Posudek na diplomovou práci

David Jurenka, Nerozhodnutelnost struktury racionálních čísel

katedra logiky FF UK, září 2006

Nerozhodnutelnost struktury přirozených čísel a na druhé straně rozhodnutelnost struktury reálných čísel jsou důležité výsledky logiky získané v minulém století. S určitou znalostí z teorie čísel lze dokázat, že i struktura celých čísel je nerozhodnutelná. J. Robinsonová ve svém článku z r. 1949 dokázala nerozhodnutelnost i struktury racionálních čísel. Výsledky z teorie čísel použité v tomto důkazu, tj. v důkazu, že přirozená čísla tvoří množinu neparametricky definovatelnou ve struktuře racionálních čísel, jsou hluboké a obtížné.

V kapitolách 3, 4 a 5 si autor postupně připravuje potřebný matematický aparát. Je to v kap. 3 modulární aritmetika, kvadratická rezidua a zákon kvadratické reciprocity, v kap. 4 věta o dvou čtvercích a věta o čtyřech čtvercích, v kap. 5 kvadratické formy. Těžiště práce je v kapitole 6. V ní jsou vyslovena dvě lemmata charakterizující řešitelnost jistých rovnic v oboru racionálních čísel, a to s použitím materiálu z předchozích kapitol. U obou lemmat je dokázána snažší část jejich tvrzení, tj. jedna polovina ekvivalence, a pak je vysvětleno, jak z těchto lemmat plyne Robinsonové věta. Ve zbývajících kapitolách 7 a 8 se autor vrací k nedokázaným částem obou lemmat a vysvětluje, proč je jejich důkaz obtížný a jak souvisejí s pokročilejšími partiemi teorie čísel, zejména s Hasse-Minkowského větou.

Práce nepodává kompletní a přitom elementární důkaz Robinsonové věty. To by ovšem znamenalo značné překročení diplomového úkolu a pravděpodobně to vůbec není možné. Autor ale přesto problém úspěšně zmapoval a napsal čtivé pojednání o definovatelnosti ve struktuře racionálních čísel, které obsahuje i výsledek o definovatelnosti přirozených čísel ve struktuře celých čísel. Práce neobsahuje nové výsledky, to by ale v této oblasti šlo jen těžko očekávat. Nicméně to, jak je látka rozvržena do kroků a dílčích důkazů a jak jsou tvrzení o řešitelnosti rovnic v oboru racionálních čísel převáděna na analogická tvrzení v oboru celých čísel nebo naopak, je autorův důležitý přínos. Některé důkazy, zejména v kapitole 6, považuji za autorovy vlastní.

Autorovi se podařilo napsat práci, která klade důraz na vysvětlení, nikoliv na co nejstručnější důkazy. Ocenil jsem, že na několika místech jsou i příklady. Robinsonové článek má pouhých šestnáct stránek a je těžko prostupný, zejména pro logiky. Předložená práce značně usnadňuje orientaci v problematice. Jako vedoucí práce chci zdůraznit, že pan Jurenka pracoval zcela samostatně, bez mé pomoci. Sám si vyhledal prameny a některé problémy konzultoval s význačnými odborníky, a to i v zahraničí. Zjistil přitom mnohem více, než je v práci nakonec napsáno.

Po stránce jazykové, pravopisné a typografické je práce zřetelně nadprůměrná. Pravopisné ani gramatické chyby jsem nenalezl, podání je čtivé, vizuální stránka je dobře zvládnutá. Autor dokonce použil málo běžné fonty; práce tak využívá všech výhod typografického systému TEX, avšak od většiny textů sázených TEXem se viditelně odlišuje.

Nemám k obsahu práce žádné námitky, pouze dvě otázky. Uplatnila se někde věta o dvou čtvercích? Lze na některých místech dodat něco o algoritmické efektivnosti, tj. o polynomiální počitatelnosti naznačených úloh? Mám například na mysli výpočet Legendrova symbolu, výpočet odmocniny kvadratického rezidua nebo určení, zda dané číslo je součtem dvou čtverců.

Práci celkově považuji za velmi zdařilou a jsem si jist, že na katedře logiky poslouží jako studijní materiál. Bylo by potěšující, kdyby se autorovi podařilo něco z výsledků práce publikovat.

Vítězslav Švejdar

V Praze dne 24.9.2006 RNDr Vítězslav Švejdar CSc, vedoucí práce