Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tereza Ptáčková

Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice s podporou internetu

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika zaměřená na vzdělávání

Praha 2014

Ráda bych poděkovala doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc., vedoucí mé bakalářské práce, za neocenitelné rady v oblasti didaktiky matematiky a za zapůjčení a doporučení literatury.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Geometrická zobrazení ve středoškolské matematice s podporou internetu

Autor: Tereza Ptáčková

Katedra: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Katedra didaktiky matematiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá geometrickými zobrazeními v rovině vyučovanými na středních školách.
Práce má formu webových stránek, obsahuje řadu interaktivních prvků usnadňujících studentovi pochopení problému jako hypertextové odkazy či krokování postupu konstrukce. Práce obsahuje řadu řešených příkladů. Hlavní důraz je kladen na názornost řešení problémů, a to v podobě náčrtků a appletů s konstrukcí příkladů. Názornost je umocněna využitím appletů. Konstrukce se zobrazuje postupně podle jednotlivých kroků, jak student rýsuje na papír. V appletech s konstrukcí daného příkladu je každý krok konstrukce doplněn i příslušným symbolickým zápisem.
Vytvořené stránky mohou využívat studenti středních škol, ale i učitelé k demonstračním účelům.

Klíčová slova: Středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí, otočení, stejnolehlost

Title: Geometric transformation in secondary school mathematics with the support of internet

Author: Tereza Ptáčková

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc., Department of Mathematics Education

Abstract: This work deals with geometric transformation in a plane in high school mathematics.
The work is a web page, it contains several interactive components which help student to understand the problem like hyperlinks or stepping of the construction. The work contains several solved problems. Main emphasis is placed on illustration of problems in the form of drawings and construction. The illustration is better by using of applets. The applets show the steps of the construction one after another as the students proceed with the construction on a sheet of paper. Together with each step of construction its symbolic description is showed.
Created web page could be used by high-school students as well as teachers to demonstrate the problem.

Keywords: Point reflection, reflection symmetry, translation, rotation, homothecy

Obsah

Úvod

Běžně používané středoškolské materiály pro výuku geometrických zobrazení se nedostatečně věnují názornému vysvětlení problému. Náčrtky, usnadňující studentovi pochopit, jak zkonstruovat zadaný příklad, bývají malé, často černobílé, a někdy dokonce v učebnicích úplně chybí. Podobně je tomu s obrázky konstrukcí, ze kterých není patrný postup konstrukce. Ten občas bývá zaznamenán symbolicky. Problémem je, že ne každý student symbolickému zápisu rozumí.

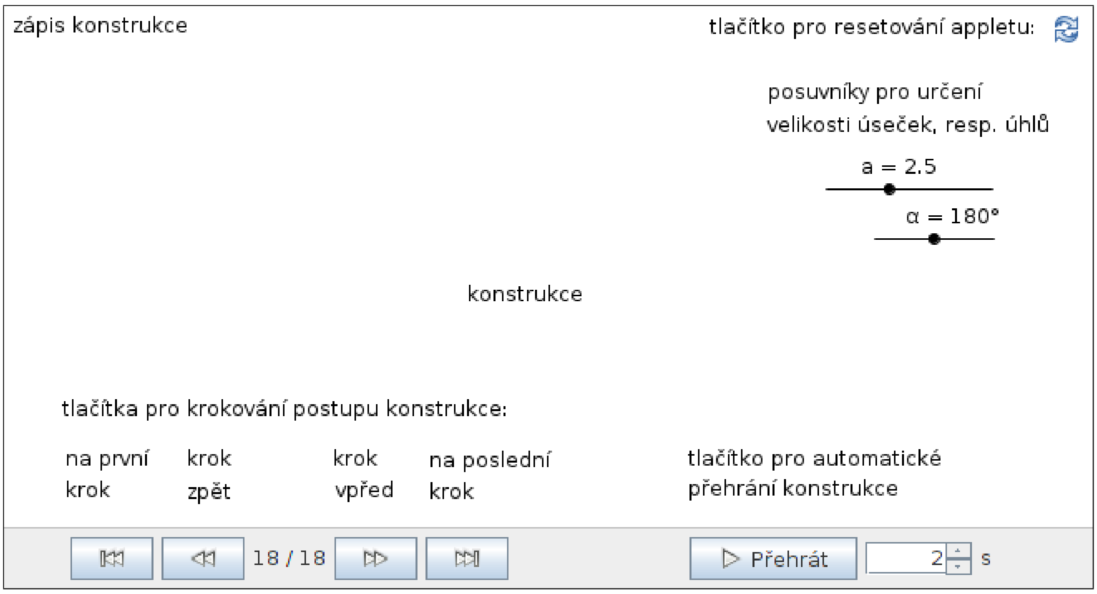
Zmíněné nedostatky jsou řešeny v rámci této práce pomocí interaktivních appletů. Práce obsahuje několik řešených příkladů. Každý řešený příklad je doplněn velkým náčrtkem, rozborem a appletem se zápisem konstrukce a jejími kroky. Během řešení příkladu mají studenti možnost nechat si zobrazit konstrukci po jednotlivých krocích během toho, jak sami rýsují na papír. Spolu s každým krokem se vždy zobrazí i příslušný symbolický zápis. To studentům pomáhá snáze pochopit, jak se píše formální zápis konstrukcí. Student tu také nalezne několik úloh, na kterých si může sám vyzkoušet, jak porozuměl dané látce.

Práce ve formě webové stránky bude umístěna na portálu středoškolské matematiky – webové stránce sloužící jako interaktivní výuková pomůcka pro středoškolské studenty i učitele.

Papírová forma práce se od webových stránek trochu liší. Předně tu nejsou dynamické prvky hojně využívané na stránkách. Převážně se jedná o applety, které jsou zde nahrazeny obrázky, v textu je na příslušný obrázek uveden odkaz. Dále pak chybí symboly pro odkrývání a skrývání textu, např. odpovědi na otázky k zamyšlení, a rejstřík pojmů, který je na webové stránce řešen formou odkazů na konkrétní definici. Proto doporučuji navštívit webové stránky.

Ovládání stránek

Součástí těchto stránek jsou applety vytvořené programem GeoGebra. K jejich zobrazení je třeba mít nainstalovanou Javu a mít ve webovém prohlížeči povolen JavaScript.



Obrázek 1: Applet

V appletech se kromě konstrukce zobrazí i zápis konstrukce. Při potížích s appletem doporučuji obnovit stránku. Ovládací prvky appletu a umístění objektů v appletu jsou znázorněny v následujícím obrázku (obr. 1).

Body v appletech jsou značeny kolečkem. Prázdným kolečkem jsou vyznačeny body, se kterými se dá v appletu pohybovat, a ovlivnit tak výslednou konstrukci. Plným kolečkem jsou pak vyznačeny závislé body, tedy body, se kterými se nedá v appletu pohybovat. Posuvníky v appletech, jimiž se dá měnit délka různých úseček nebo velikosti úhlů, jsou nastavené tak, aby se pro konkrétní hodnoty konstrukce zobrazila v appletu celá. Některými dalšími objekty můžete pohybovat a sledovat, jak se bude měnit řešení v závislosti na umístění daných objektů.

Seznam používaných symbolů

$X, Y, \ldots$	bod $X, Y, \ldots$
$p, q, \ldots$	přímka $p, q, \ldots$
$\leftrightarrow XY$	přímka určená body X, Y
$\mapsto XY$	polopřímka XY s počátečním bodem X
XY	úsečka s krajními body X, Y
$\mathbf{XY}$	orientovaná úsečka s krajními body X, Y
ρ	rovina
$\sphericalangle\ AVB$	úhel s vrcholem V, ramena tvoří polopřímky VA a VB
$\triangle\ ABC$	trojúhelník s vrcholy A, B, C
t_a	těžnice z vrcholu A trojúhelníka ABC
v_a	výška na stranu a trojúhelníka ABC
$\square\ ABCD$	čtverec s vrcholy A, B, C, D
$ABCD\ldots$	n-úhelník s vrcholy $A, B, C, D, \ldots$
$k(S,\ r)$	kružnice se středem v bodě S a poloměrem r
th	Thaletova kružnice
$P \in p$	bod P leží na přímce p
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$p \perp q$	přímka p je kolmá na přímku q
$P \in p \cap q$	bod P je průsečíkem přímek p a q
$\lvert XY \rvert$	délka úsečky XY, vzdálenost bodů X, Y
$\lvert \mathbf{XY} \rvert$	délka orientované úsečky $\mathbf{XY}$, vzdálenost bodů X, Y
$\lvert \sphericalangle\ AVB \rvert$	velikost úhlu AVB
f	zobrazení f
$f(p) = p'$	přímka p' je obrazem přímky p v zobrazení f
$f : X \to X'$,	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení f
$f(X) = X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení f
$O(o)$	osová souměrnost s osou souměrnosti o
$S(S)$	středová souměrnost se středem souměrnosti S
$T(\mathbf{XY})$	posunutí určené orientovanou úsečkou $\mathbf{XY}$, X je počáteční bod úsečky, Y je koncový bod úsečky
$R(S,\ \alpha)$	otočení se středem otočení S a úhlem otočení α
$H(S,\ k)$	stejnolehlost se středem S a koeficientem k

1. Základní pojmy

1.1 Zobrazení v rovině

Pojďme si ujasnit, co to vlastně zobrazení v rovině je.

Definice. *Zobrazení f v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny.*
Bod X se nazývá vzor, bod X' obraz bodu X; zapisujeme $f(X) = X'$ nebo $f : X \rightarrow X'$.

1.1.1 Prosté zobrazení

Definice. *Zobrazení f v rovině nazýváme prosté právě tehdy, když každé dva různé body X, Y zobrazí na dva různé body X', Y' roviny.*

1.2 Samodružné prvky

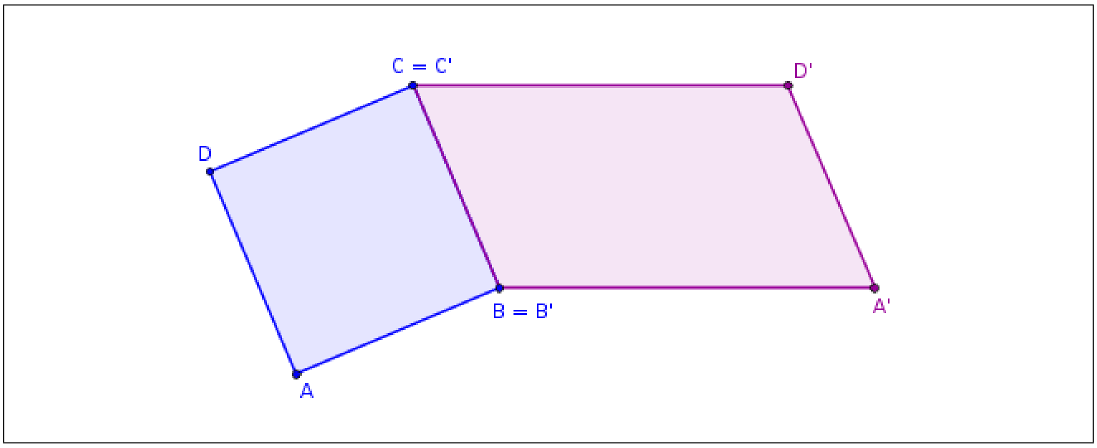
Pod pojmem samodružné prvky zobrazení f budeme rozumět samodružné body a samodružné přímky daného zobrazení.

Definice. *Je dáno zobrazení f v rovině.*
Samodružný bod zobrazení f je takový bod X, který se zobrazí sám na sebe, tj. $f(X) = X$.
Samodružná přímka zobrazení f je taková přímka p, která se zobrazí sama na sebe, tj. $f(p) = p$.

1.2.1 Příklady

Příklad 1

Podívejme se na následující obrázek (obr. 1.1), kde se čtverec $ABCD$ v zobrazení f zobrazil na kosodélník $A'B'C'D'$.



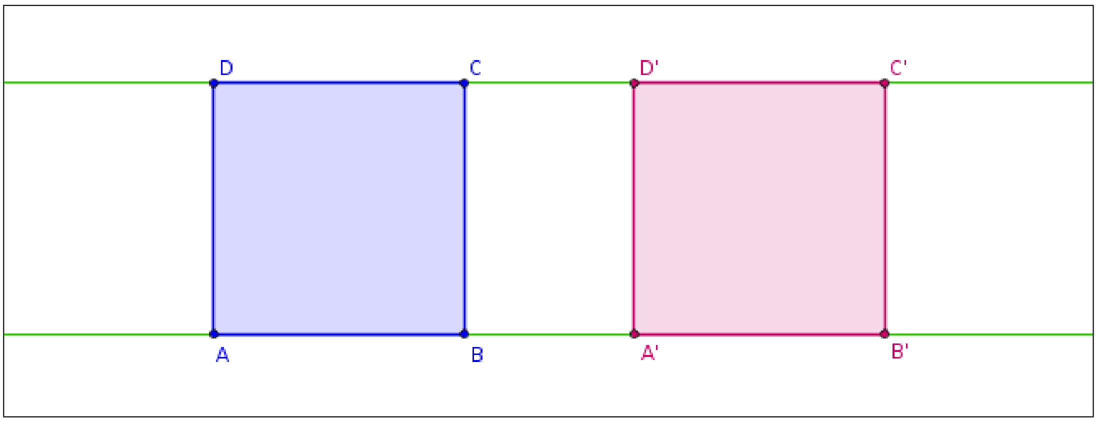
Obrázek 1.1: Samodružné prvky

Určete samodružné prvky daného zobrazení.

Samodružné body jsou body B a C, samodružná přímka je přímka určená body B, C.

Příklad 2

Čtverec $ABCD$ se v zobrazení f zobrazil na čtverec $A'B'C'D'$ (obr. 1.2).



Obrázek 1.2: Samodružné prvky

Určete samodružné prvky daného zobrazení.

Dané zobrazení nemá žádné samodružné body, samodružné přímky jsou přímky AB, CD a všechny přímky s nimi rovnoběžné.

1.3 Orientovaná úsečka

V geometrii jsme se často setkávali s pojmem úsečka. U úsečky není podstatné, který z krajních bodů je počáteční a který je koncový. U orientované úsečky nás to zajímat bude.

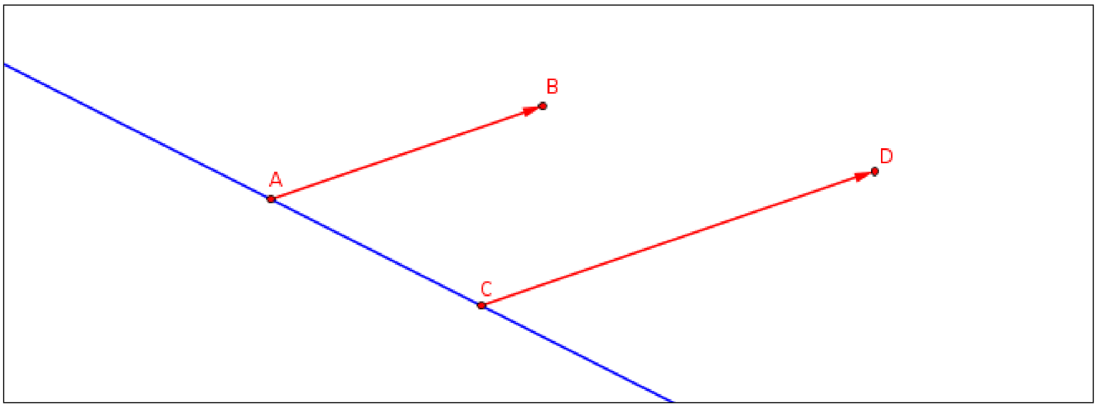
Definice. *Orientovaná úsečka* **AB** *je úsečka, kde bod A je počátečním bodem a bod B je koncovým bodem úsečky.*

Orientovaná úsečka **AB** se graficky znázorňuje šipkou u koncového bodu.

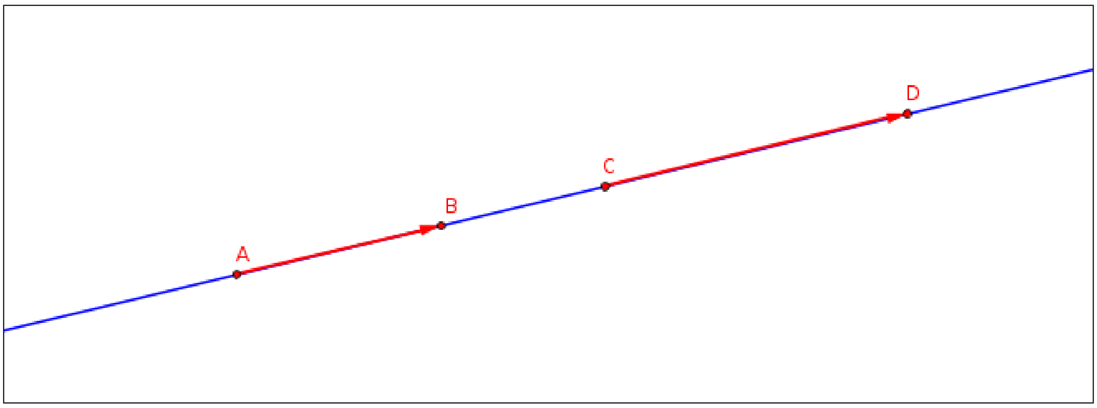
Velikost orientované úsečky **AB** se rovná velikosti úsečky AB, tj. vzdálenosti bodů A, B. Speciálním případem je tzv. *nulová orientovaná úsečka*, úsečka s nulovou délkou. Orientovaná úsečka má nulovou délku právě tehdy, když její počáteční bod splývá s jejím koncovým bodem.

Dále nás bude zajímat *směr orientovaných úseček*. Řekneme, že dvě nenulové rovnoběžné orientované úsečky **AB**, **CD** mají stejný směr (jsou shodně orientované), pokud:

- neleží na jedné přímce a body B, D leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC (obr. 1.3),
- nebo leží na jedné přímce a polopřímka CD je částí polopřímky AB, nebo naopak polopřímka AB je částí polopřímky CD (obr. 1.4).



Obrázek 1.3: Orientované úsečky stejného směru



Obrázek 1.4: Orientované úsečky stejného směru

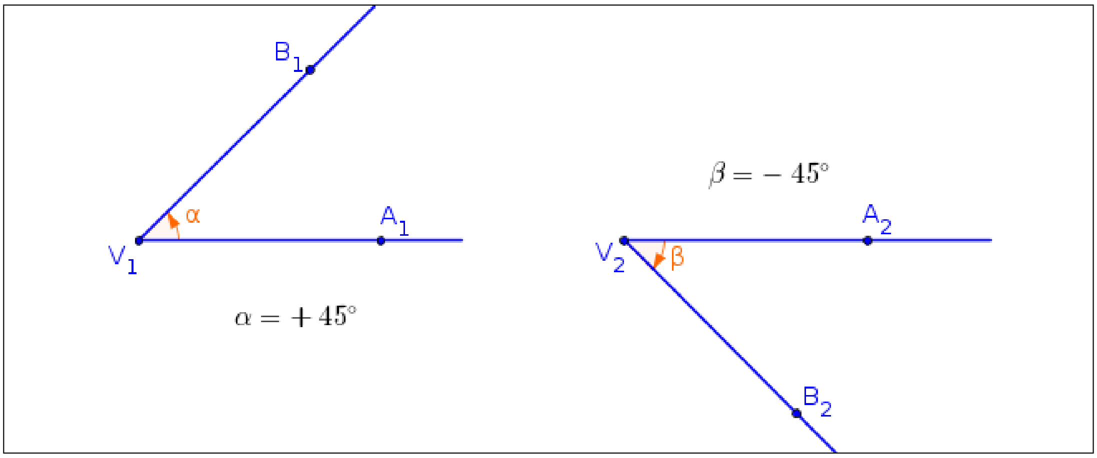
1.4 Orientovaný úhel

S pojmem úhel jste se zajisté již v geometrii setkali. Úhel AVB chápeme jako část roviny, která je ohraničená dvěma polopřímkami VA, VB. Polopřímky VA, VB se nazývají ramena úhlu. Zavedeme si teď nový pojem, který budeme později používat.

Definice. *Orientovaný úhel je úhel, u kterého je určeno, které jeho rameno je počáteční a které je koncové.*
Orientace úhlu AVB je dána pořadím písmen v jeho zápisu, počáteční rameno je rameno VA a koncové rameno je rameno VB.

Orientace úhlu se někdy vyznačuje obloučkem se šipkou vedoucí od počátečního ramene ke koncovému (obr. 1.5).

Počáteční a koncové rameno orientovaného úhlu si můžeme představit jako hodinové ručičky. Koncové rameno se může otáčet buď po směru pohybu hodinových ručiček nebo proti směru. Podle směru pohybu hovoříme o kladném, resp. záporném smyslu otáčení. Pokud se koncové rameno otáčí proti směru pohybu ručiček, hovoříme o *kladném smyslu otáčení* (obr. 1.5 vlevo), pokud se otáčí ve směru pohybu hodinových ručiček, hovoříme o *záporném smyslu otáčení* (obr. 1.5 vpravo). Smysl otáčení dáváme najevo znaménkem. Je-li znaménko kladné, jde o kladný smysl otáčení, je-li znaménko záporné, jde o záporný smysl otáčení (obr. 1.5). Tuto myšlenku potřebujeme k zavedení pojmu základní velikost orientovaného úhlu.



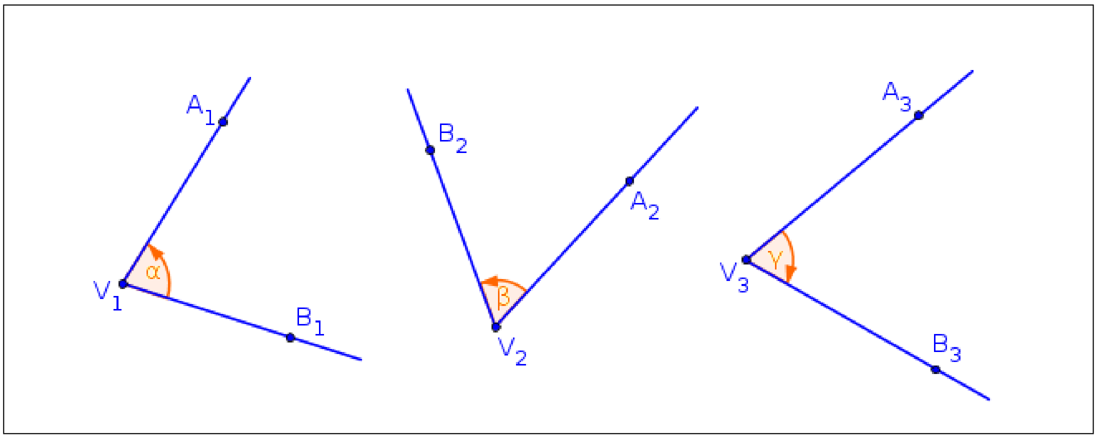
Obrázek 1.5: Orientovaný úhel

Definice. *Základní velikost orientovaného úhlu AVB je velikost úhlu AVB, který vytvoří polopřímka VA otočením v kladném smyslu do polopřímky VB.*

Základní velikost orientovaného úhlu je tedy číslo z intervalu $\langle 0; 360°)$, tedy $\langle 0; 2\pi)$ v radiánech. Jestliže počáteční rameno orientovaného úhlu splývá s koncovým, nazýváme tento úhel *nulový orientovaný úhel.*

Pojem základní velikost zavádíme proto, že velikost orientovaného úhlu AVB je každá hodnota $\alpha + k \cdot 360°$, příp. $\alpha + k \cdot 2\pi$, kde α je základní velikost úhlu AVB a k je libovolné celé číslo.

Orientované úhly α, β jsou shodně orientované, pokud mají stejný smysl otáčení, tj. oba úhly mají kladný smysl otáčení, nebo mají oba záporný smysl otáčení.
V následujícím obrázku (obr. 1.6) jsou orientované úhly α, β shodně orientované, úhly α, γ nejsou shodně orientované.



Obrázek 1.6: Orientované úhly

2. Shodná zobrazení

2.1 Úvod

Definice. *Zobrazení f v rovině je shodné zobrazení, jestliže pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí $|XY| = |X'Y'|$.*
Shodné zobrazení v rovině se rovněž nazývá shodností.

Z definice shodného zobrazení plyne, že každé shodné zobrazení je prosté.

Speciálním případem shodného zobrazení je identické zobrazení, *které každému bodu X roviny přiřazuje jako obraz ten samý bod $f(X) = X$.*
Identické zobrazení se rovněž nazývá identitou.

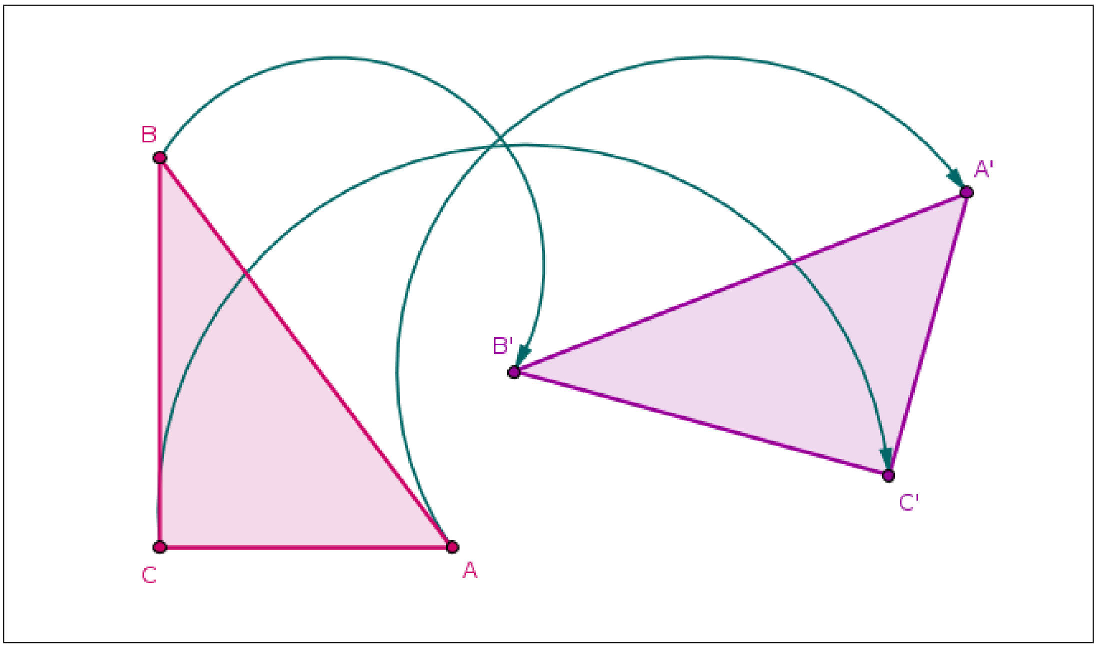
Protože je každý bod v identitě samodružný, je i každá přímka samodružná.

V každém shodném zobrazení platí:

- Obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní shodná, tj. má stejnou délku.
- Obrazem každé přímky AB je přímka $A'B'$, obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.

2.1.1 Shodné útvary

Definice. *Shodné útvary jsou takové útvary, které je možno přemístit tak, že se kryjí.*



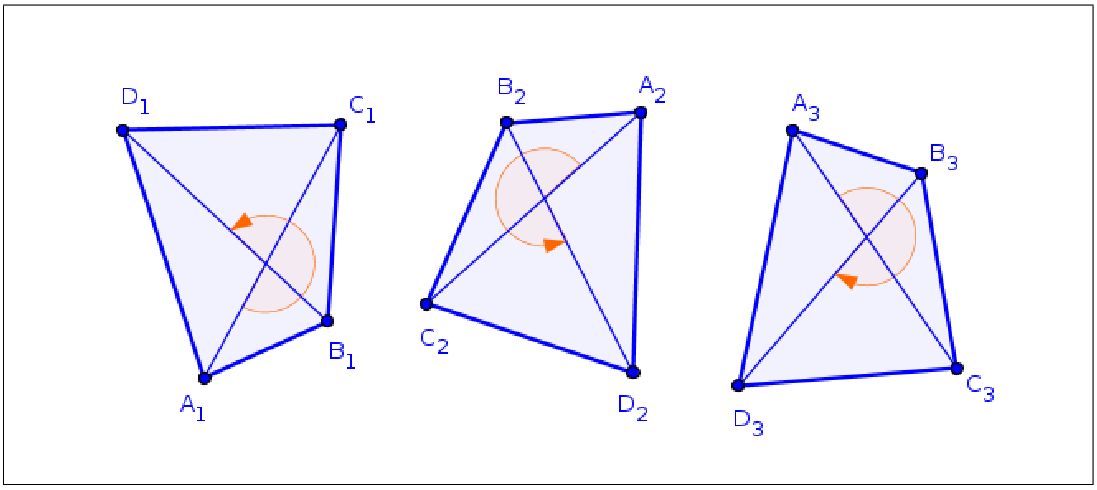
Obrázek 2.1: Shodné útvary

Například trojúhelník ABC se přemístí na trojúhelník $A'B'C'$ (obr. 2.1). (Tj. bod A se přemístí do bodu A', bod B do bodu B' a bod C do bodu C'.) Z obrázku je vidět, že odpovídající si strany shodných trojúhelníků jsou shodné a že odpovídající si úhly shodných trojúhelníků jsou shodné, což plyne přímo z definice shodných útvarů.

Pokud je zobrazení f shodné, pak je obrazem každého útvaru útvar s ním shodný.

2.1.2 Přímá a nepřímá shodnost

Prohlédněme si teď čtyřúhelníky v následujícím obrázku (obr. 2.2), všechny čtyřúhelníky jsou shodné.



Obrázek 2.2: Shodné útvary

Všimněme si rozdílu mezi jednotlivými čtyřúhelníky. Čtyřúhelníky $A_1B_1C_1D_1$ a $A_2B_2C_2D_2$ jsou shodné při obvyklém značení vrcholů čtyřúhelníků v abecedním pořadí proti směru hodinových ručiček. V tom případě říkáme, že jsou čtyřúhelníky *přímo shodné*. Čtyřúhelníky $A_1B_1C_1D_1$ a $A_3B_3C_3D_3$ nejsou přímo shodné, neboť vrcholy čtyřúhelníka $A_3B_3C_3D_3$ bychom museli číst po směru pohybu hodinových ručiček, abychom je přečetli v abecedním pořadí. Čtyřúhelníky $A_1B_1C_1D_1$ a $A_3B_3C_3D_3$ jsou *nepřímo shodné*.

Definice. *Přímá shodnost je každá shodnost, ve které jsou libovolný trojúhelník a jeho obraz přímo shodné.*
Nepřímá shodnost je každá shodnost, ve které jsou libovolný trojúhelník a jeho obraz nepřímo shodné.

