a C.

indukují teplé anomálie pod rozhraním a naopak. Rayleighovo číslo se s časem mění, průměrná hodnota je $Ra \simeq 2 \cdot 10^6$. Rozložení relativních odchylek seismických rychlostí vypočítaných z odchylek teplot ve dvou okamžicích časového vývoje jsou uvedena na obrázku A.3 (model A1 a A2).

Model A₆₇₀

Model A₆₇₀ je velmi podobný modelu A, nepropustné rozhraní se však nachází v hloubce 670 km místo v hloubce 1000 km (viz schématický obrázek 5.5). Důvod posunu chemického rozhraní do hloubky, kde se pravděpodobně nachází fázový přechod a nikoli nepropustné rozhraní je pouze formální a vyplyne z pozdější diskuse výsledků pro model A. Jedná se

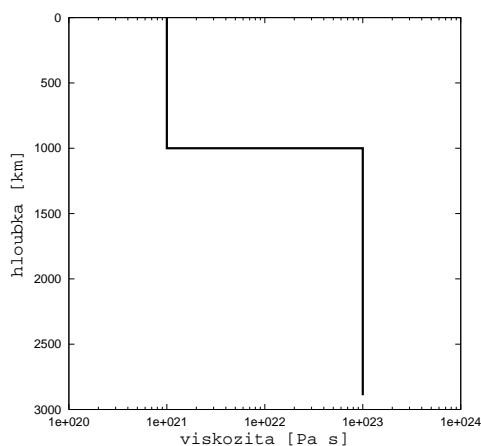


Obrázek 5.5: Schéma konvekčního modelu A₆₇₀.

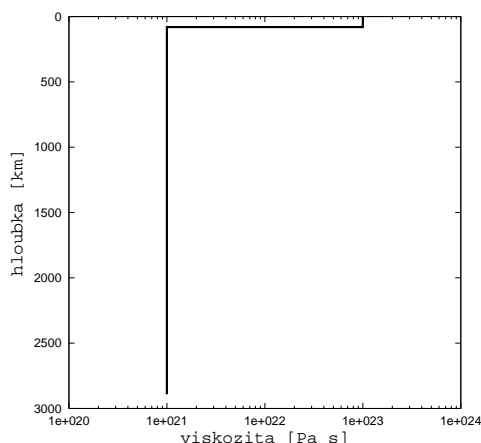
kde je viskozita o dva řády vyšší. V hloubce 1000 km proto dochází k mechanické vazbě, proti teplým anomáliím nad rozhraním se nacházejí studené anomálie pod rozhraním a naopak. Rayleighovo číslo je 10^7 . Rozložení seismických rychlostí vypočítaných z odchylek teplot v jednom časovém okamžiku je uvedeno na obrázku A.3 (model B).

Model C

Model C je opět model kompozitní konvekce s rozhraním v hloubce 1000 km. Oproti modelu B však v hloubce 1000 km dochází k nárůstu viskozity o dva řády (obrázek 5.7). Díky tomu se ve spodní vrstvě vyvinou širší anomálie, které by tedy měly být lépe detekovatelné



Obrázek 5.7: Hloubková závislost viskozity – model C.



Obrázek 5.6: Hloubková závislost viskozity – model B a D.

seismickou tomografií, neboť mají větší vlnovou délku. Rayleighovo číslo je 10^7 . Rozložení seismických rychlostí vypočítaných z odchylek teplot v jednom časovém okamžiku je uvedeno na obrázku A.3 (model C).

Model D

Model D je celoplášťový model termální konvekce. Viskozita je konstantní až na litosféru (obrázek 5.6). Rayleighovo číslo je 10^7 . Rozložení relativních odchylek seismických rychlostí vypočítaných z odchylek teplot ve dvou časových okamžicích jsou uvedena na obrázku A.3 (model D1 a D2).

5.4 Vliv parametrizace

Pro seismickou tomografickou inverzi je klíčovou otázkou volba parametrizace. Snažíme se zvolit parametrizaci s co nejvyšším rozlišením, zároveň však musíme respektovat špatně pokryté oblasti. V této části se tedy budeme zabývat volbou podmínky na minimální počet paprsků v buňce. Rozložení zdrojů a přijímačů použitých k inverzi je uvedeno na obrázku 5.1. Studovanou oblast celkem pokrývá 273 140 paprsků. Vliv parametrizace na výsledek obrácené úlohy demonstrujeme na třech příkladech P500, P1000 a P500+1000.

Parametrizace P500 a P1000. Studovanou oblast jsme rovnoměrně rozdělili na 40 vrstev v radiálním směru (tloušťka jedné vrstvy je ~ 72 km) a na 600 částí laterálně (maximální laterální rozlišení je 0.6°). Základní rovnoměrná báze tedy obsahuje

24000 buněk, velikost jedné buňky je $\sim 72 \text{ km} \times 0.6^\circ$. Dále jsme zvolili šest násobků $n_1 = (20, 20)$, $n_2 = (10, 10)$, $n_3 = (8, 8)$, $n_4 = (4, 4)$, $n_5 = (2, 2)$ a $n_6 = (1, 1)$, které zadáváme jako vstupní hodnoty pro algoritmus slučování (odstavec 2.3.2). Podmínku na minimální počet paprsků v buňce jsme zvolili 500 pro parametrizaci P500 a 1000 pro parametrizaci P1000.

Parametrizace P500+1000. Studovanou oblast jsme rovnoměrně rozdělili na 20 vrstev nad rozhraním v 1000 km a na 20 vrstev pod rozhraním v 1000 km (tloušťka jedné vrstvy je $\sim 50 \text{ km}$ nad rozhraním, resp. $\sim 95 \text{ km}$ pod rozhraním). Nejlepší laterální rozlišení je opět 0.6° . Základní rovnoměrná báze obsahuje 24000 buněk. Pro oblast nad rozhraním jsme zvolili pět násobků $n_1 = (10, 10)$, $n_2 = (8, 8)$, $n_3 = (4, 4)$, $n_4 = (2, 2)$, $n_5 = (1, 1)$ a čtyři násobky pro oblast pod rozhraním $n_1 = (10, 10)$, $n_2 = (8, 8)$, $n_3 = (4, 4)$, $n_4 = (2, 2)$. Nejlepší možné rozlišení je tedy $\sim 50 \text{ km} \times 0.6^\circ$ nad rozhraním a $\sim 95 \text{ km} \times 1.2^\circ$ pod rozhraním. Podmínku na minimální počet paprsků jsme zvolili 500 paprsků nad rozhraním a 1000 paprsků pod rozhraním v hloubce 1000 km. Přes toto rozhraní se buňky nemohou slučovat.

Buňky nerovnoměrné báze jsou zobrazeny na obrázcích A.4 α .

Ve špatně pokryté oblasti jsou buňky velmi velké, v dobře pokrytých oblastech dosahujeme rozlišení základní báze. Celkový počet buněk nerovnoměrné báze je uveden v tabulce 5.2. Počet paprsků v buňce pro jednotlivé parametrizace je uveden na obrázcích A.4 β . I přes použití nerovnoměrné parametrizace se mohou

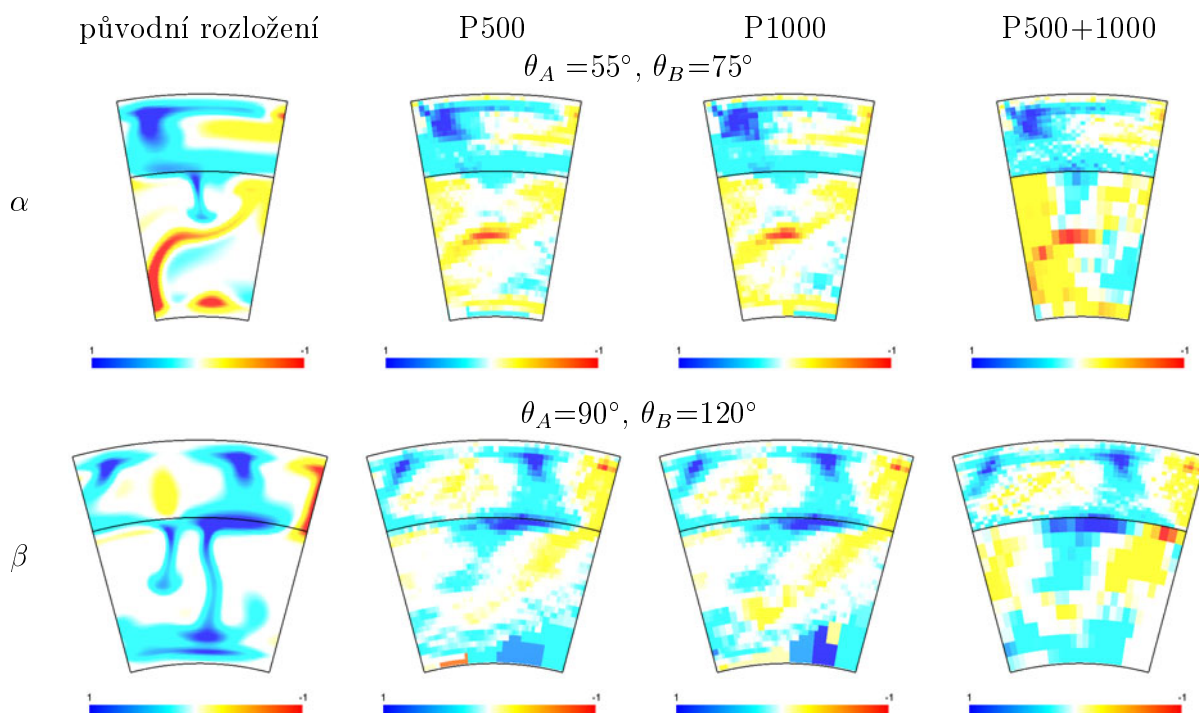
	P500	P1000	P500+1000
počet buněk	18108	13005	11627
p [%]	99.72	99.64	99.58
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.789	0.731	0.725
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.951	0.931	0.939
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.830	0.785	0.772

Tabulka 5.2: Vliv parametrizace na výsledek obrácené úlohy pro $\lambda = 1000$; počet buněk, procenta vysvětlených dat a korelace.

počty paprsků v buňkách výrazně lišit. Tato nerovnoměrnost je částečně způsobena algoritmem slučování – po sloučení špatně pokryté buňky se sousedem může dojít k překročení minimální podmínky. Hlavním zdrojem nerovnoměrnosti pokrytí paprsky jsou však oblasti velmi dobře pokryté paprsky – v oblastech napodobujících subdukční zóny je velká koncentrace zdrojů a tedy i paprsků. Bylo by možné zvolit menší buňky základní báze, tato volba by však způsobila výrazné zpomalení výpočtu matice \mathbf{G}^B , aniž by přinesla další informaci (charakteristický rozměr vstupních anomálií je již snadno rozlišitelný v základní bázi s laterální velikostí buňky 0.6°).

Vliv parametrizace testujeme pro vstupní model A1. Průměrná rozložení (tj. projekce vstupního syntetického modelu do báze, viz vztah (3.11)) pro dané parametrizace jsou znázorněna na obrázcích A.4 γ . Z těchto obrázků je zřejmé, že ve špatně pokrytých oblastech nejsme schopni rozlišit vstupní anomálie (chyba rozvoje je vysoká). V těchto oblastech tedy očekáváme špatný výsledek inverze. Korelace vstupního a průměrného rozložení a tedy i celková chyba rozvoje se pro jednotlivé parametrizace příliš neliší (viz tabulka 5.2).

Výsledky obrácené úlohy pro tlumící parametr $\lambda = 1000$ jsou uvedeny na obrázku A.4 δ . Nejvyšší korelace výsledného a původního rozložení (a rovněž výsledného a průměrného rozložení) dostáváme pro parametrizaci P500. Naopak nejmenší



Obrázek 5.8: Vliv parametrizace na výsledek obrácené úlohy pro $\lambda = 1000$ – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; α a β značí dva různé výřezy z původního rozložení a výsledků inverze pro parametrizace P500, P1000 a P500+1000; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

hodnoty korelace dostaneme pro parametrizaci P500+1000. Procenta vysvětlených dat (tabulka 5.2) jsou opět největší pro parametrizaci s nejmenším počtem stupňů volnosti N-M (parametrizace P500) a nejmenší pro parametrizaci s nejvyšším počtem stupňů volnosti (parametrizace P500+1000). Výrazným rysem všech výsledků je horizontální rozmazání silné vzestupné anomálie v pravé části osy symetrie. Podrobnější srovnání výsledků umožňují výřezy ze studované oblasti (obrázek 5.8). Pro všechny parametrizace dostáváme velmi dobré rozlišení struktur nad rozhraním v 1000 km. Rozlišení vstupních anomálií pod tímto rozhraním ale výrazně poklesne. Parametrizace P500 a P1000 nejsou schopny rozlišit vertikální sestupné proudy. Parametrizace P500+1000 tyto rychlé anomálie vystihne lépe, byť s výrazně hrubším rozlišením (zejména anomálie 5.8 α).

Výsledky inverze závisí na použité parametrizaci. Při řešení obrácené úlohy je tedy vhodné testovat různé parametrizace.

5.5 Vliv hustoty pokrytí

V tomto odstavci zkoumáme závislost výsledku inverze na celkové hustotě (počtu) paprsků. Jako vstupní rozložení jsme opět zvolili model A1. Používáme rozložení zdrojů a přijímačů uvedené v odstavci 5.2. Z původních 2366 zdrojů jsme náhodně vybrali 2000, 1600, 1200, 800 a 500 zdrojů, počet přijímačů jsme zachovali.

Celkem tedy dostaneme šest pokrytí paprsky. Pro inverzi opět používáme P vlny a pro hloubky zdrojů větší než 100 km i pP vlny. Počet paprsků pro vybrané zdroje je uveden v tabulce 5.3. Pro konstrukci nerovnoměrné parametrizace používáme základní rovnoměrnou bázi, násobky základních buněk i podmínku na minimální počet paprsků v buňce stejně jako pro parametrizaci P500 (viz odstavec 5.4).

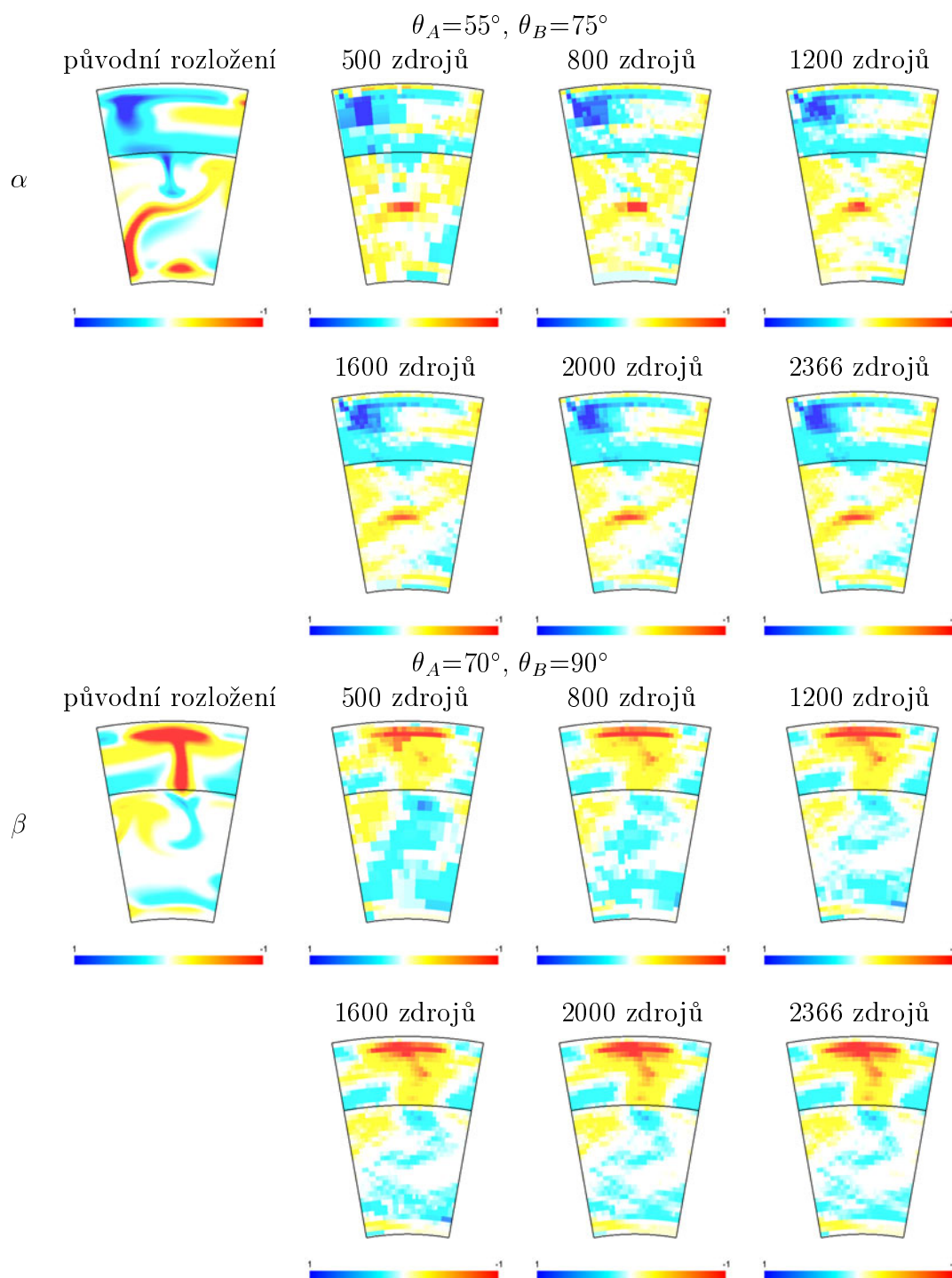
	1	2	3	4	5	6
počet zdrojů	2366	2000	1600	1200	800	500
počet paprsků	273140	228543	180986	133046	88581	53124
počet buněk	18108	16886	15006	12469	9598	5450
p [%]	99.72	99.69	99.69	99.59	99.47	99.25
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.789	0.781	0.723	0.688	0.686	0.579
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.951	0.947	0.930	0.916	0.900	0.878
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.830	0.825	0.777	0.751	0.763	0.659

Tabulka 5.3: Vliv počtu paprsků na výsledek obrácené úlohy pro $\lambda = 1000$; počet zdrojů, paprsků a buněk, procento vysvětlených dat, korelace.

Počet paprsků v buňce a nerovnoměrné parametrizace jsou pro vybraná pokrytí paprsky (s počty zdrojů 2366, 1200 a 500) uvedena na obrázcích A.5 β a A.5 α . Rozlišení se zlepšuje se zvyšováním počtu paprsků. Pro model s 500 zdroji dosahujeme nejlepšího možného rozlišení ($72 \text{ km} \times 0.6^\circ$) pouze v oblastech napodobujících subdukční zóny. Pro nejlepší pokrytí paprsky (2366 zdrojů) dostáváme maximální rozlišení ve většině studované oblasti. I pro nejhustší pokrytí paprsky však zůstává levá část oblasti okolo osy symetrie špatně pokryta (zhruba odpovídá situaci pod oceány v reálné Zemi).

