VISCOELASTIC DEFORMATION IN GEOPHYSICAL APPLICATIONS

KATEŘINA SLÁDKOVÁ

1. Obsah práce

Práce se zabývá numerickou simulací termální konvekce pro viskoelastickou tekutinu. Fyzikální parametry pro konvekci jsou voleny s ohledem na možné geofyzikální aplikace. Cílem práce je posoudit zda se pro dané parametry významně liší konvekce pro klasickou viskózní tekutinu (Navier–Stokes) a viskoelastickou tekutinu. K matematickému popisu je použit klasický Oberbeck–Boussinesq systém (viskózní tekutina) a jeho modifikace, ve které je v rovnici bilance hybnosti použit konstitutivní vztah pro viskoelastickou tekutinu (Maxwell, Oldroyd-B), přičemž zbývající rovnice systému jsou nezměněny.

Problém je řešen numericky v obdélníkové dvourozměrné oblasti, prostorová diskretizace je provedena metodou konečných diferencí, krokování v čase je řešeno pomocí Adams–Bashforth metody.

1.1. Dosažené výsledky.

Autorka implementovala numerickou metodu v jazyce Fortran za použití standardních knihovních funkcí pro úlohy lineární algebry/časovou integraci. Původní záměr uvažovat v konstitutivních vztazích pro viskoelastické tekutiny (Maxwell, Oldroyd-B) plnou objektivní derivaci,

$$\overset{\triangledown}{\mathbb{A}} =_{\mathrm{def}} \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial t} + \left[\nabla \mathbb{A}\right] \mathbf{v} - \mathbb{L}\mathbb{A} - \mathbb{A}\mathbb{L}^{\top}, \tag{1.1}$$

se bohužel nepodařilo naplnit. Z objektivní časové derivace (1.1) jsou uvažovány pouze první dva členy, zbývající dva členy vedou dle autorky k numerickým obtížím a výsledky pro modely s "úplnou" objektivní derivací nejsou v práci uvedeny.

Za účelem verifikace implementace daných numerických metod jsou výstupy numerických simulací (pro viskózní tekutinu) porovnány s výsledky pro standardní referenční úlohu, Blankenbach et al. (1989). Pro viskoelastické tekutiny je provedena klasická "inženýrská" verifikace pomocí zjemnění sítě/časového kroku. Pro Maxwell model jsou pak výsledky porovnány s (nepublikovanými) výsledky spolupracovníků autorky. Výsledky testů naznačují korektní implementaci zvolené numerické metody.

V závěru práce jsou diskutovány rozdíly mezi konvekcí v čistě viskózní tekutině a viskoelastické tekutině (Oldroyd-B, neúplná objektivní časová derivace). Je ukázáno, že pro vyšší hodnoty De jsou předpovědi založené na viskózním modelu a viskoelastickém modelu výrazně odlišné.

1.2. Přínos autora.

Všechny výše uvedené výsledky jsou, pokud není uvedeno jinak, původní a získané autorkou v průběhu řešení diplomové práce.

2. Hodnocení

2.1. Věcná kvalita práce.

Dosažené výsledky jsou originální a pozorování o výrazném rozdílu mezi konvekcí v čistě viskózní tekutině a viskoelastické tekutině je velmi zajímavé. Výsledky zpochybňují v geofyzikální komunitě zažité představy o nevýznamnosti viskoelastických efektů při termální konvekci.

2.2. Formální kvalita práce.

Formální kvalita práce je dobrá. Množství překlepů či jazykových chyb je minimální. (Velmi otravný je však systematický překlep "Fourrier law".) Grafická úprava je dobrá.

2.3. Doporučení.

Předloženou práci doporučuji uznat jako diplomovou práci.

3. Otázky/Připomínky

- Přechod k bezrozměrným veličinám by měl předcházet diskusi Oberbeck–Boussinesq aproximace. Rovnice (1.5)–(1.6) již představují redukovaný model, ve kterém byly jisté členy "zanedbány", protože jsou "malé". To lze provést pouze v bezrozměrné podobě rovnic.
- Rovnice (1.7) vychází z představy, že vnitřní energie je funkcí entropie a hustoty, což je v pořádku například pro viskózní tekutinu. Pro viskoelastickou tekutinu však do vnitřní energie vstupuje i "elastická" část a výklad rovnice (1.7) jako přímého důsledku (1.4) je přinejmenším sporný. Autorka by měla čtenáře na tuto potíž upozornit.
- Rovnice (1.11) je "napůl" sestavena z veličin s fyzikálním rozměrem a bezrozměrných veličin. Jestliže je De bezrozměrné číslo, tak pak mají členy $\mathbb{S}$ a $\mathrm{De}\overset{\triangledown}{\mathbb{S}}$ jiný fyzikální rozměr, což je pochopitelně špatně.

- Autorka neuvádí přehledným způsobem skutečné fyzikální parametry používané v geofyzikálních aplikacích. Jaká je kupříkladu hloubka vrstvy d, která je zajímavá z geofyzikálního pohledu? Jaké jsou hodnoty teplotní vodivosti a podobně pro plášť?
- Jaký je poměr délky stran výpočetní oblasti? Je poměr stran volen s nějakým záměrem? (Je známo, viz například Ahlers and Behringer (1978), že poměr délky stran má výrazný vliv na charakter konvekce. Jakou roli hraje tento efekt v geofyzikálních aplikacích?)
- V původní práci Oldroyd (1950) jsou navrženy dva modely, Oldroyd-A a Oldroyd-B, které se liší výběrem objektivní časové derivace. Existuje nějaký důvod proč je z geofyzikálního pohledu zajímavější model Oldroyd-B (upper convected derivative)?
- Volba sítě (viz kupříkladu obrázek 2.2) není na první pohled samozřejmá. Síť (sítě) je možné volit i jiným způsobem, v kontextu Navier–Stokes rovnic viz například Schumack et al. (1991). Existuje shoda, že daná volba sítě je pro daný problém nejvhodnější? Lze volbu sítě podpořit nějakými matematickými argumenty?

Mgr. Vít Průša, Ph.D.
Matematický ústav Univerzity Karlovy

Reference

Ahlers, G. and R. P. Behringer (1978). The Rayleigh–Bénard instability and the evolution of turbulence. *Suppl. Progress in Theor. Phys.* (64), 186–201.

Blankenbach, B., F. Busse, U. Christensen, L. Cserepes, D. Gunkel, U. Hansen, H. Harder, G. Jarvis, M. Koch, G. Marquart, D. Moore, P. Olson, H. Schmeling, and T. Schnaubelt (1989). A benchmark comparison for mantle convection codes. *Geophysical Journal International 98*(1), 23–38.

Oldroyd, J. G. (1950). On the formulation of rheological equations of state. *Proc. R. Soc. A-Math. Phys. Eng. Sci. 200*(1063), 523–541.

Schumack, M. R., W. W. Schultz, and J. P. Boyd (1991). Spectral method solution of the Stokes equations on nonstaggered grids. *J. Comput. Phys. 94*(1), 30–58.