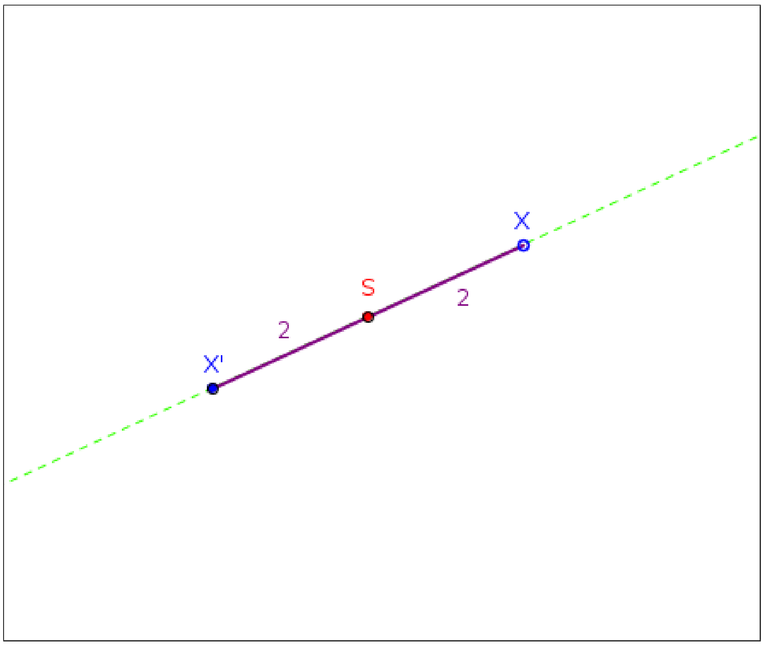
My se budeme dále podrobněji zabývat těmito shodnostmi:

- středová souměrnost,
- osová souměrnost,
- posunutí,
- otočení.

2.2 Středová souměrnost

Definice. *Středová souměrnost $\mathcal{S}(S)$ se středem v bodě S je zobrazení v rovině, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'. Tedy platí, že $|XS| = |SX'|$.*
Bod S se nazývá střed souměrnosti.
Obraz X' bodu X získaný ve středové souměrnosti se středem S značíme $\mathcal{S}(S) : X \to X'$.

Následující applet (obr. 2.3) znázorňuje, jak se zobrazují body ve středové souměrnosti. Zkuste si přemístit bod X a sledujte, jak se bude měnit jeho obraz.



Obrázek 2.3: Středová souměrnost

Středová souměrnost je přímá shodnost.

Středová souměrnost je jednoznačně určena svým středem nebo dvojicí nesplývajících bodů X, X', kde bod X je vzor a bod X' je obraz bodu X. Středem souměrnosti je střed úsečky XX'.

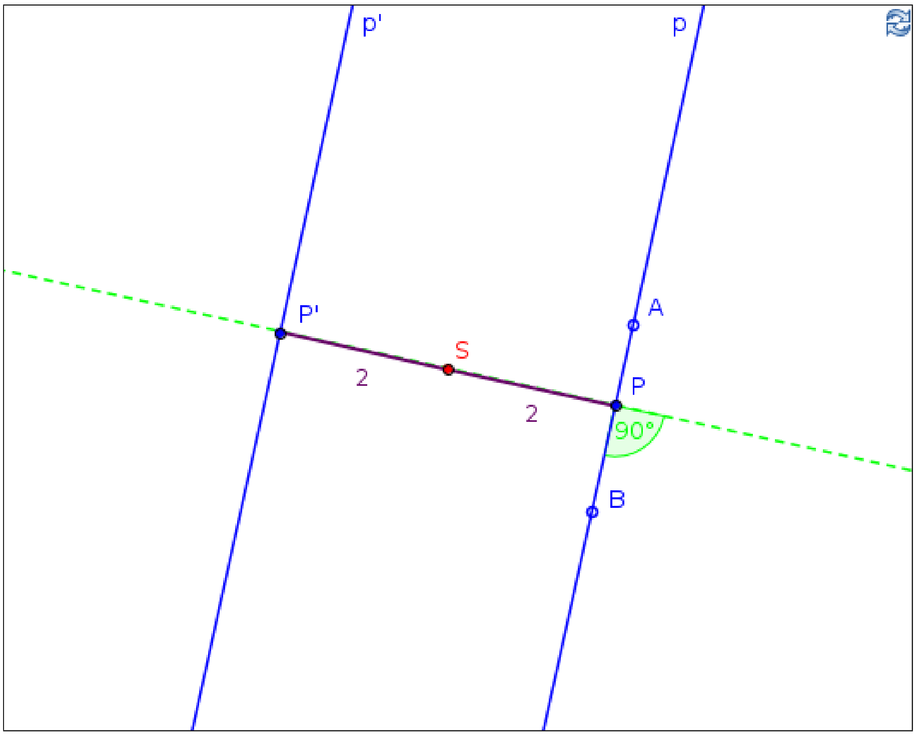
2.2.1 Samodružné body

Při přemísťování bodu X v appletu obr. 2.3 jste určitě narazili na situaci, kdy vám „zmizela“ přímka XX'. Stalo se to ve chvíli, kdy bod X splynul s bodem S. Z tohoto poznatku (a vlastně i z definice středové souměrnosti) hned vyplývá, že jediným samodružným bodem středové souměrnosti je její střed.

Množinu všech samodružných bodů středové souměrnosti tvoří střed souměrnosti.

2.2.2 Samodružné přímky

Nyní budeme zkoumat, jak zobrazuje středová souměrnost přímku. Měňte polohu přímky p v následujícím appletu (obr. 2.4) a sledujte, jak se změní její obraz. (Polohu přímky p změníte přemístěním bodů A a B.)

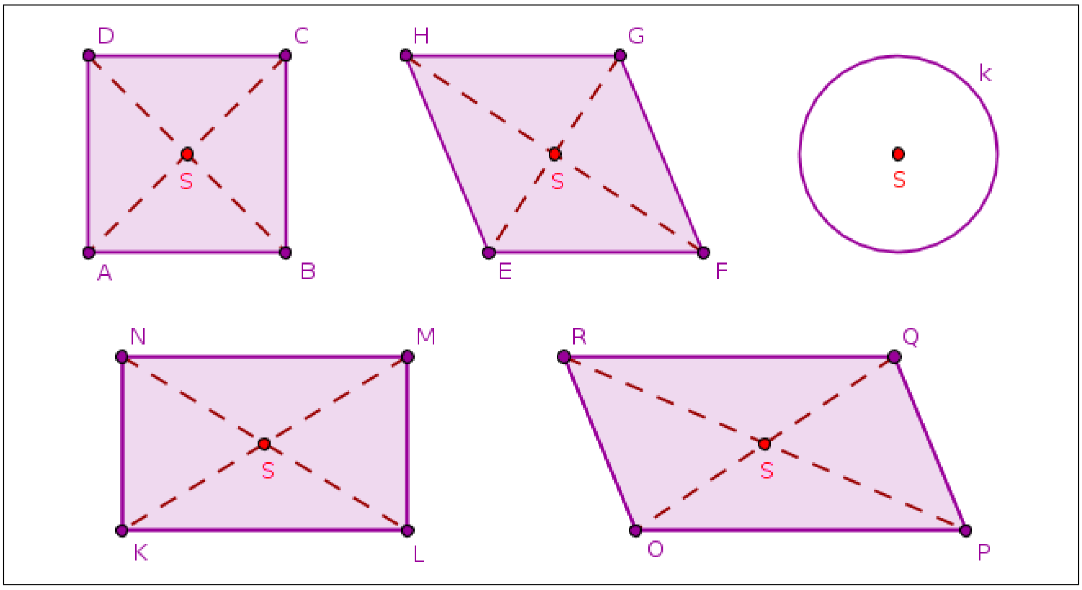


Obrázek 2.4: Samodružné přímky

Pokud umístíte přímku p tak, že bod S leží na přímce p, tak se přímka p zobrazí sama na sebe. Samodružné přímky středové souměrnosti jsou tedy všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti.

Množinu všech samodružných přímek středové souměrnosti tvoří všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti.

2.2.3 Středově souměrné útvary



Obrázek 2.5: Středově souměrné útvary

Při řešení konstrukčních úloh za pomoci středové souměrnosti budeme často využívat vlastností konkrétních geometrických útvarů. Proto je dobré si připomenout některé útvary, které se při vhodné volbě středu souměrnosti zobrazí samy na sebe. Takovýmto útvarům se říká *středově souměrné útvary*.

Mezi středově souměrné útvary patří například čtverec, kosočtverec, kružnice, obdélník nebo kosodélník. Středem souměrnosti kružnice je její střed, středem souměrnosti ostatních vyjmenovaných útvarů je průsečík jejich úhlopříček.

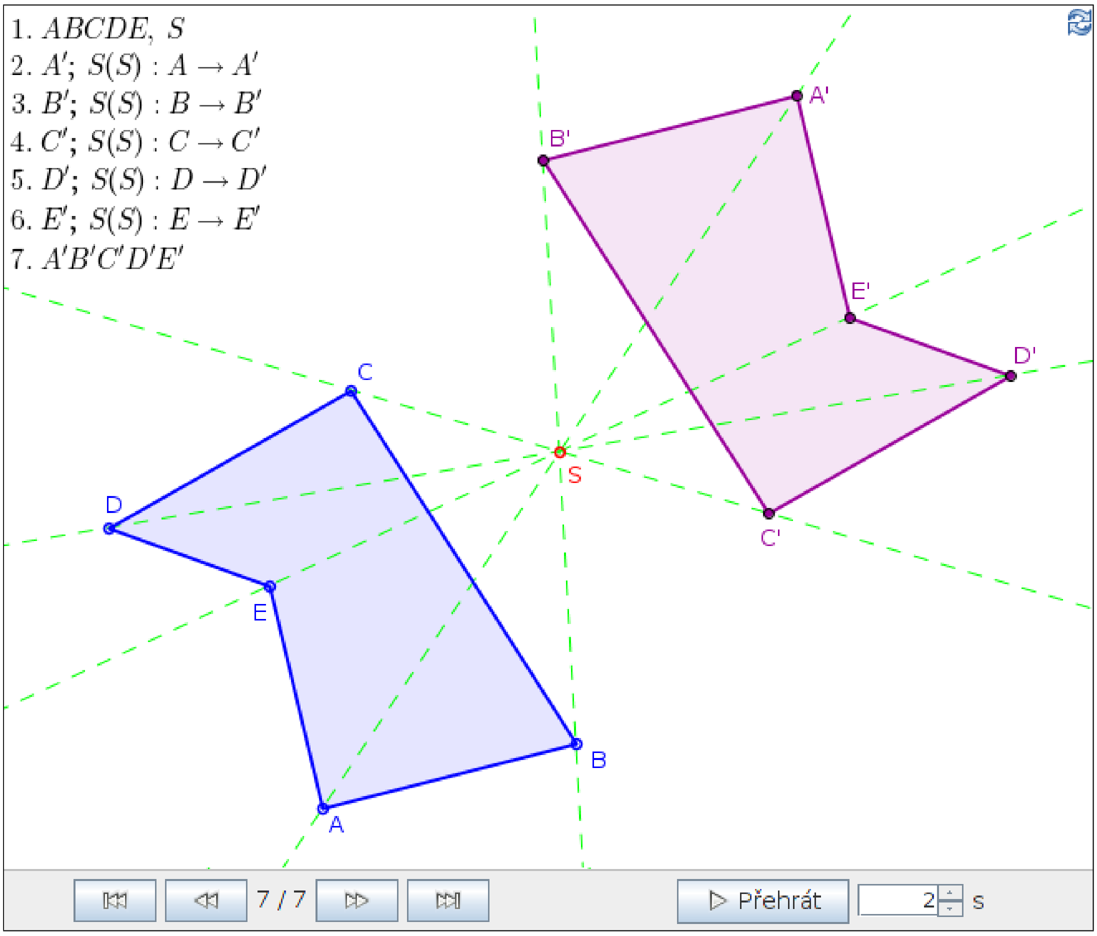
Možná vás teď napadla myšlenka, že středově souměrné útvary jsou vlastně samodružné útvary. I když se středově souměrné útvary zobrazí samy na sebe, neznamená to, že každý bod útvaru je samodružný. Například ve čtverci $ABCD$ z obrázku 2.5 se ve středové souměrnosti se středem S bod A zobrazí na bod C.

2.2.4 Příklady

Příklad 1

Zobrazte daný pětiúhelník $ABCDE$ ve středové souměrnosti se středem v bodě S.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.6: Příklad 1

Rozbor
Při zobrazení pětiúhelníku budeme postupovat podle definice středové souměrnosti.

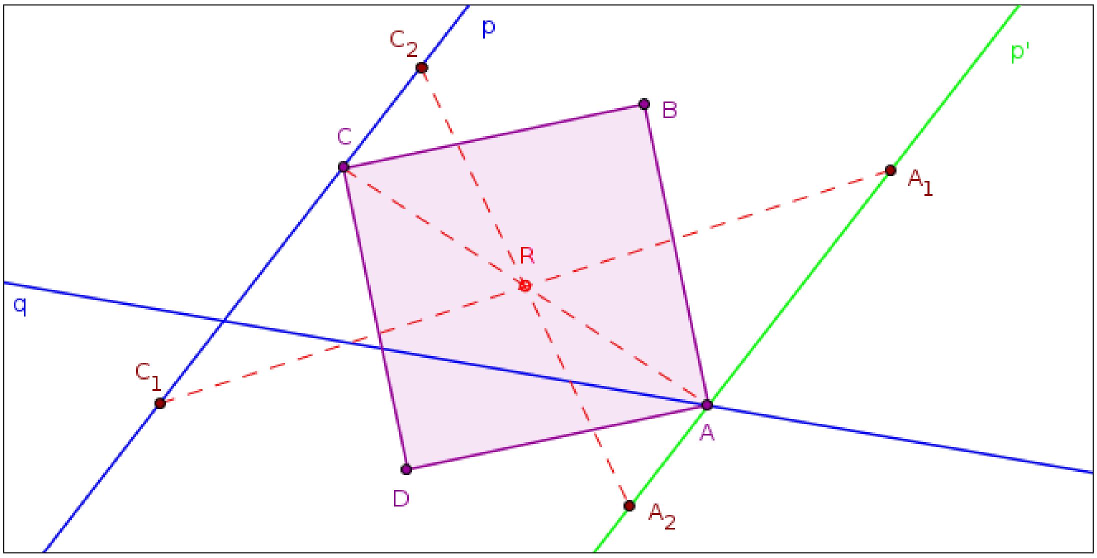
- Nejprve zobrazíme vrcholy pětiúhelníku, obrazy vrcholů nám jednoznačně určí obrazy stran pětiúhelníku.
- Ani jeden z bodů A, B, C, D, E není středem souměrnosti, proto budou obrazy vrcholů pětiúhelníku ležet na polopřímkách opačných k polopřímkám určeným středem souměrnosti a daným bodem, přičemž vzdálenost daného bodu od středu souměrnosti a jeho obrazu od středu souměrnosti bude stejná.

Závěr
Úloha má právě jedno řešení.

Příklad 2

Jsou dány různoběžné přímky p, q a bod R. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce q, bod C na přímce p a bod R byl středem čtverce.

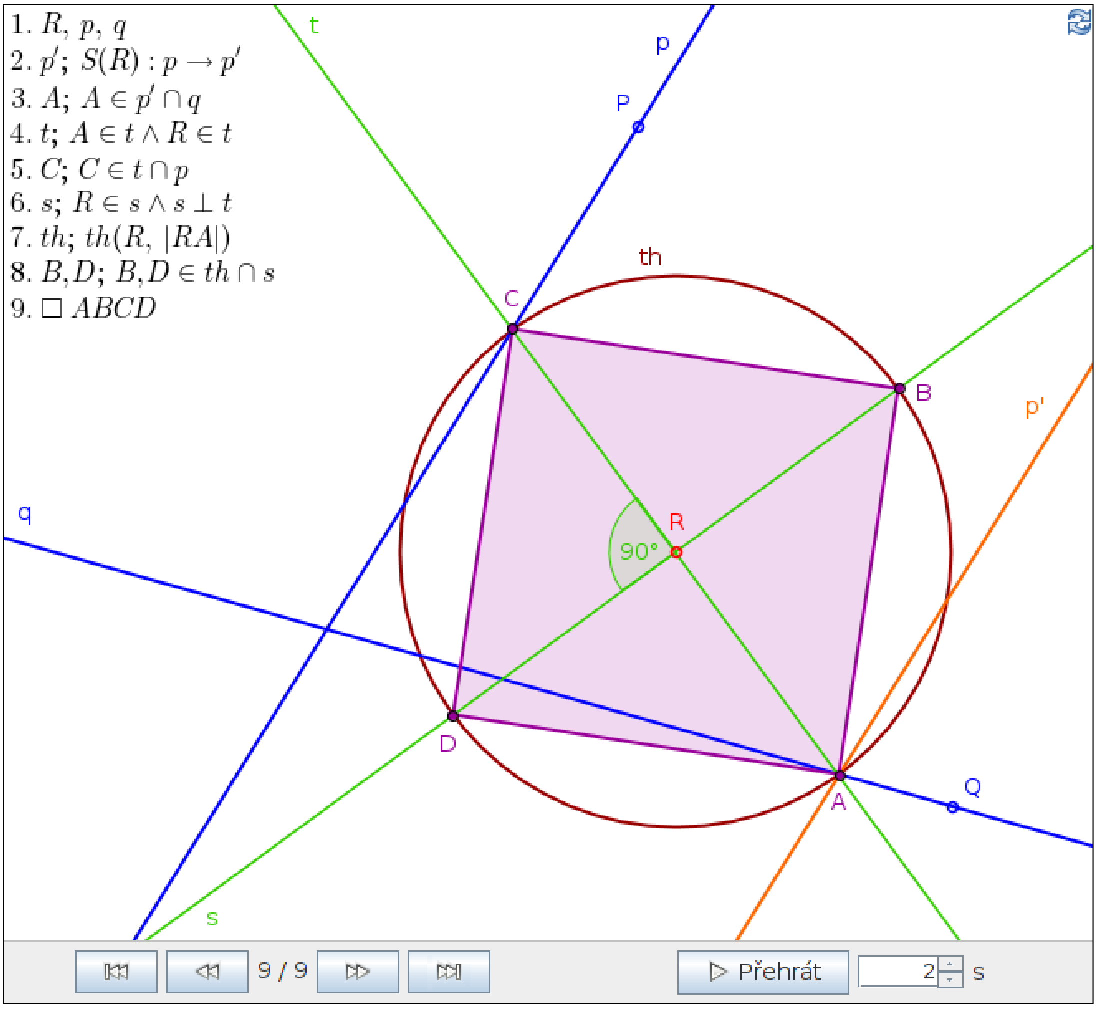
Rozbor



Obrázek 2.7: Náčrtek příkladu 2

- Kdybychom například znali bod C, bod A bychom snadno sestrojili na základě znalosti, že úhlopříčky čtverce se půlí. Bod A by byl obrazem bodu C ve středové souměrnosti se středem v bodě R.
- My sice přesnou polohu bodu C neznáme, zato víme, že leží na přímce p. Bod A by tedy měl ležet na přímce p', tj. obrazu přímky p ve středové souměrnosti se středem v bodě R (obr. 2.8).
- Ze zadání víme, že bod A leží na přímce q. Bod A získáme jako průsečík přímky q a přímky p'.
- Ostatní vrcholy už získáme snadno z vlastností čtverce.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.8: Příklad 2

Diskuse

- Úloha nemá řešení, pokud bod R bude průsečíkem přímek p a q – všechny vrcholy čtverce by splývaly s bodem R.
- Úloha má jedno řešení pro všechna ostatní umístění bodu R.

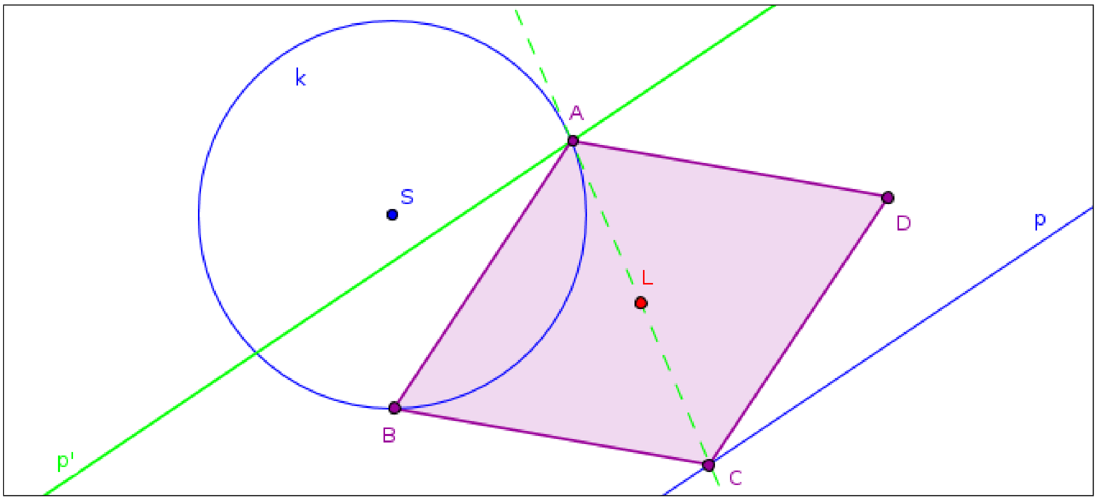
Příklad 3

Je dána kružnice k, přímka p a bod L. Sestrojte kosočtverec $ABCD$ tak, aby body A, B ležely na kružnici k, bod C ležel na přímce p a bod L byl středem kosočtverce.

Rozbor

Kosočtverec má podobné vlastnosti jako čtverec – úhlopříčky svírají úhel 90°, navzájem se půlí a všechny strany kosočtverce jsou stejně dlouhé. Stejně jako v předchozím příkladě využijeme vlastnost půlení úhlopříček.

- Ať už jsou body A a C umístěné kdekoliv, musí platit, že vzdálenost bodu A od bodu L je stejná jako vzdálenost bodu C od bodu L.
- Bod A získáme jako obraz bodu C ve středové souměrnosti se středem v bodě L a naopak.



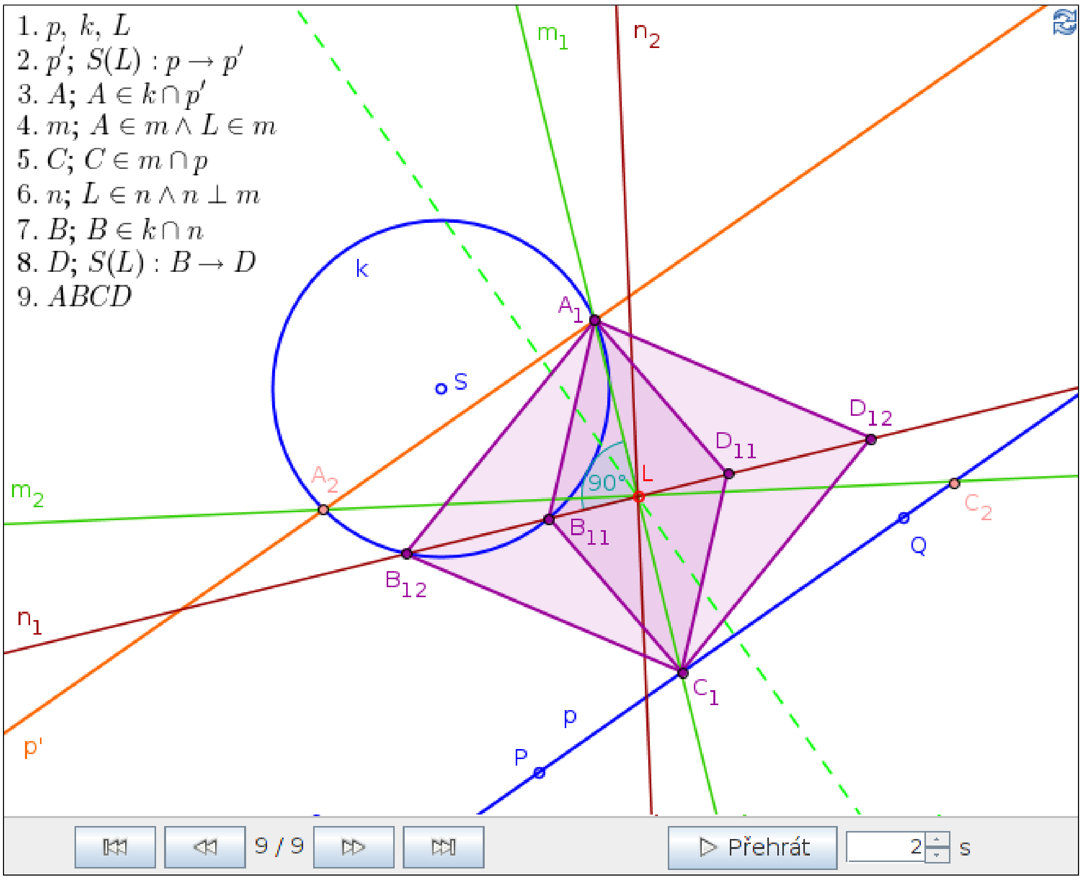
Obrázek 2.9: Náčrtek příkladu 3

Máme tedy dvě možnosti:

- Bod A najdeme jako průsečík kružnice k a obrazu přímky p ve středové souměrnosti se středem v bodě L (tato možnost je použita při konstrukci kosočtverce v appletu – obr. 2.8).
- Bod C najdeme jako průsečík přímky p a obrazu kružnice k ve stejné středové souměrnosti.

Zbylé vrcholy kosočtverce již zjistíme snadno.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.10: Příklad 3

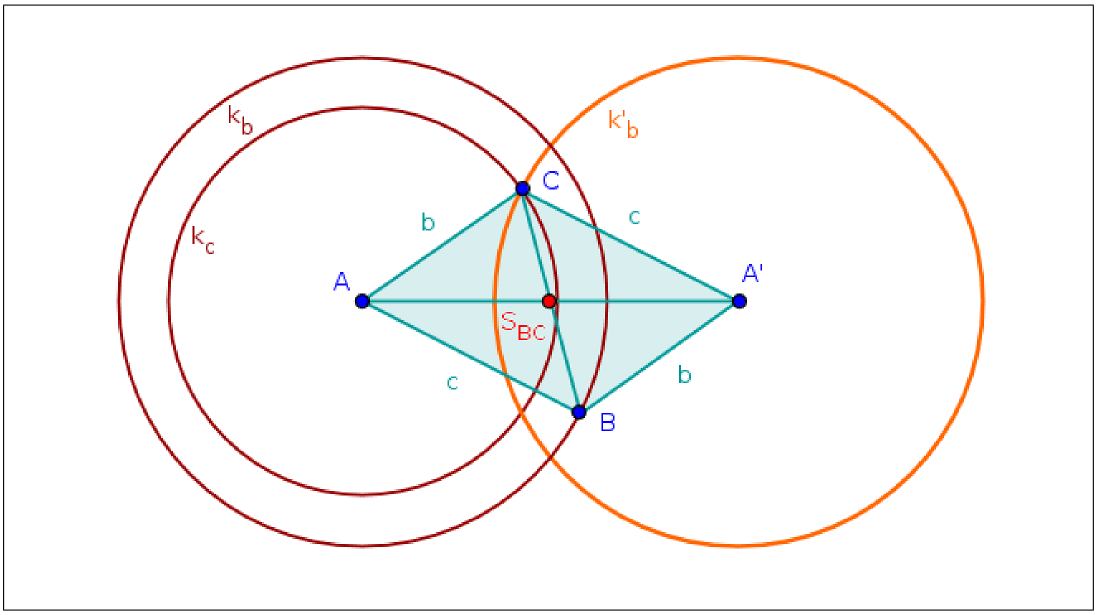
Diskuse

- Úloha má 4 řešení, pokud existují dva průsečíky A_1, A_2 kružnice k a přímky p', a ke každému průsečíku existují právě dva průsečíky kružnice k a přímky n_1 (resp. n_2).
- Úloha má 3 řešení, pokud existují dva průsečíky A_1, A_2 kružnice k a přímky p', k jednomu průsečíku existují právě dva průsečíky kružnice k a přímky n_1 (resp. n_2) a k druhému průsečíku existuje právě jeden průsečík kružnice k a přímky n_2 (resp. n_1).
- Úloha má 2 řešení, pokud:
  - existují dva průsečíky A_1, A_2 kružnice k a přímky p', přitom k oběma průsečíkům existuje právě jeden průsečík kružnice k a přímky n_1 (resp. n_2),
  - existuje jeden průsečík A kružnice k a přímky p', kde k průsečíku A existují právě dva průsečíky kružnice k a přímky n.
- Úloha má 1 řešení, pokud:
  - existují dva průsečíky A_1, A_2 kružnice k a přímky p', přitom pouze k jednomu průsečíku existuje jeden průsečík kružnice k a přímky n_1 (resp. n_2),
  - existuje jeden průsečík A kružnice k a přímky p', kde k průsečíku A existuje právě jeden průsečík kružnice k a přímky n.
- Úloha nemá jinak řešení.

Příklad 4

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka těžnice t_a na stranu a, délka strany b a strany c.

Rozbor

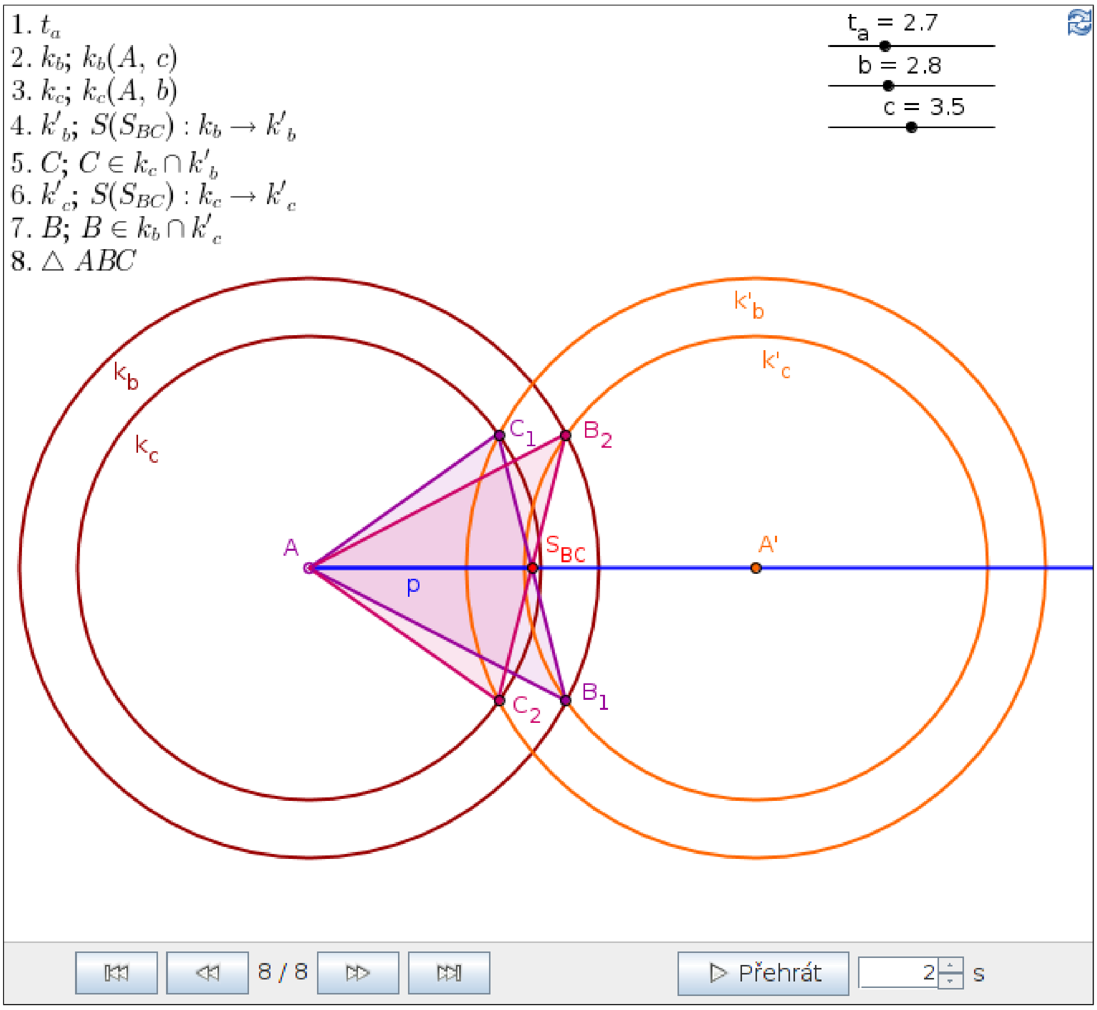


Obrázek 2.11: Náčrtek příkladu 4

Nejprve provedeme úvahu, kterou z daných úseček je nejvýhodnější začít rýsovat.