Korelace vstupního a průměrného rozložení anomálií (tabulka 5.3) se zlepšují, pokud zvyšujeme rozlišení (počet paprsků a tedy i buněk) – chyba rozvoje klesá. Pro nejlepší pokrytí paprsky (pokrytí 1, počet zdrojů 2366) očekáváme tedy nejlepší výsledek inverze. Z průměrných rozložení (obrázky A.5 γ) modelu A1 pro jednotlivé nerovnoměrné parametrizace je vidět, že oblasti špatně pokryté paprsky nemůžeme vystihnout – chyba rozvoje modelu A1 do nerovnoměrné báze je velmi velká (chyba je přibližně stejně velká jako počáteční rozložení anomálií), v těchto oblastech tedy čekáme výrazně horší výsledky než pro zbytek studované oblasti.

Výsledky obrácené úlohy (pro parametr tlumení $\lambda=1000$) jsou uvedeny na obrázku A.5 δ . Zlepšují se, pokud zvyšujeme rozlišení (počet paprsků) – korelace původního a výsledného rozložení i korelace průměrného a výsledného rozlišení rostou. Výrazným rysem všech výsledků je opět horizontální rozmazání silného vzestupného proudu v pravé části osy symetrie. Dále není rozlišen vzestupný proud v levé části oblasti, tak jak jsme díky malému pokrytí paprsky očekávali. Další detaily jsou zřejmé z obrázku 5.9, kde jsou zobrazeny výřezy ze studované oblasti pro všechna použitá pokrytí paprsky. Zvyšováním počtu buněk a tedy i zvyšováním rozlišení, dochází k zaostřování výsledných struktur. Tento jev je zejména patrný na hlavě vzestupného proudu (obrázek 5.9 α) a dále na sestupném proudu ve spodním plášti (obrázek 5.9 β). Tvar hlavy plummy ani sestupného proudu není pro pokrytí paprsky 6 (500 zdrojů) a 5 (800 zdrojů) zřetelný; s přidáváním paprsků se obraz zaostří a lze rozeznat přibližný tvar konvekčního útvaru.



Obrázek 5.9: Vliv počtu paprsků na výsledek obrácené úlohy pro $\lambda = 1000$ – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; α a β značí dva různé výřezy z původního rozložení a výsledků inverze pro parametrizace pro pokrytí paprsky 1 – 6; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

Výsledky inverze jsou tedy na pokrytí paprsky velmi citlivé. Čím větší je počet dat, tím lepší rozlišení můžeme zvolit. Ve špatně pokrytých oblastech, kde je řídké pokrytí zdroji či stanicemi (oblasti na Zemi, kde nejsou subdukční zóny a rifty či oblast moří), nemůžeme dosáhnout příliš dobrého rozlišení. Počet dat v těchto oblastech bychom však mohli zvýšit zahrnutím dalších fází seismických vln.

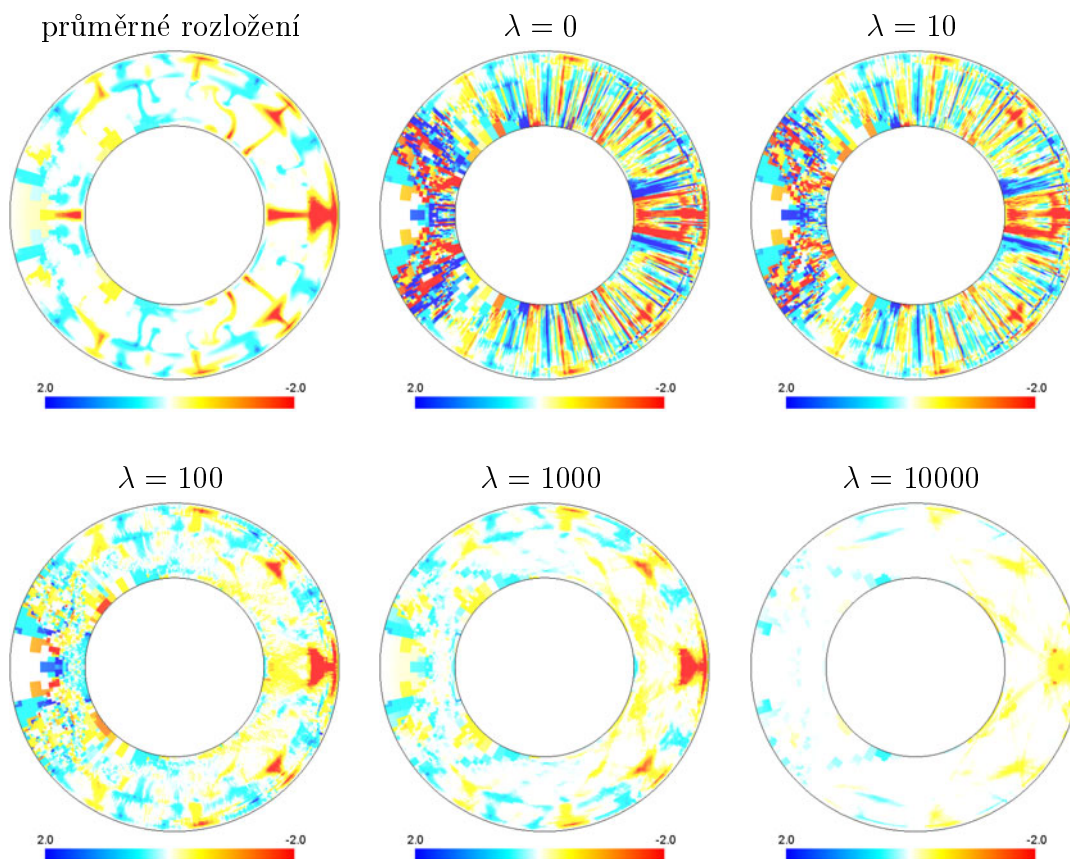
5.6 Vliv velikosti koeficientu tlumení

Dosud jsme ukazovali výsledky obrácené úlohy pouze pro tlumící koeficient $\lambda = 1000$. Velikost tohoto koeficientu však může velmi silně ovlivnit výsledky inverze. Jako testovací vstupní rozložení anomálií seismických rychlostí jsme opět zvolili model A1. Používáme rozložení zdrojů a přijímačů popsané v odstavci 5.2 a parametrizaci P500. Počet zdrojů je 2366, počet paprsků 273 140 a počet buněk 18 108. Nerovnoměrná parametrizace a počet paprsků v buňce jsou uvedeny v prvním sloupci obrázku A.4 α a A.4 β .

$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}} 0.951$								
λ	0.	10.	100.	200.	500.	700.	1000.	10000.
p [%]	99.85	99.85	99.85	99.84	99.81	99.78	99.72	80.36
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.271	0.381	0.663	0.721	0.777	0.788	0.789	0.624
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.285	0.401	0.698	0.758	0.818	0.828	0.830	0.657

Tabulka 5.4: Vliv velikosti tlumení na výsledek obrácené úlohy; výsledky inverze pro tlumení $\lambda = 0, 10, 100, 200, 500, 700, 1000$ a 10000 .

Výsledky inverze jsou pro koeficienty tlumení $\lambda = 0, 10, 100, 1000, 10000$ uvedeny na obrázku 5.10. Korelace původního a výsledného rozložení i průměrného a výsledného rozložení jsou v tabulce 5.4. Výsledek inverze bez použití tlumení ($\lambda = 0$) má oscilující charakter. Tyto oscilace jsou zejména laterální (amplituda odchylek se rychle mění v laterálním směru). V levé, špatně pokryté části studované oblasti jsou oscilace výrazné i v radiálním směru. Pro tlumení $\lambda = 10$ se amplitudy oscilací zmenšily. Pro tlumení $\lambda = 100$ jsou v dobře pokryté části studované oblasti oscilace potlačeny, ve špatně pokryté oblasti se však stále vyskytují oblasti s vysokými amplitudami odchylek vzhledem k průměrnému rozložení. Špatné rozlišení této oblasti je způsobeno velkou chybou rozvoje. Při dalším zvýšení tlumícího koeficientu ($\lambda = 1000$) dojde k potlačení velkých amplitud i ve špatně pokryté oblasti. Další zvýšení regularizace ($\lambda = 10000$) je již příliš velké a dojde k potlačení všech i užitečných anomálií. Tento jev je dobře pozorovatelný na procentu vysvětlených dat p (tabulka 5.4). Pro velký rozsah hodnot tlumícího koeficientu se hodnoty p snižují jen mírně (pro λ mezi 0 až 1000), pro další zvýšení tlumení však dojde k výraznému poklesu p – minimalizace modelového vektoru převáží snahu vysvětlit pozorovaná data. Dalším zajímavým jevem je rozlišení vztupné anomálie v pravé části osy symetrie. Pro tlumení $\lambda = 0$ a $\lambda = 10$ se tato anomálie zdánlivě jeví jako dobře rozlišená. V její blízkosti se však nachází silné oscilace. Proto nemůžeme určit, zda se jedná o skutečné rozlišení konvekčního útvaru nebo pouze o oscilaci. Dalším zvýšením hodnoty tlumícího koeficientu ($\lambda = 100$) oscilace vymizí, bohužel ale dojde

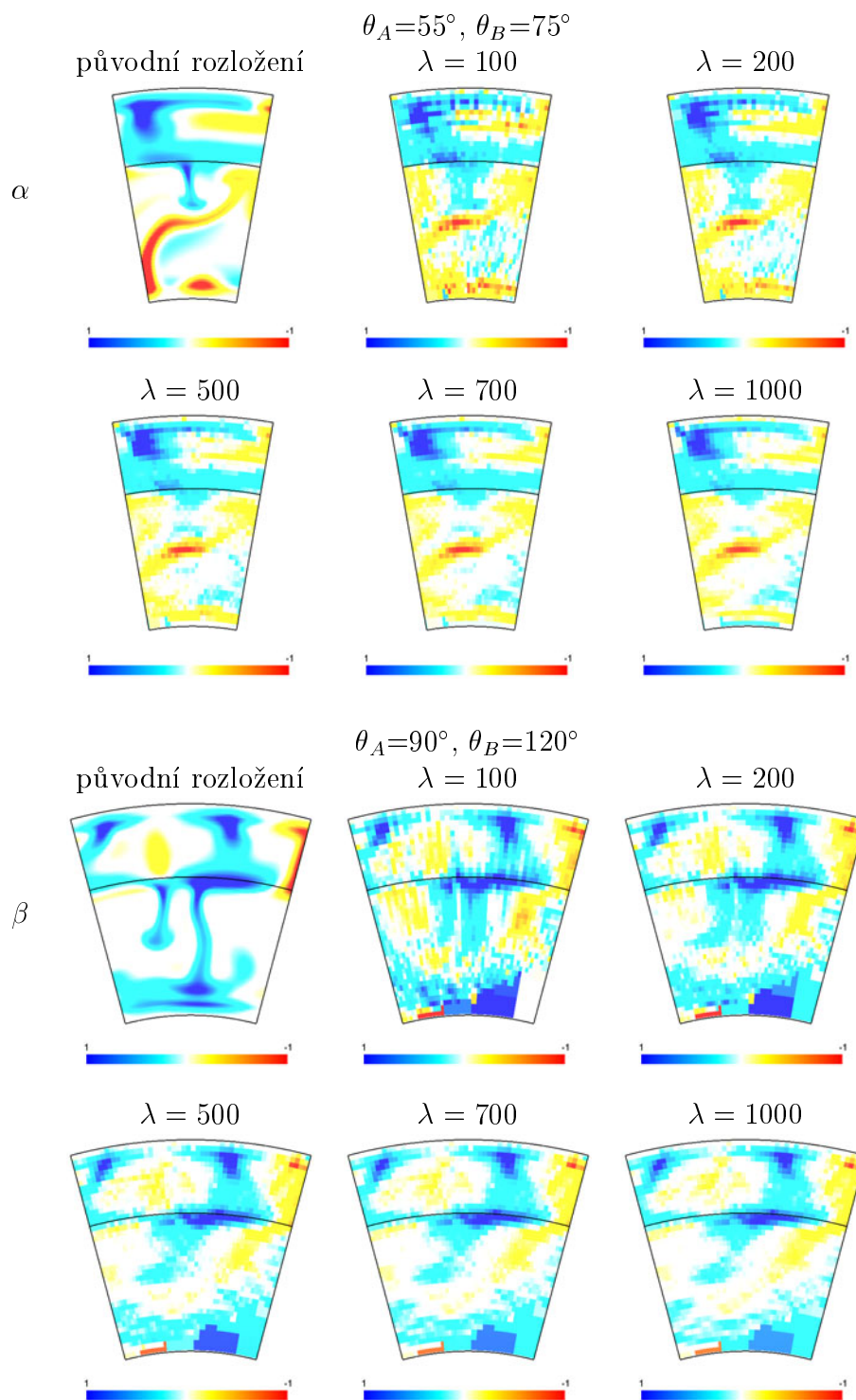


Obrázek 5.10: Vliv velikosti tlumení na výsledek obrácené úlohy. Škály průměrného a výsledného rozložení jsou uvedeny v procentech relativních odchylek seismických rychlostí; výsledky inverze pro tlumení $\lambda = 0, 10, 100, 1000$ a 10000 .

k laterálnímu rozmazání této struktury. Toto rozmazání je zřetelnější při dalším zvýšení tlumícího koeficientu ($\lambda = 1000$).

Porovnáme-li korelace původního a výsledného rozložení odchylek anomálií (tabulka 5.4), největší hodnoty vychází pro tlumení $\lambda = 100$ a $\lambda = 1000$. V intervalu těchto hodnot se tedy snažíme nalézt nejvhodnější velikost tlumícího koeficientu. Na obrázku 5.11 jsou uvedeny výřezy z výsledků obrácené úlohy pro tlumící koeficienty $\lambda = 100, 200, 500, 700$ a 1000 . Pro hodnoty tlumení $\lambda = 100$ a $\lambda = 200$ jsou stále patrné mírné oscilace, které dalším zvětšením regularizace vymizí. Na výřezu 5.11 α má tlumení největší vliv na seismicky rychlou anomálii pod rozhraním v hloubce 1000 km. Termálně indukovaná anomálie ve spodním plášti je zřejmá pro tlumení $\lambda = 100$ i $\lambda = 200$. Dalším zvyšováním tlumícího koeficientu však dojde k potlačení této anomálie a již není zřejmá její spojitost. Ostatní anomálie zvyšování tlumení v tomto intervalu příliš neovlivňuje. Výřez 5.11 β ukazuje dva blízké sestupné proudy (původní rozložení anomálií má tedy oscilující charakter). Tyto dvě anomálie jsou rozeznatelné pro tlumení $\lambda = 100$; pro tlumení $\lambda = 200$ se tyto anomálie spojí, s dalším zvyšováním tlumení dochází ke stále většímu rozmazávání anomálií ve směru paprsků a k potlačování jejich amplitudy.

Jak bylo patrné z předchozího příkladu, vliv tlumení se zejména projevil na úz-



Obrázek 5.11: Vliv velikosti tlumení na výsledek obrácené úlohy – výřezy. Výsledky inverze pro tlumení $\lambda = 100, 200, 500, 700$ a 1000 ; α a β – různé výřezy; škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

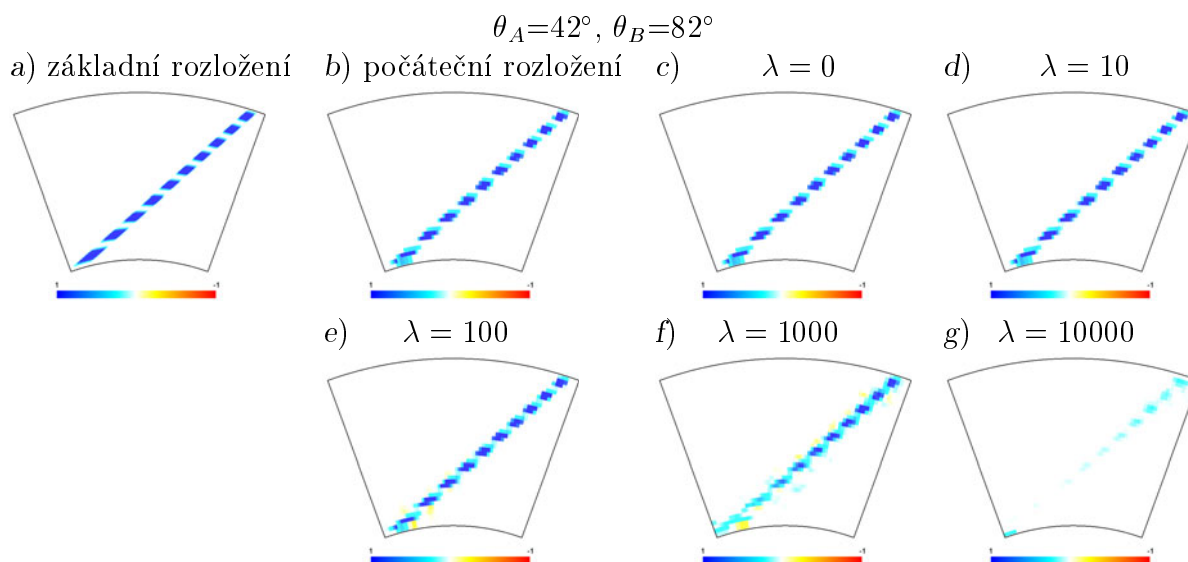
kých strukturách v hloubkách pod 1000 km. Pro další test vlivu tlumení jsme proto použili uměle vytvořenou strukturu (viz výřez 5.12a). Tato struktura je jedinou anomálií v plášti. Její tloušťka je 1.5° na povrchu, sklon anomálie je 30° od vertikály. Radiálně se tato anomálie skládá z řady obdélníkových částí. Můžeme tedy jednoduše určit, zda je výsledek inverze schopen rozlišit návaznost struktury v radiálním směru. Jako vstupní rozložení (obrázek 5.12b) používáme rozvoj odchylek anomálie uvedené na obrázku 5.12a do nerovnoměrné báze. Výsledky inverze jsou tedy ovlivněny pouze použitými daty a koeficientem tlumení, nikoliv chybou rozvoje.

	$\rho_{\text{původní}} \times \text{průměrné } 1.000$				
	0.	10.	100.	1000.	10000.
$p[\%]$	100.0	100.0	99.99	99.67	74.65
$\rho_{\text{původní}} \times \text{výsledné}$	1.000	1.000	0.804	0.667	0.506

Tabulka 5.5: Vliv velikosti tlumení na výsledek obrácené úlohy – rozložení s nulovou chybou rozvoje; výsledky inverze pro tlumení $\lambda = 0, 10, 100, 1000$ a 10000 ; procento vysvětlených dat, korelace.

