

Otázka rozhodnutelnosti, tj. otázka, zda existuje algoritmus, který by byl schopen rozhodnout o platnosti každé prvořádkové predikátové formule, se dostala na výsluní pozornosti matematiků ve dvacátých letech minulého století. Spolu s ní byla zkoumána i rozhodnutelnost druhořádkových formulí a obecně jakéhokoli matematického tvrzení. Souhrnně byly tyto otázky označovány jako Hilbertův Entscheidungsproblem a ještě roku 1930 Hilbert věřil v jejich kladné řešení. Roku 1936 však Alonzo Church ukázal, že samotná predikátová logika prvního řádu je nerozhodnutelná, a téhož roku pak Alan Turing představil dnes již klasický nerozhodnutelný problém, problém zastavení. Oba při tom ve svých pracech využili myšlenek, které formuloval Kurt Godel ve svém důkazu neúplnosti aritmetiky.

V otázce rozhodnutelnosti základních aritmetických struktur přinesl první významný výsledek Mojzesz Presburger, který roku 1929 dokázal rozhodnutelnost přirozených čísel s operací sčítání a konstantami 0 a 1. Nicméně hned následujícího roku vyplynulo z Godelových výsledků, že tatáž struktura včetně operace násobení již rozhodnutelná být nemůže. Tím byla zároveň vyřešena i otázka rozhodnutelnosti čísel celých, neboť pojem přirozeného čísla je v této struktuře definovatelný (viz kapitolu 4.2), a tak je možno v celých číslech reformulovat každou aritmetickou sentenci.

...