- Trojúhelník ABC je část kosodélníku $ABA'C$, kde bod S_{BC} je střed úhlopříček. Můžeme využít vlastností středově souměrného kosodélníku, kde bod A' získáme jako obraz bodu A ve středové souměrnosti se středem v bodě S_{BC}. Strana AB bude stejně dlouhá jako strana $A'C$ a bude s ní rovnoběžná, podobně strana AC a strana BA'.
- Narýsujeme těžnici t_a na stranu a, úsečku AS_{BC}. Bod B bude ležet na kružnici k_b se středem v bodě A a poloměrem c. Podobně bod C bude ležet na kružnici k_c se středem v bodě A a poloměrem b.
- Zobrazíme kružnice k_b, k_c ve středové souměrnosti se středem v bodě S_{BC}.
- Bod B bude průsečík kružnic k_b a k'_c, bod C bude průsečík kružnic k_c a k'_b.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.12: Příklad 4

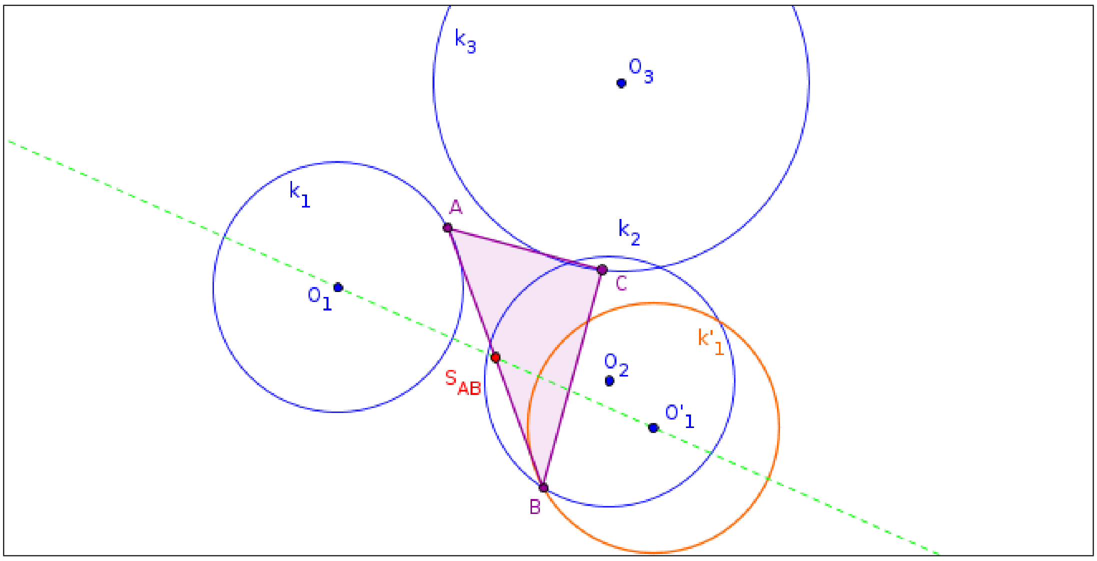
Diskuse

- Úloha má 2 řešení, pokud existují dva průsečíky kružnic k_c, k'_b a pokud $b \neq c$.
- Úloha má 1 řešení, pokud existují dva průsečíky kružnic k_c, k'_b a pokud je trojúhelník rovnoramenný se základnou a, tj. $b = c$.
- Úloha nemá řešení v ostatních případech.

Příklad 5

Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 a bod S_{AB}. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem u vrcholu C tak, aby bod S_{AB} byl středem strany c, bod A ležel na kružnici k_1, bod B ležel na kružnici k_2, bod C ležel na kružnici k_3.

Rozbor

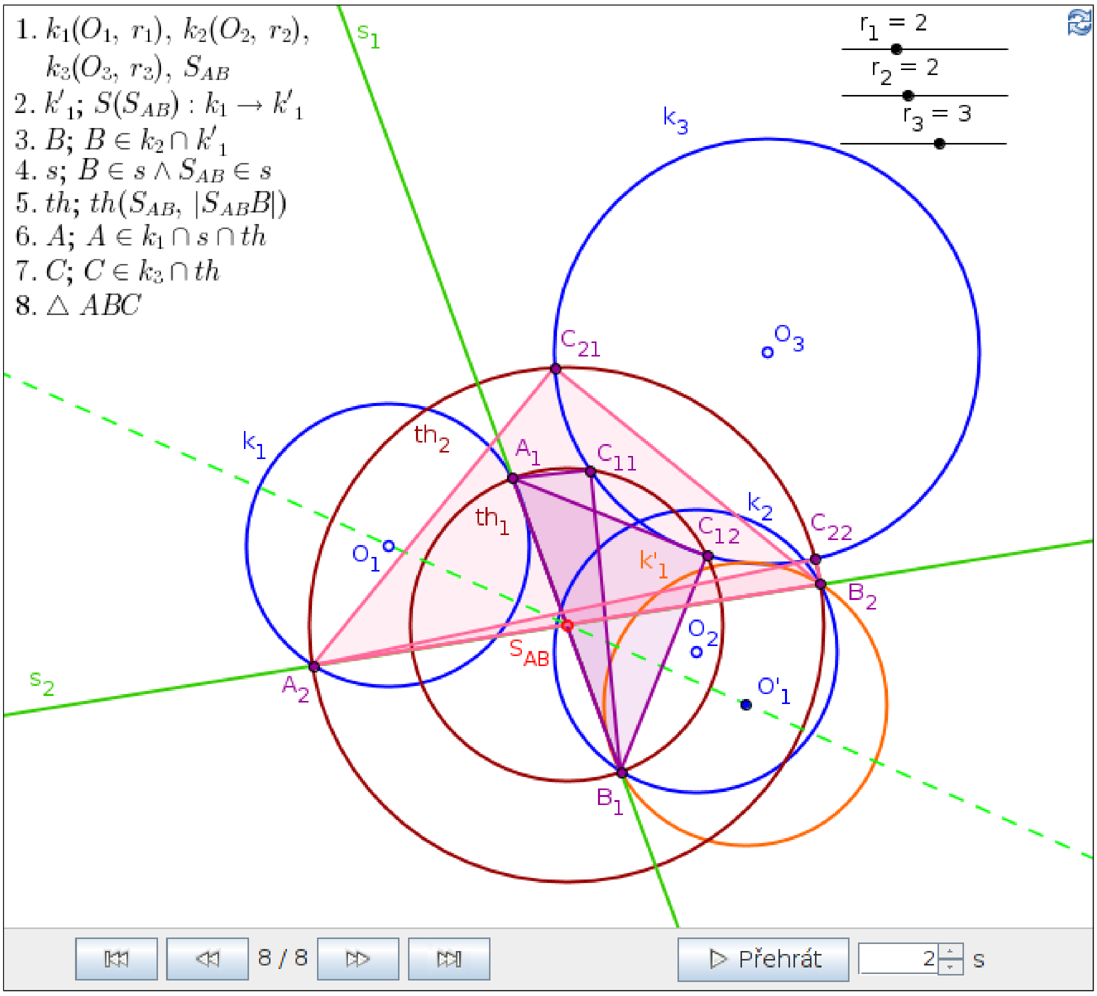


Obrázek 2.13: Náčrtek příkladu 5

Vzhledem k tomu, že máme zadaný střed strany AB, začneme nalezením bodů A, B.

- Bod S_{AB} je střed strany AB, musí proto platit $|AS_{AB}| = |S_{AB}B|$, to nám zajistí středová souměrnost se středem v bodě S_{AB}, která nám zobrazí bod A na bod B.
- Bod A leží na kružnici k_1, pomocí středové souměrnosti se středem v bodě S_{AB} určíme množinu všech bodů v rovině, které mohou být koncovým bodem úsečky AB, tj. obraz kružnice k_1.
- Bod B bude proto průsečík kružnice k_2 a obrazu kružnice k_1 ve středové souměrnosti se středem v bodě S_{AB}.
- Bod A už nalezneme snadno a bod C bude průsečíkem kružnice k_3 a Thaletovy kružnice nad průměrem AB.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.14: Příklad 5

Diskuse

Počet řešení úlohy závisí na vzájemné poloze kružnic.

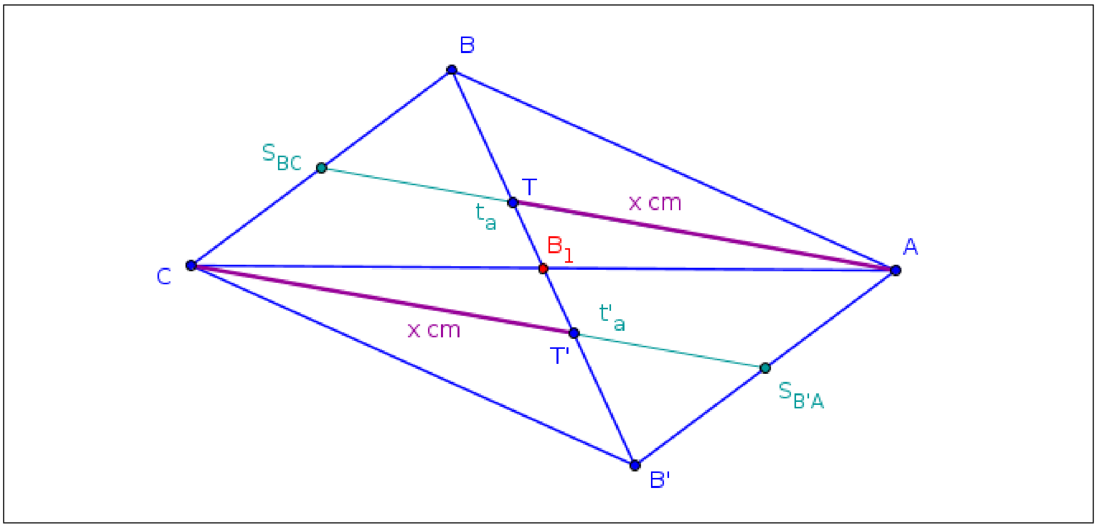
- Úloha má 4 řešení, pokud existují právě dva průsečíky kružnice k_2 a k'_1 a pokud pro každý tento průsečík existují právě dva průsečíky kružnic th_1 (resp. th_2), k_3.
- Úloha má 3 řešení, pokud existují právě dva průsečíky kružnice k_2 a k'_1, jeden tento průsečík má právě dva průsečíky kružnic th_1 (resp. th_2), k_3 a druhý průsečík má právě jeden průsečík kružnic th_1 (resp. th_2), k_3.
- Úloha má 2 řešení, pokud:
  - existují právě dva průsečíky kružnice k_2 a k'_1, přičemž oba průsečíky mají pouze jeden průsečík kružnic th_1 (resp. th_2), k_3,
  - existují právě dva průsečíky kružnice k_2 a k'_1, přičemž jeden průsečík má dva průsečíky kružnic th_1 (resp. th_2), k_3 a pro druhý průsečík neexistuje průsečík kružnic th_2 (resp. th_1), k_3,
  - existuje právě jeden průsečík kružnice k_2 a k'_1, pro tento průsečík existují dva průsečíky kružnic th, k_3.

- Úloha má 1 řešení, pokud:
  - existují právě dva průsečíky kružnice k_2 a k_1', přičemž pro jeden průsečík existuje právě jeden průsečík kružnic th_1 (resp. th_2), k_3 a pro druhý průsečík neexistuje průsečík kružnic th_2 (resp. th_1), k_3,
  - existuje právě jeden průsečík kružnice k_2 a k_1' a pokud existuje právě jeden průsečík th, k_3.
- Úloha nemá řešení v ostatních případech.

Příklad 6

Je dána úsečka BB_1 a číslo t_a. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem u vrcholu C tak, aby úsečka BB_1 byla těžnicí na stranu b a číslo t_a určovalo délku těžnice na stranu a.

Rozbor

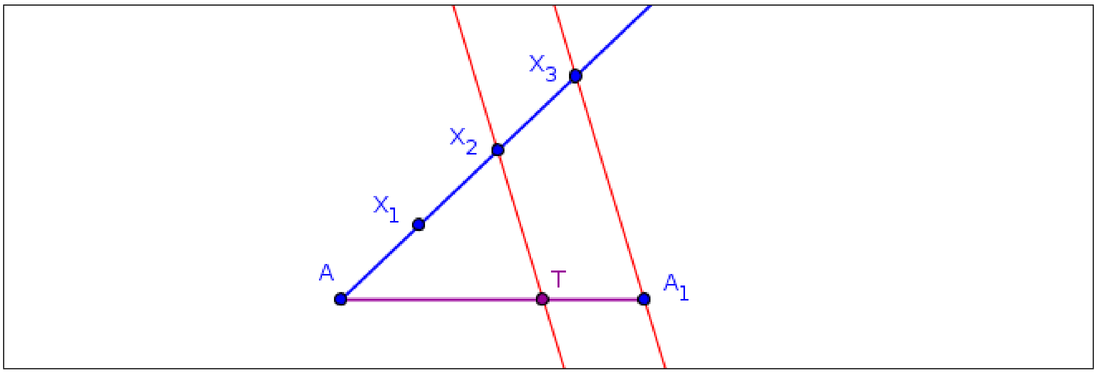


Obrázek 2.15: Náčrtek příkladu 6

- Trojúhelník ABC je část kosodélníku $ABCB'$, bod T je těžiště trojúhelníku ABC.
- Trojúhelník ABC je shodný s trojúhelníkem $CB'A$. Pak ale těžnice t_a trojúhleníku ABC je shodná s těžnicí t_a' trojúhelníku $CB'A$. Vzdálenost bodu A od těžiště T je proto stejná jako vzdálenost bodu C od těžiště T' trojúhelníku $CB'A$. Využijeme proto středovou souměrnost se středem v bodě B_1 ke konstrukci bodu C, bod B_1 je totiž středem středově souměrného kosodélníku $ABCB'$.
- Bod A bude ležet na kružnici se středem v bodě T a poloměrem $\frac{2}{3} \cdot t_a$. To znamená, že bod C bude ležet na obrazu této kružnice ve středové souměrnosti se středem v bodě B_1.
- Potřebujeme proto určit těžiště trojúhelníka, platí, že těžiště trojúhleníka se nachází na těžnici trojúhelníka vzdáleného $\frac{2}{3}$ délky těžnice od vrcholu trojúhelníka.

Návod, jak provést dělení libovolné úsečky na tři stejné části, najdete zde:

- Z bodu A vedeme polopřímku, která je různoběžná s přímkou AA_1.

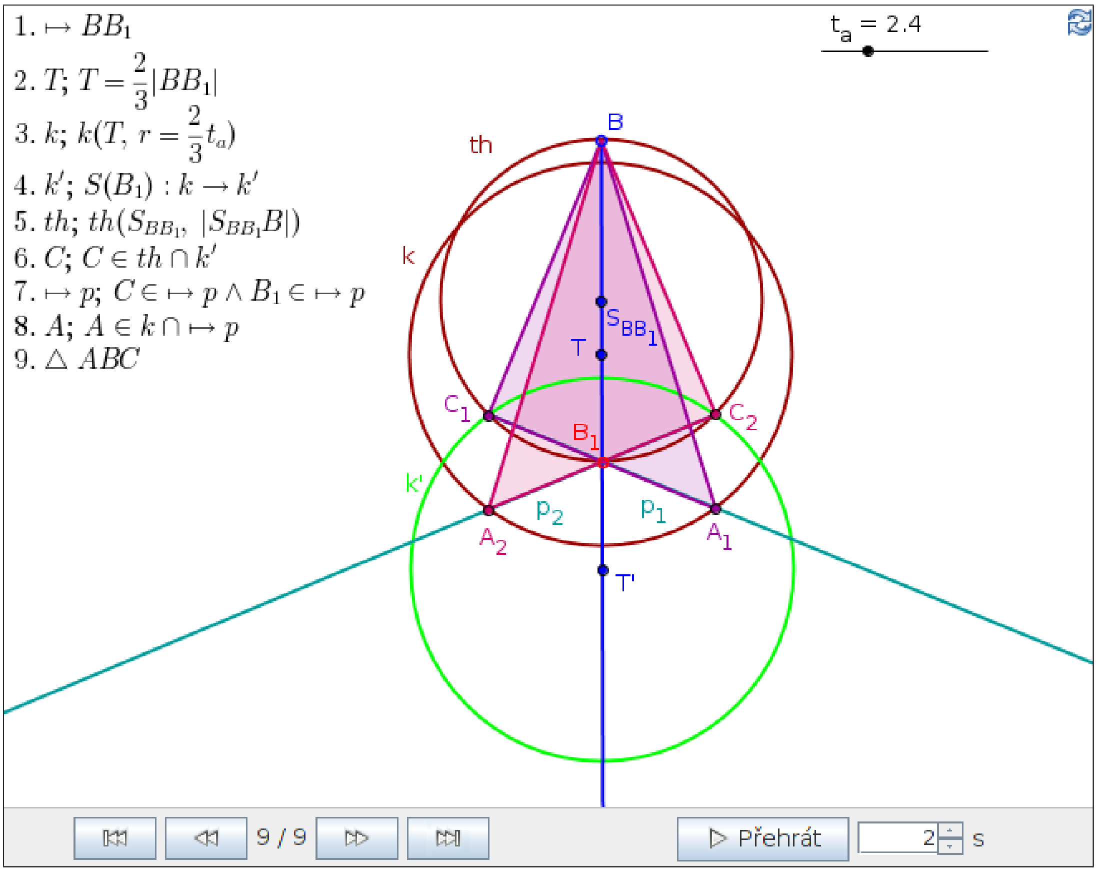


Obrázek 2.16: Nalezení těžiště

- Na polopřímku vyneseme body $X_{1,2,3}$ tak, aby $|AX_1| = |X_1X_2| = |X_2X_3|$.
- Bod X_3 spojíme s bodem A_1 a vedeme rovnoběžku s A_1X_3 bodem X_2.
- Těžiště T je průsečíkem této rovnoběžky a úsečky AA_1, platí $|AT| = 2|TA_1|$.

- Pokud získáme těžiště T trojúhelníka ABC, můžeme sestrojit kružnici k se středem v bodě T a poloměrem $\frac{2}{3} \cdot t_a$, na které bude ležet bod A.
- Bod C bude ležet na Thaletově kružnici nad průměrem BB_1, neboť u vrcholu C má být pravý úhel, a na obrazu kružnice k ve středové souměrnosti se středem v bodě B_1.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.17: Příklad 6

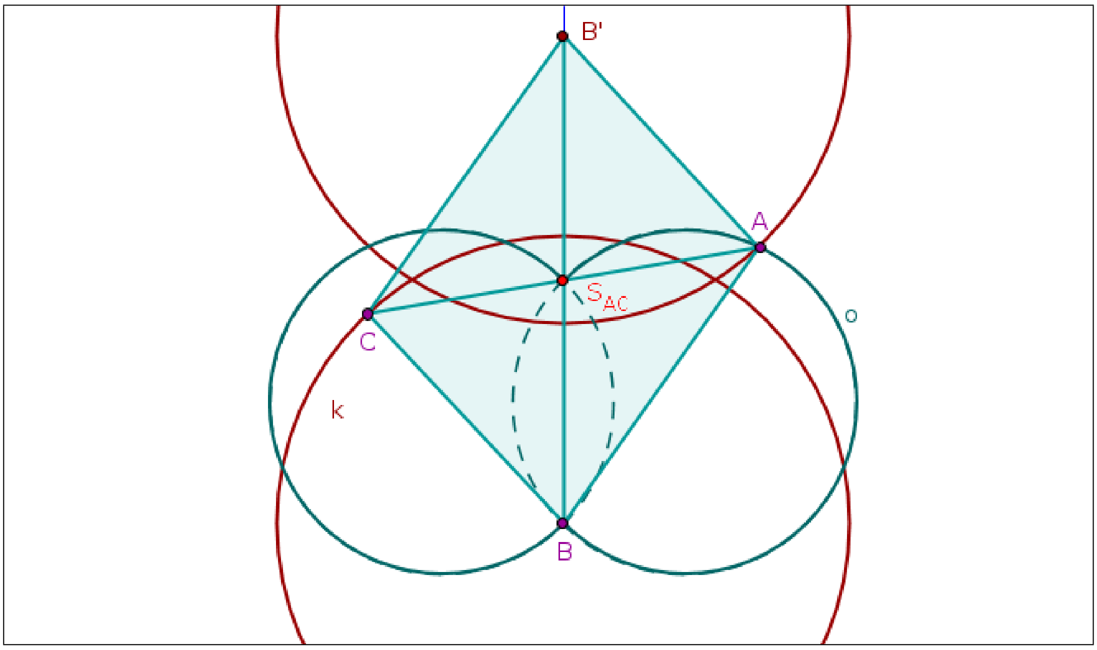
Diskuse

- Úloha má 2 řešení, pokud existují průsečíky kružnic th a k'.
- Úloha nemá řešení, pokud:
  - existuje právě jeden průsečík kružnic th a k',
  - neexistuje žádný průsečík kružnic th a k'.

Příklad 7

Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dána strana a, těžnice na stranu b a úhel $45°$ u vrcholu A.

Rozbor

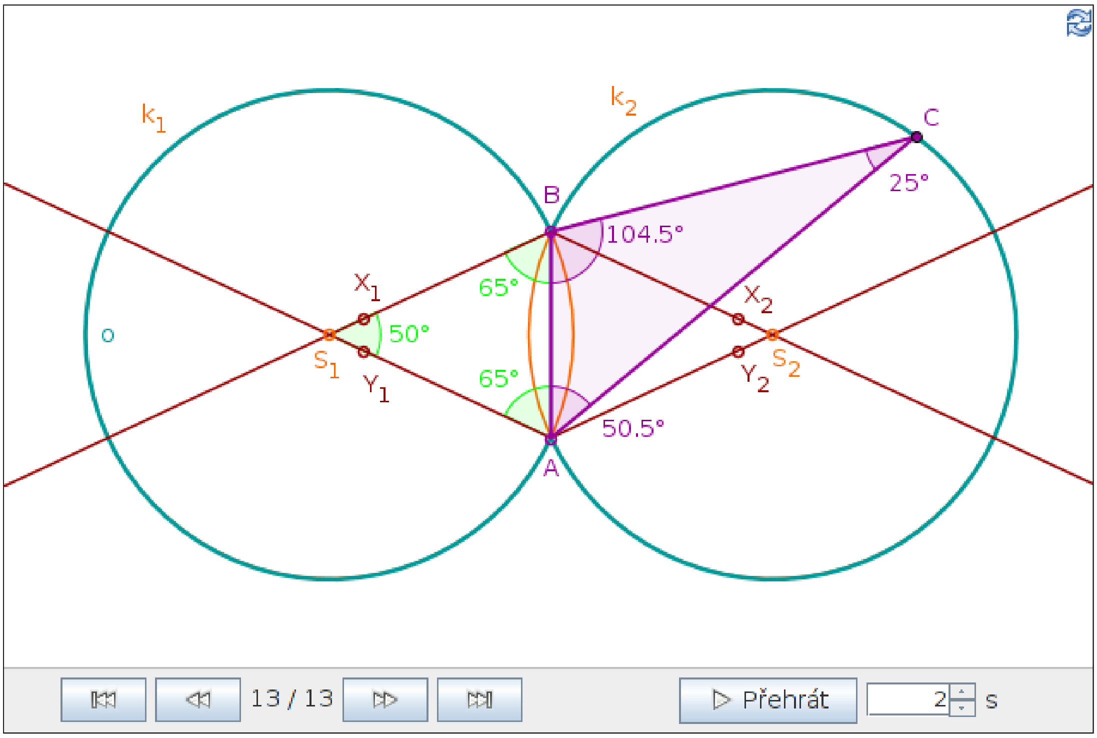


Obrázek 2.18: Náčrtek příkladu 7

Tento příklad budeme řešit podobně jako příklad předchozí.

- Uvědomíme si, že trojúhelník ABC je část kosodélníku $ABCB'$.
- Trochu obtížnější bude zjistit polohu bodu A. K tomu budeme muset najít množinu bodů, odkud je úsečka BS_{AC} vidět pod úhlem $45°$. K sestrojení této množiny využijeme obvodového úhlu.

- Platí, že velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku kružnice.
- Kdybychom například chtěli sestrojit trojúhelník ABC, kde by u vrcholu C byl úhel velikosti $25°$, potom má středový úhel velikost $50°$(obr. 2.19). Střed S oblouku o, odkud je daná úsečka vidět pod úhlem $50°$, získáme například konstrukcí rovnoramenného trojúhelníku SAB, u vrcholu S chceme mít úhel $50°$, pak zbylé dva úhly musí mít velikost $(180 - 50)/2 = 65°$.



Obrázek 2.19: Obvodový úhel

Pokud změníme umístění bodu C na oblouku určeného krajními body A, B, všimněme si, že u vrcholu C je stále 25°, zatímco u ostatních vrcholů trojúhelníku se velikosti úhlů mění.

- Potřebujeme, aby u vrcholu A byl úhel velikosti 45°. Sestrojíme proto množinu bodů, odkud je úsečka BS_{AC} vidět pod tímto úhlem.

- Protože je ale tento úhel obvodový, příslušný středový úhel oblouku kružnice, na kterém bude ležet bod A trojúhelníku ABS_{AC}, musí mít velikost 90°. Střed takovéto kružnice nalezneme pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem BS_{AC}.

- Bod A bude průsečíkem obrazu kružnice k ve středové souměrnosti se středem v bodě S_{AC} a množiny bodů v rovině, odkud je vidět úsečka BS_{AC} pod úhlem 45°.

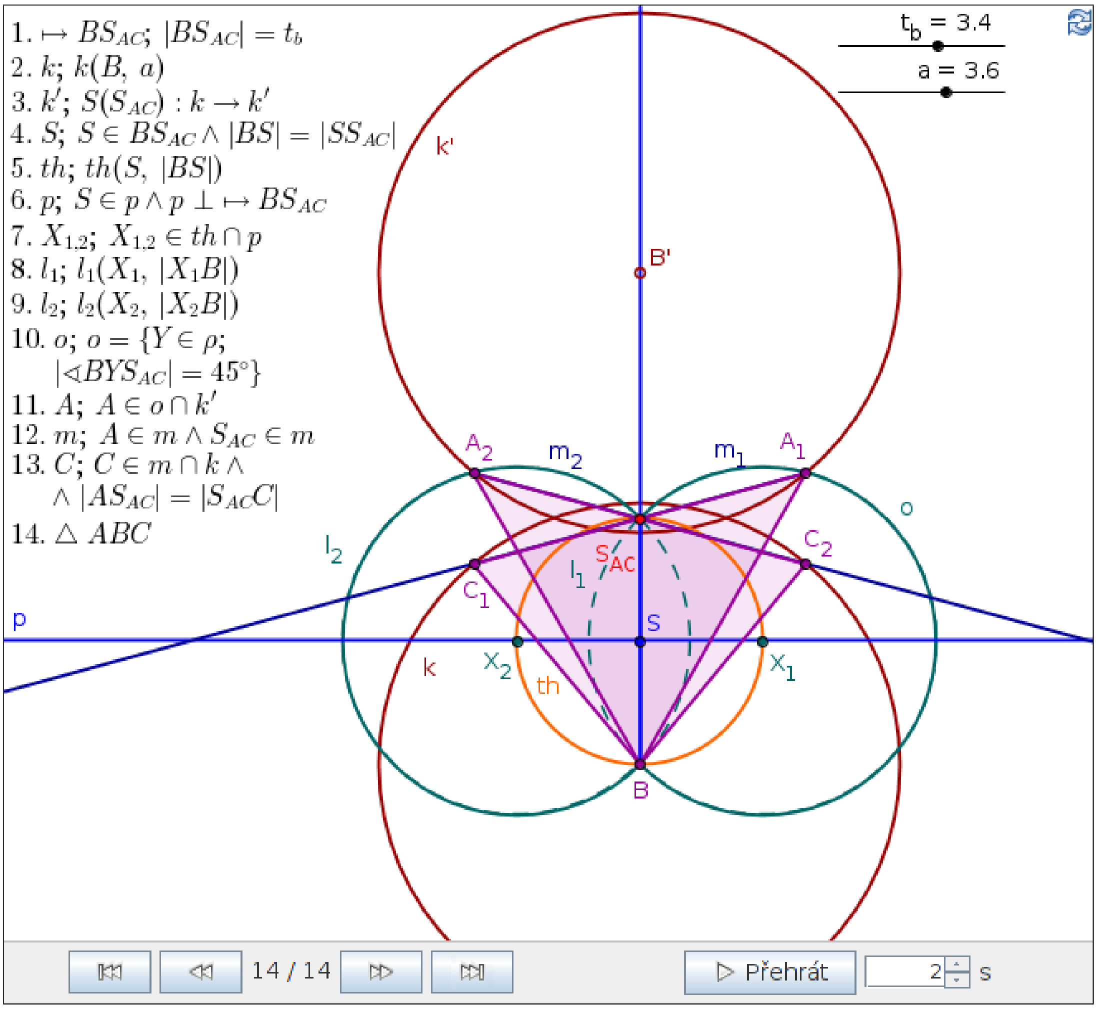
Diskuse

- Úloha má 4 řešení, pokud existují čtyři různé průsečíky kružnice k' a oblouku o.

- Úloha má 2 řešení, pokud existují pouze dva průsečíky kružnice k' a oblouku o, případně pokud existují průsečíky tři.

- Úloha nemá řešení, pokud neexistuje průsečík kružnice k' a oblouku o.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.20: Příklad 7

2.3 Osová souměrnost

Definice. *Osová souměrnost $O(o)$ s osou o je zobrazení v rovině, ve kterém se zobrazí každý bod $X \in o$ na bod $X' = X$ a každý bod $X \notin o$ na bod X' tak, že úsečka XX' je kolmá na osu o a střed S úsečky XX' leží na přímce o. Tedy platí, že $|XS| = |SX'|$, kde bod $S \in o$.*
Přímka o se nazývá osa souměrnosti.
Obraz X' bodu X získaný v osové souměrnosti s osou o značíme $O(o) : X \to X'$.

Osová souměrnost je nepřímá shodnost.

Osová souměrnost je jednoznačně určena osou souměrnosti nebo dvojicí nesplývajících bodů X, X', kde bod X je vzor a bod X' je obraz bodu X. Osou souměrnosti je přímka kolmá na úsečku XX' procházející středem úsečky XX'.