Výsledky inverze jsou znázorněny na obrázku 5.12. Velikosti korelačního koeficientu a procenta vysvětlených dat jsou uvedeny v tabulce 5.5. Pro výsledek obrácené úlohy bez tlumení, dostáváme díky nulové chybě rozvoje dokonalý výsledek – korelace je rovna jedné, vysvětleno je 100% dat. Pro tlumení $\lambda = 10$ je výsledek stále velmi dobrý. Při dalším zvyšování dochází postupně k utlumování a laterálnímu rozmazávání anomálií směrem od rozhraní jádro-plášť k povrchu.

Díky výraznému potlačování amplitud a rozmazávání anomálií, je vhodné používat co nejmenší velikost koeficientu tlumení. Za nejlepší považujeme hodnoty v in-



Obrázek 5.12: Vliv velikosti tlumení na výsledek obrácené úlohy – rozložení s nulovou chybou rozvoje. a) – základní rozložení (slouží k výpočtu původního rozložení); b) – původní rozložení; c)–g) výsledky inverze pro tlumení $\lambda = 0, 10, 100, 1000$ a 10000 ; škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

tervalu (200,500), i když pro tento interval nevychází nejvyšší korelační koeficienty (tabulka 5.4). Velikost korelace totiž výrazně ovlivňuje levá část studované oblasti (oblast s velkou chybou rozvoje počátečního rozložení do nerovnoměrné báze). Po zvýšení tlumení dojde sice k potlačení oscilací ve špatně určené oblasti a tím i zvýšení korelačního koeficientu, ale zároveň příliš utlumíme anomálie rozložení v dobře pokrytých oblastech.

5.7 Výsledky inverze pro různé syntetické modely odvozené z modelů plášťové konvekce

V předchozích odstavcích jsme testovali citlivost obrácené úlohy na různé vlivy – celkový počet paprsků, vliv parametrizace a vliv velikosti koeficientu tlumení a snažili se stanovit optimální kombinaci těchto parametrů vzhledem k rozlišovací schopnosti tomografické inverze. V této části se budeme zabývat schopností rozlišit různé styly plášťové konvekce za těchto (“ideálních”) podmínek. Pro inverzi tedy používáme nejlepší pokrytí paprsky (2366 zdrojů, viz odstavec 5.2), parametrizaci P500 (minimální počet paprsků v buňce je 500, viz odstavec 5.4 – pro tuto parametrizaci vychází nejvyšší korelace výsledného a vstupního rozložení). Pro každý model jsme řešili inverzi pro různé hodnoty koeficientu tlumení. Dále uvádíme výsledky jen pro jednu vybranou hodnotu koeficientu tlumení. Hledali jsme co nejmenší koeficient tlumení takový, aby byly potlačeny oscilace zejména v dobře pokryté oblasti.

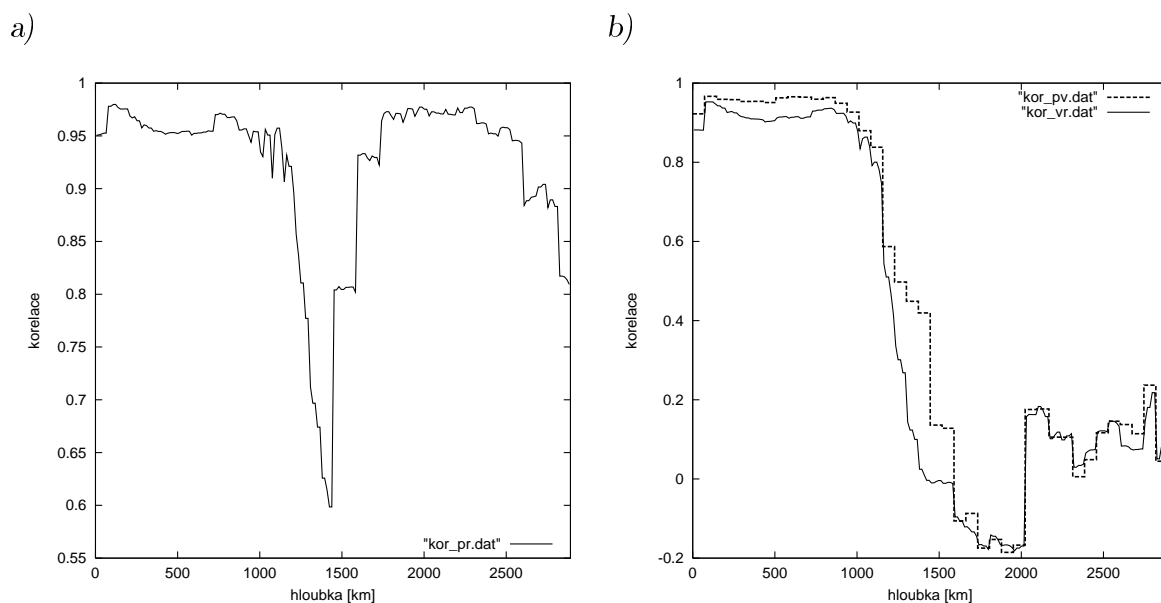
Model A2

Průměrné rozložení seismických anomálií v modelu A2 je uvedeno na obrázku A.6a. Ve většině studované oblasti je rozlišení vstupního modelu danou parametrizací velice dobré. V oblasti špatně pokryté paprsky (levá část oblasti – pro $\theta = (150^\circ, 210^\circ)$) nemůžeme vstupní rozložení použitou parametrizací vystihnout – chyba rozvoje vstupního rozložení do bazových funkcí je velká. V této oblasti tedy očekáváme špatný výsledek inverze. Velikost korelace mezi původním a průměrným rozložením je vysoká (tabulka 5.6). Hloubkový průběh korelace původního a průměrného rozložení je uveden na obrázku 5.13a. Korelace je pro většinu studované oblasti přibližně konstantní s hodnotou $\rho \sim 0.95$. Výrazný pokles však nastává v intervalu hloubek 1000 km až 1500 km, korelace zde poklesne až na hladinu $\rho \sim 0.6$. Tento výrazný pokles je způsoben špatně pokrytou částí s velkými buňkami. Pokud vypočítáme hloubkový průběh korelace integrací přes plášť s výjimkou této oblasti (tj. integrujeme vztah (3.10) pouze v intervalu $\theta = (-150^\circ, 150^\circ)$), tento pokles vymizí. Další pokles korelace vstupního a průměrného rozložení lze pozorovat v hloubkách pod 2500 km. Tento pokles je způsoben malým počtem paprsků v nejspodnější části pláště.

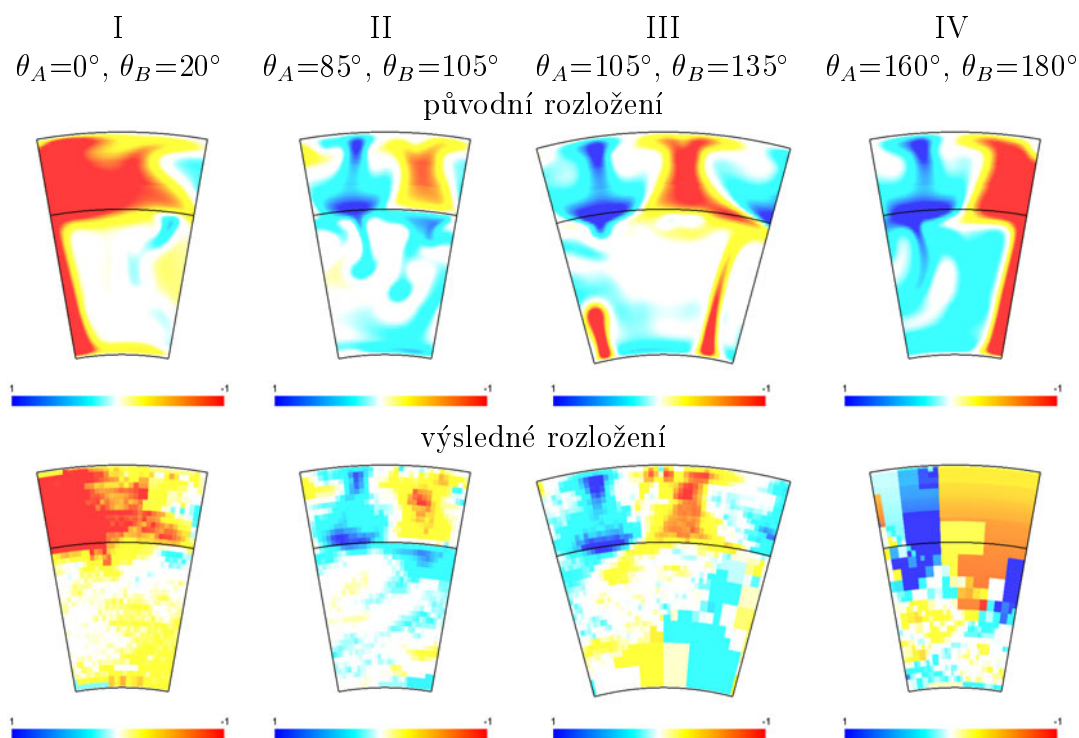
$p[\%]$	99.94
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.804
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.947
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.849

Tabulka 5.6: Výsledek obrácené úlohy pro model A2 ($\lambda = 500$); procento vysvětlených dat, korelace.

Výsledek obrácené úlohy pro tlumení $\lambda = 500$ je uveden na obrázku A.6b.



Obrázek 5.13: Model A2 ($\lambda = 500$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.14: Výsledek inverze pro model A2 ($\lambda = 500$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I–IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

Ve špatně pokryté oblasti výsledek nevystihuje vstupní rozložení, tak jak jsme díky velké chybě rozvoje předpokládali. V dobře pokrytých částech je výsledek dobrý. Korelace a procenta vysvětlených dat jsou v tabulce 5.6. Průběh korelace s hloubkou je uveden na obrázku 5.13b. Korelace vstupního a výsledného rozložení je pro hloubky menší než 1000 km vysoká ($\rho \sim 0.9$). Pod touto hranicí však velmi výrazně poklesne díky poklesu korelace původního a průměrného rozložení a také kvůli změně struktury konvekčních útvarů daných nepropustným rozhraním – nad tímto rozhraním mají rychlostní anomálie větší vlnovou délku (pod rozhraním v hloubce 1000 km vlnová délka výrazně poklesne).

Detaily výsledku obrácené úlohy jsou uvedeny na obrázku 5.14. Z těchto výřezů je patrné, že pro dobře pokryté oblasti dosahujeme velmi dobrého rozlišení nad rozhraním (5.14I–III) kromě špatně pokryté oblasti (5.14IV). Pod rozhraním se však výsledek výrazně zhorší (viz hloubkový průběh korelace původního a výsledného rozložení). Výrazný je tam i vliv rozmazání anomálií podél paprsků (5.14I – horizontální rozmazání vzestupného proudu, 5.14II – rozmazání dvou sestupných proudů ve směru paprsků, 5.14III – rozmazání seismicky pomalé anomálie vzniklé nad rozhraním až pod toto rozhraní).

Model A₆₇₀1 a model A₆₇₀2

Jak jsme uvedli v předchozí části, pro hloubky větší než přibližně 1000 km dochází ke zhoršení rozlišovací schopnosti inverze. Proto jsme pro další test zvolili model s termální vazbou na kompozitním rozhraním posunuté do hloubky 670 km, abychom mohli otestovat rozlišitelnost tohoto typu rozhraní v oblasti, kde je lepší pokrytí.

Na obrázku A.3 (model A₆₇₀1 a model A₆₇₀2) jsou uvedeny dva různé časové snímky modelu s termální vazbou na rozhraní v hloubce 670 km. Průměrná rozložení modelů A₆₇₀1 a A₆₇₀2 jsou uvedena na obrázcích A.7a, resp. A.8a. Korelace původního a průměrného rozložení jsou v tabulkách 5.7 a 5.8. Hloubkové závislosti korelace původního a průměrného rozložení jsou znázorněny na obrázcích 5.15a a 5.17a. Oba hloubkové průběhy mají stejné rysy – dochází k výraznému poklesu korelace v hloubkách od 700 km do 1200 km, který je opět způsoben špatně pokrytou oblastí. Tento pokles však nastane pro menší hloubky než v modelu A2 díky jiné poloze rozhraní (a tedy i změně charakteru struktury anomálií seismických rychlostí).

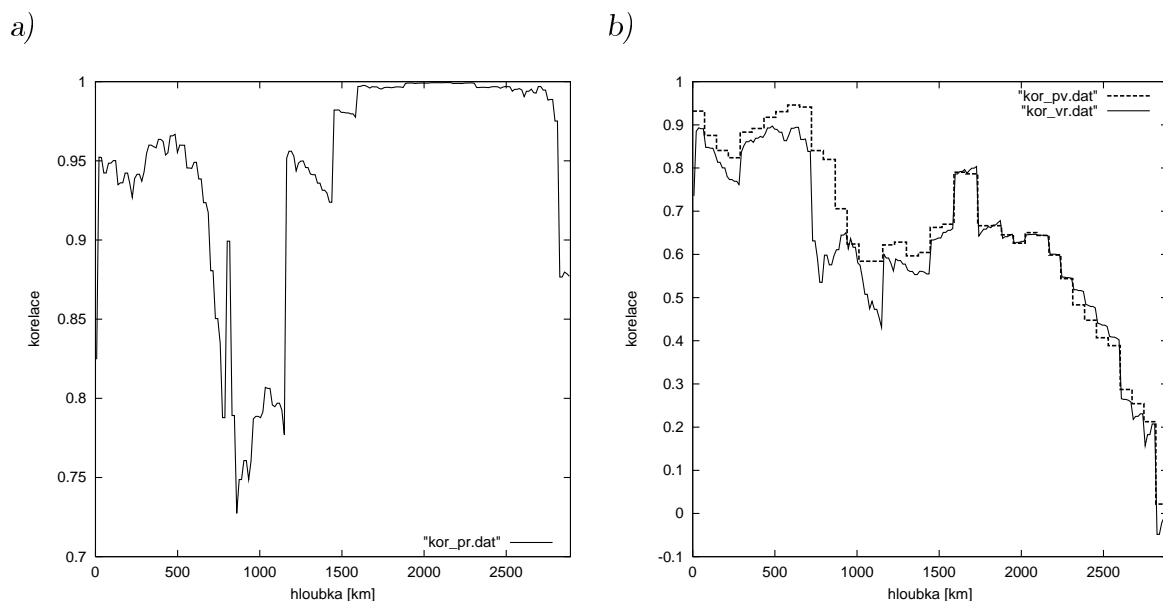
Výsledky obrácené úlohy pro koeficient tlumení $\lambda = 500$ jsou znázorněny na obrázcích A.7b a A.8b. Procenta vysvětlených dat a korelace výsledného a původního rozložení i výsledného a průměrného rozložení jsou uvedeny v tabulkách 5.7 a 5.8. Hloubkové závislosti korelace jsou znázorněny na obrázcích 5.15b a 5.17b. Výrazný je pokles korelace pod rozhraním v hloubce 670 km díky špatně pokryté oblasti a změně struktury konvekčních útvarů. Tento pokles je však kvůli posunu rozhraní do oblasti

p [%]	99.84
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.620
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.953
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.651

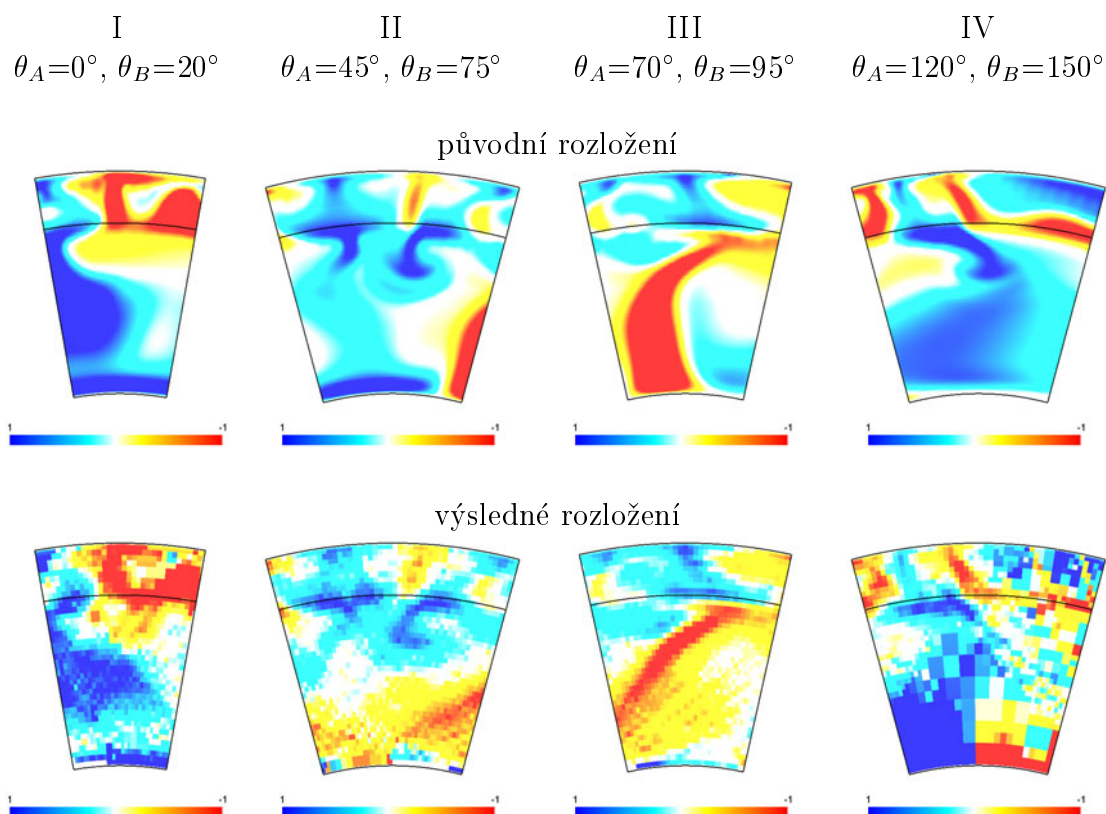
Tabulka 5.7: Výsledek obrácené úlohy pro model A₆₇₀1 ($\lambda = 500$); procento vysvětlených dat, korelace.

p [%]	99.86
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.613
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.943
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.650

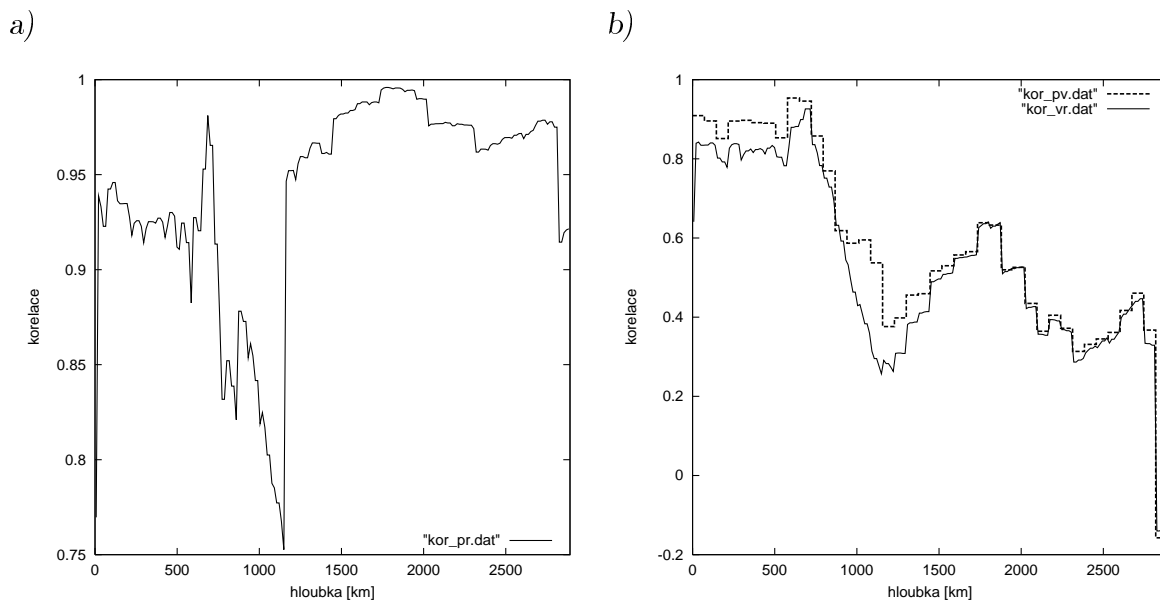
Tabulka 5.8: Výsledek obrácené úlohy pro model A₆₇₀2 ($\lambda = 500$); procento vysvětlených dat, korelace.



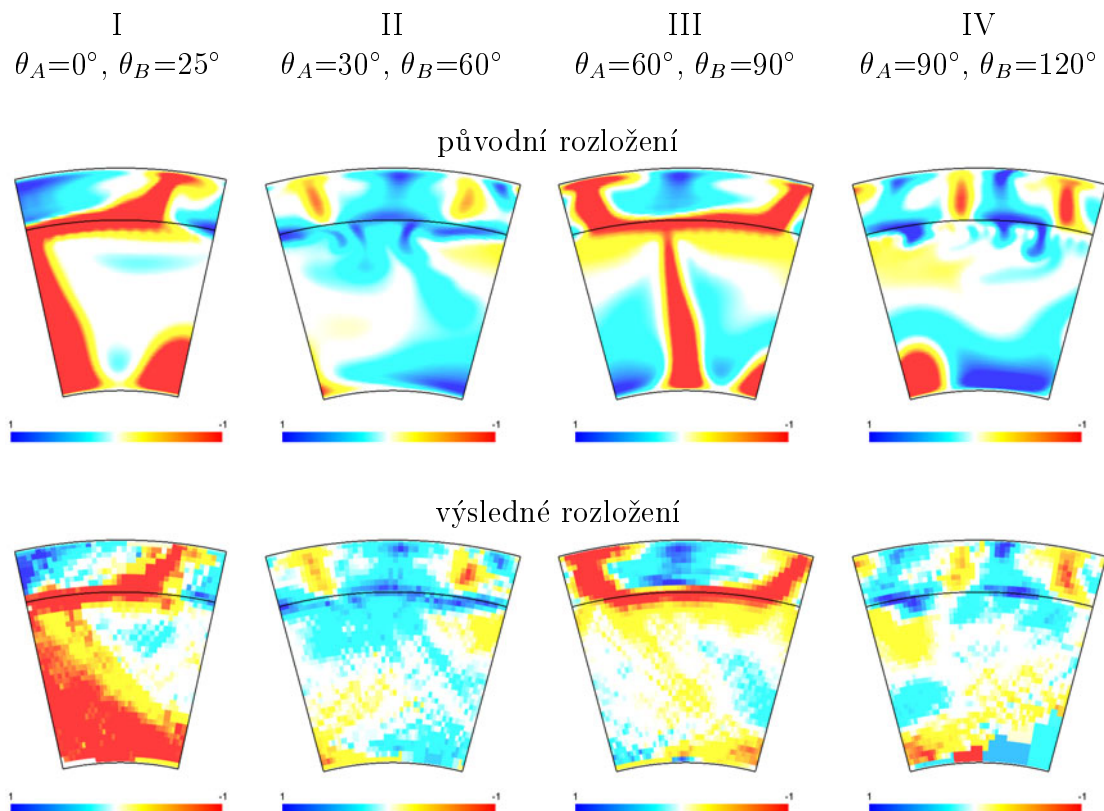
Obrázek 5.15: Model A_{6701} ($\lambda = 500$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.16: Výsledek inverze pro model model A_{6701} ($\lambda = 500$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I–IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.



Obrázek 5.17: Model A_{6702} ($\lambda = 500$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.18: Výsledek inverze pro model A_{6702} ($\lambda = 500$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I-IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

lepšího rozlišení méně výrazný než v případě modelu A2. V hloubce od 1200 km do 1500 km korelace mírně roste. V hlubších partiích začne korelace opět klesat.

Detaily výsledného rozložení jsou uvedeny na obrázcích 5.16 a 5.18. Pro dobře pokryté oblasti dostáváme dobré výsledky přibližně do hloubky 1000–1500 km. Špatně pokryté oblasti (5.16IV) samozřejmě nemůžeme díky velké chybě rozvoje rozlišit. Výrazné je opět rozmazání rychlostních struktur podél paprsků (5.16II, 5.16III a 5.18I – horizontální rozmazání; 5.16I – rozmazání vzestupného proudu vzniklého nad rozhraním pod rozhraní). Jak jsme již uvedli, na nepropustných rozhraních s termální vazbou se proti sobě nachází vzestupné či sestupné proudy. Proto se tyto anomálie (viz obrázky 5.16II, 5.18II, 5.18IV) mohou jevit jako spojitě přes nepropustné rozhraní. Pokud bychom neřešili syntetickou úlohu a předem nevěděli, že se jedná pouze o termálně indukované útvary, mohli bychom výsledky interpretovat jako anomálie (subdukované desky, plummy) spojitě procházející přes rozhraní.

Model B

Model B (viz obrázek A.3 – model B) je model s mechanickou vazbou na nepropustném rozhraní v hloubce 1000 km. Proti vzestupným proudům nad rozhraním se nachází sestupné proudy pod rozhraním a naopak. Tato vazba by tedy měla být seismickou tomografickou inverzí lépe rozlišitelná od celoplášťového tečení než termální vazba v modelech A.

Průměrné rozložení je na obrázku A.9a. Korelace původního a průměrného rozložení je uvedena v tabulce 5.9, její hloubkový průběh je vynesena na obrázku 5.19a. Patrný je opět výrazný pokles korelace v hloubce ~ 1000 km způsobený špatně pokrytou částí studované oblasti.

Výsledek obrácené úlohy pro koeficient tlumení $\lambda = 500$ je na obrázku A.9b. Procento vysvětlených dat a korelace původního a průměrného rozložení odchylek s řešením obrácené úlohy je uvedena v tabulce 5.9.

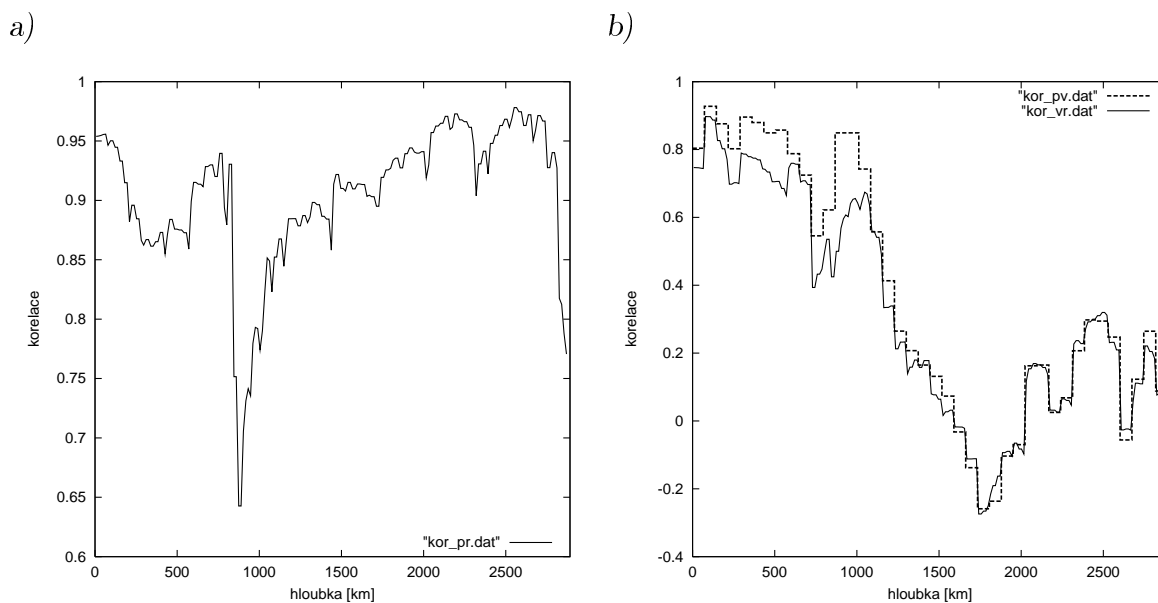
Hloubková závislost korelace je na obrázku 5.19b. Patrný je opět prudký pokles korelace pod hloubkou 1000 km díky změně charakteru anomálií a špatně pokryté části. Detailní výřezy jsou uvedeny na obrázku 5.20. Nad rozhraním se nacházejí relativně dlouhovlnné struktury, které poměrně dobře rozlišíme. Pod rozhraním jsou úzké a vertikální anomálie s malou amplitudou, které nejsme schopni vystihnout kromě oblastí těsně pod rozhraním (viz 5.20I–III). Většina spodního pláště je pro naši inverzi nerozeznatelná.

Model C

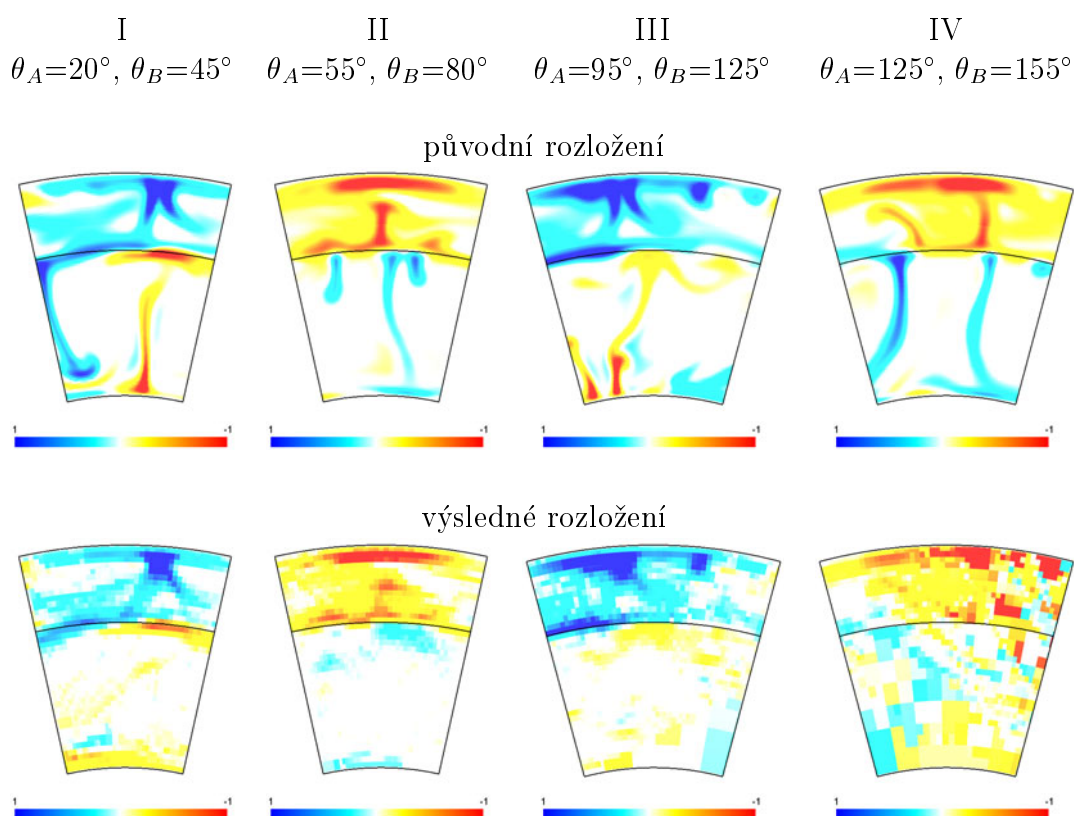
Z výsledků inverze pro výše zmíněné vstupní modely anomálií vyplývá, že nejsme schopni rozlišit úzké vertikální struktury ve spodním plášti v hloubkách pod 1000 km. V této části tedy testujeme rozlišení inverze v modelu s vertikálními nehomogenitami s velkou vlnovou délkou pod rozhraním v hloubkách větších než 1000 km. Tyto

$p[\%]$	99.90
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.658
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.878
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.750

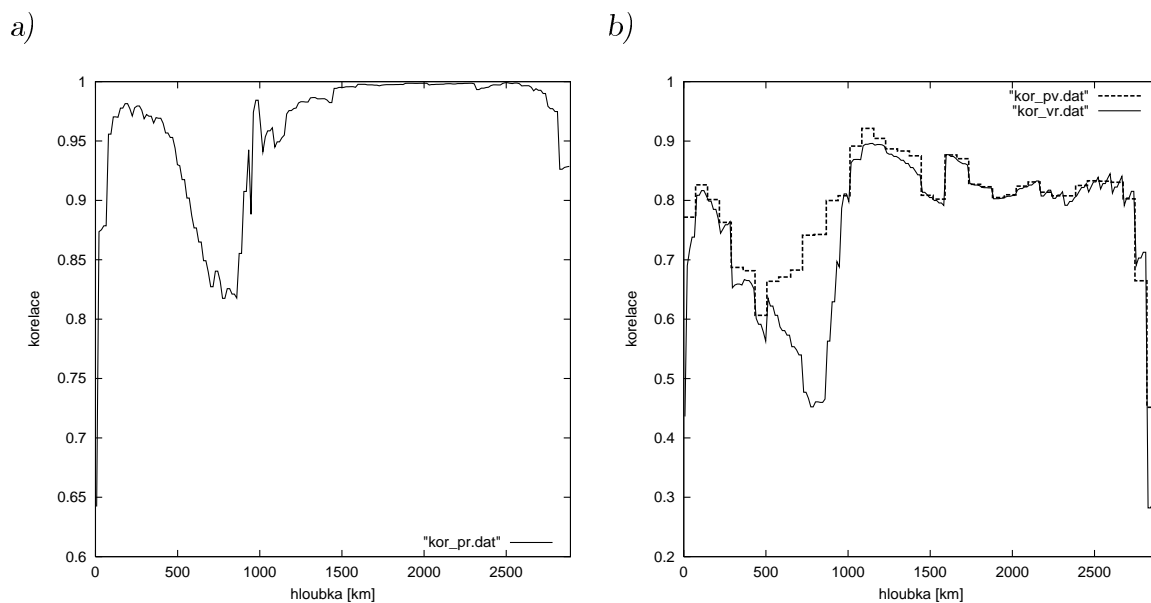
Tabulka 5.9: Výsledek obrácené úlohy pro model B ($\lambda = 500$); procento vysvětlených dat, korelace.



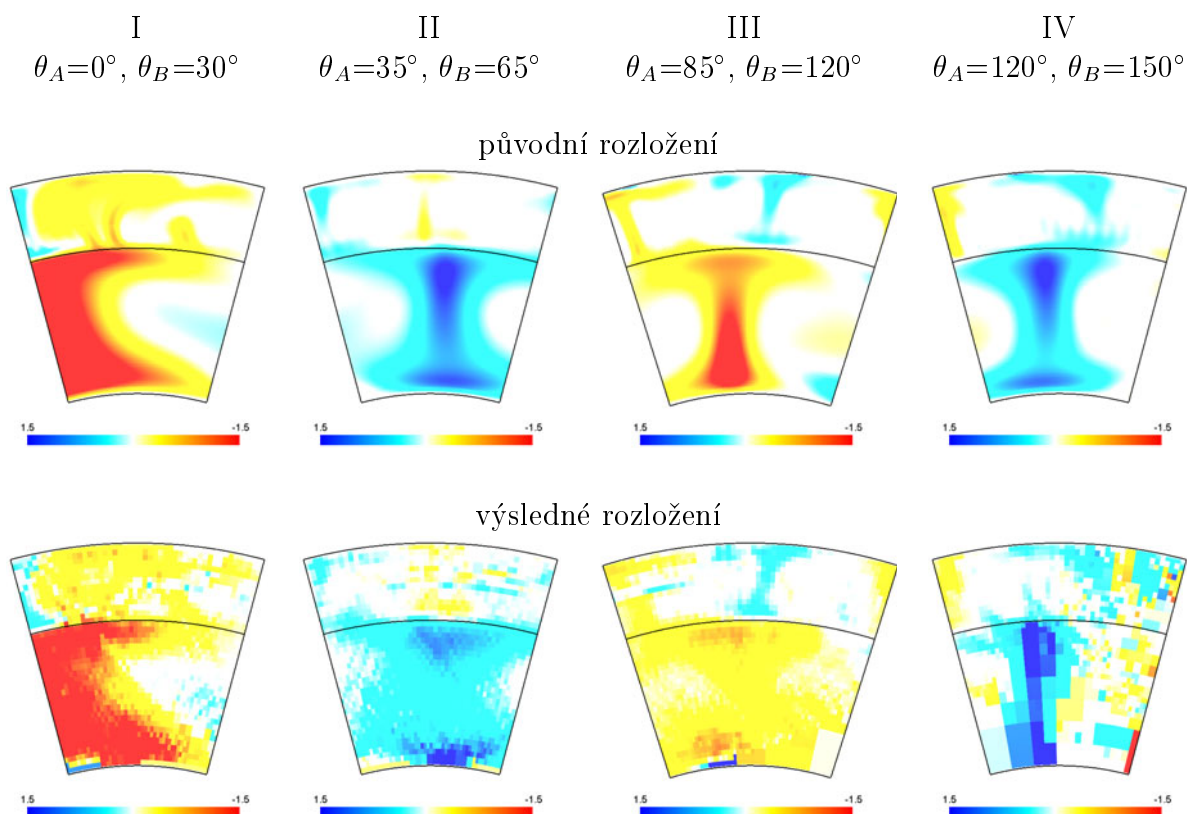
Obrázek 5.19: Model B ($\lambda = 500$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.20: Výsledek inverze pro model B ($\lambda = 500$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I-IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.



Obrázek 5.21: Model C ($\lambda = 200$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.22: Výsledek inverze pro model C ($\lambda = 200$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I–IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

výrazné anomálie (A.3 – model C) získáme díky nárůstu viskozity na nepropustném rozhraní o dva řády (odstavec 5.3).