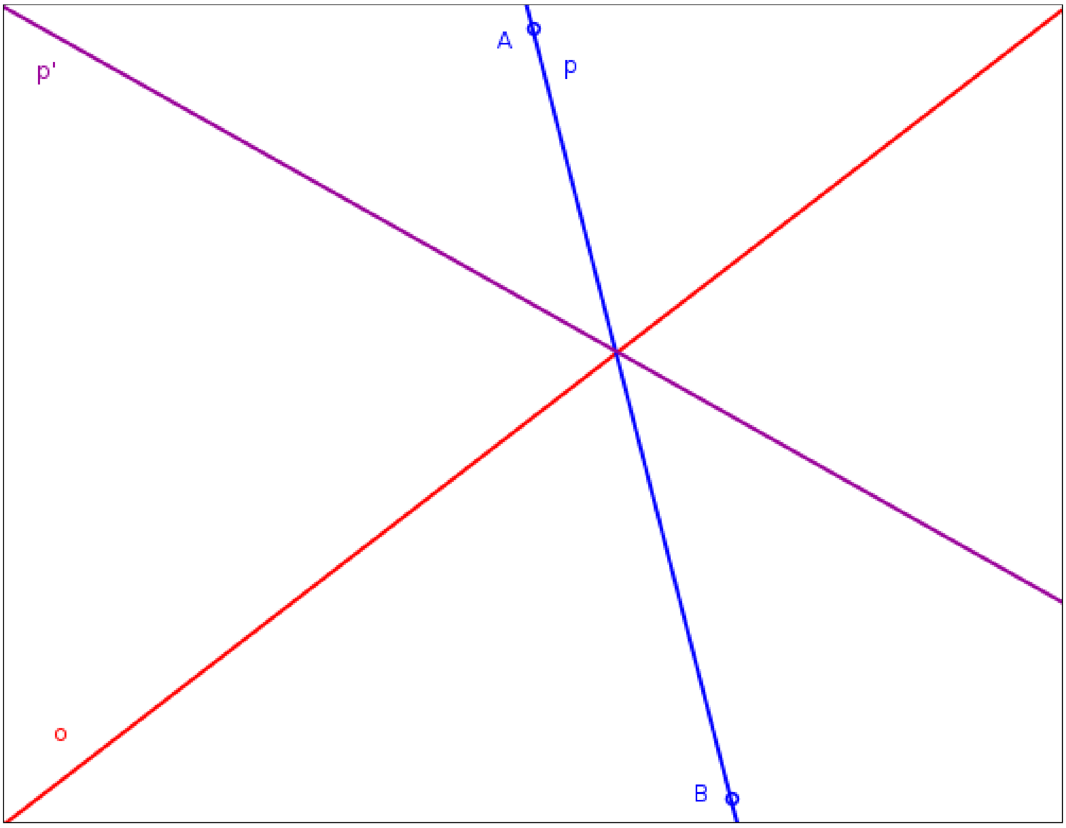
2.3.1 Samodružné body

Přímo definice nám říká, že samodružné body jsou právě body ležící na ose o.

Množina všech samodružných bodů osové souměrnosti je osa o.

2.3.2 Samodružné přímky

V následujícím appletu (obr. 2.21) je vidět, jak se zobrazí v osové souměrnosti přímka. Zkuste měnit polohu přímky p a zkoumejte její obraz. (Polohu přímky p změníte přemístěním bodů A, B.)



Obrázek 2.21: Obraz přímky

Samodružné přímky osové souměrnosti jsou všechny přímky, které jsou na osu o kolmé. Jsou to opravdu všechny samodružné přímky?

Odpověď zní ne, ještě existuje jedna samodružná přímka, a tou je osa o.

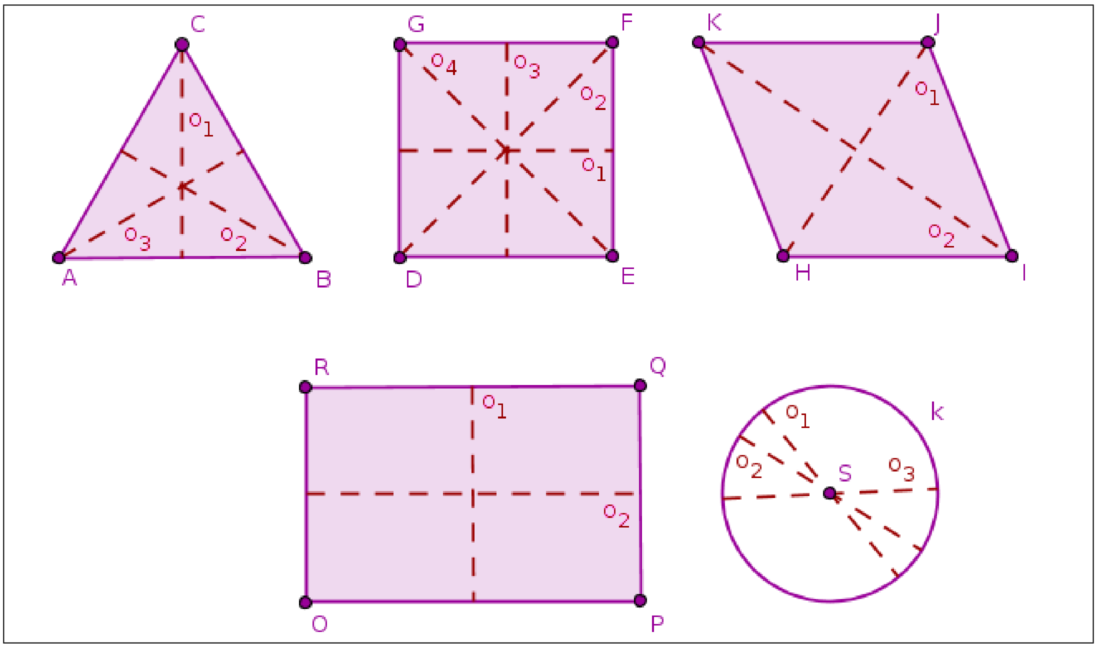
Množinu všech samodružných přímek osové souměrnosti tvoří osa o souměrnosti a všechny přímky, které jsou na osu o kolmé.

2.3.3 Osově souměrné útvary

Osově souměrný útvar je takový útvar, který se podle nějaké osy zobrazí sám na sebe.

Mezi osově souměrné útvary patří například rovnostranný trojúhelník, čtverec, kosočtverec, obdélník, kružnice.

Rovnostranný trojúhelník je osově souměrný podle tří os určených výškami/těžnicemi trojúhelníka (v rovnostranném trojúhelníku tyto úsečky splývají), čtverec podle čtyř os (obr. 2.22), kosočtverec podle dvou os určených úhlopříčkami, obdélník podle dvou os. Kružnice je osově souměrná podle každé přímky, která prochází jejím středem.



Obrázek 2.22: Osově souměrné útvary

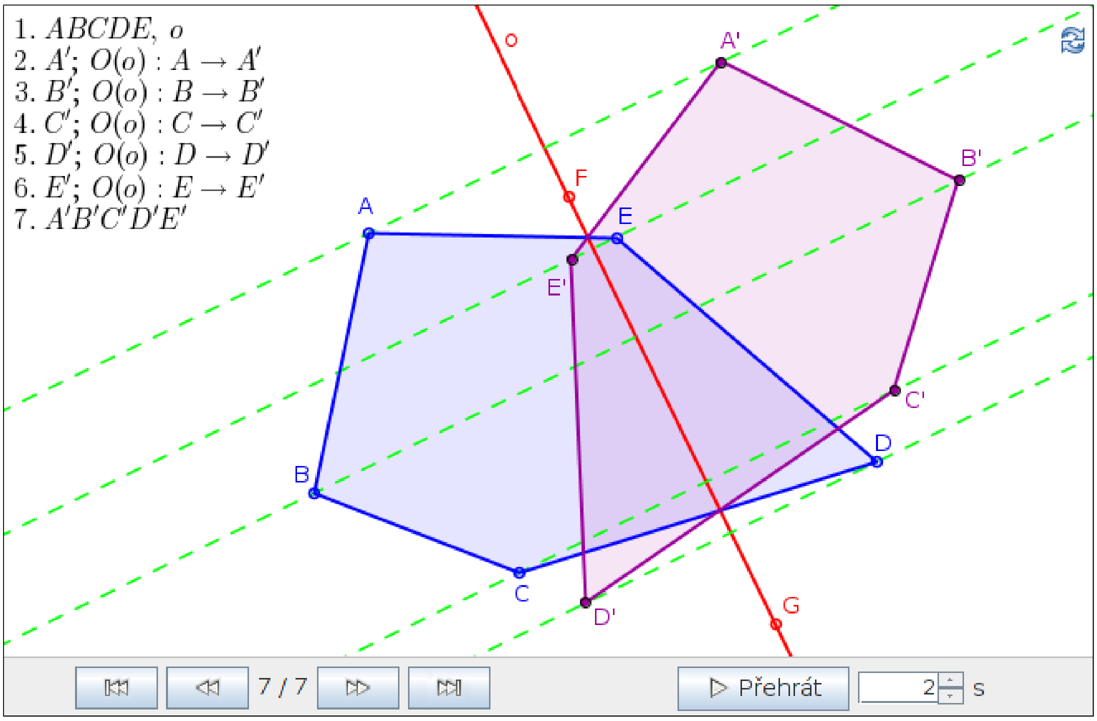
Další osově souměrné útvary si jistě vymyslíte sami, stejně tak zvládnete určit jejich osy souměrnosti.

2.3.4 Příklady

Příklad 1

Zobrazte daný pětiúhelník $ABCDE$ v osové souměrnosti s osou souměrnosti o.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.23: Příklad 1

Rozbor

Budeme postupovat podle definice osové souměrnosti.

- Zobrazíme vrcholy pětiúhelníka, ty nám jednoznačně určí obrazy stran pětiúhelníka.
- Obraz A' vrcholu A bude ležet na kolmici k ose souměrnosti o, která prochází bodem A, přitom bude platit: $|Ao| = |oA'|$.
- Ostatní vrcholy zobrazíme stejným postupem.

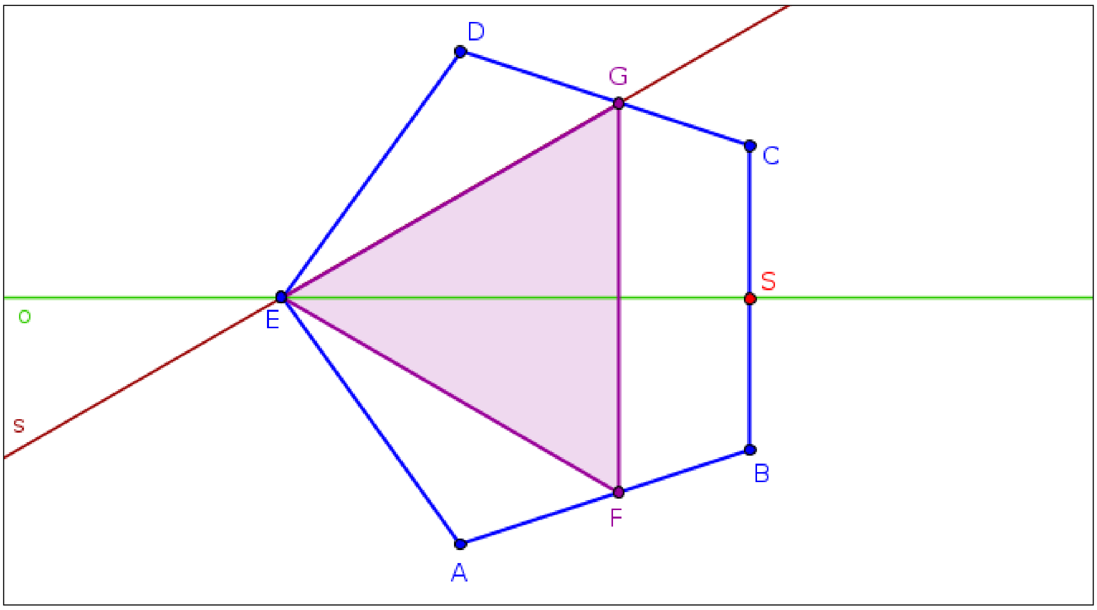
Závěr

Úloha má právě jedno řešení.

Příklad 2

Jé dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Vepiště do něj rovnostranný trojúhelník EFG tak, aby bod F ležel na úsečce AB a bod G na úsečce CD.

Rozbor

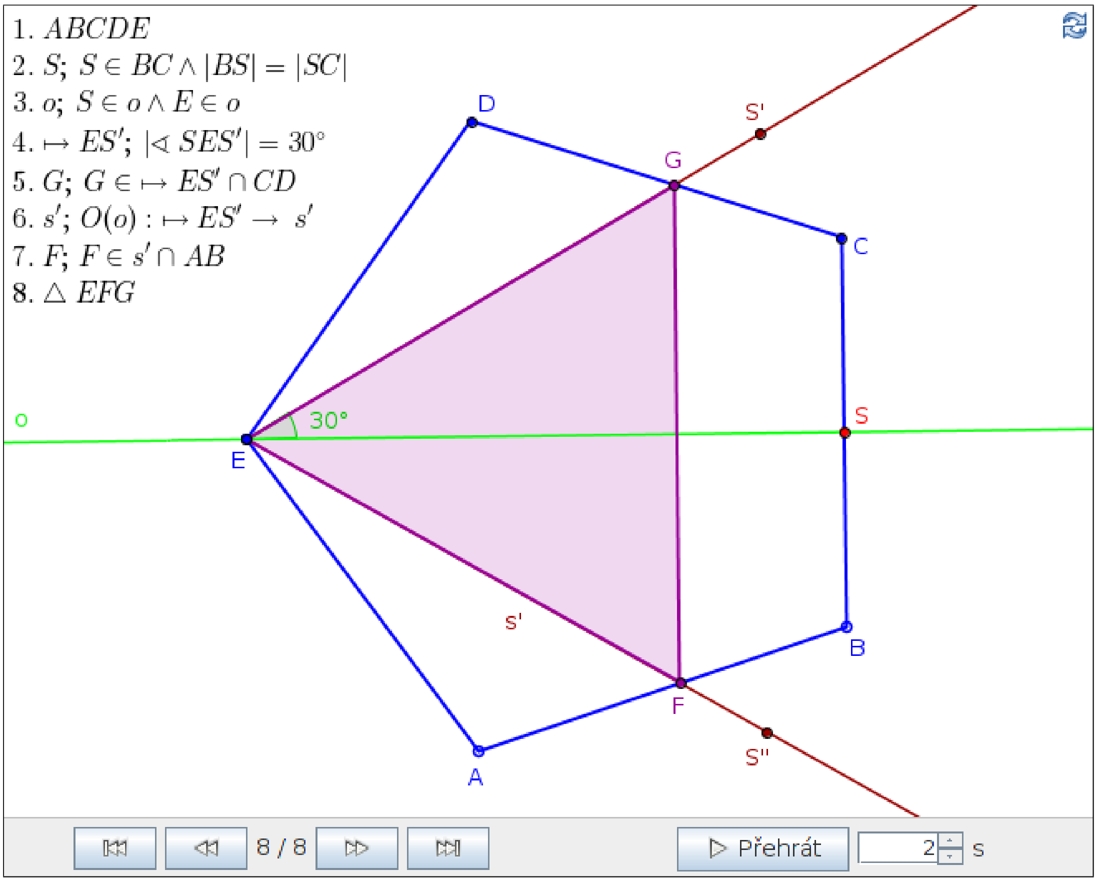


Obrázek 2.24: Náčrtek příkladu 2

Připomeňme si, co platí u rovnostranného trojúhelníka: všechny strany jsou stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly jsou navzájem shodné a mají velikost 60°.

- Protože trojúhelník EFG má být rovnostranný a jeden jeho vrchol splývá s vrcholem pravidelného pětiúhelníka, bude mít trojúhelník EFG stejnou jednu osu souměrnosti jako pětiúhelník $ABCDE$, a to osu o určenou body E, S, kde S je střed strany BC.
- Jelikož je osa o osou souměrnosti trojúhelníka EFG, bude půlit vnitřní úhel trojúhelníka u vrcholu E. Bodem E povedeme přímku s tak, aby s osou o svírala 30°.
- Bod G bude průsečík přímky s a strany CD.
- Přímku s zobrazíme v osové souměrnosti podle osy o, bod F bude průsečíkem zobrazené přímky a strany AB.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.25: Příklad 2

Závěr

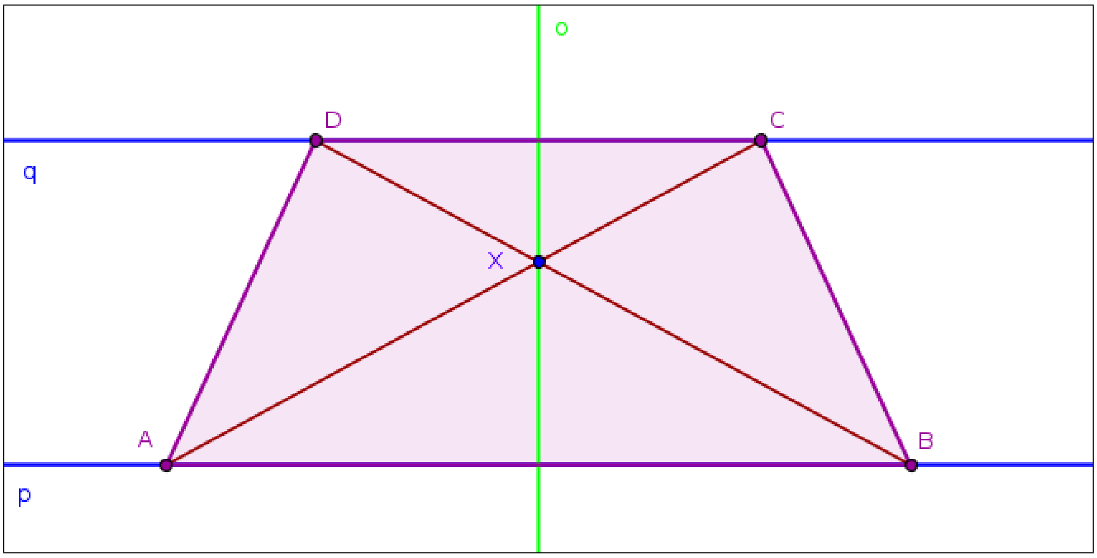
Úloha má právě jedno řešení.

Příklad 3

Jsou dány dvě rovnoběžné nesplývající přímky p, q, bod D na přímce q a bod X ležící v pásu ohraničeném přímkami p, q. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ takový, že bod X je průsečíkem úhlopříček lichoběžníka, základna AB leží na přímce p a základna CD leží na přímce q.

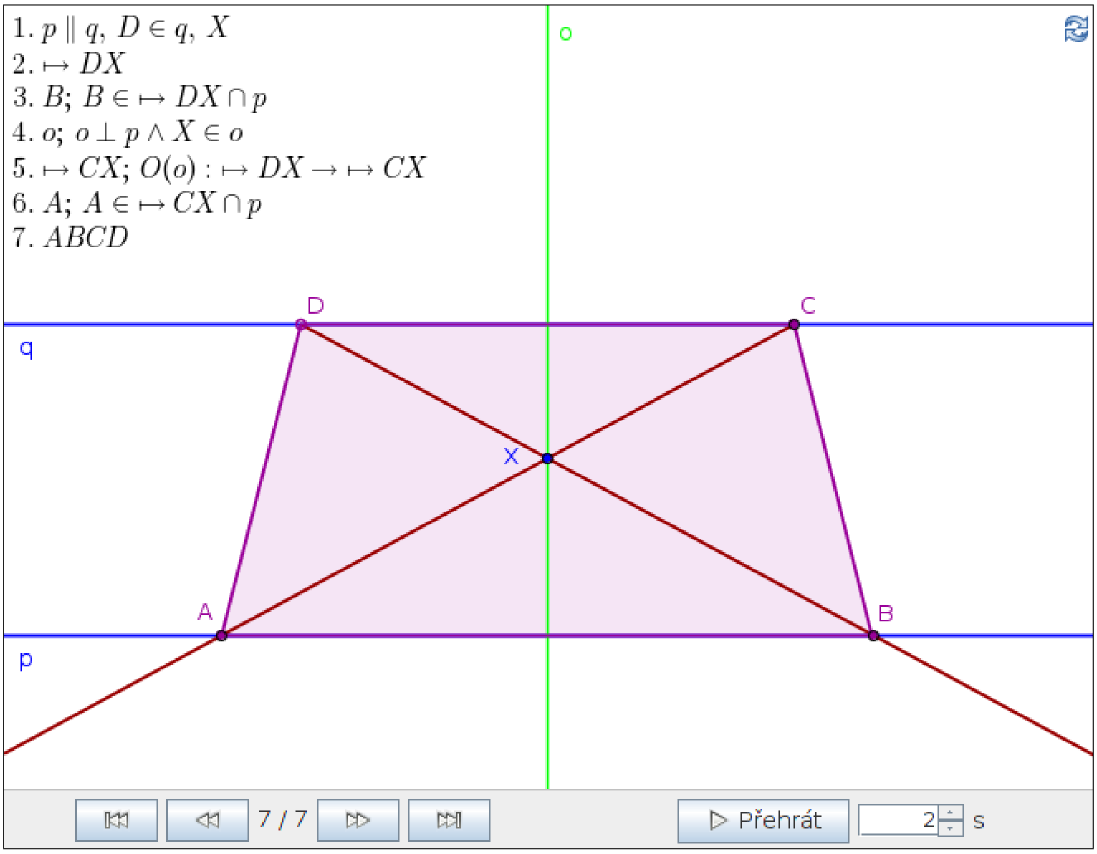
Rozbor

- Rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný podle přímky o, která prochází středy obou základen. My sice polohu středů základen neznáme, ale víme, že budou ležet na přímkách p, q. Zároveň víme, že průsečík úhlopříček X bude ležet na přímce o, protože je lichoběžník rovnoramenný. Proto bude osa souměrnosti o kolmá na přímky p, q a bude procházet bodem X.
- Oba body D a X leží na jedné z úhlopříček lichoběžníka, sestrojíme-li polopřímku DX, bude na ní ležet i bod B. Bod B získáme jako průsečík polopřímky DX a přímky p.
- Zobrazíme polopřímku DX v osové souměrnosti s osou o. Bod A získáme jako průsečík obrazu polopřímky DX a přímky p, bod C jako průsečík obrazu polopřímky DX a přímky q.



Obrázek 2.26: Náčrtek příkladu 3

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.27: Příklad 3

Diskuse

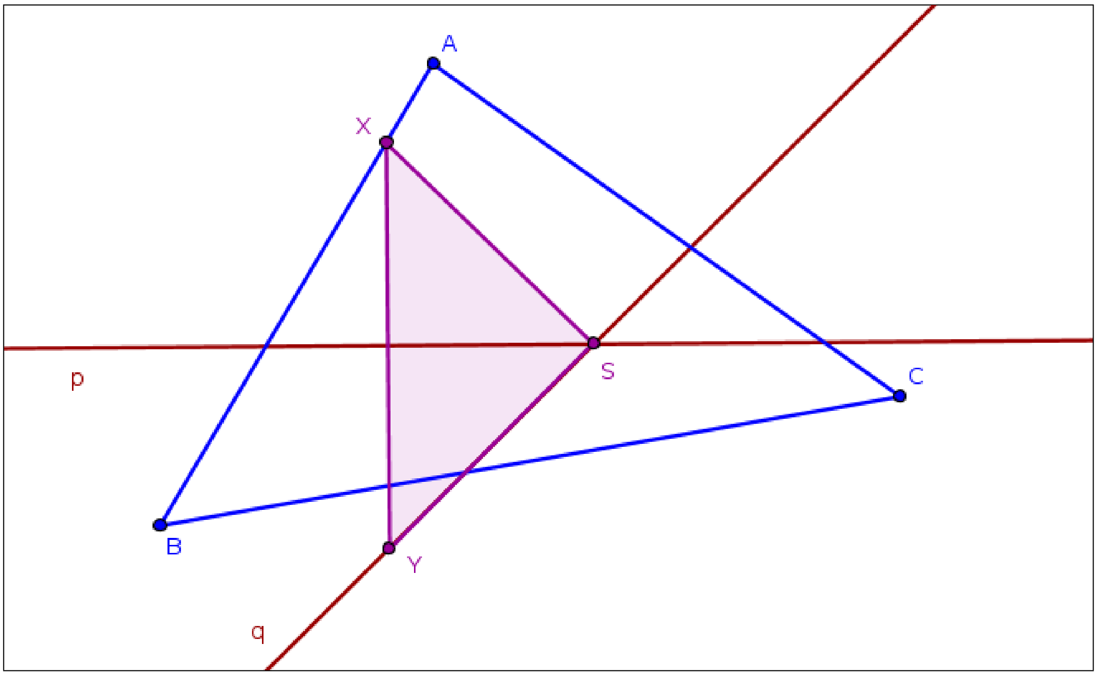
Počet řešení závisí na vzájemné poloze bodů X a D.

- Úloha nemá řešení, pokud přímka XD je kolmá na přímky p a q, nebo pokud bod X leží na přímce p nebo q.
- Úloha má právě jedno řešení pro všechna ostatní umístění bodu X uvnitř pásu.

Příklad 4

Jsou dány různoběžné přímky p, q, jejich průsečík S a trojúhelník ABC. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky SXY se základnou XY takové, že výška na základnu leží na přímce p, bod X leží na některé straně trojúhelníka ABC a bod Y leží na přímce q.

Rozbor



Obrázek 2.28: Náčrtek příkladu 4

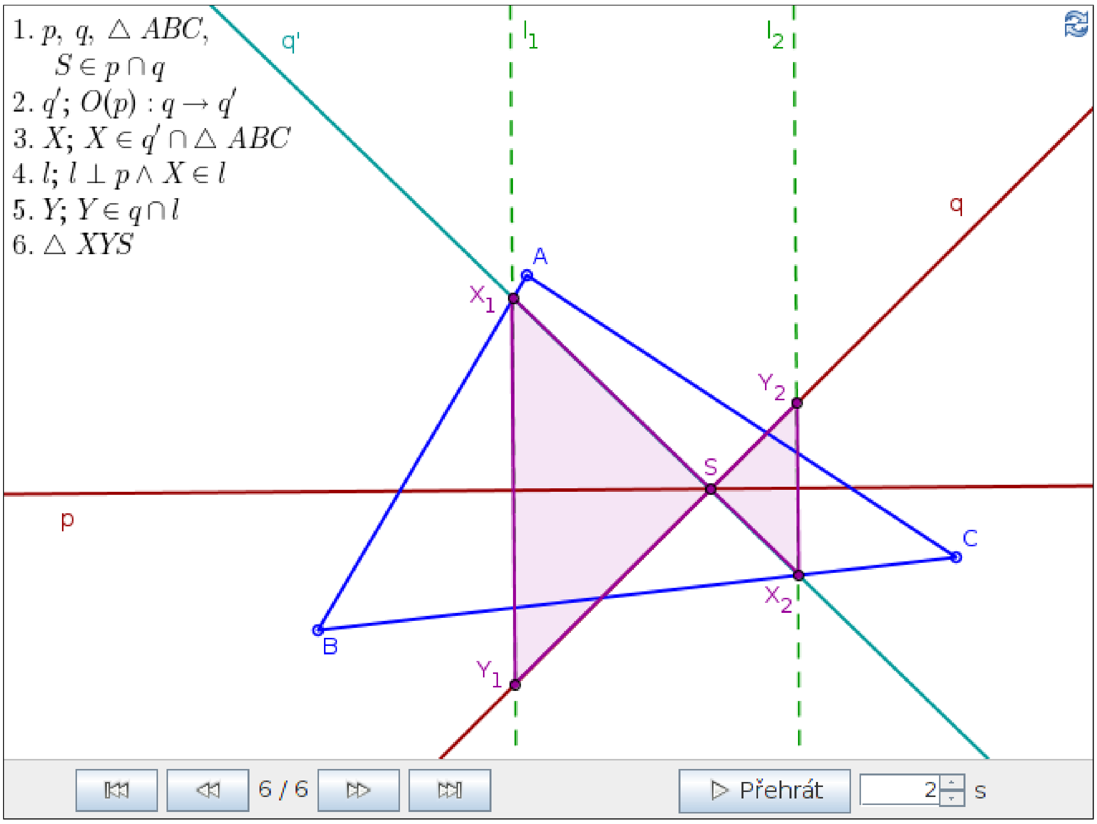
- Trojúhelník SXY má být rovnoramenný, proto přímka p, na které leží výška na základnu trojúhelníka, je zároveň osou souměrnosti trojúhelníka SXY.
- Bod Y má ležet na přímce q, tedy i strana SY bude ležet na přímce q. Proto bod X leží na obrazu q' přímky q v osové souměrnosti s osou p.
- Bod X získáme jako průsečík obrazu q' přímky q a strany daného trojúhelníka ABC.

Diskuse

Počet řešení závisí na vzájemné poloze přímky q' a trojúhelníka ABC.

- Úloha nemá řešení, pokud neexistuje průsečík přímky q' a trojúhelníka ABC.
- Úloha má právě jedno řešení, pokud bod S leží na některé ze stran trojúhelníka ABC nebo pokud existuje právě jeden průsečík přímky q' a trojúhelníka ABC (průsečíkem je některý z vrcholů trojúhelníka).
- Úloha má právě dvě řešení pro všechna ostatní umístění přímky q' a trojúhelníka ABC.

Konstrukce a zápis konstrukce

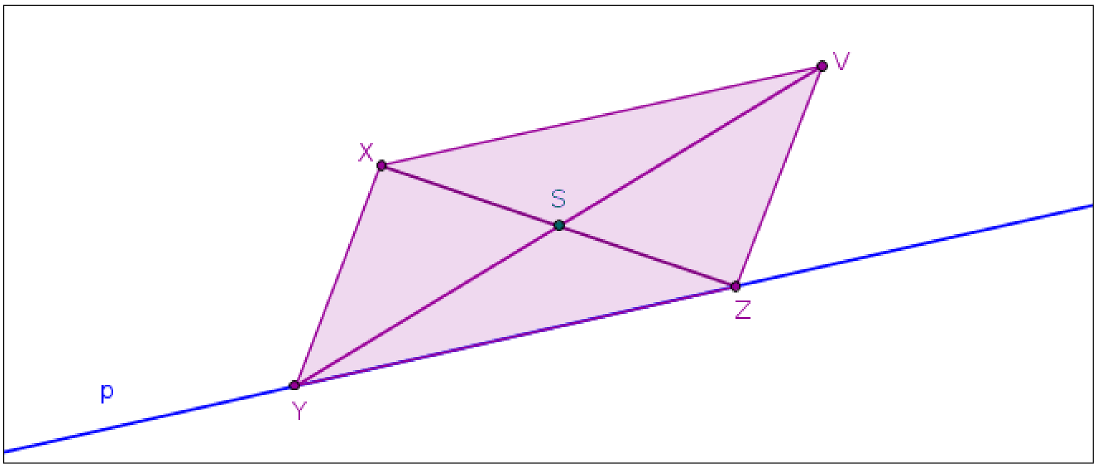


Obrázek 2.29: Příklad 4

Příklad 5

Je dána přímka p, na ní bod Z. Dále je dán bod X tak, že $|XZ| = 4$ cm. Zkonstruujte všechny kosodélníky $VXYZ$ s obvodem 14 cm, aby bod Y ležel na přímce p.