Průměrné rozložení modelu C je uvedeno na obrázku A.10a. Korelace původního a průměrného rozložení je uvedena v tabulce 5.10. Hloubkový průběh je znázorněn na obrázku 5.21a. Opět je zde patrný výrazný pokles korelace okolo hloubky 1000 km způsobený špatně pokrytou oblastí.

p [%]	99.90
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.658
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.878
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.750

Výsledek inverze je uveden na obrázku A.10b. Pro inverzi tohoto modelu jsme použili tlumení $\lambda = 200$. K utlumení oscilací stačí menší tlumení než v předchozích příkladech díky anomáliím seismických rychlostí

Tabulka 5.10: Výsledek obrácené úlohy pro model C ($\lambda = 200$); procento vysvětlených dat, korelace.

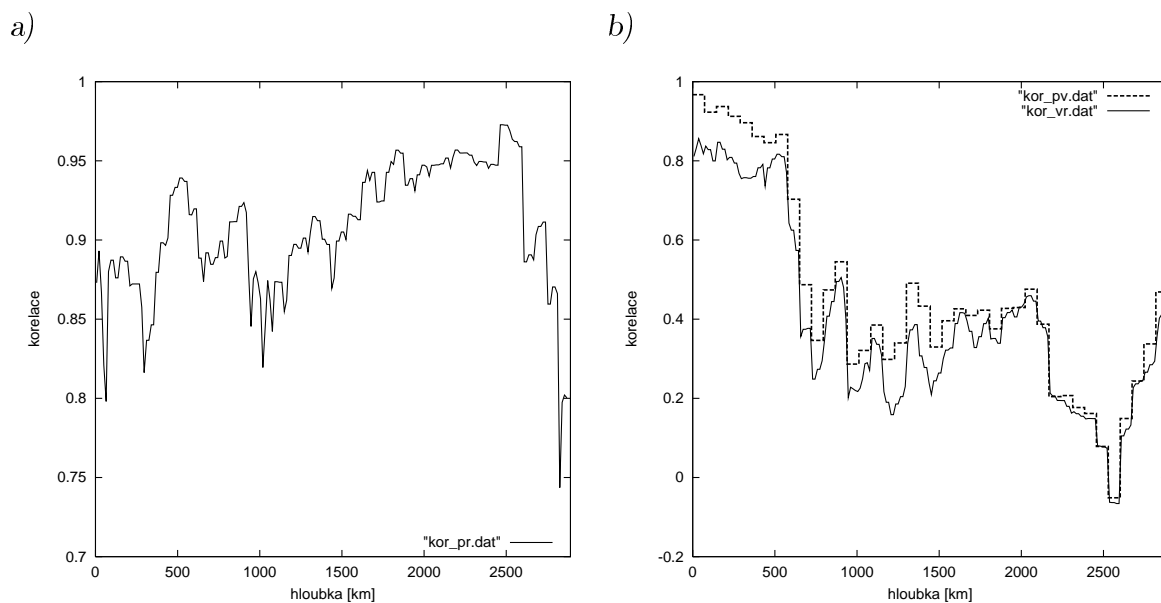
s velkou vlnovou délkou. Korelace a procenta vysvětlených dat jsou v tabulce 5.10. Hloubková závislost korelace původního a průměrného rozložení s výsledným rozložením je znázorněna na obrázku 5.21b. Paprsky špatně pokrytá část studované oblasti opět způsobí výrazný pokles v hloubce okolo 1000 km. Nejvyšší korelace dosahujeme narozdíl od předchozích příkladů pod rozhraním – pod rozhraním se nacházejí anomálie s velkou vlnovou délkou, které jsou lépe detekovatelné než relativně úzké anomálie nad rozhraním. Detailní výřezy jsou uvedeny na obrázku 5.22. Ve špatně pokryté oblasti 5.22IV opět nedokážeme příliš dobře vystihnout původní anomálie díky velké chybě rozvoje i přesto, že jsou velmi výrazné a velké. Jinak je ale rozlišení vertikálních útvarů v tomto případě lepší než rozlišení úzkých útvarů v předchozím modelech. Dochází ovšem k laterálnímu rozmazání všech anomálií pod rozhraním (obrázek 5.22I–III). Tento efekt je opět způsoben regularizací obrácené úlohy – zvyšujeme-li tlumení dochází ke stále většímu rozmazávání struktur.

Pokud by se pod hloubkou 1000 km nacházely výrazné anomálie vzniklé díky vysoké viskozitě, jsme je schopni zachytit. Jejich amplituda však bude podhodnocena a výsledná struktura anomálií bude mít větší vlnové délky.

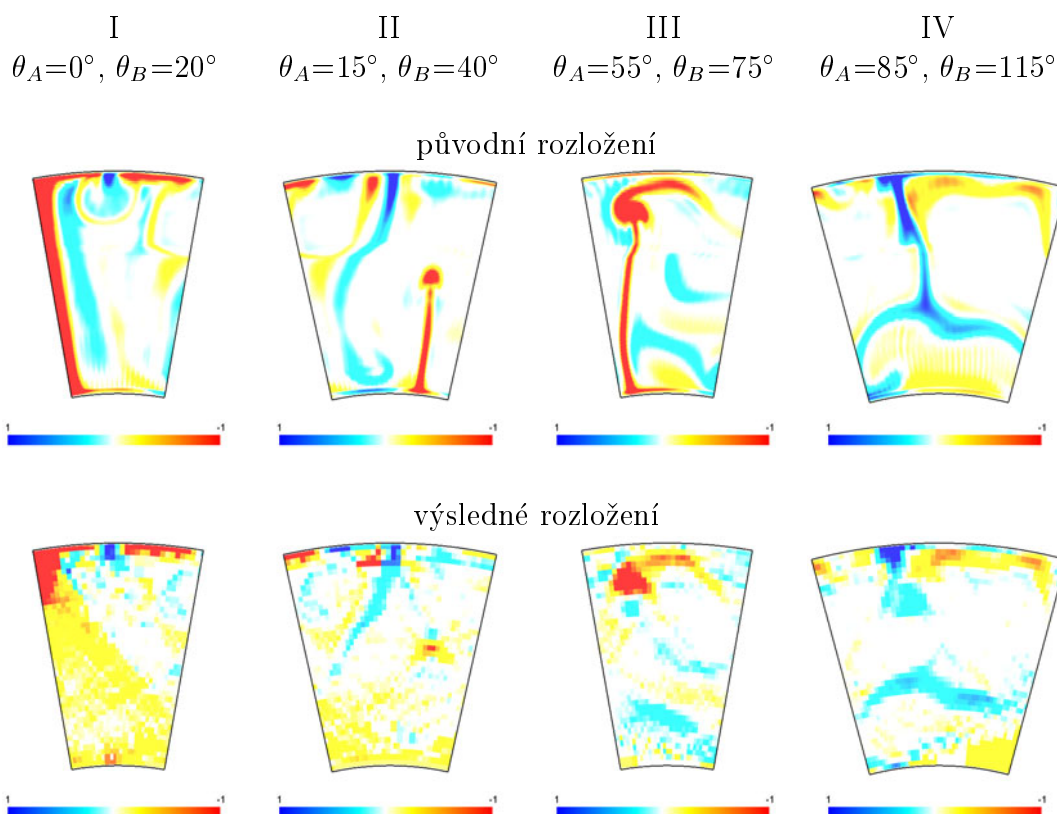
Model D1 a model D2

Modely D1 a D2 (viz obrázek A.3 – model D1 a model D2) jsou dva různé časové snímky modelu celoplášťové termální konvekce. Anomálie seismických rychlostí jsou většinou vertikální a úzké. Předpokládáme tedy, že tato vstupní rozložení nebudou příliš dobře detekovatelná zejména ve větších hloubkách.

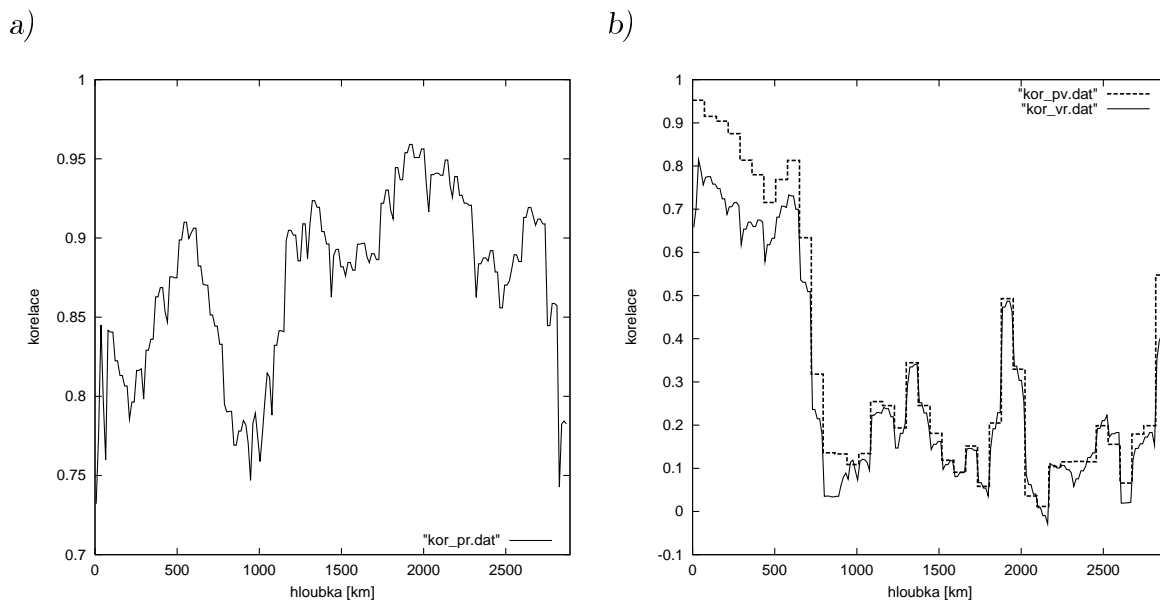
Průměrná rozložení jsou uvedena na obrázcích A.11a a A.12a pro model D1, resp. D2. Celkové korelace původního a průměrného rozložení jsou uvedeny v tabulkách 5.11 a 5.12. Hloubkové průběhy jsou nakresleny na obrázcích 5.23a a 5.25a. Skok v hloubce okolo 1000 km je zřetelný pro korelaci modelu D2 a jeho průměru (5.25a). Pro korelaci modelu D1 (5.23a) je tento pokles méně výrazný kvůli struktuře anomálie nacházející se ve špatně pokryté oblasti (má menší chybu rozvoje do nerovnoměrné báze).



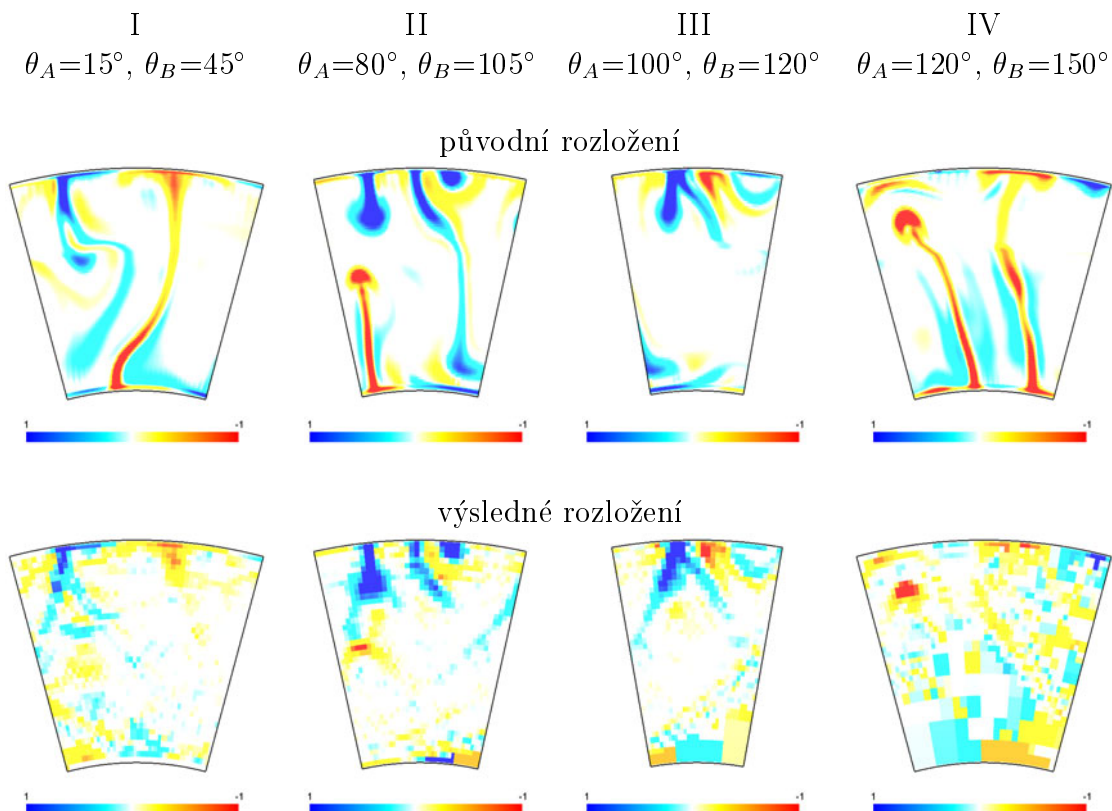
Obrázek 5.23: Model D1 ($\lambda = 500$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.24: Výsledek inverze pro model D1 ($\lambda = 500$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I–IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.



Obrázek 5.25: Model D2 ($\lambda = 500$) – hloubkový průběh korelace; a) – korelace původního a průměrného rozložení; b) – korelace původního a výsledného rozložení (plná čára), korelace průměrného a výsledného rozložení (čárkovaná čára).



Obrázek 5.26: Výsledek inverze pro model D2 ($\lambda = 500$) – výřezy. Škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; I-IV – různé výřezy ze studované oblasti; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

Výsledky inverze pro tlumicí koeficient $\lambda = 500$ jsou znázorněny na obrázcích A.11b a A.12b. Procenta vysvětlených dat a korelace původního a vstupního rozložení s výsledkem jsou uvedeny v tabulkách 5.11 a 5.12. Hloubkové závislosti korelace jsou nakresleny na obrázcích 5.23b a 5.25b. Obě závislosti vykazují pokles v hloubce kolem 700 km – v hloubkách menších než ~ 700 km se nachází výrazné anomálie, pro větší hloubky začnou převládat vertikální anomálie s malou amplitudou. Dalším důvodem způsobující tento pokles korelace je opět nedostatečné rozlišení ve špatně pokryté oblasti.

Detaily řešení jsou nakresleny na obrázcích 5.24 a 5.26. Výrazné je opět laterální rozmazání výrazných struktur ve velkých hloubkách (5.24I) a rozmazání anomálií podél paprsků z malých do velkých hloubek (5.26I–III) vlivem tlumení. Opět nerozlišíme úzké vertikální struktury (5.24II, 5.24III, 5.26I, 5.26IV), zatímco horizontální útvary jsme schopni rozlišit i v relativně velkých hloubkách (5.24III a 5.24IV).

Stuktury vzniklé z celoplášťové konvekce se po řešení obrácené úlohy jeví jako spojitě procházející až do hloubek kolem 1000 km. Pod touto hloubkou nejsme dále schopni rozlišit vertikální struktury. Při inverzi mohou však vznikat i falešné struktury připomínající sestupné/vzestupné proudy, které však vznikly rozmazáním skutečných struktur do větších hloubek vlivem regularizace.

$p[\%]$	99.50
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.649
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.877
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.738

Tabulka 5.11: Výsledek obrácené úlohy pro model D1 ($\lambda = 500$); procento vysvětlených dat, korelace.

$p[\%]$	99.55
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.557
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.831
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.669

Tabulka 5.12: Výsledek obrácené úlohy pro model D2 ($\lambda = 500$); procento vysvětlených dat, korelace.

5.8 Standardní syntetické testy tomografie

Při konstrukci tomografických modelů pláště Země ze skutečných dat (pozorovaných časů příchodu) se standardně provádí řada syntetických testů k určení rozlišení v různých oblastech. Nejpoužívanější jsou šachovnicový test a koláčový test. Vlnová délka syntetických vstupních struktur je však v těchto testech větší nebo rovna velikosti buněk základní parametrizace. Můžeme tedy předpokládat, že chyba rozvoje do báze může být menší než ve skutečném případě, kdy o vlnové délce rychlostních struktur nemáme žádnou či téměř žádnou apriorní informaci.

Šachovnicový test

Jako vstupní rozložení se pro tento test volí struktura připomínající šachovnici s různými vlnovými délkami (např. [11], [15], [35]). Pomocí tohoto druhu testu se určuje rozlišovací schopnost obrácené úlohy pro různé vlnové délky anomálií a velikosti jejich amplitud.

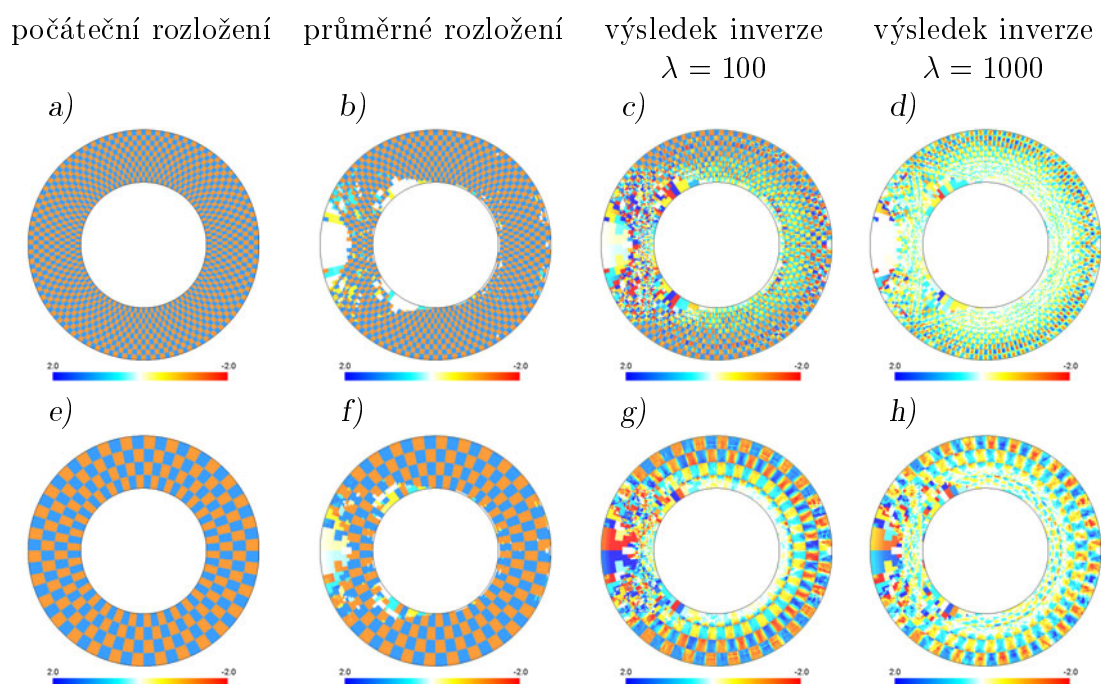
Pro šachovnicový test jsme zvolili rozložení uvedené na obrázcích 5.27a a 5.27e. Velikost anomálií je 4×4 základní buňky (rozložení S4, obrázek 5.27a) a $10 \times$

počáteční rozložení	S4				
$\rho_{\text{původní}} \times \text{průměrné}$	0.932				
	$\lambda = 0$	$\lambda = 10$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$	$\lambda = 10000$
$p[\%]$	99.97	99.97	99.95	98.96	53.66
$\rho_{\text{původní}} \times \text{výsledné}$	0.364	0.482	0.776	0.693	0.426
$\rho_{\text{průměrné}} \times \text{výsledné}$	0.390	0.517	0.832	0.743	0.457
počáteční rozložení	S10				
$\rho_{\text{původní}} \times \text{průměrné}$	0.951				
	$\lambda = 0$	$\lambda = 10$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$	$\lambda = 10000$
$p[\%]$	99.99	99.99	99.99	99.67	68.21
$\rho_{\text{původní}} \times \text{výsledné}$	0.511	0.621	0.752	0.671	0.481
$\rho_{\text{průměrné}} \times \text{výsledné}$	0.538	0.654	0.791	0.706	0.507

Tabulka 5.13: Šachovnicový test; procento vysvětlených dat, korelace.

10 základních buněk (rozložení S10, obrázek 5.27e). Amplituda těchto anomálií je $\pm 1.5\%$.

Průměrná rozložení jsou uvedena na obrázku 5.27b a 5.27f pro vstupní rozložení S4, resp. S10. V téměř celé studované oblasti (kromě špatně pokrytých oblastí) je chyba rozvoje nulová. Ve špatně pokrytých oblastech se vstupní rozložení nedá



Obrázek 5.27: Šachovnicový test; škály jsou uvedeny v procentech relativních odchylek seismických rychlostí; a) a e) – počáteční rozložení, velikost anomálie je 4×4 (S4), resp. 10×10 (S10) základních buněk; b) a f) – průměrné rozložení pro velikost anomálie S4, resp. S10; c) a g) – výsledky pro tlumení $\lambda = 100$ pro rozložení S4, resp. S10; d) a h) – výsledky pro tlumení $\lambda = 1000$ pro rozložení S4, resp. S10.

vystihnout. Korelace původního a průměrného rozložení je uvedena v tabulce 5.13. Korelace je pro anomálie S10 mírně vyšší než pro anomálie S4 díky větším a tím i lépe rozlišitelným anomáliím pomocí dané parametrizace.

Výsledky obrácené úlohy jsou uvedeny na obrázcích 5.27c a 5.27d pro anomálie S4 a tlumení $\lambda = 100$ a $\lambda = 1000$ a na obrázcích 5.27g a 5.27h pro anomálie S10 a tlumení $\lambda = 100$ a $\lambda = 1000$. Korelace a procenta vysvětlených dat jsou v tabulce 5.13. Pro dané tlumení λ jsme schopni lépe vystihnout syntetická data vzniklá průchodem anomáliemi s větší vlnovou délkou (procenta vysvětlených dat jsou pro dané tlumení větší pro vstupní rozložení S10 než pro rozložení S4). Celková korelace původního a výsledného rozložení je však větší pro vstupní rozložení S4 proti našemu očekávání (předpokládáme, že anomálie s větší vlnovou délkou jsou lépe detekovatelné). Tento jev je způsoben tlumením (viz tabulka 5.13) – vliv velikosti tlumícího koeficientu je závislý na vstupních anomáliích.

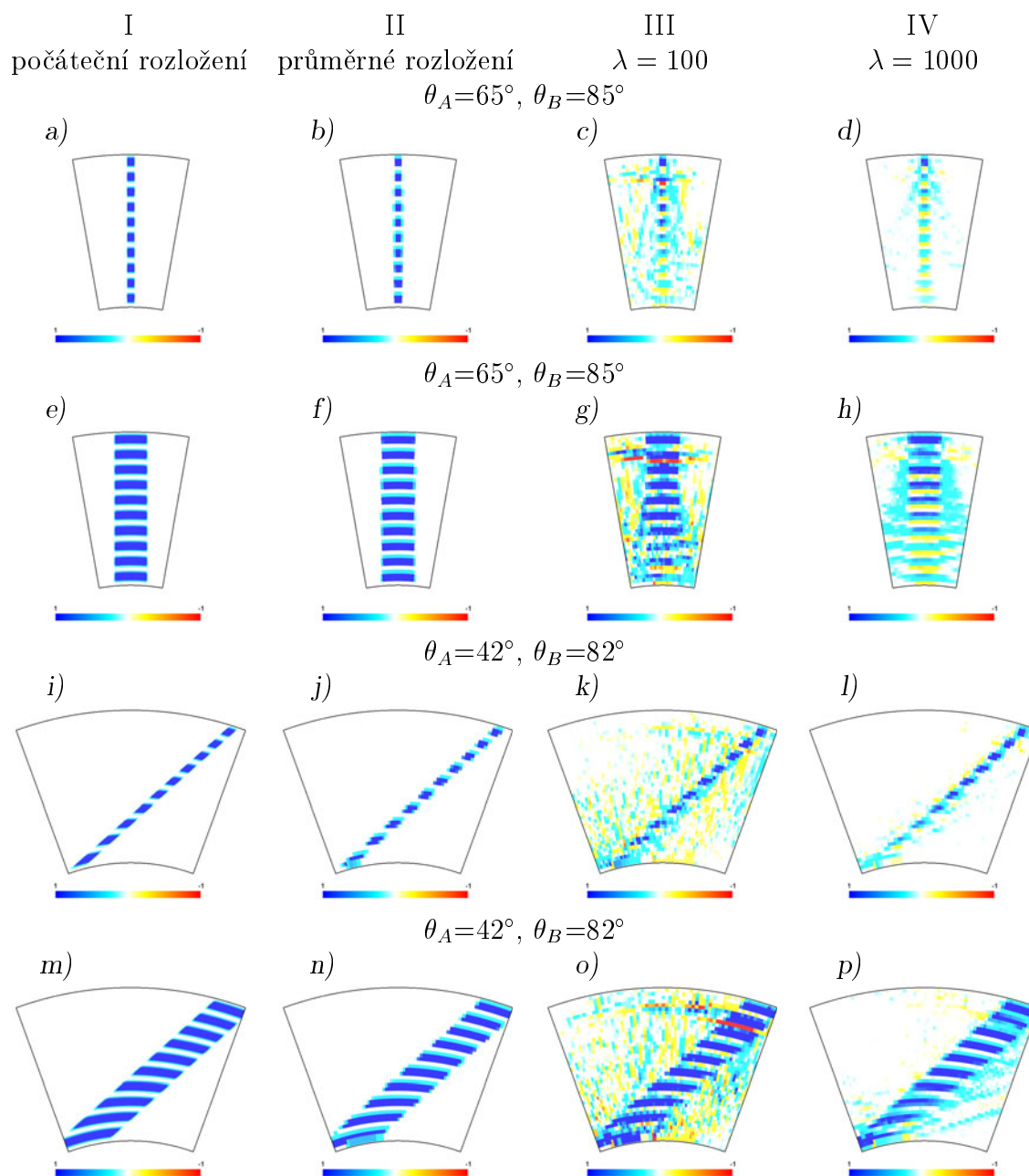
V dobře pokrytých oblastech výsledky pro $\lambda = 100$ vystihnou strukturu původního rozložení pro oba syntetické vstupní modely S4 a S10. V dolní polovině studované oblasti jsou však amplitudy silně podhodnoceny. Zvýšíme-li tlumení, potlačíme oscilace ve špatně pokryté oblasti, ale bohužel také více podhodnotíme amplitudy původního rozložení (přibližně odpovídající velikosti amplitudy jsou pouze v horní třetině).

Koláčový test

Při inverzi mohou vlivem rozmazání původních struktur podél paprsků vznikat falešné struktury. Proto je nutné ověřit zda jsou inverzí nalezené anomálie skutečné či skutečně spojitě. Pro tento syntetický test se používají vstupní anomálie, které mají např. tvar subdukované litosférické desky nebo tvar odvozený na základě výsledku inverze reálných dat (např. [4] – layer-cake test str. 45). V radiálním směru jsou tyto anomálie přerušované. Můžeme tedy jednoduše určit, jestli je výsledek inverze skutečně spojitý v radiálním směru či se jedná pouze o rozmazání původně nespojitých struktur.

počáteční rozložení	$L_{1.5}^0$		L_6^0	
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.918		0.959	
	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$
$p[\%]$	99.47	99.04	99.77	99.58
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.476	0.575	0.673	0.739
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.511	0.620	0.702	0.771
počáteční rozložení	$L_{1.5}^{30}$		L_6^{30}	
$\rho_{\text{původní} \times \text{průměrné}}$	0.904		0.953	
	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$	$\lambda = 100$	$\lambda = 1000$
$p[\%]$	99.36	98.87	99.81	99.65
$\rho_{\text{původní} \times \text{výsledné}}$	0.611	0.773	0.745	0.873
$\rho_{\text{průměrné} \times \text{výsledné}}$	0.667	0.856	0.781	0.916

Tabulka 5.14: "Koláčový" test; procento vysvětlených dat, korelace.



Obrázek 5.28: "Koláčový" test; sloupec I – počáteční rozložení; sloupec II – průměrné rozložení; sloupec III – výsledek inverze pro tlumení $\lambda = 100$; sloupec IV – výsledek inverze pro tlumení $\lambda = 1000$; a) – rozložení $L_{1.5}^0$, šířka anomálie 1.5° na povrchu, sklon anomálie 0° ; e) – rozložení L_6^0 , šířka anomálie 6° na povrchu, sklon anomálie 0° ; i) – rozložení $L_{1.5}^{30}$, šířka anomálie 1.5° na povrchu, sklon anomálie 30° ; m) – rozložení L_6^{30} , šířka anomálie 6° na povrchu, sklon anomálie 30° ; vlnová délka struktury v radiálním směru je 290 km pro všechna počáteční rozložení; škály jsou uvedeny v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu; θ_A a θ_B definují hranice výřezu.

Zde uvádíme podobný test, který však používáme k testování citlivosti obrácené úlohy na anomálie s různou vlnovou délkou a různým sklonem. Zachováváme přerušeni anomálií v radiálním směru kvůli testování vlivu rozmazání.

Používáme seismicky rychlou anomálii připomínající subdukovanou litosférickou desku s různým sklonem a různou tloušťkou vedoucí přes celý plášť (je jedinou anomálií v plášti). Amplituda této anomálie je 1.5%. Uvádíme zde výsledky pro čtyři různé tvary této anomálie. Rozložení $L_{1.5}^0$ a L_6^0 obsahuje vertikální anomálii (sklon je 0° od vertikály), tloušťka je 1.5° (obrázek 5.28a), resp. 6° (obrázek 5.28e) na povrchu. Rozložení $L_{1.5}^{30}$ a L_6^{30} má sklon 30° stupňů od vertikály, tloušťka je 1.5° (obrázek 5.28i), resp. 6° (obrázek 5.28m) na povrchu.

Průměrná rozložení jsou uvedena na obrázku 5.28II. Korelace původního a průměrného rozložení jsou v tabulce 5.14. Anomálie s větší vlnovou délkou (L_6^0 a L_6^{30}) dokážeme danou parametrizací vystihnout lépe (korelace původního a průměrného rozložení je větší než pro anomálie s velikostí 1.5° na povrchu).

Výsledky obrácené úlohy jsou znázorněny na obrázku 5.28III a 5.28IV, výsledky pro porovnání uvádíme pro dvě různá tlumení. Při zvyšování tlumení opět vidíme efekt potlačení oscilací, ale i potlačení amplitud. Rozlišení v radiálním směru není pro některé výsledky příliš zřetelné. Pro rozložení $L_{1.5}^{30}$ (obrázek 5.28k a 5.28l) se jeví výsledná anomálie jako spojitá, i když dochází ke střídání oblastí s větší a menší amplitudou. Podobný jev lze pozorovat i pro rozložení L_6^{30} (obrázek 5.28o a 5.28p) u povrchu a u rozhraní jádro-plášť.

Korelace průměrného a původního rozložení s výsledkem a procenta vysvětlených dat jsou uvedeny v tabulce 5.14. Korelace výsledného a vstupního rozložení jsou pro daný sklon a danou velikost tlumení větší pro širší anomálie. Porovnáme-li výsledek pro vertikální anomálii a mírně ukloněnou anomálii se stejnou šířkou ($L_{1.5}^0 \times L_{1.5}^{30}$, $L_6^0 \times L_6^{30}$) dostáváme menší korelaci pro vertikální anomálii – anomálie s nenulovým sklonem od vertikály jsme schopni lépe detekovat.

Kapitola 6

Závěr

V kartézské obdélníkové oblasti jsme studovali základní vlastnosti obrácené úlohy. Inverzi jsme řešili pouze pro malý počet modelových parametrů, mohli jsme tedy k řešení obrácené úlohy používat přesné metody (SVD). Výsledky obrácené úlohy jsou velmi závislé na použité parametrizaci (a tedy na chybě rozvoje vstupního rozložení odchylek seismických rychlostí do bazových funkcí). Velikost chyby rozvoje nesmí být příliš velká. Pokud je tato chyba srovnatelná s velikostí vstupního rozložení (tj. $\Delta s(\mathbf{r}) \approx \zeta(\mathbf{r})$), nemá smysl tuto úlohu řešit. Museli bychom zvolit jemnější parametrizaci úlohy (pokud by bylo pokrytí paprsky dostatečné).

Velký vliv na výsledek inverze má rovnoměrnost pokrytí – pokud je pokrytí nerovnoměrné, mohou se vlastní čísla matice \mathbf{G} lišit o několik řádů (matice \mathbf{G} je špatně podmíněná). Malá vlastní čísla způsobují špatné vlastnosti matice při inverzi. Pokud je odstraníme dojde k zlepšení výsledku. Hladina ořezání vlastních čísel se však hledá obtížně. Je třeba dávat pozor, abychom neodstraňovali užitečné informace. Vhodným ukazatelem může být procento vysvětlených dat p – jeho hodnota se nesmí příliš snížit oproti inverzi bez regularizace (bez ořezání vlastních čísel). Další možnou metodou, kterou lze použít v případě nerovnoměrného pokrytí, je nerovnoměrná parametrizace. Velikost parametrizačních buněk můžeme v místech špatného pokrytí zvolit velkou, zatímco v oblastech s dobrým pokrytím volíme menší buňky. Tím dosáhneme lepší podmíněnosti matice (viz odstavec 4.5). Výsledek obrácené úlohy pak v dobře pokrytých oblastech dosahuje vyššího rozlišení než v málo pokrytých oblastech.

Dále jsme se v obdélníkové oblasti zabývali vlivem chyb dat. Rostoucí velikost chyb dat přirozeně zhoršuje výsledek inverze (korelace vstupního rozložení a výsledku klesá). Zhoršení se nejdříve začnou projevovat v hůře podmíněných úlohách v místech největších chyb parametrů modelu.

Ve sférické oblasti jsme se podobně jako v kartézské oblasti zabývali některými základními vlastnostmi obrácené úlohy. Počet modelových parametrů byl však výrazně vyšší, proto jsme museli používat iterativní metodu k řešení inverze (LSQR).

Výsledky inverze jsou závislé na použité parametrizaci (a tedy i na chybě rozvoje) podobně jako v kartézském modelu. Pokud existuje dokonalá parametrizace (chyba rozvoje je nulová) lze získat dokonalé řešení (korelace je rovna jedné). Čím je však

chyba větší tím horší jsou výsledky. Pokud je chyba příliš vysoká nemá smysl úlohu řešit.

Dále jsme se ve sférické oblasti zabývali vlivem hustoty pokrytí paprsky. Kvůli nerovnoměrnému pokrytí paprsky používáme nerovnoměrnou parametrizaci, díky níž nejsme při volbě parametrizace (velikosti buněk) omezení špatně pokrytými oblastmi – v oblastech dobrého pokrytí paprsky volíme vysoké rozlišení, ve špatně pokrytých oblastech malé. Výsledky obrácené úlohy jsou samozřejmě závislé na hustotě pokrytí paprsky. Roste-li počet paprsků, můžeme zjemňovat parametrizaci. Dosáhneme tedy menší chyby rozvoje vstupního rozložení do bázových funkcí a tím i lepších výsledků.

Zásadní vliv na výsledek inverze má velikost koeficientu tlumení (velikost regularizace). Tlumení stabilizuje řešení (potlačuje oscilace řešení). Použitím regularizace dochází však také k negativním jevům – dochází k rozmazávání struktur podél paprsků a k podhodnocování amplitud zejména v nejspodnějších oblastech. Nalezení optimální velikosti koeficientu tlumení je tedy velmi obtížné – snažili jsme se nalézt minimální hodnotu tohoto koeficientu tak, aby došlo k potlačení oscilací výsledku v dobře pokrytých oblastech a aby docházelo k co nejmenšímu rozmazání výsledných struktur. Tomuto požadavku obvykle vyhovuje $\lambda \sim 200\text{--}500$.

Dále jsme řešili inverzi pro dva standardní syntetické testy seismické tomografie (šachovnicový a koláčový test). Z výsledků těchto testů vyplývá, že citlivost výstupních struktur na velikosti koeficientu tlumení je různá pro různé vlnové délky vstupních útvarů (a tím i pro velikosti chyby rozvoje vstupního modelu do bázových funkcí). Dlouhovlnné útvary v těchto testech rozlišíme lépe než struktury s malou vlnovou délkou. Dále jsme zjistili, že ve spodním plášti lépe detekujeme struktury s nenulovým sklonem od vertikály než vertikální útvary.

Ve sférické oblasti jsme studovali rozlišení různých stylů plášťové konvekce. Pro tuto úlohu jsme zvolili nadhodnocené (vzhledem k třírozměrné inverzi reálných dat) avšak nerovnoměrné pokrytí paprsky (dosáhli jsme špatně pokryté oblasti pod oceány podobně jako na Zemi, ve které je chyba rozvoje větší než ve zbytku studované oblasti). Pracovali jsme s ideálními daty pro lineární úlohu – chyba \mathbf{e} je dána pouze chybou rozvoje původního rozložení do bázových funkcí. Dále jsme použili nerovnoměrnou parametrizaci s maximálním laterálním rozlišením 0.6° a ~ 72 km v radiálním směru. Jako nejvhodnější se jevila hodnota tlumicího koeficientu $\lambda = 500$ pro většinu modelů (model A, B a D) a $\lambda = 200$ pro model C s laterálními variacemi s velkou vlnovou délkou.