Rozbor

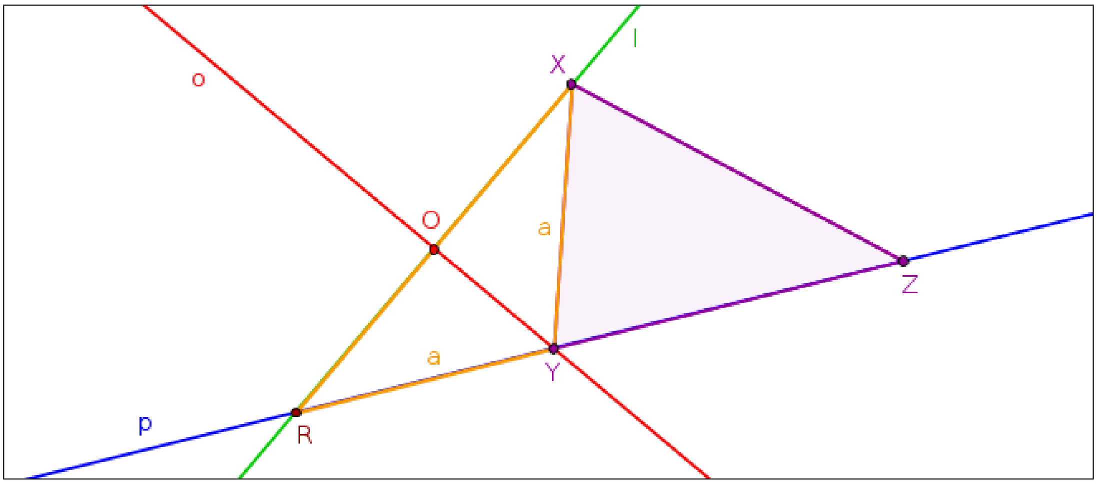


Obrázek 2.30: Náčrtek příkladu 5

- Úsečka XZ je úhlopříčkou kosodélníka, rozděluje nám kosodélník na dva shodné trojúhelníky. Úlohu si zjednodušíme, nejprve zkonstruujeme trojúhelník XYZ a z něj pak získáme kosodélník.

- Pro trojúhelník XYZ bude platit, že součet délek stran XY a YZ bude roven polovině odvodu kosodélníka $VXYZ$.

- Ke konstrukci trojúhelníka XYZ využijeme pomocného rovnoramenného trojúhelníka XRY, podívejte se na následující obrázek.



Obrázek 2.31: Pomocná konstrukce

- Bod Y má ležet na přímce p, bude na ní tedy ležet i strana YZ.

- Sestrojíme trojúhelník XZR tak, aby bod R ležel na přímce p a $|RZ| =$ 7 cm, tj. součtu stran XY a YZ.

- Nyní najdeme bod Y. K tomu využijeme vlastnosti rovnoramenného trojúhelníka – ramena trojúhelníka jsou stejně dlouhá ($|XY| = |RY|$). Proto $|XY|+|YZ| = |RY|+|YZ|$. Rovnoramenný trojúhelník je osově souměrný podle přímky o, na které leží výška na základnu. Takže přímka o je kolmá na úsečku XR a prochází jejím středem. Tato osa souměrnosti trojúhelníka nám určí umístění bodu Y – bod Y je průsečík přímky o a přímky p.

- Bod V sestrojíme z vlastností kosodélníka.

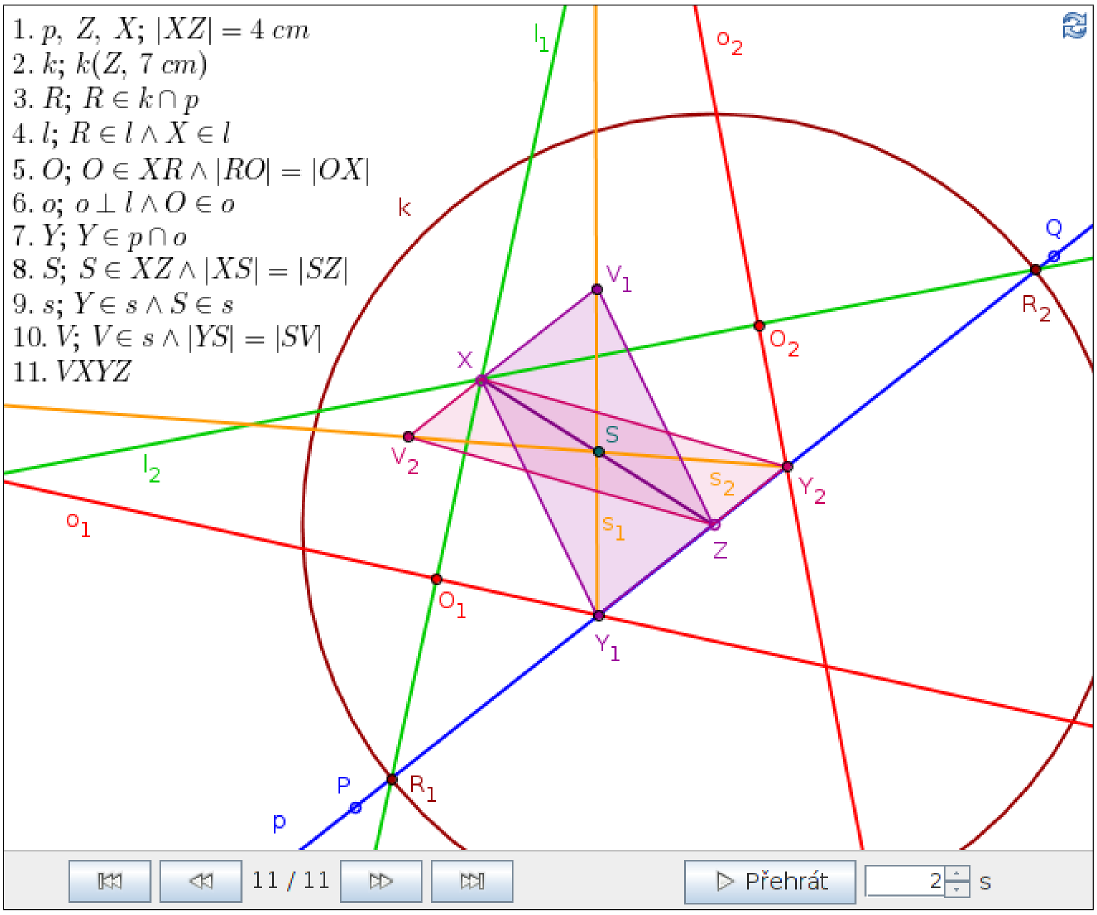
Diskuse

Počet řešení závisí na umístění bodu X.

- Úloha nemá řešení, pokud bod X leží na přímce p.

- Úloha má právě dvě řešení pro všechna ostatní umístění bodu X.

Konstrukce a zápis konstrukce

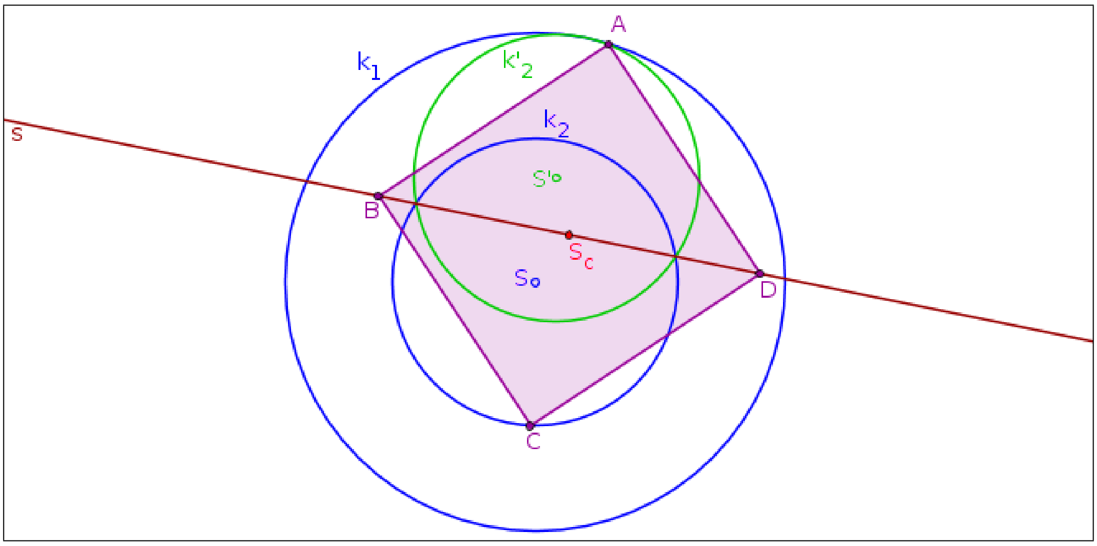


Obrázek 2.32: Příklad 5

Příklad 6

Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2, kde poloměr kružnice k_2 je menší než poloměr kružnice k_1, a sečna s kružnice k_2. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ takové, aby bod A ležel na kružnici k_1, bod C na kružnici k_2 a body B, D na sečně s.

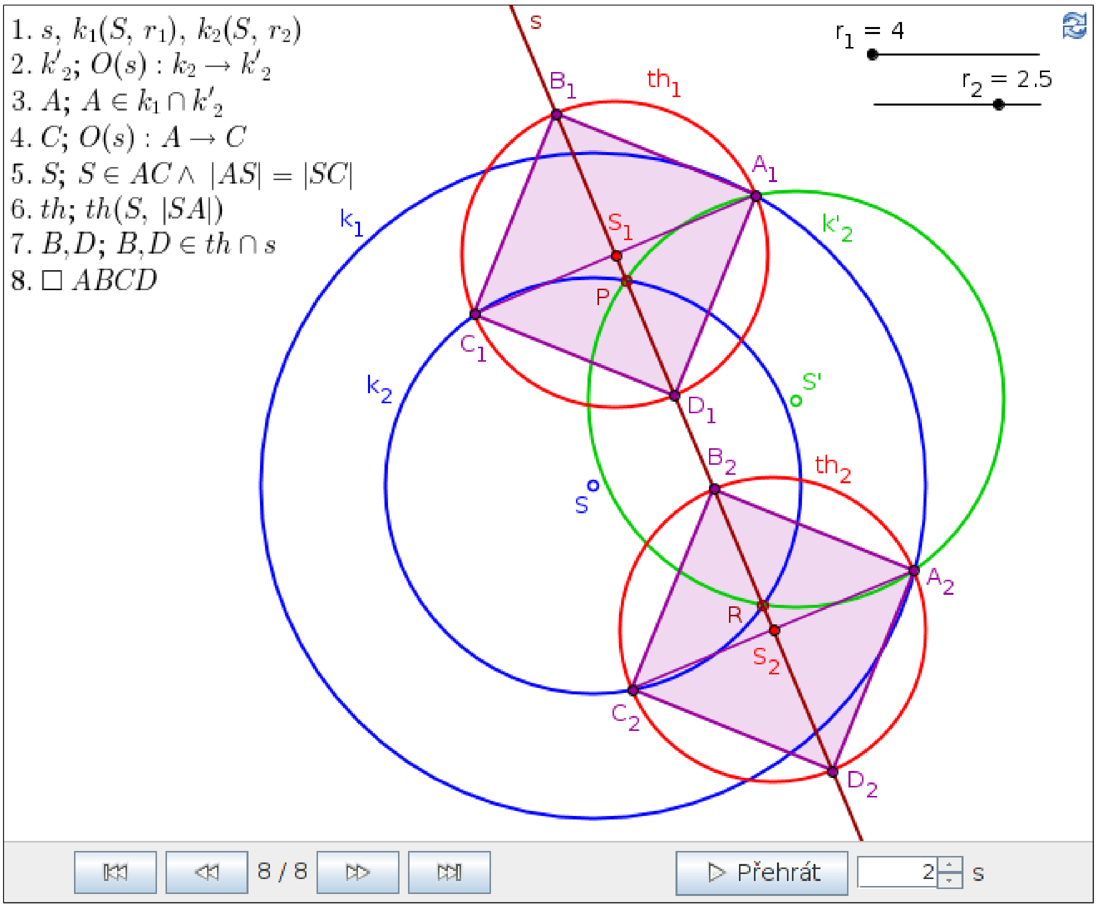
Rozbor



Obrázek 2.33: Náčrtek příkladu 6

- Úhlopříčka BD leží na sečně s (leží na ní tedy i střed čtverce S), úhlopříčka AC bude na sečnu s kolmá.
- Bod C leží na kružnici k_2, přitom musí platit $|CS| = |SA|$ a úsečka CA je kolmá na sečnu s. Proto bude bod A ležet na obrazu kružnice k_2 v osové souměrnosti s osou s.
- Bod A je průsečík kružnice k_1 a obrazu kružnice k_2.
- Bod C můžeme získat třeba jako obraz bodu A v osové souměrnosti s osou s. Pak již snadno určíme střed čtverce a body B, D získáme pomocí Thaletovy kružnice.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.34: Příklad 6

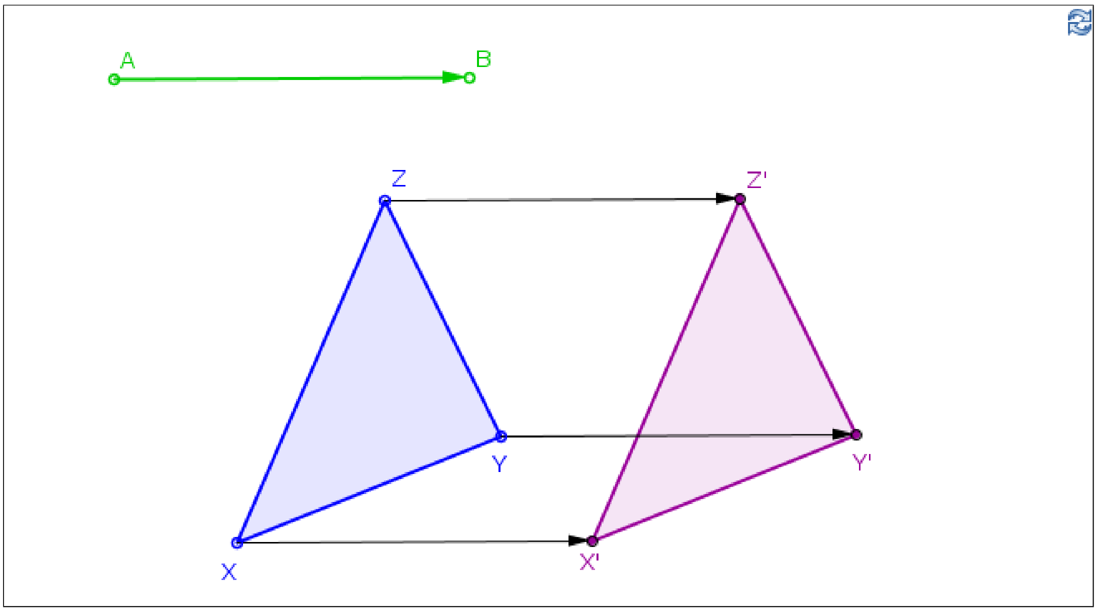
Diskuse

- Úloha nemá řešení, pokud neexistuje průsečík kružnice k_1 a obrazu kružnice k_2 v osové souměrnosti s osou s.
- Úloha má právě jedno řešení, pokud existuje právě jeden průsečík kružnic k_1 a k'_2.
- Úloha má právě dvě řešení, pokud mají kružnice k_1 a k'_2 dva průsečíky.

2.4 Posunutí

Definice. *Posunutí $T(\mathbf{AB})$ (neboli translace) je zobrazení v rovině určené orientovanou úsečkou* **AB***, ve kterém se zobrazí bod X na bod X' tak, že orientované úsečky* **AB** *a* **XX'** *jsou rovnoběžné, mají stejnou délku a stejný směr.*
Orientovaná úsečka **AB** *se nazývá také vektor posunutí.*
Obraz X' bodu X získaný v posunutí určeném orientovanou úsečkou **AB** *značíme $T(\mathbf{AB}) : X \to X'$.*

Následující applet (obr. 2.35) znázorňuje, jak se zobrazí trojúhelník XYZ v posunutí určeném orientovanou úsečkou **AB** a pozorujte, jak se bude měnit obraz trojúhelníka XYZ.



Obrázek 2.35: Posunutí

Posunutí je přímá shodnost.

Každé posunutí je jednoznačně určeno vektorem posunutí nebo vzorem X a jeho obrazem X'. Body X, X' bereme jako počáteční a koncový bod orientované úsečky **XX'**, která odpovídá vektoru posunutí.

2.4.1 Samodružné body

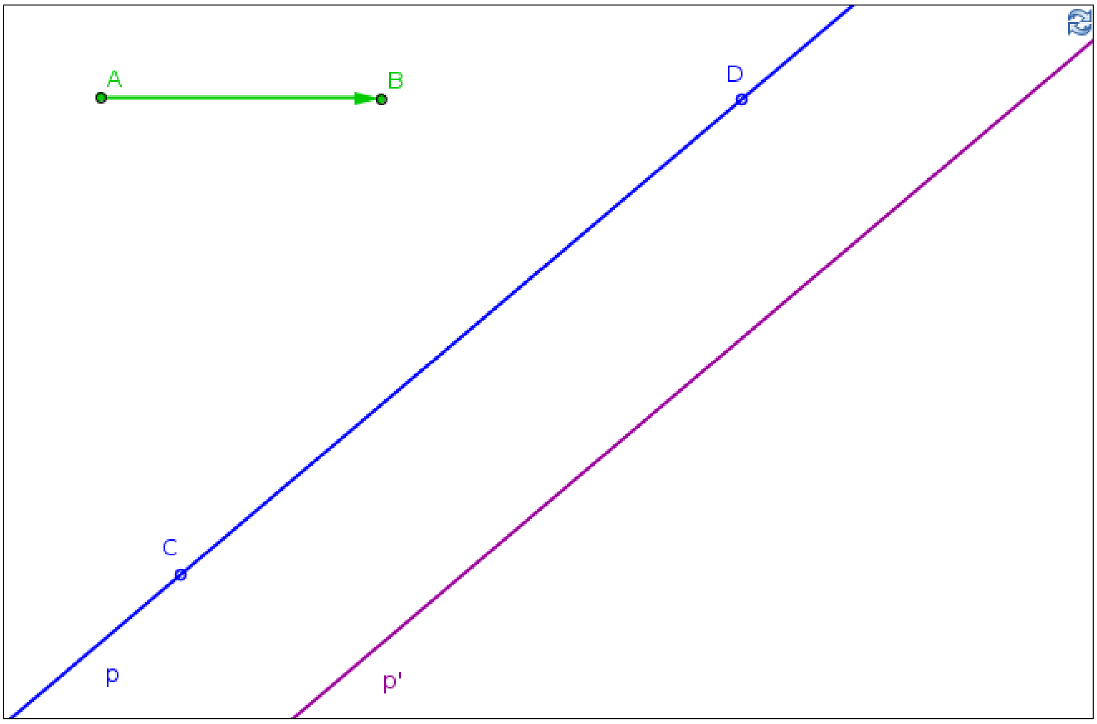
Zamyslete se, jestli existuje posunutí, které má nějaký samodružný bod.

Opravdu existuje, pokud bude orientovaná úsečka nulová (tj. její počáteční bod bude rovněž jejím koncovým bodem), bude se jednat o identitu, a v takovém případě budou všechny body samodružné.

Množina všech samodružných bodů posunutí je buď prázdná (pro nenulovou orientovanou úsečku), nebo je to rovina (pro nulovou orientovanou úsečku).

2.4.2 Samodružné přímky

Měňte polohu přímky p v následujícím appletu 3.4 a zkoumejte její obraz p'.



Obrázek 2.36: Samodružné přímky

Samodružnou přímku jste získali tehdy, když byla přímka p rovnoběžná s orientovanou úsečkou AB.

Množinu všech samodružných přímek posunutí tvoří všechny přímky, které jsou rovnoběžné s orientovanou úsečkou **AB** *(tj. s vektorem posunutí). Pokud je orientovaná úsečka nulová, pak jsou všechny přímky samodružné.*

2.4.3 Příklady

Příklad 1

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojte jeho obraz v posunutí určeném orientovanou úsečkou **XY**.

Rozbor

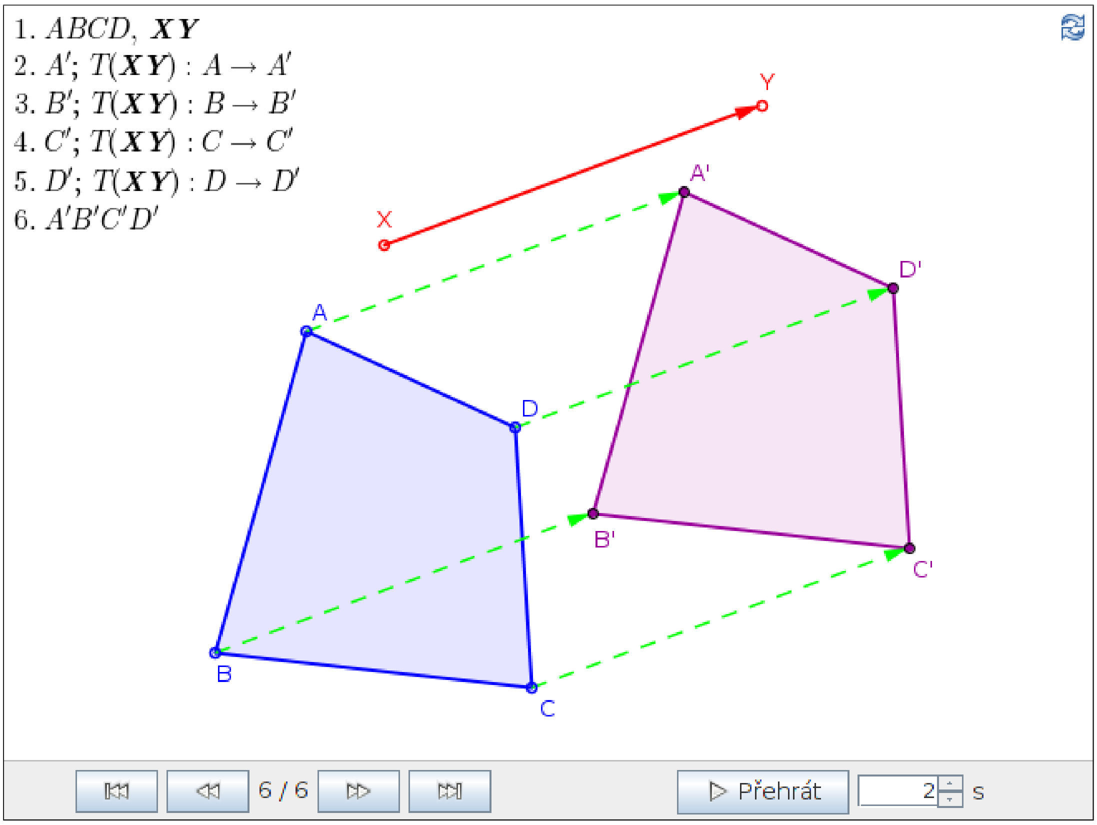
Budeme postupovat podle definice posunutí.

- Zobrazíme vrcholy čtyřúhelníka, obrazy vrcholů nám jednoznačně určí obrazy stran čtyřúhelníka.
- Obraz A' vrcholu A leží na přímce rovnoběžné s orientovanou úsečkou **XY**, která prochází bodem A, přitom bude platit: $|AA'| = |\mathbf{XY}|$.
- Ostatní vrcholy zobrazíme stejným postupem.

Závěr

Úloha má právě jedno řešení.

Konstrukce a zápis konstrukce

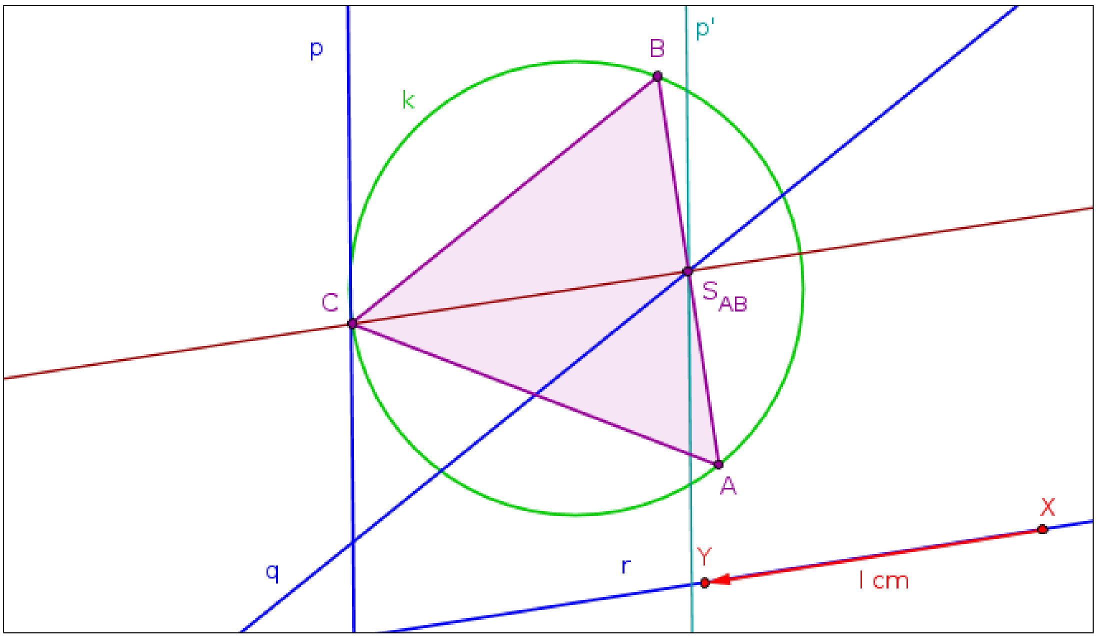


Obrázek 2.37: Příklad 1

Příklad 2

Jsou dány různoběžné přímky p, q, r. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC takové, že bod C leží na přímce p, střed strany c leží na přímce q, výška v_c na stranu c je rovnoběžná s přímkou r a $v_c = l$ cm, kde $l > 0$.

Rozbor

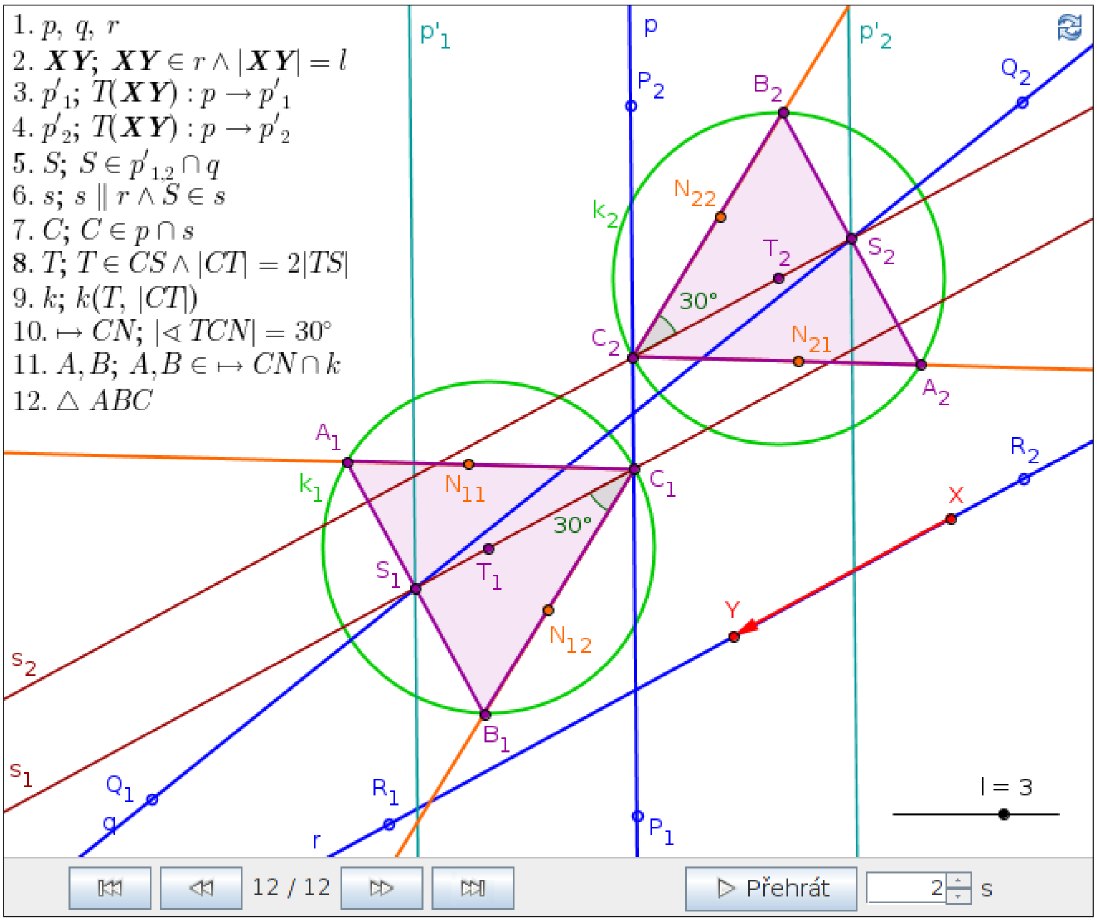


Obrázek 2.38: Náčrtek příkladu 2

Trojúhelník ABC začneme konstruovat výškou na stranu c.

- Protože $r \parallel v_c$, sestrojíme na přímce r pomocnou orientovanou úsečku **XY**, jejíž délka bude rovna l cm (délce výšky v_c).
- Tato orientovaná úsečka nám udává posunutí, ve kterém se střed strany c zobrazí na bod C, vrchol trojúhelníka ABC.
- Bod C leží na přímce p, proto bude střed strany c ležet na přímce p', kterou získáme posunutím přímky p o orientovanou úsečku **YX**.
- Střed S strany c získáme jako průsečík přímek q a p'.
- Bod C získáme jako průsečík přímky p a rovnoběžky s přímkou r vedenou bodem S.
- Zbylé vrcholy rovnostranného trojúhelníka ABC můžeme získat několika různými způsoby, např. jako průsečíky kružnice opsané trojúhelníku ABC a přímek CN, kde velikost úhlu CNS je 30°. Na další způsoby jistě přijdete sami.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.39: Příklad 2

Diskuse

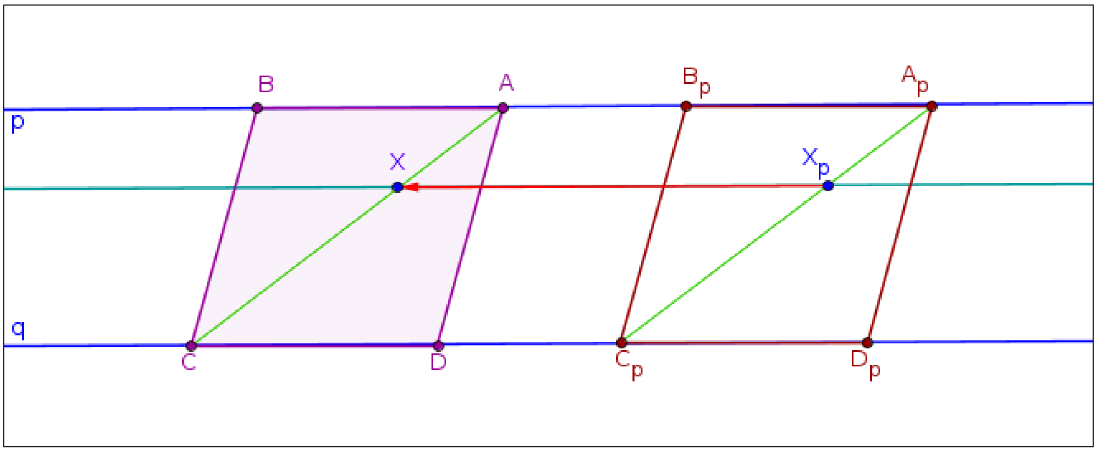
Úloha má dvě řešení pro všechna l kladná.