Pro všechny modely odchylek seismických rychlostí odvozených z termální konvekce je rozlišení struktur ve špatně pokrytých oblastech (kde je chyba rozvoje vysoká) velmi malé. V dobře pokrytých oblastech a pro hloubky menší než přibližně 1000 km rozlišíme horizontální i vertikální a seismicky rychlé i pomalé anomálie.

V hloubkách větších než 1000 km a v dobře pokrytých oblastech rozlišíme horizontální útvary a anomálie s velkou vlnovou délkou. Problém nastává u rozlišení zejména úzkých vertikálních struktur. Tento jev může být způsoben tlumením (potlačuje amplitudy směrem od spodní části oblasti k povrchu a rozmazává anomálie ve směru paprsků). Bohužel však nemůžeme vyloučit ani vliv dvourozměrného zjed-

nodušení naší úlohy. V případě dvourozměrného problému může hrát velkou roli absence paprsků kolmých k naší studované oblasti, které nesou nezávislou informaci a tím mohou pomoci zaostřit seismické anomálie.

Ve všech výsledcích obrácené úlohy pro různé modely dále pozorujeme silné rozmazání všech anomálií podél paprsků. Ve spodním plášti dochází zejména k horizontálnímu rozmazání (paprsky jsou zde téměř horizontální). Anomálie ze svrchního pláště se mohou podél paprsků rozmazat až do spodního pláště. Toto rozmazání je způsobeno vlivem tlumení. Tento vliv regularizace se pozoruje i při syntetických testech v seismické tomografii reálných dat [4], [21]. Opět však nevíme, zda tento efekt není zesílen dvourozměrným zjednodušením. Dále pozorujeme ve všech studovaných modelech podhodnocení výsledných amplitud způsobené explicitním tlumením.

Rozlišení různých scénářů plášťové konvekce může být problematické. Testovali jsme pět různých modelů (tři s nepropustným rozhraním v hloubce 1000 km, jeden s nepropustným rozhraním v hloubce 670 km a jeden celoplášťový model). Problematické je zejména odlišení vrstevnatého modelu s hloubkou nepropustného rozhraní v 1000 km od modelu celoplášťového tečení (rozlišení inverze kolem této hloubky již není příliš dobré).

V modelu A (model s kompozitním nepropustným rozhraním s termální vazbou v hloubce 1000 km) díky špatnému rozlišení inverze v hloubkách větších než 1000 km nejsme schopni z výsledků zjistit nic o stylu konvekce (nerozlišíme vrstevnaté či celoplášťové tečení). Formálním posunem kompozitního rozhraní (model A_{670}) do hloubky 670 km (hloubka, kde je lepší rozlišení) chceme zjistit, zda je možné pomocí seismické tomografické inverze rozlišit hmoty procházející přes rozhraní či dva oddělené systémy svázané termálně. Výsledné struktury se jeví jako spojitě přecházející přes toto nepropustné rozhraní. Pokud bychom vstupní model neznali (a nevěděli, že anomálie jsou termálně indukované), mohli bychom tyto vzniklé anomálie interpretovat jako spojitě procházející přes rozhraní.

Pro model s kompozitním rozhraním s mechanickou vazbou v hloubce 1000 km (model B) jsme schopni detekovat proti sobě seismicky rychlé a pomalé struktury. Anomálie vzniklé ve spodní vrstvě však rozlišíme pouze těsně pod nepropustným rozhraním.

Tomografická inverze (námi používaná formulace) nerozliší úzké vertikální struktury ve velkých hloubkách. V modelu s nepropustným rozhraním v hloubce 1000 km s výrazným nárůstem viskozity ve spodní vrstvě (model C) testujeme rozlišitelnost velmi širokých anomálií pod rozhraním v hloubce 1000 km. Tyto výrazné anomálie jsme schopni rozlišit, jejich amplitudy jsou však podhodnocené a mají díky vlivu regularizace větší vlnovou délku než vstupní struktury.

V případě modelu odvozeného z celoplášťového tečení (model D) jsme schopni rozlišit spojitost některých anomálií od povrchu až do hloubky kolem 1000 km. Záleží však na jejich vlnové délce, amplitudě a sklonu.

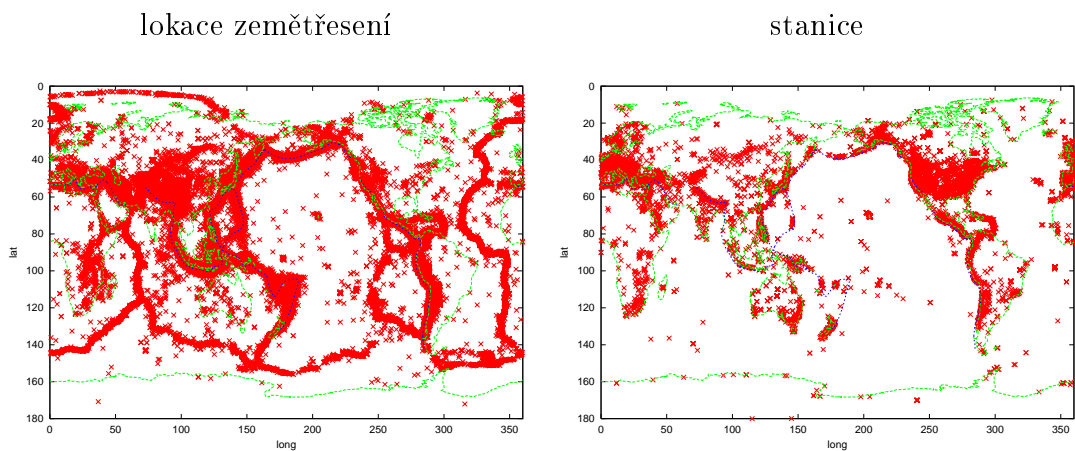
Detailním rozlišením různých stylů plášťové konvekce pomocí seismické tomografické inverze se dosud nikdo nezabýval. Podobně formulovanou úlohou (seismickou tomografickou inverzí syntetických dat odvozených z plášťové konvekce) se však zabývali také Bunge a Davies [5]. Provedli inverzi časů příchodu vln P a pomocí

buňkové parametrizace (rozlišení 100 km radiálně, $1^\circ \times 1^\circ$ na rovníku laterálně) v třírozměrném modelu s reálným rozložením zdrojů a přijímačů. Syntetická data odvodili z jednoho modelu celoplášťové konvekce s viskozitou rostoucí s hloubkou. Ukazují rozlišení seismické tomografie v různých oblastech Země (vlivem nerovnoměrného pokrytí paprsky je rozlišení vstupních struktur dobré na severní polokouli a špatné na jižní polokouli). Došli k závěru, že geodynamické struktury jsou vystižitelné zejména v oblastech dávných subdukcí. My jsme se naproti tomu zabývali jednodušší dvourozměrnou úlohou, ale syntetické testy jsme prováděli pro více modelů plášťové konvekce.

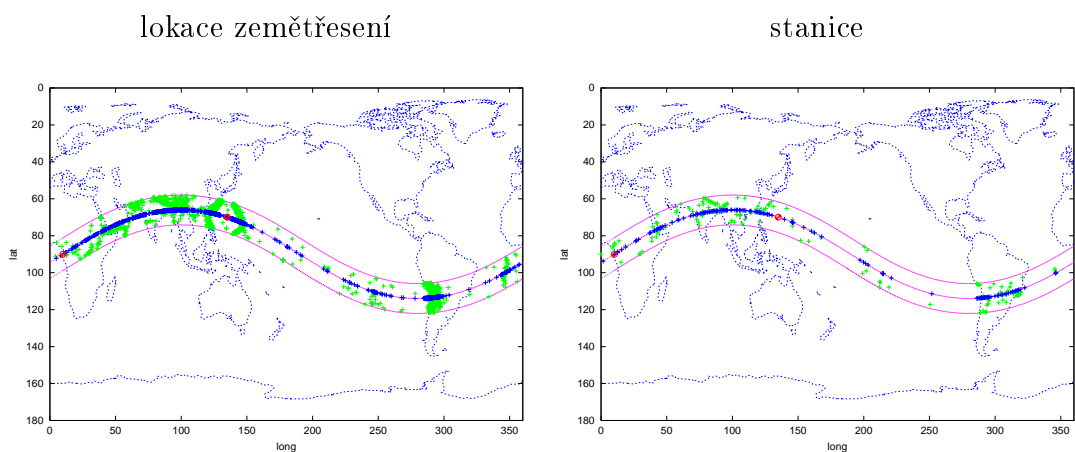
V budoucnu by bylo dobré zahrnout do syntetické obrácené úlohy i jiné než P a pP fáze (např. PKP vlny – použitím této fáze bychom mohli dosáhnout lepšího rozlišení nad rozhraním jádro-plášť [15]). Vzhledem k velké závislosti výsledku na koeficientu tlumení by bylo vhodné vyzkoušet i jiný druh regularice než minimalizaci modelového vektoru. Největším problémem však zřejmě zůstává dvourozměrné zjednodušení. Nemůžeme určit, jestli špatné rozlišení úzkých vertikálních struktur a rozmazání je způsobeno pouze vlivem regularizace nebo i dvourozměrným zjednodušením úlohy. Proto bude nutné takovéto podrobné syntetické testy provést i pro trojrozměrnou úlohu.

Příloha A

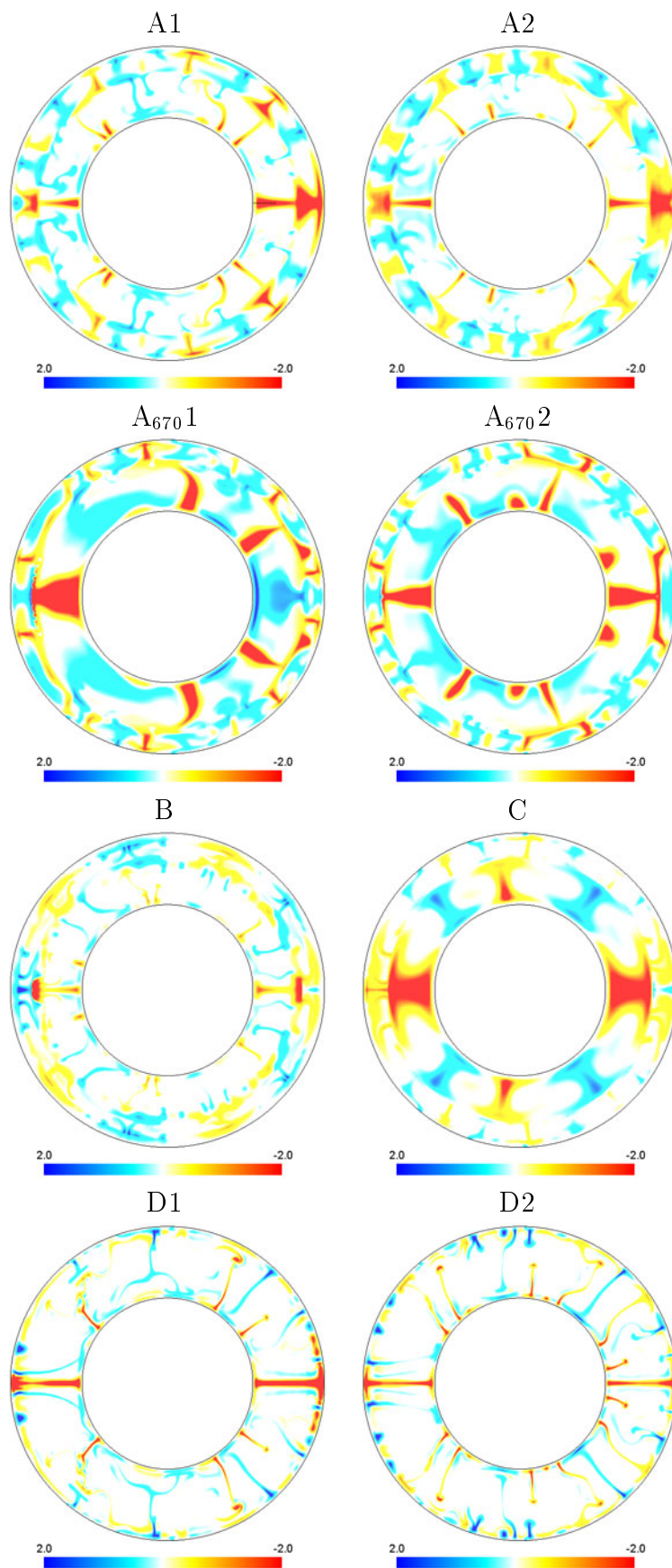
Obrazová příloha



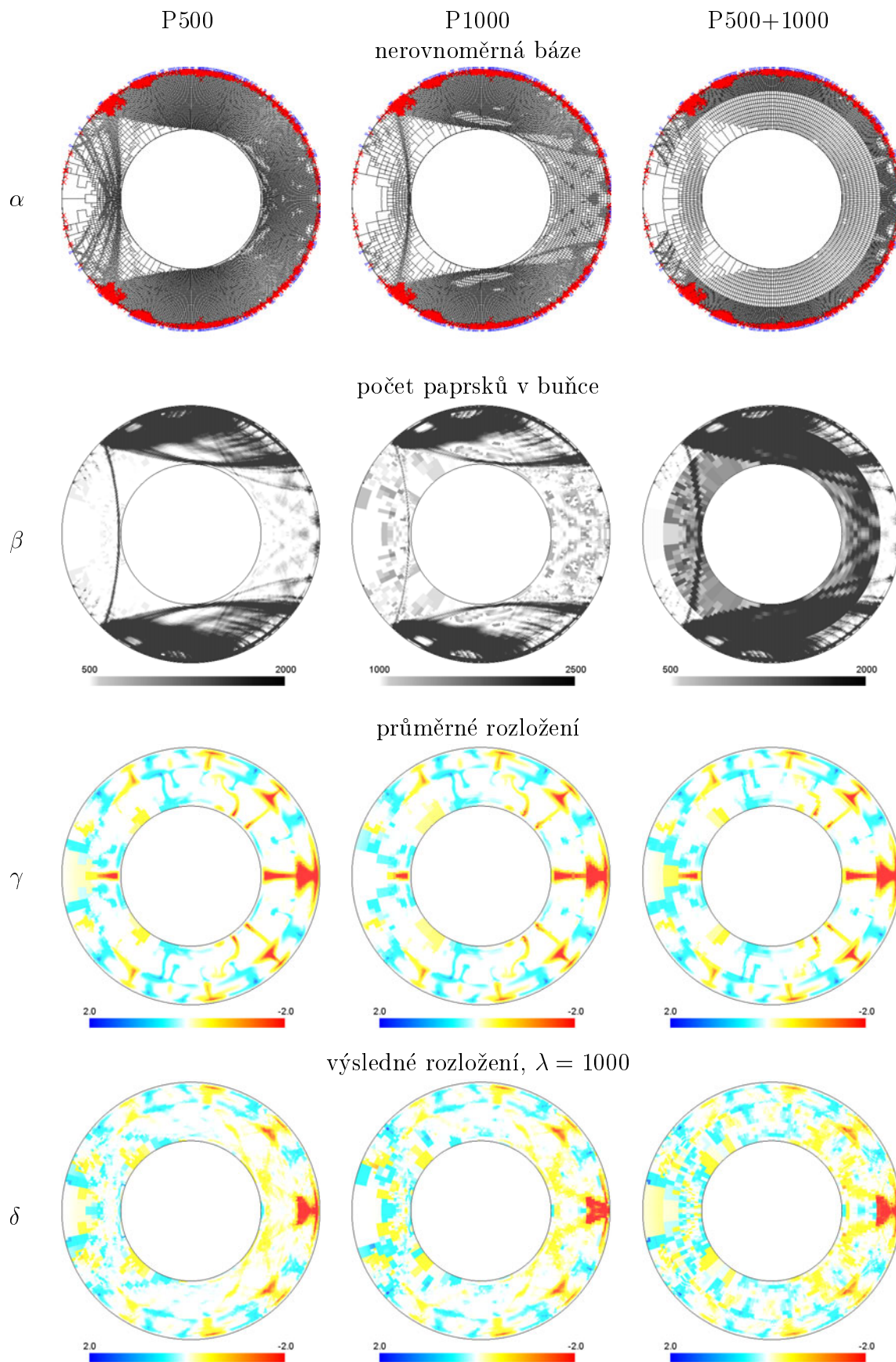
Obrázek A.1: Lokace zemětřesení a stanice sítě ISC (1964-2001), zemětřesení pro $m_B > 4.5$; zeleně vyznačeny kontinenty, modře subdukční zóny, červeně zemětřesení, resp. stanice.



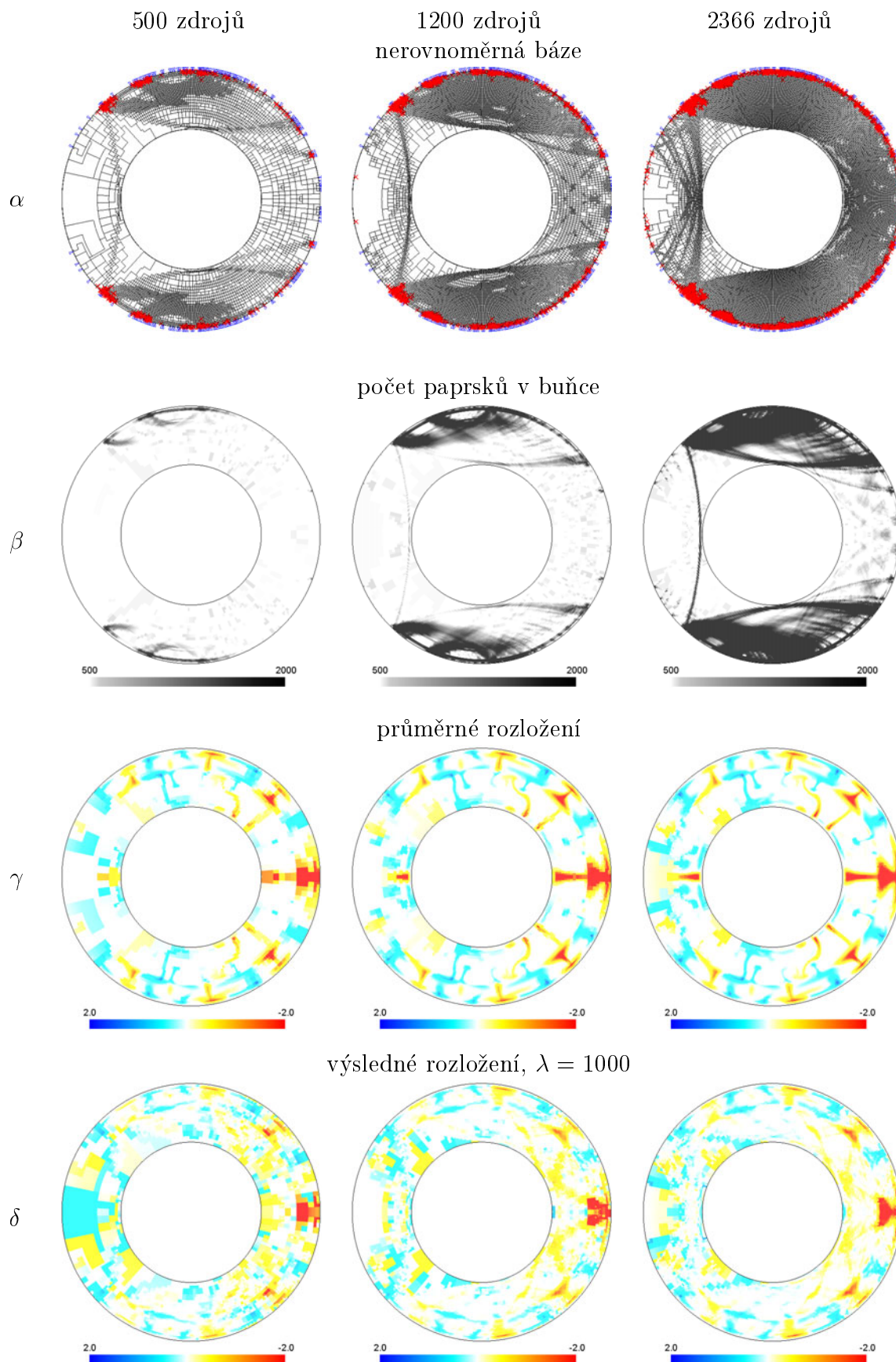
Obrázek A.2: Zdroje a přijímače splňující zadané podmínky: $m_B > 4.5$, pološířka pásu 8° , minimální vzdálenost zdrojů 2° laterálně a 2 km radiálně, minimální vzdálenost přijímačů 0.5° ; červeně vyznačeny body definující hlavní kružnici, zeleně body splňující zadané podmínky, modře průmět do hlavní roviny.