Příklad 3

Jsou dány rovnoběžné přímky p, q a bod X, vzdálenost přímek p, q je v cm, $v > 0$. Sestrojte všechny kosočtverce $ABCD$ takové, že body A, B leží na přímce p, body C, D leží na přímce q, bod X leží na úhlopříčce AC a obsah kosočtverce je 15 cm^2.

Při konstrukci na papír volte vzdálenost přímek p, q rovnou 3 cm.

Rozbor



Obrázek 2.40: Náčrtek příkladu 3

Bylo by velice obtížné sestrojit kosočtverec požadovaných vlastností přímo, proto zkonstruujeme pomocný kosočtverec $A_pB_pC_pD_p$ o obsahu 15 cm^2, který vhodně posuneme, aby bod X ležel na přímce AC.

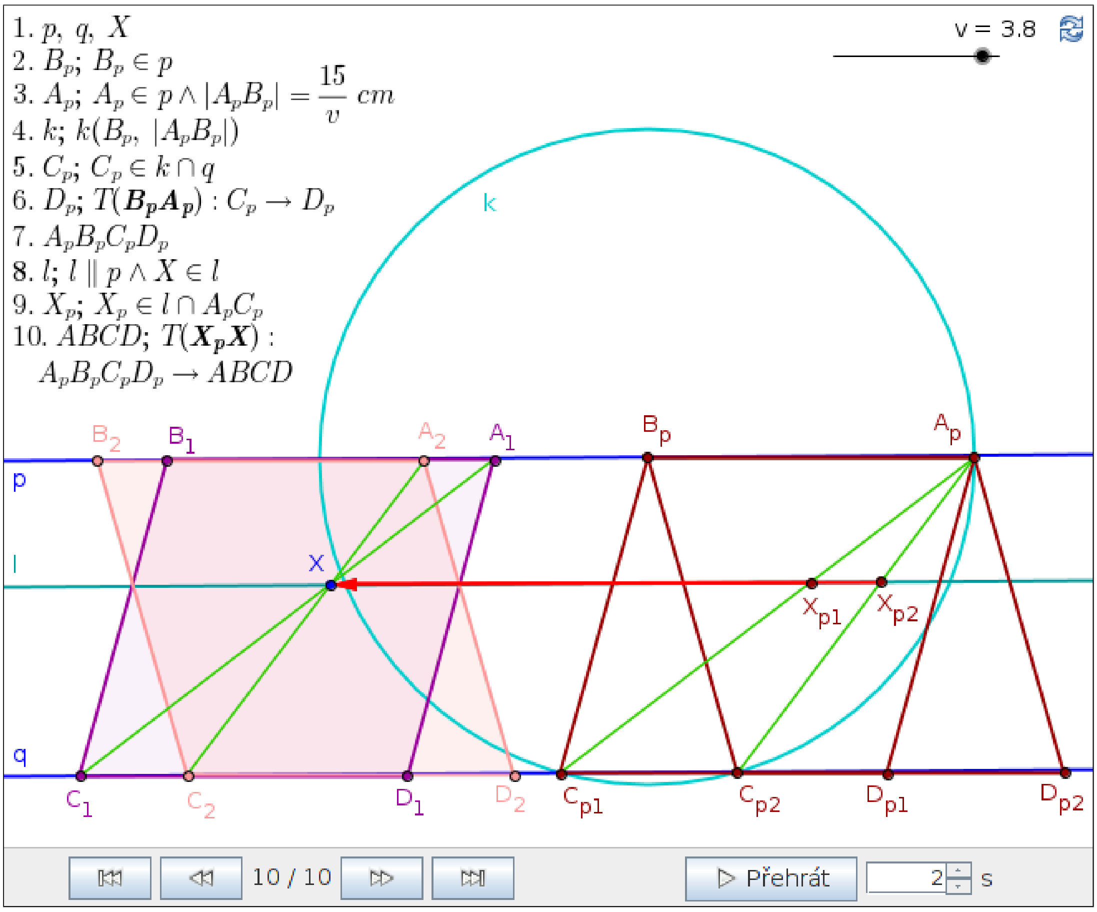
- Obsah kosočtverce je roven součinu délky strany a příslušné výšky na stranu kosočtverce. Protože vrcholy A, B leží na přímce p a vrcholy C, D leží na přímce q, je výška na stranu a rovna vzdálenosti přímek p, q. Strana kosočtverce $ABCD$ je rovna $\frac{15}{v}$ cm.
- Pokud známe délku strany kosočtverce, můžeme sestrojit pomocný kosočtverec $A_pB_pC_pD_p$ o obsahu 15 cm^2 tak, aby body A_p, B_p ležely na přímce p a body C_p, D_p ležely na přímce q.
- Nyní stačí určit vektor posunutí. Vedeme rovnoběžku s přímkou p, která prochází bodem X. Průsečík rovnoběžky a úhlopříčky A_pC_p označme X_p.
- Hledaný kosočtverec je obraz pomocného kosočtverce $A_pB_pC_pD_p$ v posunutí určeného orientovanou úsečkou $\mathbf{X}_p\mathbf{X}$.

Diskuse

Počet řešení závisí na vzdálenosti přímek p, q.

- Úloha nemá řešení, pokud je délka strany kosočtverce menší než vzdálenosti přímek p, q.
- Úloha má jinak dvě řešení.

Konstrukce a zápis konstrukce

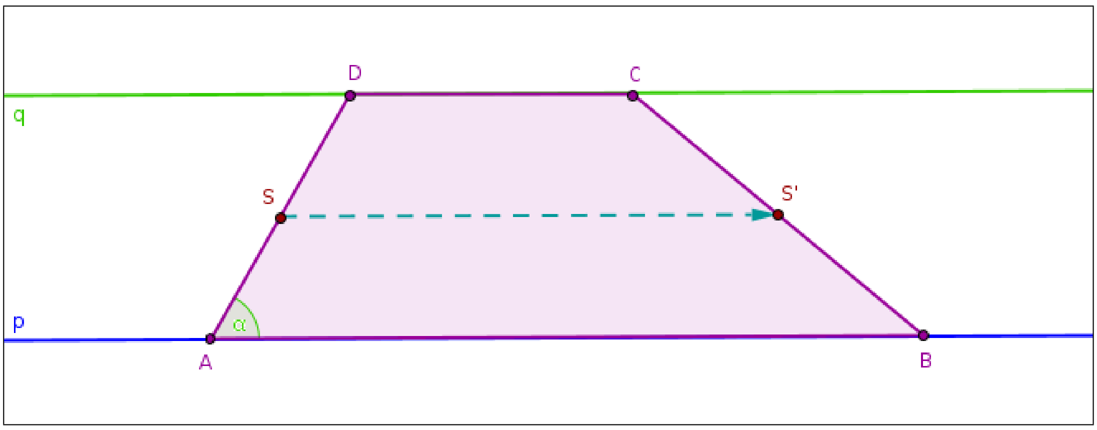


Obrázek 2.41: Příklad 3

Příklad 4

Narýsujte lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD, znáte-li délku strany c, délku výšky v_c lichoběžníka, velikost úhlu DAB je α a střední příčka lichoběžníka má velikost $\frac{5}{3} \cdot c$.

Rozbor



Obrázek 2.42: Náčrtek příkladu 4

Předpokládejme, že takový lichoběžník leží na přímkách p, q, $p \parallel q$, $|pq| = v_c$.

Přímo ze zadání snadno sestrojíme některé vrcholy lichoběžníka, konkrétně vrcholy A, C a D. Obtížnější bude získat bod B.

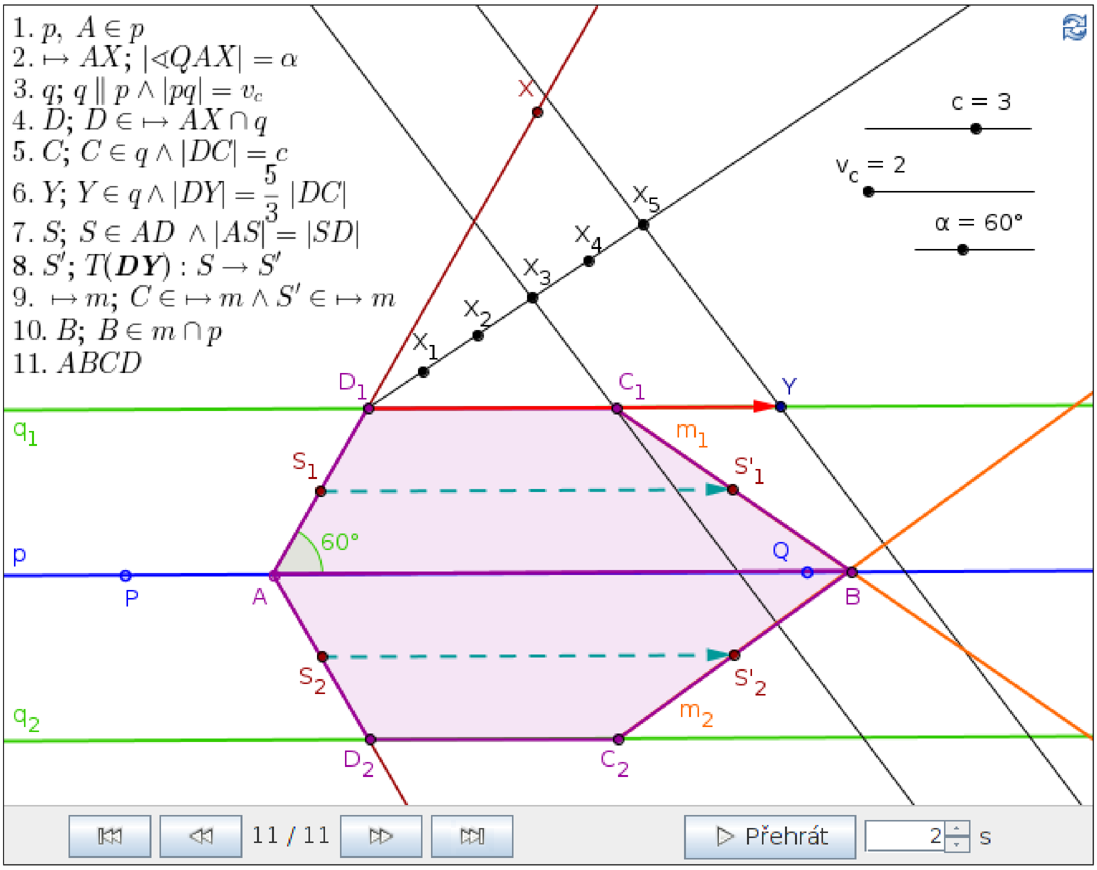
- Střední příčka lichoběžníka je úsečka, která spojuje středy ramen lichoběžníka. Budeme-li se na střední příčku dívat jako na orientovanou úsečku s počátečním bodem S ve středu strany AD a koncovým bodem S' ve středu strany BD, pak se bod S zobrazí na bod S' v posunutí určeném touto orientovanou úsečkou.

- Využijeme již zkonstruovaného bodu, například bodu D. (Využijeme tedy toho, že úsečku délky c už máme narýsovanou.) Sestrojíme si pomocnou orientovanou úsečku $\mathbf{DY}$ délky střední příčky, kde bod Y bude ležet na přímce q. Tak zajistíme, že orientovaná úsečka $\mathbf{DY}$ bude rovnoběžná se střední příčkou lichoběžníka.

- Střed S' strany BC získáme jako obraz středu S strany AD v posunutí určeném orientovanou úsečkou $\mathbf{DY}$.

- Bod S' a bod C nám určí přímku, na které bude ležet strana BC, bod B tedy získáme jako průsečík této přímky a přímky p.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.43: Příklad 4

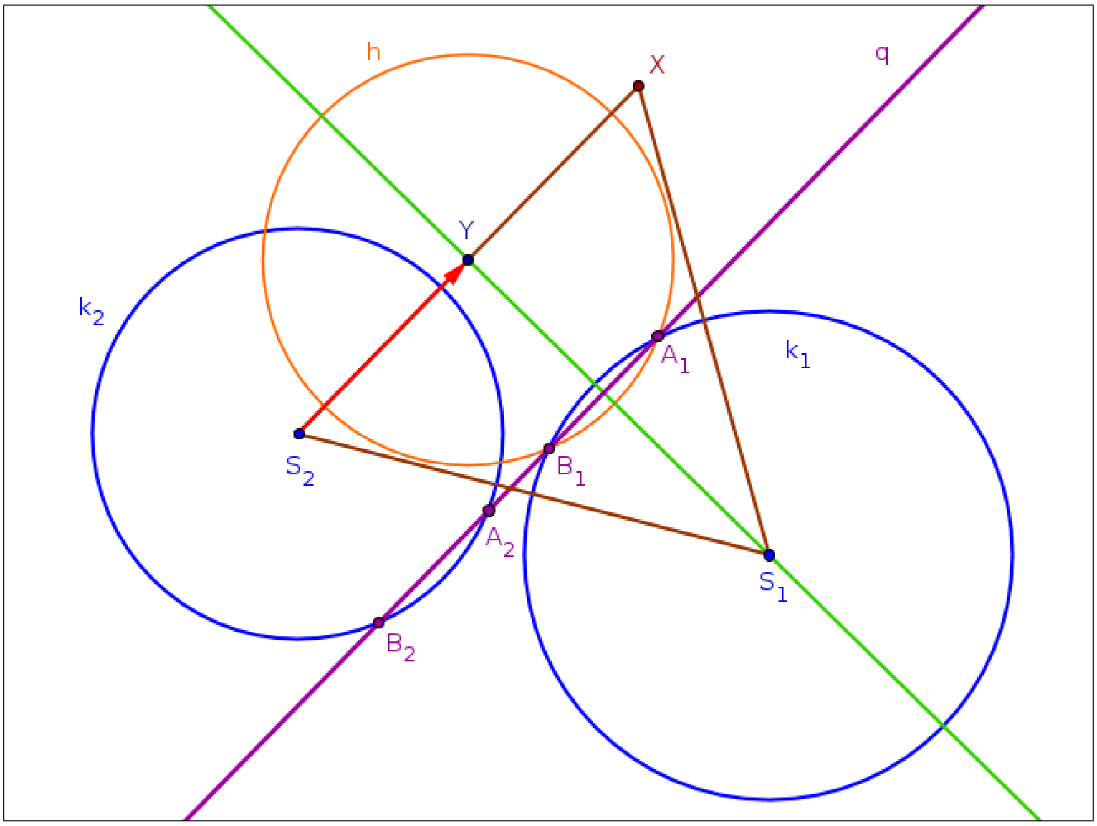
Diskuse

Úloha má dvě řešení pro $v_c > 0$, jedno v každé polorovině.

Příklad 5

Jsou dány kružnice k_1 se středem S_1, k_2 se středem S_2. Sestrojte přímku q, která vytíná na kružnicích k_1, k_2 tětivy stejné délky a která je rovnoběžná s přímkou S_2X, kde X je vrchol rovnostranného trojúhelníka S_1S_2X.

Rozbor



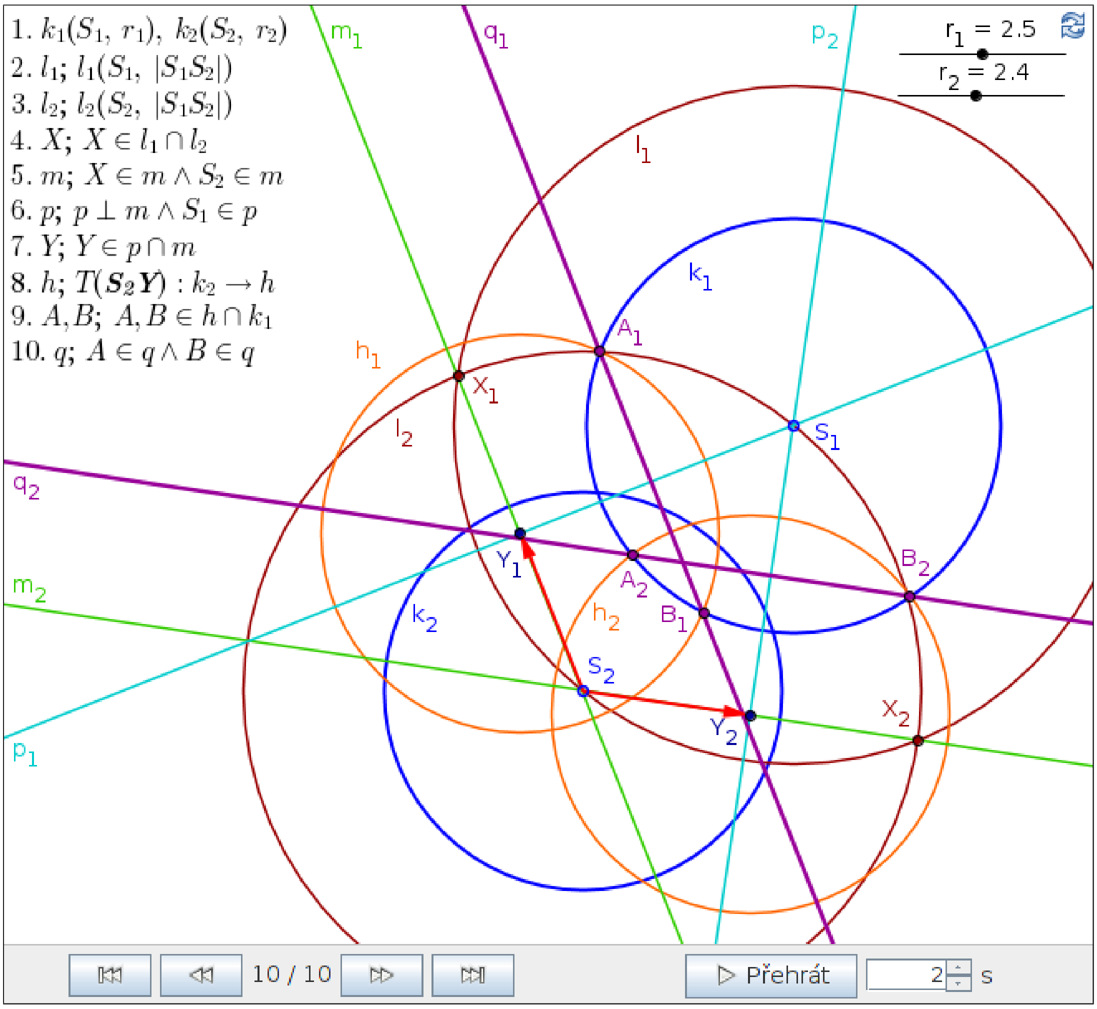
Obrázek 2.44: Náčrtek příkladu 5

Nejprve si nakresleme náčrtek a zamysleme se. Příslušné tětivy označme A_1B_1 a A_2B_2.

- Body A_1, B_1, A_2, B_2 leží na přímce q. Bod A_1 je obrazem bodu A_2 v posunutí určeném orientovanou úsečkou $\mathbf{A_2A_1}$ a bod B_1 je obrazem bodu B_2 v témže posunutí.
- Body A_2, B_2 leží na kružnici k_2, proto budou body A_1, B_1 ležet na kružnici h, která je obrazem kružnice k_2 v posunutí určeném orientovanou úsečkou $\mathbf{A_2A_1}$.
- Orientovanou úsečku $\mathbf{A_2A_1}$ zatím neznáme, víme ale, že orientovaná úsečka $\mathbf{S_2Y}$, kde Y je střed kružnice h, bude rovnoběžná, stejně dlouhá a bude mít stejný směr jako $\mathbf{A_2A_1}$. Proto musíme určit střed kružnice h.
- Protože přímka q má být rovnoběžná a přímkou XS_2, bude střed kružnice h ležet na přímce XS_2.
- Úsečka A_1B_1 bude také tětivou kružnice h, její střed bude proto ležet na ose úsečky A_1B_1. Ta bude ale rovněž procházet středem kružnice k_1, neboť body A_1, B_1 leží i na kružnici k_1.

- Zbývá si uvědomit, že osa úsečky A_1B_1 bude kolmá na přímku XS_2. (Úsečka A_1B_1 je rovnoběžná s přímkou XS_2.)
- Střed kružnice h je průsečík přímky XS_2 a přímky kolmé na přímku XS_2, která prochází bodem S_1.
- Průsečíky kružnic h a k_1 vedeme hledanou přímku q.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.45: Příklad 5

Diskuse

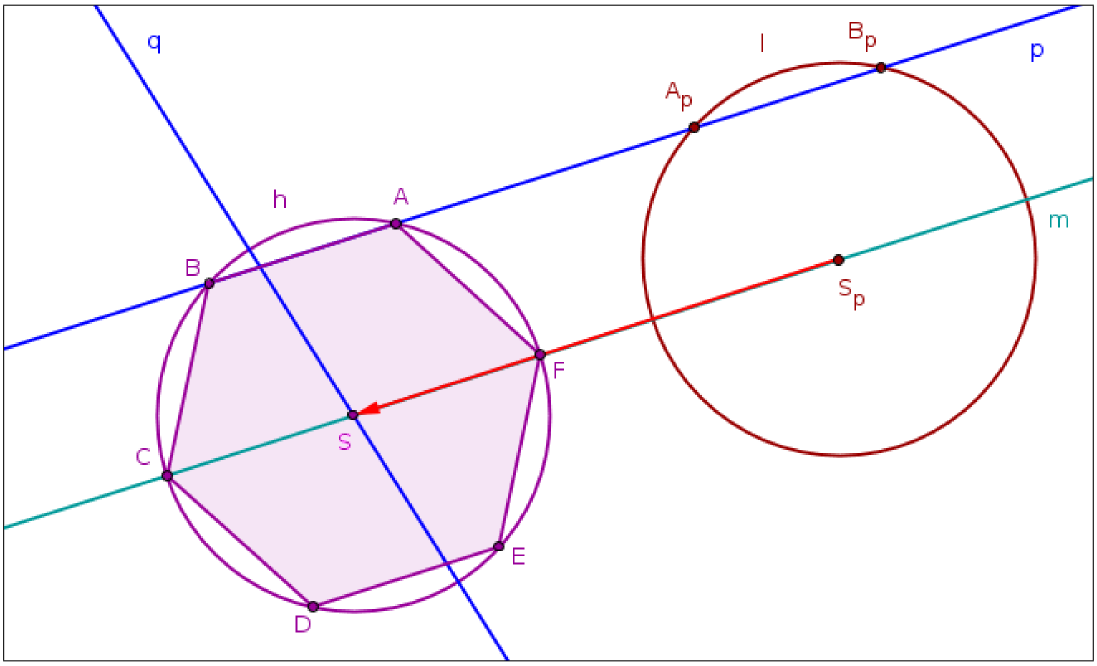
Počet řešení závisí na vzájemné poloze kružnic k_1, k_2.

- Úloha nemá řešení, pokud neexistuje průsečík kružnic h a k_1.
- Úloha má jinak dvě řešení.

Příklad 6

Jsou dány různoběžky p, q. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$, aby střed šestiúhelníka S ležel na přímce q, strana AB ležela na přímce p, $|AB| = a$ cm, kde $a > 0$.

Rozbor



Obrázek 2.46: Náčrtek příkladu 6

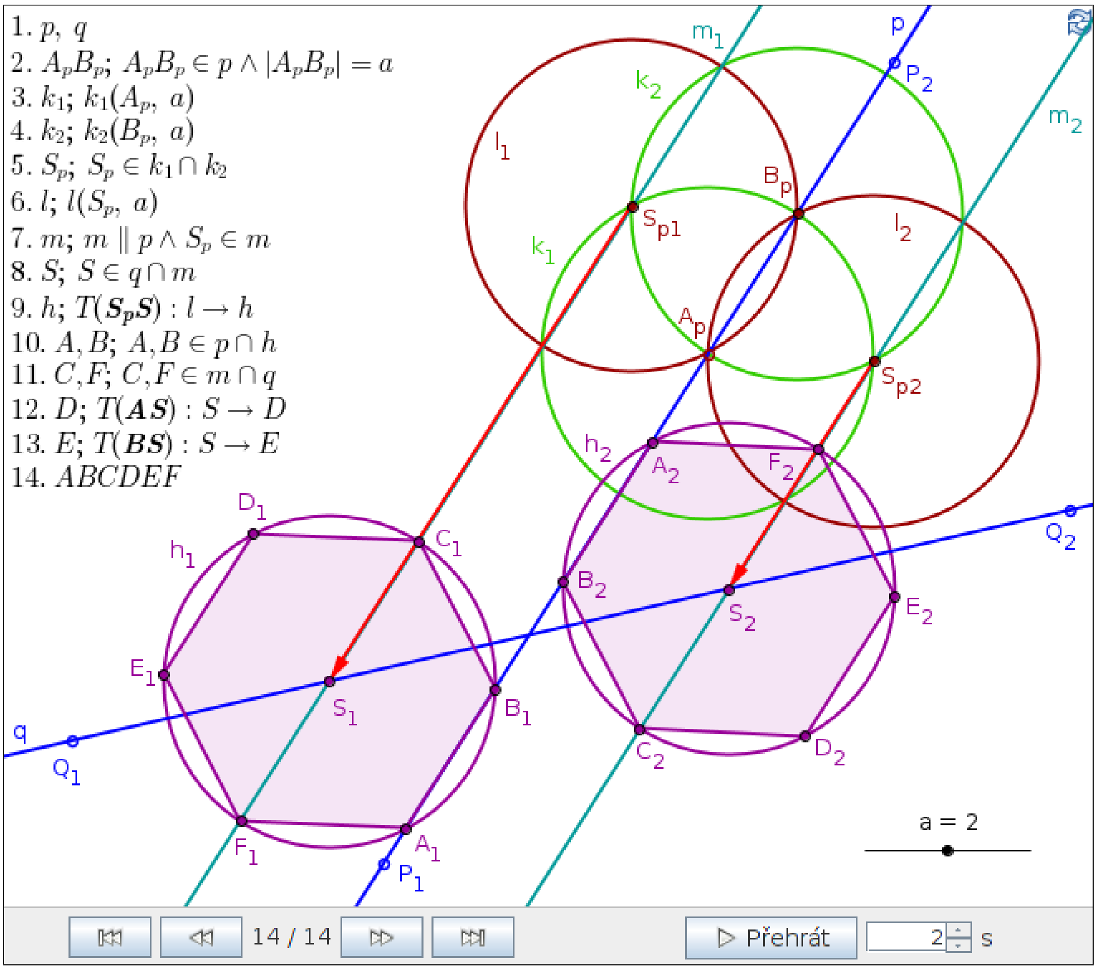
Při konstrukci pravidelného šestiúhelníka využijeme jeho vlastností – vrcholy leží na kružnici opsané a dva sousední vrcholy společně se středem šestiúhelníka tvoří rovnostranný trojúhelník.

- Zkonstruujeme nejprve kružnici opsanou šestiúhelníku. Nemůžeme ji sestrojit přímo, protože neznáme její střed. Sestrojíme tedy nejdříve pomocnou kružnici „opsanou", kterou pak vhodně posuneme.
- Na přímce p vyneseme úsečku A_pB_p délky a cm. Nalezneme bod S_p tak, aby body $A_pB_pS_p$ tvořily rovnostranný trojúhelník.
- Sestrojíme kružnici l se středem v bodě S_p, která prochází body A_p, B_p.
- Střed S šestiúhelníka bude od přímky p stejně vzdálený jako střed S_p kružnice l. Vedeme rovnoběžku m s přímkou p, která prochází bodem S_p. Bod S získáme jako průsečík rovnoběžky m a přímky q.
- Kružnici l zobrazíme na kružnici h posunutím o orientovanou úsečku $\mathbf{S}_p\mathbf{S}$.
- Body A, B získáme jako průsečíky kružnice h a přímky p. Body C, F získáme jako průsečíky přímky m a kružnice h. (Protože je přímka m rovnoběžná s p a prochází středem kružnice h.) Body D, E můžeme získat několika různými způsoby, např. posunutím bodu S o orientovanou úsečku **AS** a **BS**. Na jiné způsoby si jistě přijdete sami.

Diskuse

Úloha má právě dvě řešení pro všechna a kladná.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.47: Příklad 6

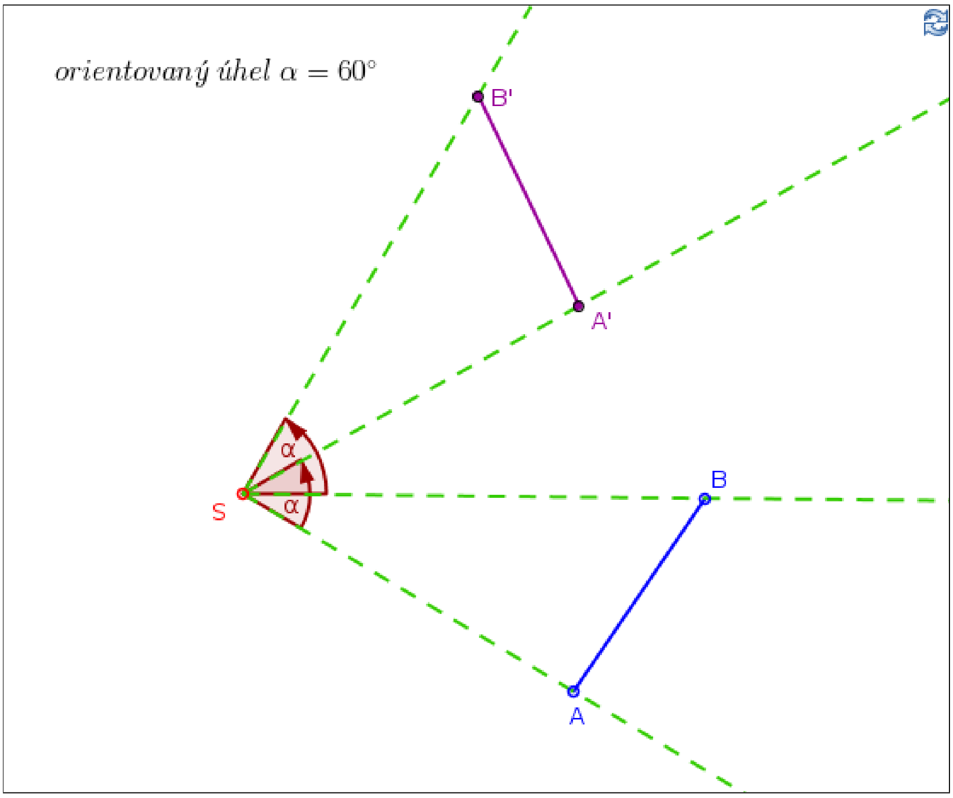
2.5 Otočení

Definice. *Otočení $R(S, \alpha)$ (neboli rotace) je zobrazení v rovině určené bodem S a orientovaným úhlem α, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|XS| = |X'S|$ a orientované úhly XSX' a α mají stejnou velikost a jsou shodně orientované.*
Bod S se nazývá střed otočení, orientovaný úhel α se nazývá úhel otočení.
Obraz X' bodu X získaný v otočení určeném středem S a orientovaným úhlem α značíme $R(S, \alpha) : X \to X'$.

Následující applet (obr. 2.48) ukazuje, jak se zobrazí úsečka AB v otočení určeném středem S a orientovaným úhlem α. Měňte polohu úsečky AB a sledujte, jak se bude měnit její obraz.

Otočení je přímá shodnost.

Otočení je jednoznačně určeno středem S, velikostí úhlu α a smyslem otočení (kladným nebo záporným) nebo středem S a dvojicí bodů X, X', kde X je vzor a X' obraz bodu X, přičemž X, $X' \neq S$.



Obrázek 2.48: Otočení

Středová souměrnost se středem S je vlastně speciálním případem otočení kolem středu S o orientovaný úhel velikosti 180°.

2.5.1 Samodružné body

Z definice plyne, že samodružným bodem otočení je střed otočení S. Neexistuje otočení, které by vytvořilo i další samodružné body?

Ano, existuje. Pokud je α nulový orientovaný úhel, pak se každý bod zobrazí sám na sebe. S takovýmto zobrazením jsme se již setkali, jde o identitu.

Množinu všech samodružných bodů otočení tvoří střed otočení S (pro $\alpha \neq k \cdot 360°$), nebo ji tvoří celá rovina (pro $\alpha = k \cdot 360°$), kde k je celé číslo.

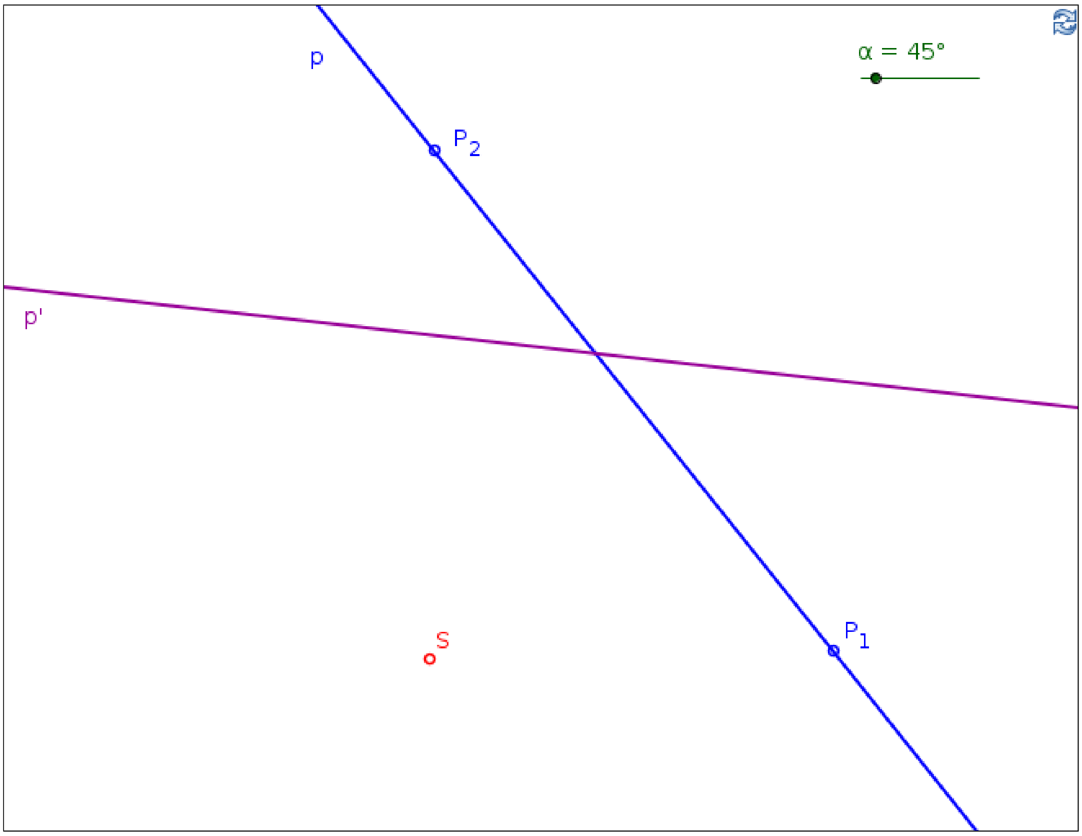
2.5.2 Samodružné přímky

Zkuste v následujícím appletu (obr. 3.4) získat samodružné přímky. Můžete měnit velikost orientovaného úhlu α, polohu přímky p a středu otočení S.

Pokud applet pořádně prozkoumáte, přijdete na to, že samodružné přímky lze vytvořit pouze ve dvou speciálních případech:

- úhel $\alpha = 180°$ a přímka p prochází středem otáčení S,
- nebo úhel $\alpha = 360°$.

První případ nám dává zobrazení zvané středová souměrnost a druhý případ nám dává identitu. V jiných případech otočení žádnou samodružnou přímku nevytvoří.



Obrázek 2.49: Samodružné přímky

Množina všech samodružných přímek otočení je buď prázdná (pro $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$ a $\alpha \neq k \cdot 360^\circ$), nebo je tvořena všemi přímkami procházejícími středem otočení S (pro $\alpha = k \cdot 180^\circ$), nebo je tvořena všemi přímkami roviny (pro $\alpha = k \cdot 360^\circ$), kde k je celé číslo.

2.5.3 Příklady

Příklad 1

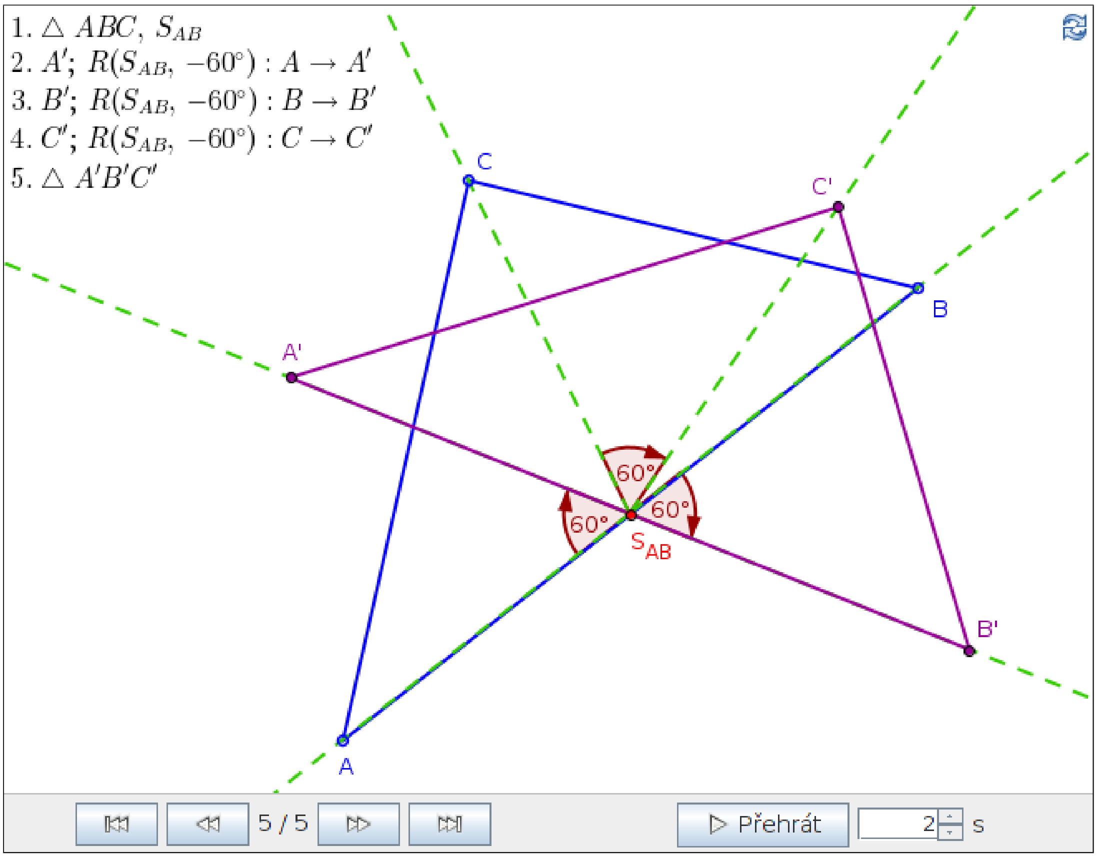
Sestrojte obraz daného trojúhelníka ABC v otočení určeném bodem S_{AB} a orientovaným úhlem -420°.

Rozbor

Při konstrukci budeme postupovat podle definice otočení.

- Máme otočit trojúhelník o úhel 420° v záporném smyslu otočení, tj. po směru pohybu hodinových ručiček. Otočením o -360° stupňů se dostaneme do původní polohy trojúhelníka ABC, stačí nám tedy otočit trojúhelník o -60°. (Obraz útvaru v otočení o orientovaný úhel -420° odpovídá obrazu útvaru v otočení o orientovaný úhel -60°.)
- Zobrazíme vrcholy trojúhelníka, obrazy vrcholů nám jednoznačně určí obrazy stran trojúhelníka.
- Obraz A' vrcholu A leží na přímce svírající s přímkou $S_{AB}A$ úhel -60° a bude platit: $|S_{AB}A| = |S_{AB}A'|$.
- Ostatní vrcholy zobrazíme stejným postupem.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.50: Příklad 1

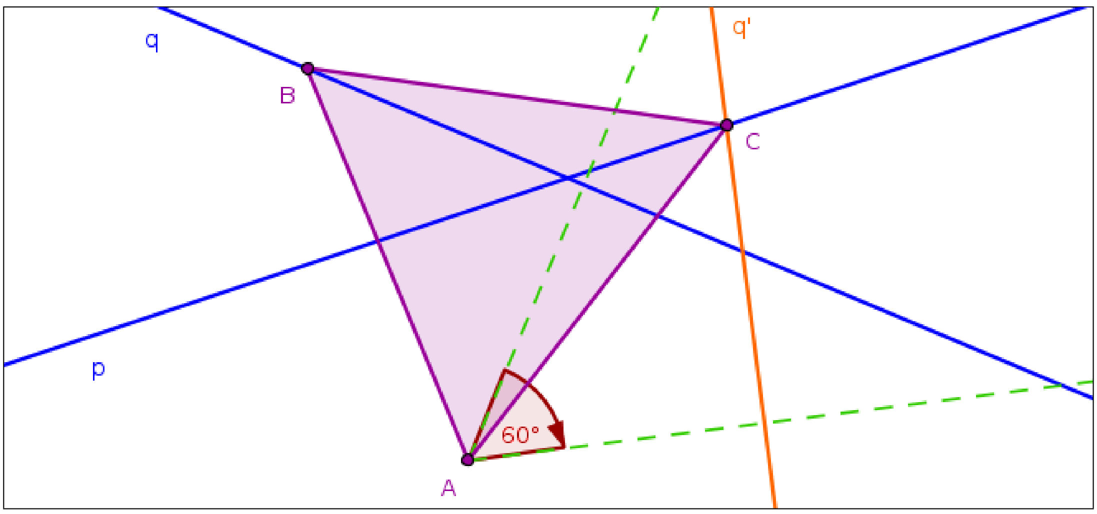
Závěr

Úloha má jedno řešení.

Příklad 2

Jsou dány různoběžné přímky p, q a bod A. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby bod B ležel na přímce q a bod C ležel na přímce p.

Rozbor

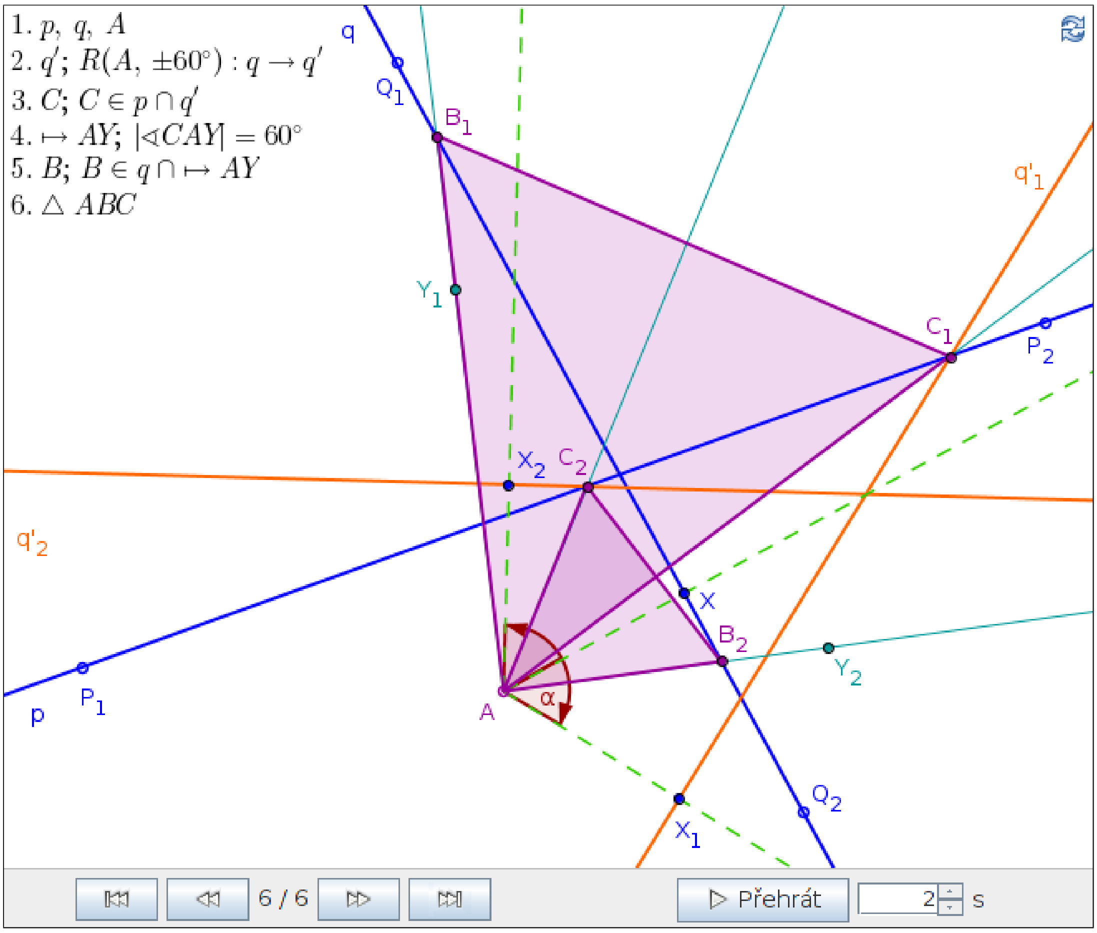


Obrázek 2.51: Náčrtek příkladu 2

V rovnostranném trojúhelníku platí, že všechny strany jsou stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly mají velikost 60°.

- Známe bod A, v rovnostranném trojúhelníku ABC je bod C obrazem bodu B v otočení se středem otočení A a orientovaným úhlem velikosti 60°.
- Protože bod B leží na přímce q, bude bod C ležet na obrazu q' přímky q v témže otočení.
- Bod C získáme jako průsečík přímky p a přímky q'.
- Bod B bude ležet na přímce q a úhel BAC bude mít velikost 60°.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.52: Příklad 2

Diskuse

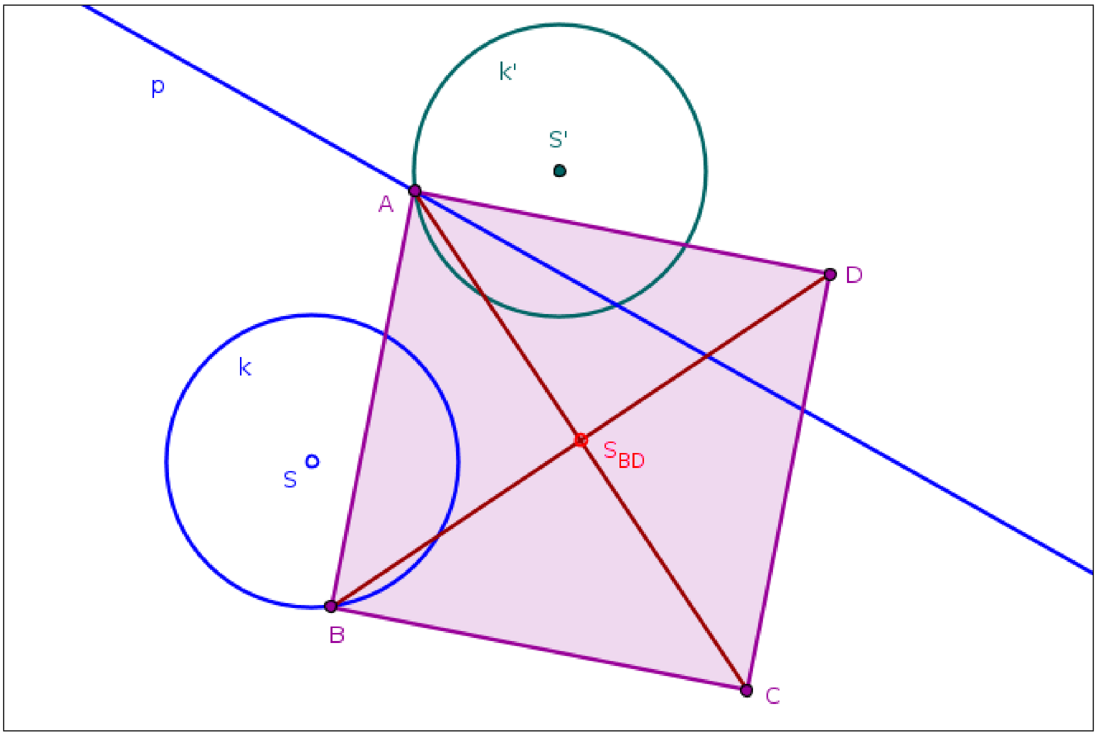
Počet řešení závisí na umístění bodu A.

- Úloha má nekonečně mnoho řešení, pokud je bod A průsečík přímek p, q a přímky p, q svírají úhel 60°.
- Úloha nemá řešení, pokud je bod A průsečík přímek p, q, přitom přímky p, q nesvírají úhel 60°.
- Úloha má jinak dvě řešení.

Příklad 3

Je dána přímka p, kružnice k a bod S_{BD}. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce p, bod B ležel na kružnici k a bod S_{BD} byl střed úhlopříčky BD.

Rozbor



Obrázek 2.53: Náčrtek příkladu 3

Střed úhlopříčky BD je střed čtverce. Víme, že všechny vrcholy čtverce jsou od středu stejně vzdálené a že úhel určený dvěma sousedními vrcholy a středem čtverce je pravý.

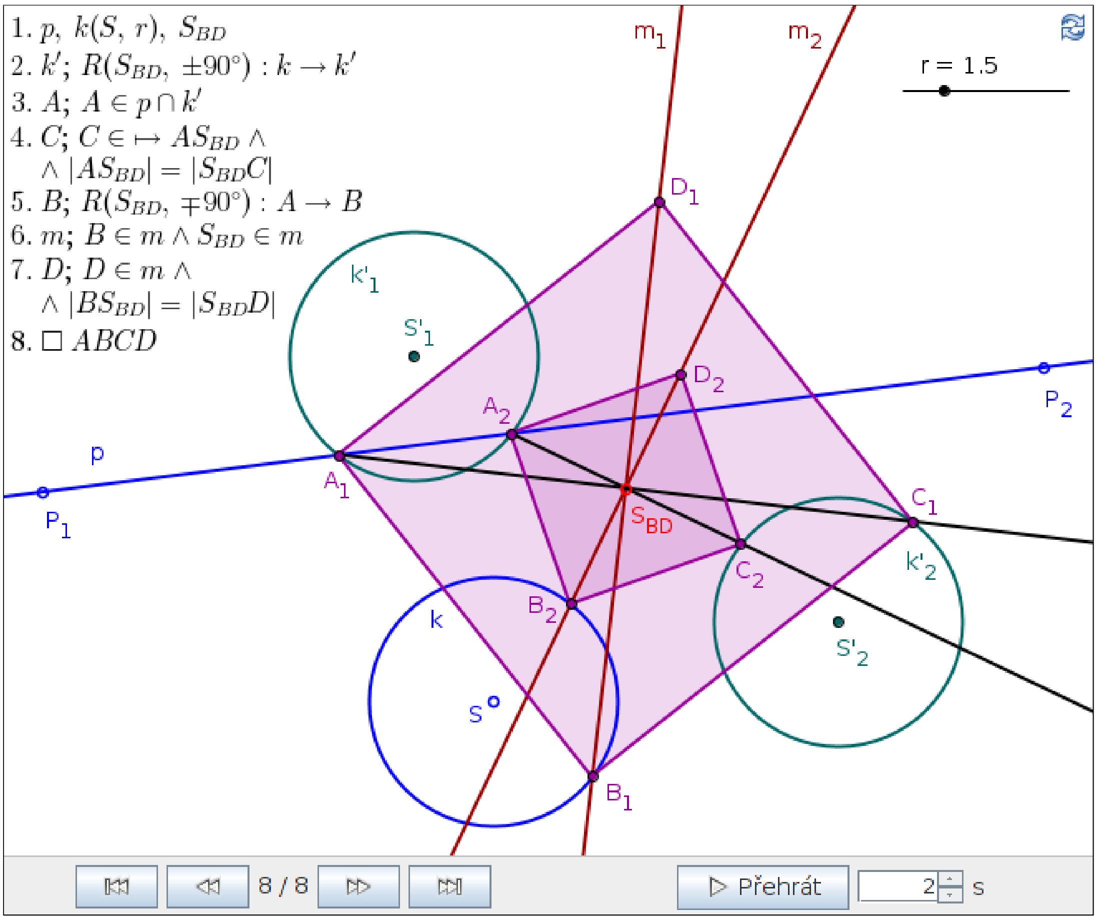
- Bod B leží na kružnici k, proto bude bod A ležet na obrazu k' kružnice k v otočení určeném středem otočení S_{BD} a pravým úhlem.
- Bod A získáme jako průsečík kružnice k' a přímky p.
- Bod B bude ležet na kružnici k a získáme ho otočením bodu A o $90°$ okolo středu čtverce.
- Body C, D získáme snadno, víme, že úhlopříčky čtverce se půlí.

Diskuse

Počet řešení závisí na vzájemné poloze bodu S_{BD}, kružnice k a přímky p.

- Úloha má 4 řešení, pokud existují čtyři průsečíky obrazu k' kružnice k v daném otočení (v kladném i záporném smyslu) s přímkou p.
- Úloha má 3 řešení, pokud existují tři průsečíky kružnice k' s přímkou p.
- Úloha má 2 řešení, pokud existují dva průsečíky kružnice k' s přímkou p.
- Úloha má 1 řešení, pokud existuje jeden průsečík kružnice k' s přímkou p.
- Úloha nemá jinak řešení.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.54: Příklad 3

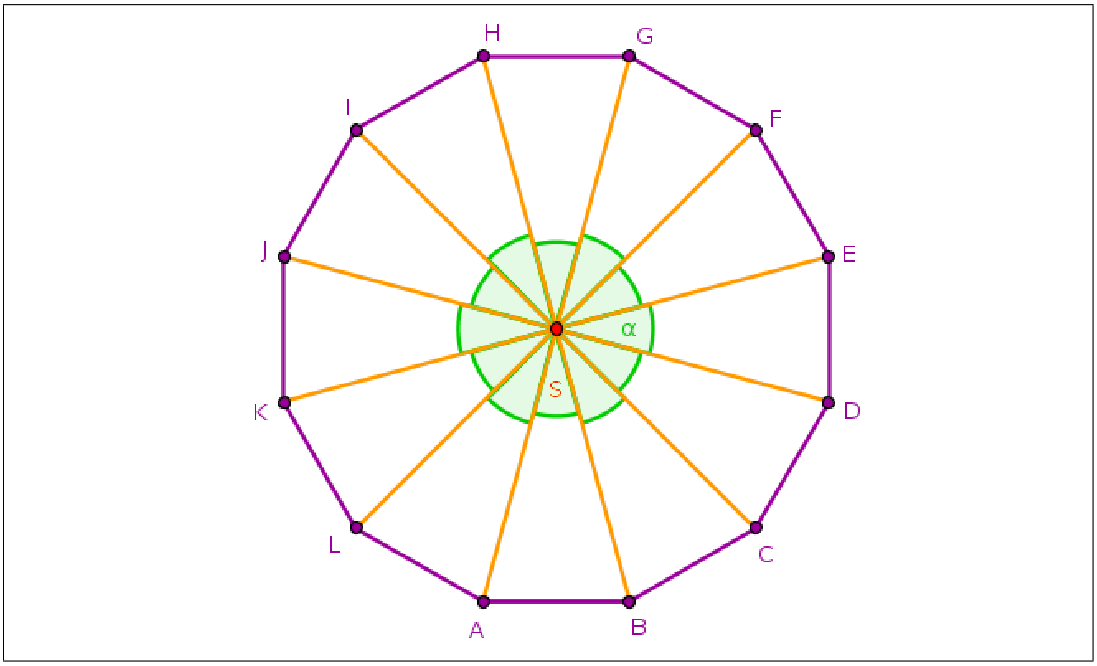
Příklad 4

Sestrojte pravidelný dvanáctiúhelník $ABCDEFGHIJKL$ o straně délky a cm, $a > 0$.

Rozbor

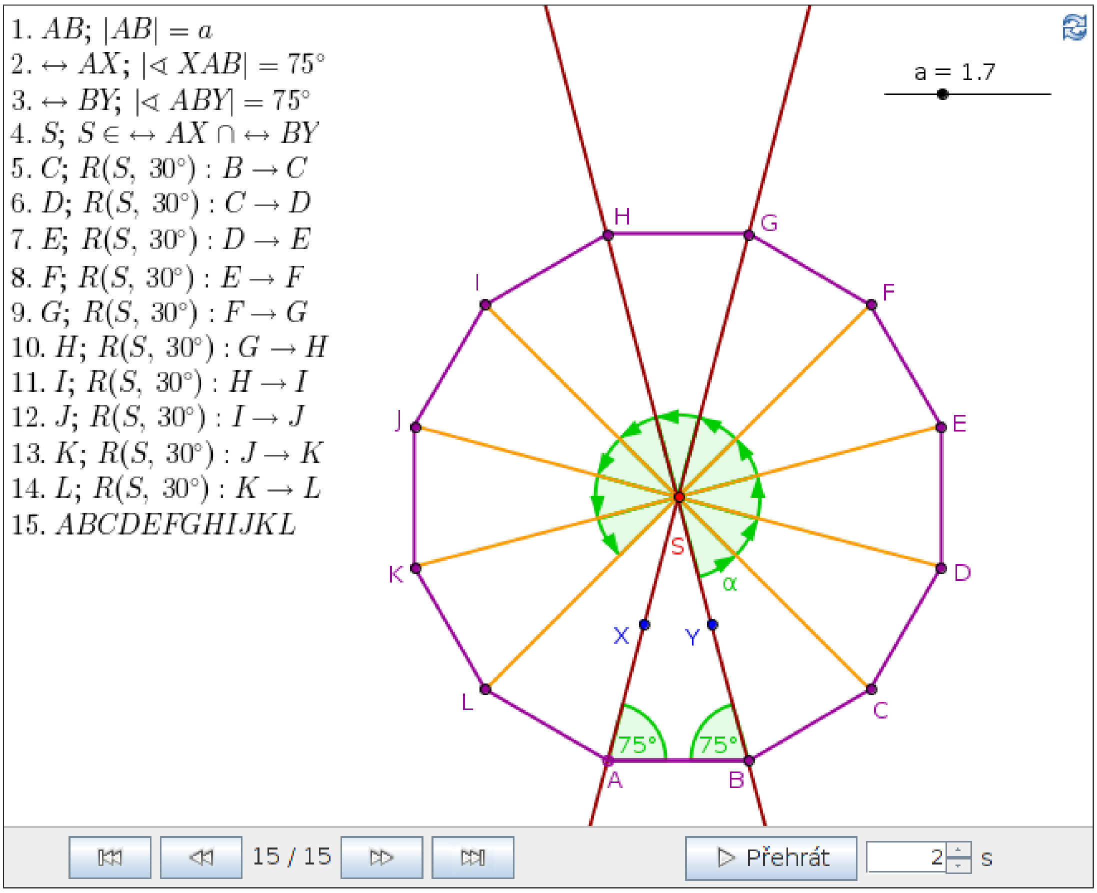
Každý pravidelný n-úhelník jde rozdělit na n shodných rovnoramenných trojúhelníků.

- Známe velikost a základny jednoho takového rovnoramenného trojúhelníka. Zamysleme se, jak bychom mohli získat další údaje o trojúhelníku.
- Protože je 12-úhelník složen z 12 rovnoramenných trojúhelníků (obr. 2.55), bude u hlavních vrcholů trojúhelníků (tedy u vrcholu S), vždy úhel velikosti $360° : 12 = 30°$. Úhly při základně jsou shodné a mají tedy velikost $75°$. (Neboť součet vnitřních úhlů trojúhelníka je roven $180°$.) Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABS.
- Bod C získáme jako obraz bodu B v otočení určeném středem S a orientovaným úhlem $30°$.
- Bod D získáme jako obraz bodu C ve stejném otočení. Takto postupně získáme všechny vrcholy 12-úhelníka.



Obrázek 2.55: Náčrtek příkladu 4

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.56: Příklad 4

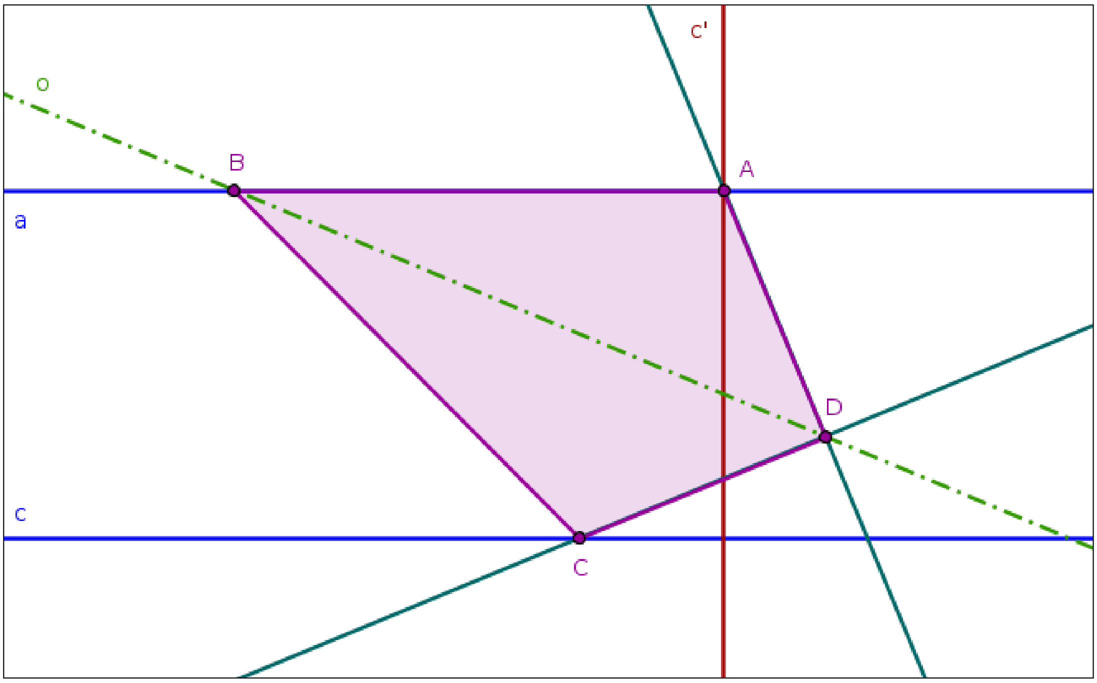
Diskuse

Úloha má jedno řešení pro všechna a kladná.