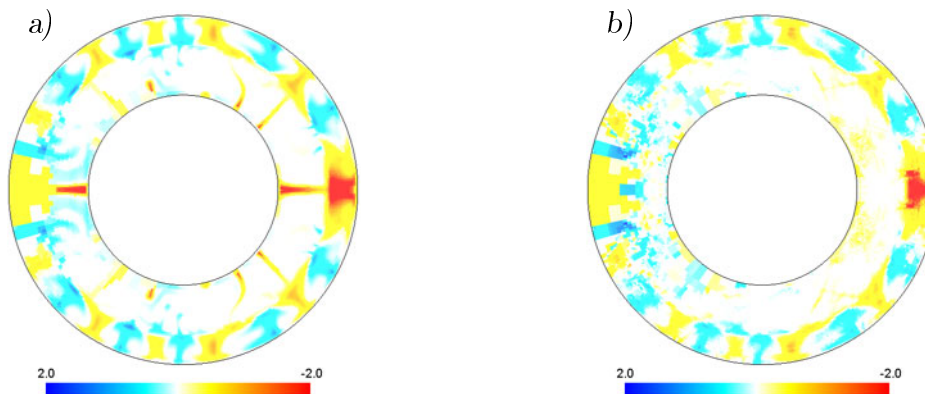
Obrázek A.3: Modely odchylek seismických rychlostí vzešlých z termální konvekce; škály jsou uvedeny v procentech relativních odchylek seismických rychlostí.



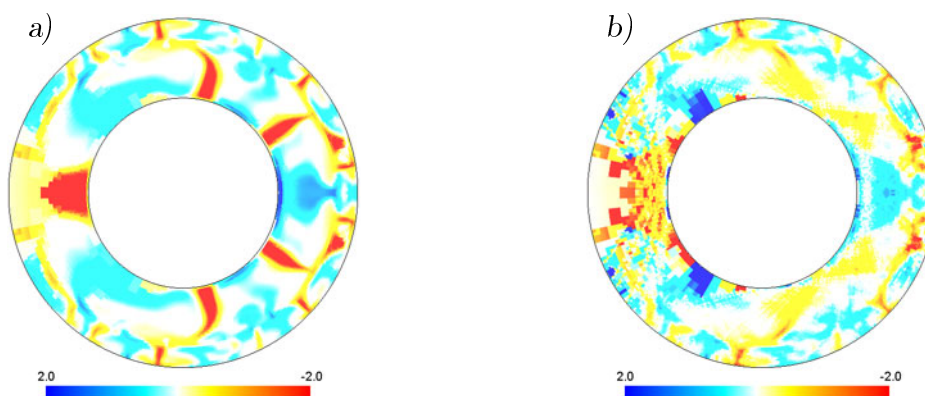
Obrázek A.4: Vliv parametrizace na výsledek obrácené úlohy pro $\lambda = 1000$; první sloupec – parametrizace P500, druhý sloupec – parametrizace P1000, třetí sloupec – parametrizace P500+1000; červeně vyznačeny zdroje, modře přijímače; škály průměrného a výsledného rozložení uvedeny v procentech relativních odchylek seismických rychlostí.



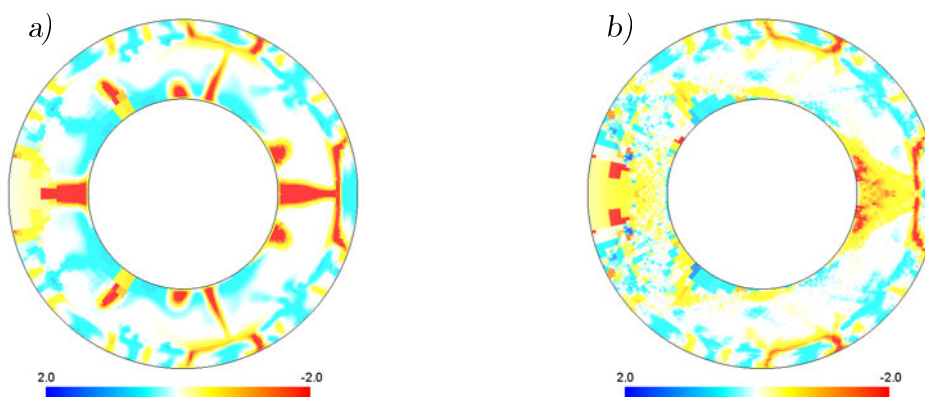
Obrázek A.5: Vliv počtu paprsků na výsledek obrácené úlohy pro $\lambda = 1000$; první sloupec – 500 zdrojů, druhý sloupec – 1200 zdrojů, třetí sloupec – 2366 zdrojů; červeně vyznačeny zdroje, modře přijímače; škály průměrného a výsledného rozložení uvedeny v procentech relativních odchylek seismických rychlostí.



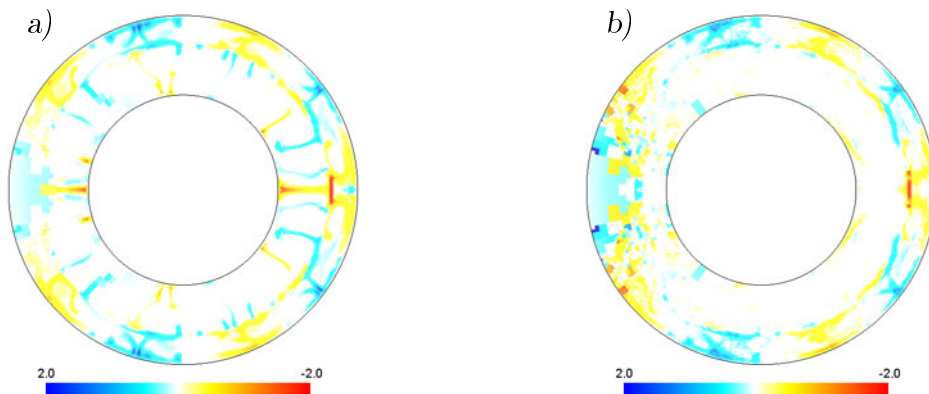
Obrázek A.6: Výsledek inverze pro model A2; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 500$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.



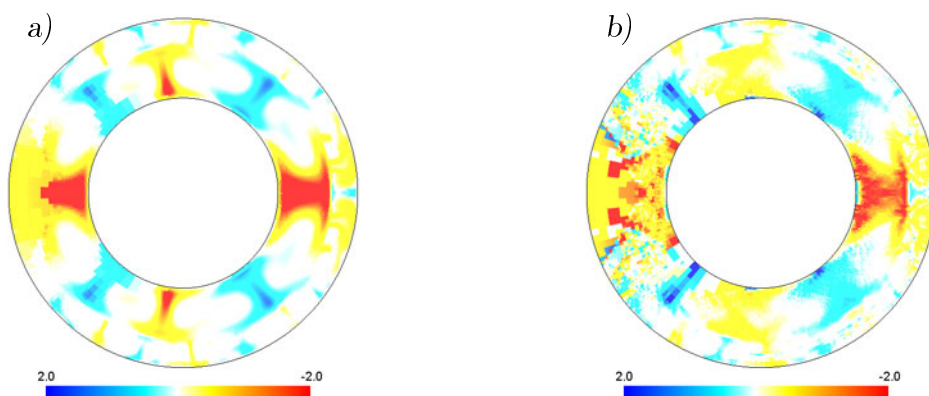
Obrázek A.7: Výsledek inverze pro model A₆₇₀₁; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 500$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.



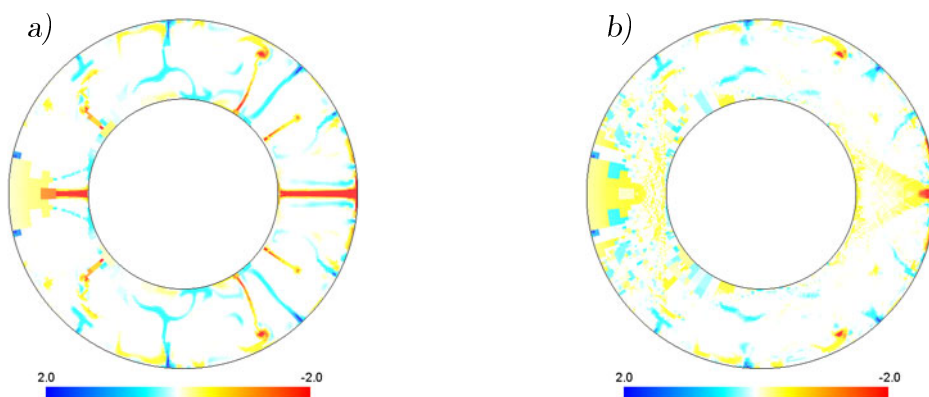
Obrázek A.8: Výsledek inverze pro model A₆₇₀₂; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 500$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.



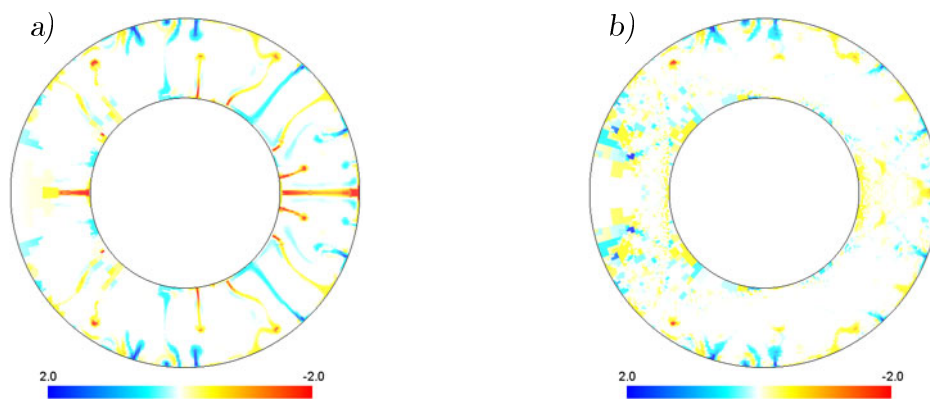
Obrázek A.9: Výsledek inverze pro model B; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 500$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.



Obrázek A.10: Výsledek inverze pro model C; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 200$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.



Obrázek A.11: Výsledek inverze pro model D1; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 500$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.



Obrázek A.12: Výsledek inverze pro model D2; a) – průměrné rozložení pro parametrizaci P500; b) – výsledné rozložení pro $\lambda = 500$; škály jsou v procentech odchylek rychlostí od referenčního modelu.

Literatura

- [1] Abers, G. G., Roecker, S. W.: *Deep Structure of an Arc-continent Collision: Earthquake Relocation and Inversion for Upper Mantle P- and S-wave Velocities Beneath Papua New Guinea*, Journal of Geophysical Research, 96, 6379-6401, 1991
- [2] Anderson, D.: *The Case of Irreversible Chemical Stratification*, International Geology Review, 44, 97-116, 2002
- [3] Bijwaard, H., Spakman, W., and Engdahl E.R.: *Closing the Gap Between Regional and Global Travel Time Tomography*, Journal of Geophysical Research, 103, 30055-30075, 1998
- [4] Bijwaard, H.: *Seismic Travel-time Tomography for Detailed Global Mantle Structure*, PhD thesis, Utrecht University, 1999
- [5] Bunge, HP, and Davies, JH: *Tomographic Images of a Mantle Circulation Model*, Geophysical Research Letters, 28, 78-80, 2001
- [6] Červený, V., Klimeš, L., Pšenčík, I.: *Complete Seismic-Ray Tracing in Three-Dimensional Structures*
- [7] Čížková, H., Čadek, O., van den Berg, A. P., Vlaar, N: *Can Lower Mantle Slab-like Seismic Anomalies be Explained by Thermal Coupling Between the Upper and Lower Mantle?*, Geophysical Research Letters, 26, 1501-1504, 1999
- [8] Čížková, H., Matyska, C.: *Layered Convection with an Interface at a Depth of 1000 km: Stability and Generation of Slab-like Downwellings*, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 141, 269-279, 2004
- [9] Dziewonski, A.M., Anderson, D.L.: *Preliminary Reference Earth Model*, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 25, 297-356, 1981
- [10] Dziewonski, A. M.: *Mapping the Lower Mantle: Determination of Lateral Heterogeneity up to Degree and Order 6*, Journal of Geophysical Research, 89, 5929-5953, 1984
- [11] Fukao, Y., To, A., Obayashi, M.: *Whole Mantle P Wave Tomography Using P and PP-P Data*, Journal of Geophysical Research, 108, 2003

- [12] Inoue, H., Fukao, Y., Tanabe, T., Ogata, Y.: *Whole Mantle P-wave Travel Time Tomography*, Physics of The Earth and Planetary Interiors, 59, 294-328, 1990
- [13] ISC International Seismological Centre, On-line Bulletin, <http://www.isc.ac.uk/Bull>, International Seismological Centre, Thatcham, United Kingdom, 2001
- [14] Kárason, H., van der Hilst, R. D.: *Constraints on Mantle Convection from Seismic Tomography*, History and Dynamics of Plate Motion, Geophysical Monograph 121, editoři M.A. Richards, R. Gordon, R.D. van der Hilst, 277-288, American Geophysical Union, 2000
- [15] Kárason, H., van der Hilst, R. D.: *Tomographic Imaging of the Lowermost Mantle with Differential Times of Refracted and Diffracted Core Phases (PKP, P_{diff})*, Journal of Geophysical Research, 106, 6569-6587, 2001
- [16] Karato, S.: *Importance of Anelasticity in the Interpretation of Seismic Tomography*, Geophysical Research Letters, 20, 1623-1626, 1993
- [17] Klimeš, L.: *Application of the Medium Covariance Functions to Travel-time Tomography*, Pure and Applied Geophysics, 159, 1791-1810, 2002
- [18] Li, X.-D., Romanowicz, B.: *Global Mantle Shear-Velocity Model Developed Using Nonlinear Asymptotic Coupling Theory*, Journal of Geophysical Research, 101, 22245-22272, (1996)
- [19] Matyska, C.: *Axisymmetry of Mantle Aspherical Structures*, Geophysical Research Letters, 22, 521-524, 1995
- [20] Montagner, J.-P., Guillot, L.: *Seismic Anisotropy in the Earth Mantle*, editoři E. Boshi, G. Ekstrom, A. Morelli, Problems in Geophysics for the New Millennium, Bologna, Editrice Composti, 217-253, 2000
- [21] Montelli, R., Nolet, G., Dahlen, F. A., Masters, G., Engdhal, E. R., Hung, S.-H.: *Finite-Frequency Tomography Reveals a Variety of Plumes in the Mantle*, Science, 303, 338-343, 2004
- [22] *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing, Second Edition*, Cambridge University Press, 1992
- [23] Paige, C. C., Saunders, M. A.: *LSQR: An Algorithm For Sparse Linear Equations and Sparse Least Squares*, ACM Transactions on Mathematical Software 8, 43-71, 1982
- [24] Saad, Y.: *SPARSKIT*
<http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/sparskit.html>
- [25] Spakman, W., and Bijwaard, H.: *Optimization of Cell Parametrization for Tomographic Inverse Problems*, Pure and Applied Geophysics, 158 1401-1423, 2001

- [26] Su, W.-J., Woodward, R. L., Dziewonski, A. M.: *Degree-12 Model of Shear Velocity Heterogeneity in the Mantle*, Journal of Geophysical Research, 99, 4945-4980, 1994
- [27] Tarantola, A.: *Inverse Problem Theory*, Elsevier, Amsterdam, 1987
- [28] van der Hilst, R.D., Widiyantoro, S., Engdahl, E.R.: *Evidence for Deep Mantle Circulation from Global Tomography*, Nature, 386, 578-584, 1997.
- [29] van der Hilst, R.D., Kárason, H.: *Compositional Heterogeneity in the Bottom 1000 Kilometers of Earth's Mantle: Toward a Hybrid Convection Model*, Science, 283, 1885-1888, 1999
- [30] Vasco, D. W., Johnson, L. R., Pulliam, R. J., Earle, P. S.: *Robust Inversion of IASP91 Travel Time Residuals for Mantle P and S Velocity Structure, Earthquake Mislocations, and Station Corrections*, Journal of Geophysical Research, 99, 13727-13755, 1994
- [31] Vasco, D. W., Johnson, L. R., Marques, O.: *Global Earth Structure: Inference and Assessment*, Geophysical Journal International, 137, 381-407 1999
- [32] Vasco, D., Johnson, L. R., Marques, O.: *Resolution, Uncertainty, and Whole Earth Tomography*, Journal of Geophysical Research, 108, 2003
- [33] Wen, L., Anderson, D.: *Layered Mantle Convection? A Model for Geoid and Topography*, Earth and Planetary Science Letters, 146, 367-377, 1997
- [34] Widiyantoro, S., van der Hilst, R. D.: *Structure and Evolution of Litospheric Slab Beneath the Sunda Arc, Indonesia*, Science, 271, 1566-1570, 1996
- [35] Widiyantoro, S., Kennett, B. L. N., van der Hilst, R. D.: *Extending Shear Wave Tomography for the Lower Mantle Using S and SKS Arrival-time Data*, Earth Planets Space, 50, 999-1012, 1998
- [36] <http://sw3d.mff.cuni.cz>
- [37] <http://www.stanford.edu/group/SOL/software/lsqlr.html>