Příklad 5

Jsou dány rovnoběžné přímky a, c a bod D. Sestrojte deltoid $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu D tak, aby body A, B ležely na přímce a a bod C ležel na přímce c. Hlavní úhlopříčka deltoidu je úhlopříčka BD.

Rozbor



Obrázek 2.57: Náčrtek příkladu 5

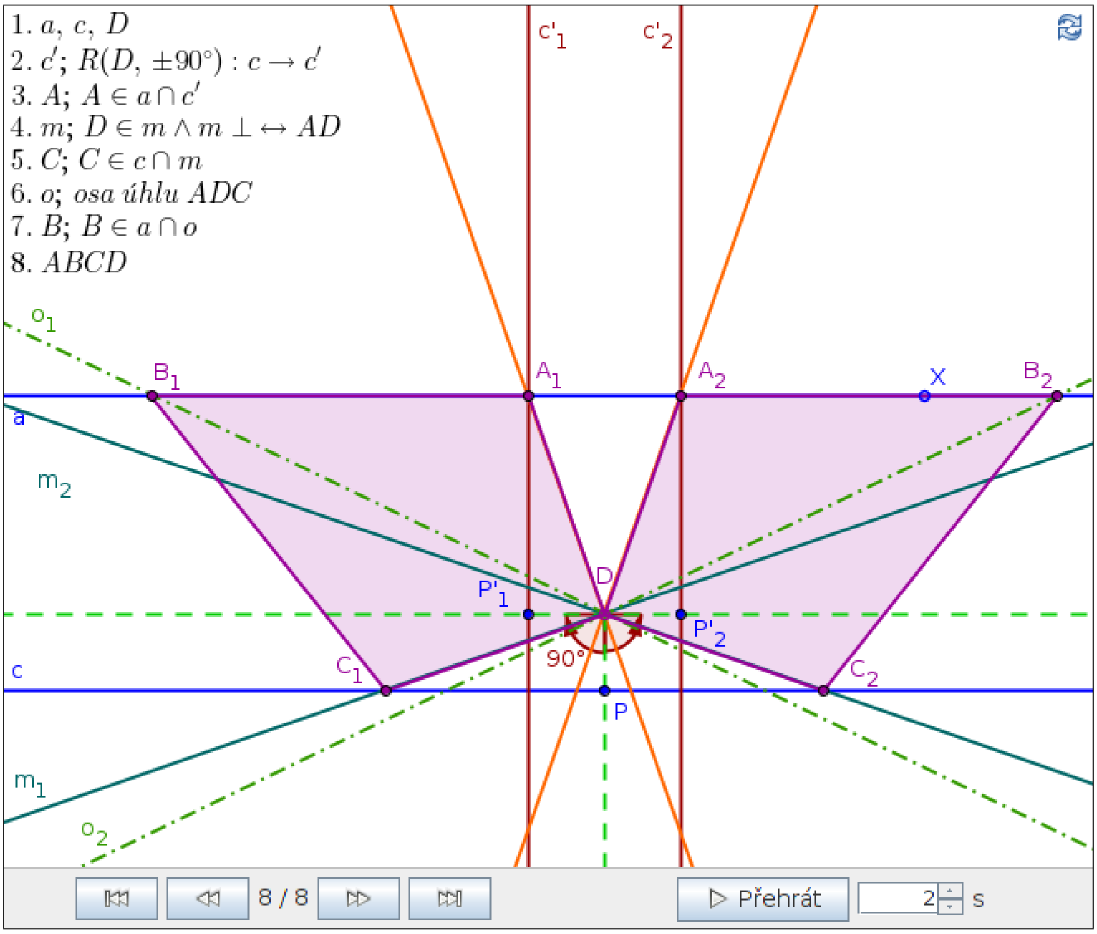
- Bod C deltoidu $ABCD$ leží na přímce c. Obrazem bodu C v otočení určeném středem otočení D a úhlem velikosti $90°$, neboť úhel u vrcholu D deltoidu má být pravý, je bod A. Proto bude bod A ležet na obrazu c' přímky c v otočení popsaném výše.
- Bod A získáme jako průsečík přímky c' a přímky a.
- Protože má být u vrcholu D pravý úhel, bude bod C ležet na kolmici k přímce AD procházející bodem D.
- Bod C získáme jako průsečík této kolmice a přímky c.
- Deltoid je osově souměrný podle hlavní úhlopříčky. Hlavní úhlopříčka deltoidu bude ležet na ose úhlu CDA.
- Bod B získáme jako průsečík osy úhlu CDA a přímky a.

Diskuse

Počet řešení závisí na umístění bodu D vzhledem k přímkám a, c. Označme si x osu pásu určeného přímkami a, c.

- Úloha má dvě řešení, pokud bod D leží ve stejné polorovině určené hraniční přímkou x jako přímka c.
- Pokud bod D leží v opačné polorovině, výsledné obrazce budou tvořit nekonvexní osově souměrný čtyřúhelník, nebude to ale deltoid.
- Úloha nemá řešení, pokud bod D leží na přímce x.

Konstrukce a zápis konstrukce



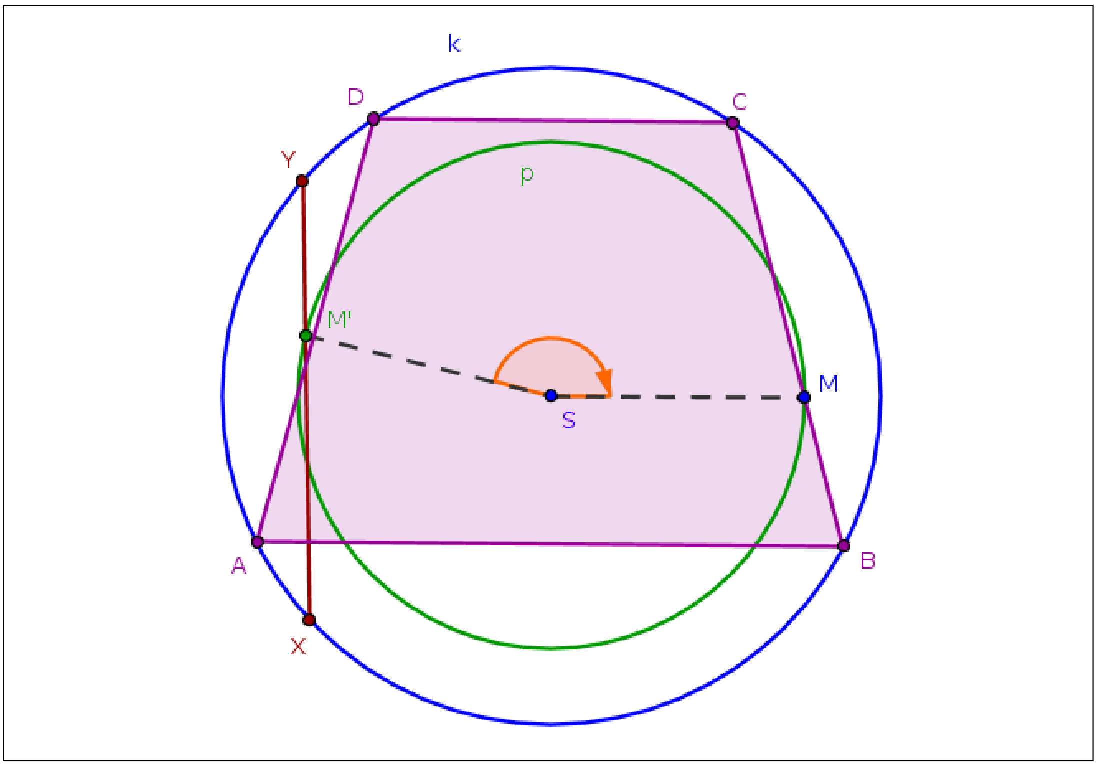
Obrázek 2.58: Příklad 5

Příklad 6

Je dána kružnice k a bod M ležící uvnitř kružnice k. Sestrojte všechny rovnoramenné lichoběžníky $ABCD$ tak, že kružnice k je opsaná lichoběžníku, bod M leží na rameni BC, které má velikost a cm a základny lichoběžníka AB, CD jsou rovnoběžné s přímkou SM.

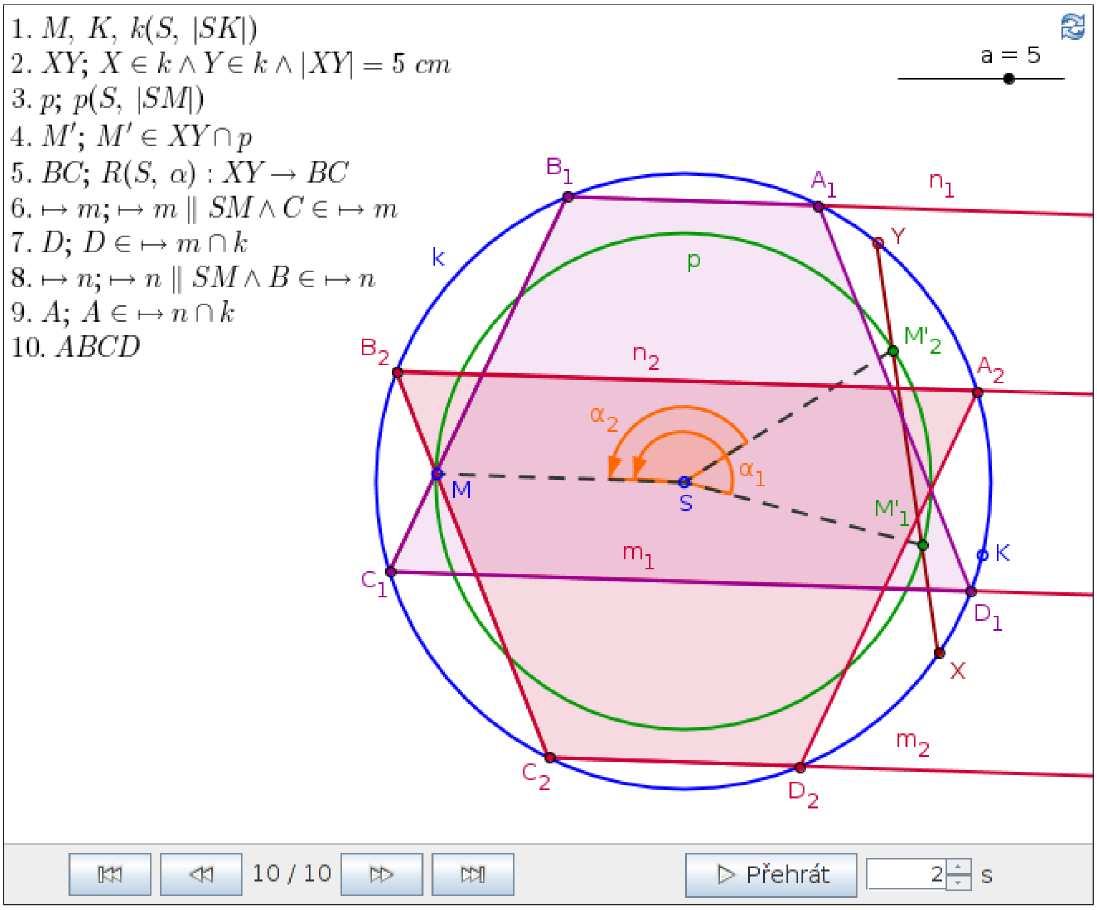
Rozbor

- Nejprve sestrojíme rameno BC. Nemůžeme úsečku BC narýsovat přímo, bylo by velice obtížné ji správně umístit. Sestrojíme tedy pomocnou úsečku XY délky a tak, aby krajní body úsečky ležely na kružnici k, úsečku pak vhodně otočíme.
- Zkonstruujeme kružnici p soustřednou s kružnicí k, která prochází bodem M. Průsečík kružnice p a úsečky XY označíme M'. Orientovaný úhel, o který musíme úsečku XY otočit, je úhel $M'SM$. Tak získáme rameno BC, neboť $M' \to M$.
- Vrchol A lichoběžníka bude ležet na kružnici k a na přímce rovnoběžné s úsečkou SM, která prochází bodem B. Bod A získáme jako průsečík této rovnoběžky a kružnice k.
- Vrchol D získáme jako průsečík kružnice k a rovnoběžky s úsečkou SM procházející bodem C.



Obrázek 2.59: Náčrtek příkladu 6

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 2.60: Příklad 6

Diskuse

Počet řešení závisí na umístění bodu M, poloměru kružnice k a délce ramene BC. Označme si x kolmici na úsečku SM procházející bodem S.

- Úloha nemá řešení, pokud:
  - délka ramene BC je větší než průměr kružnice k,
  - nebo neexistuje průsečík úsečky XY a soustředné kružnice procházející bodem M,
  - nebo neexistuje průsečík kružnice k a rovnoběžky s úsečkou SM vedené bodem B (resp. C) v polorovině určené hraniční přímkou x, ve které neleží vrchol C (resp. B).
- Úloha má jedno řešení, pokud:
  - existuje jeden průsečík úsečky XY a soustředné kružnice procházející bodem M,
  - nebo pro jedno z ramen BC neexistuje průsečík kružnice k a rovnoběžky s úsečkou SM vedené bodem B (resp. C) v polorovině určené hraniční přímkou x, ve které neleží vrchol C (resp. B).
- Úloha má jinak dvě řešení.

3. Podobná zobrazení

3.1 Úvod

Definice. *Zobrazení f v rovině je podobné zobrazení, jestliže existuje číslo $k > 0$, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí $|X'Y'| = k \cdot |XY|$.*
Podobné zobrazení se také nazývá podobností.
Číslo k se nazývá koeficient podobnosti.

Všimněme si, že pro $k = 1$ je definice podobného zobrazení stejná jako definice shodného zobrazení. Shodné zobrazení je jen speciálním případem podobného zobrazení.

Podobné zobrazení s koeficientem podobnosti $k = 1$ je shodné zobrazení.

Každé podobné zobrazení je prosté.

Obdobně jako u shodného zobrazení v každém podobném zobrazení s koeficientem podobnosti k platí:

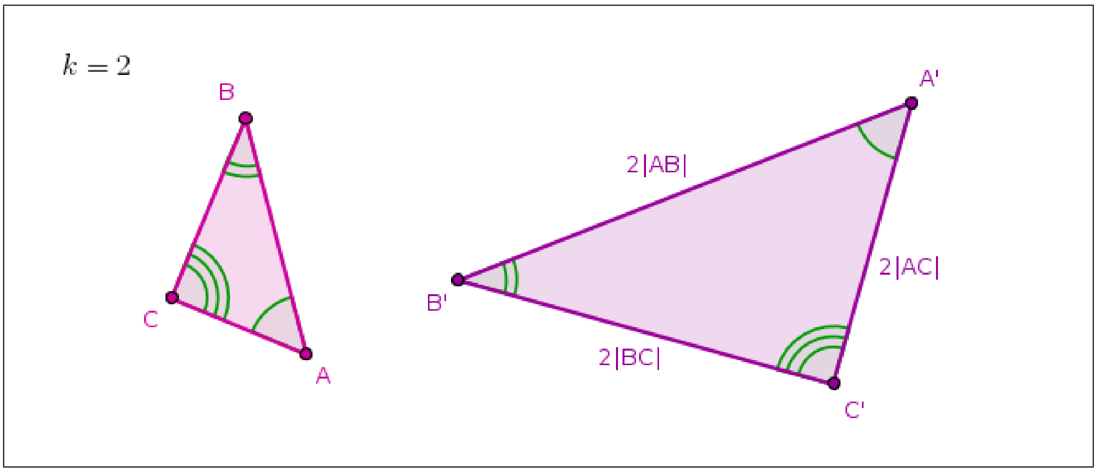
- Obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$, pro kterou platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$.
- Obrazem každé přímky AB je přímka $A'B'$, obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
- Obrazem každého úhlu AVB je úhel $A'V'B'$ s ním shodný.

3.1.1 Podobné útvary

Definice. *Podobné útvary jsou takové útvary, pro které existuje číslo $k > 0$ tak, že pro dvojici libovolných bodů A, B jednoho útvaru a odpovídající dvojici bodů A', B' druhého útvaru platí $|A'B'| = k \cdot |AB|$.*

Číslo k v definici podobného útvaru je koeficientem podobnosti útvarů.

Například na následujícím obrázku (obr. 3.1) jsou si trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ podobné. Z obrázku je vidět, že odpovídající si úhly podobných trojúhelníků jsou shodné.

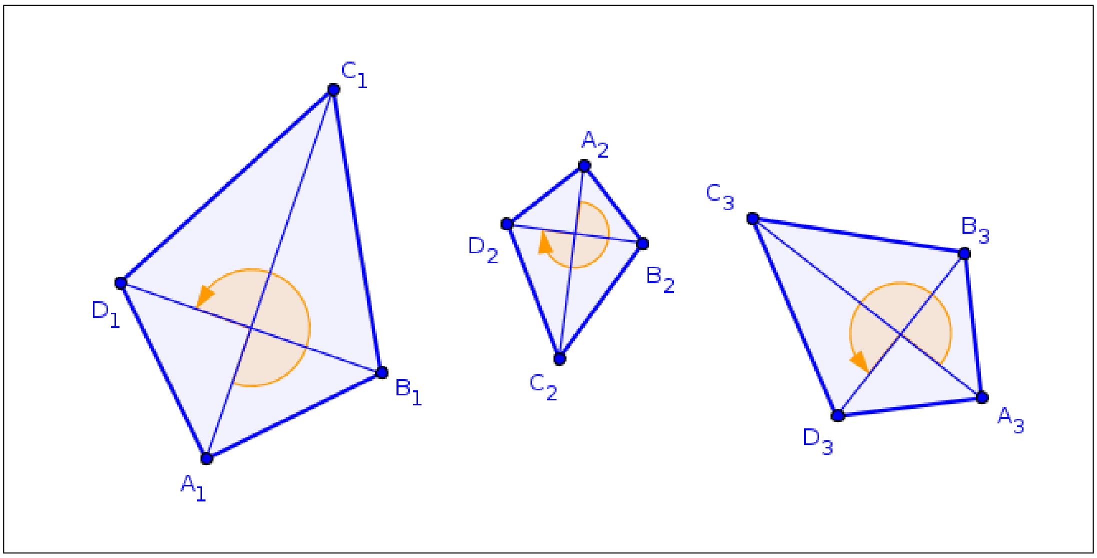


Obrázek 3.1: Podobné útvary

Pokud je zobrazení f podobné, pak je obrazem každého útvaru útvar s ním podobný.

3.1.2 Přímá a nepřímá podobnost

Přímou a nepřímou podobnost definujeme analogicky jako u shodností.



Obrázek 3.2: Podobnosti

Dva útvary nazveme přímo podobné, jsou-li podobné při obvyklém značení vrcholů útvaru v abecedním pořadí proti směru hodinových ručiček (obr. 3.2 – deltoidy $A_1B_1C_1D_1$ a $A_3B_3C_3D_3$). V opačném případě jsou útvary nepřímo podobné (obr. 3.2 – deltoidy $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$).

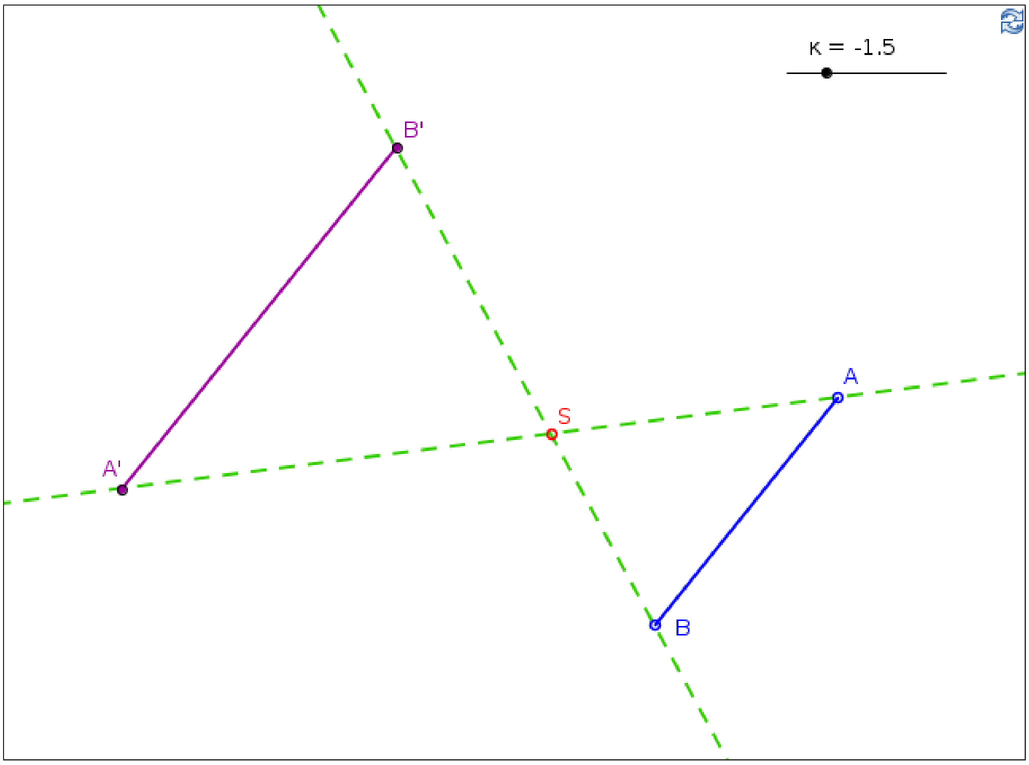
Definice. *Přímá podobnost je každá podobnost, ve které jsou libovolný trojúhelník a jeho obraz přímo podobné.*
Nepřímá podobnost je každá podobnost, ve které jsou libovolný trojúhelník a jeho obraz nepřímo podobné.

Podobnosti, které jsou shodnostmi, jsme se již zabývali v předchozí kapitole. V této kapitole se budeme zabývat stejnolehlostmi, tj. podobnostmi s koeficientem podobnosti $k \neq 1$.

3.2 Stejnolehlost

Definice. *Stejnolehlost $H(S, \kappa)$ (neboli homotetie) je zobrazení v rovině určené bodem S a nenulovým číslem κ, ve kterém se zobrazí bod S na bod $S' = S$ a každý bod $X \neq S$ na bod X' tak, že $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$.*
Pro $\kappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX.
Pro $\kappa < 0$ leží bod X' na polopřímce opačné k polopřímce SX.
Bod S se nazývá střed stejnolehlosti, číslo κ se nazývá koeficient stejnolehlosti.
Obraz X' bodu X získaný ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\kappa \neq 0$ značíme $H(S, \kappa) : X \to X'$.

Následující applet (obr. 3.3) znázorňuje, jak se zobrazuje úsečka AB ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem κ. Pohybem posuvníku měňte číslo κ a sledujte, jak se bude měnit obraz $A'B'$ úsečky AB. Můžete měnit i polohu úsečky AB.



Obrázek 3.3: Stejnolehlost

Stejnolehlost je přímá podobnost s koeficientem $k = |\kappa|$.

Stejnolehlost je jednoznačně určena středem S a koeficientem κ nebo středem S a dvojicí bodů X, X', kde X je vzor a X' obraz bodu X, přitom X, $X' \neq S$.

Středová souměrnost se středem S je speciálním případem stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\kappa = -1$.

3.2.1 Samodružné body

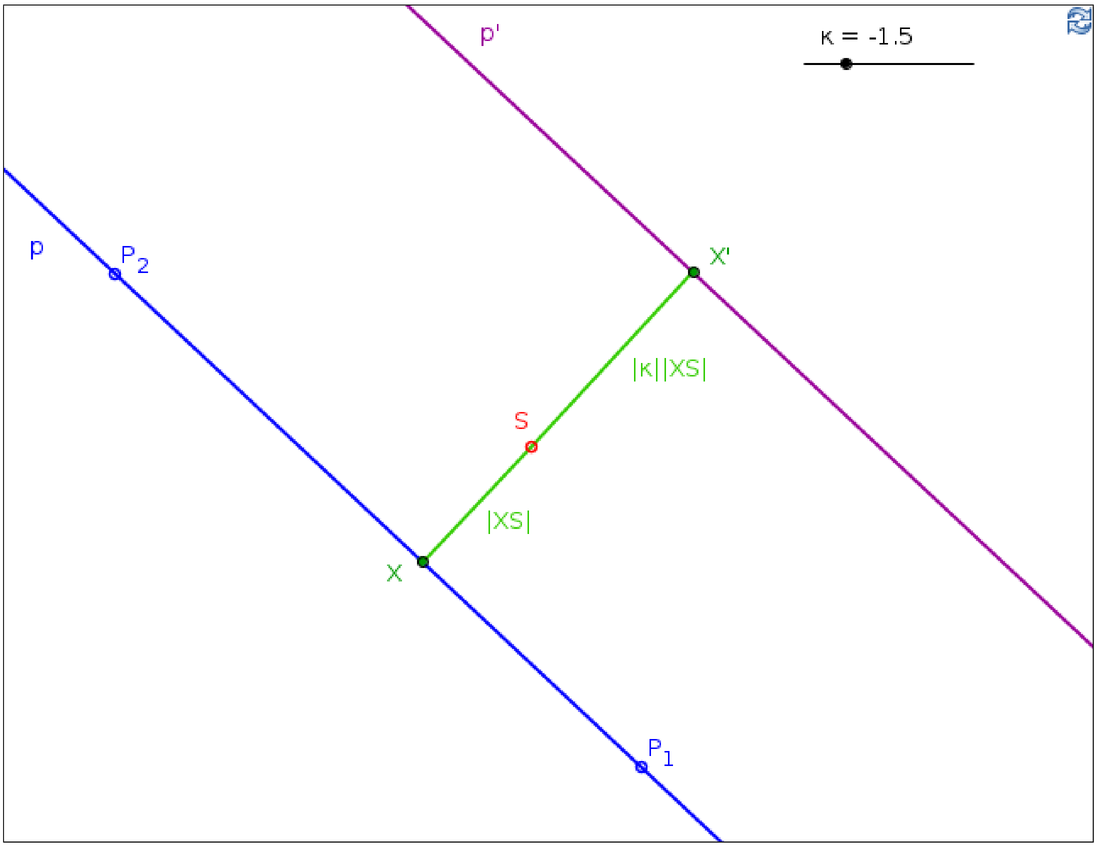
Z definice přímo plyne, že samodružným bodem stejnolehlosti je střed stejnolehlosti S. Neexistuje koeficient κ, pro který by stejnolehlost měla nějaké další samodružné body?

Ano, existuje. Pokud je koeficient $\kappa = 1$, pak se každý bod zobrazí sám na sebe, půjde tedy o identitu.

Množinu všech samodružných bodů stejnolehlosti tvoří její střed S (pro $\kappa \neq 1$), nebo je to rovina (pro $\kappa = 1$).

3.2.2 Samodružné přímky

Zkuste v následujícím appletu (obr. 3.4) získat nějaké samodružné přímky. Můžete měnit koeficient κ i polohu přímky p a středu stejnolehlosti S.



Obrázek 3.4: Samodružné přímky

Samodružné přímky jste mohli získat pouze ve dvou speciálních případech:

- koeficient $\kappa = 1$,
- nebo přímka p prochází středem S stejnolehlosti.

V prvním případě se jedná o identické zobrazení. V jiných případech nemá stejnolehlost žádnou samodružnou přímku.

Množina všech samodružných přímek stejnolehlosti je tvořena všemi přímkami, které prochází středem S stejnolehlosti (pro koeficient $\kappa \neq 1$), nebo je to rovina (pro koeficient $\kappa = 1$).

3.2.3 Příklady

Příklad 1

Sestrojte obraz daného trojúhelníka ABC ve stejnolehlosti se středem v bodě C a koeficientem $\kappa = -\frac{1}{2}$.

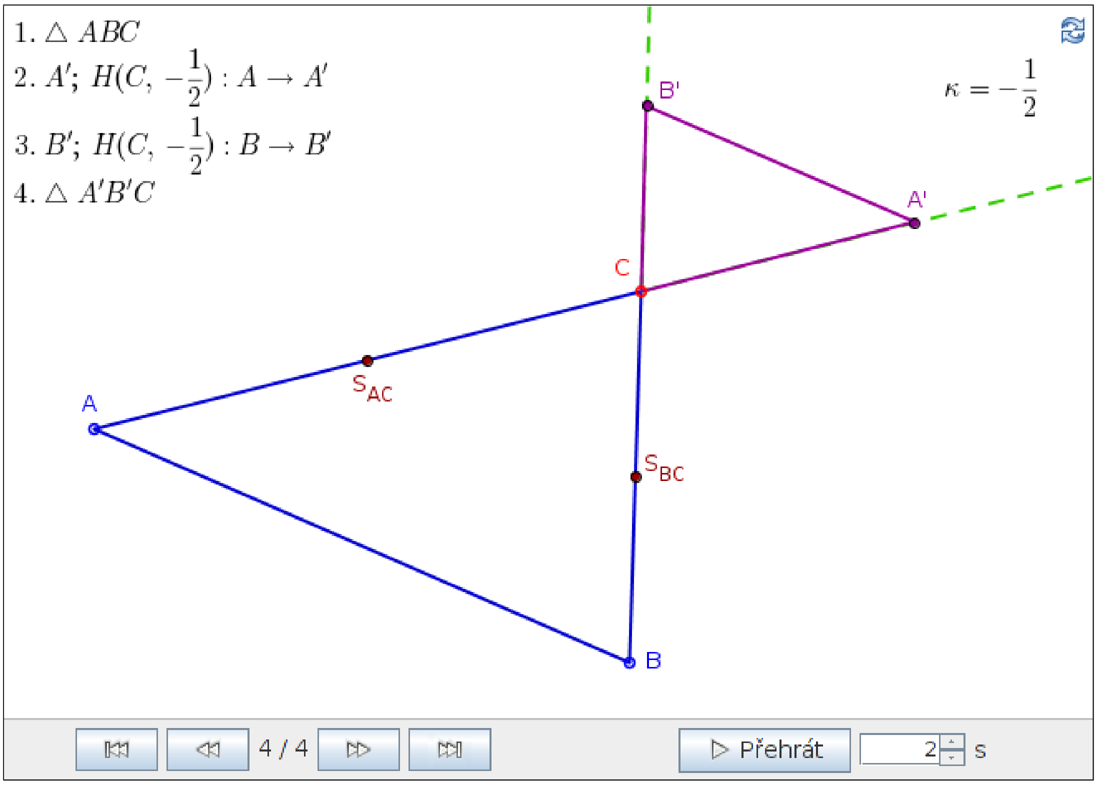
Rozbor

Budeme postupovat podle definice stejnolehlosti.

- Zobrazíme vrcholy trojúhelníka, obrazy vrcholů nám jednoznačně určí obrazy stran trojúhelníka.
- Bod C je středem stejnolehlosti, zobrazí se tedy sám na sebe (je to samodružný bod).

- Koeficient κ je záporný, proto bude obraz A' bodu A ležet na polopřímce opačné k polopřímce CA a bude platit $|A'C| = |-\frac{1}{2}| \cdot |AC|$. Polovinu strany AC získáme tak, že úsečku AC rozdělíme na polovinu (tzn. najdeme její střed).
- Stejným postupem zobrazíme i bod B.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.5: Příklad 1

Závěr

Úloha má jedno řešení.

Příklad 2

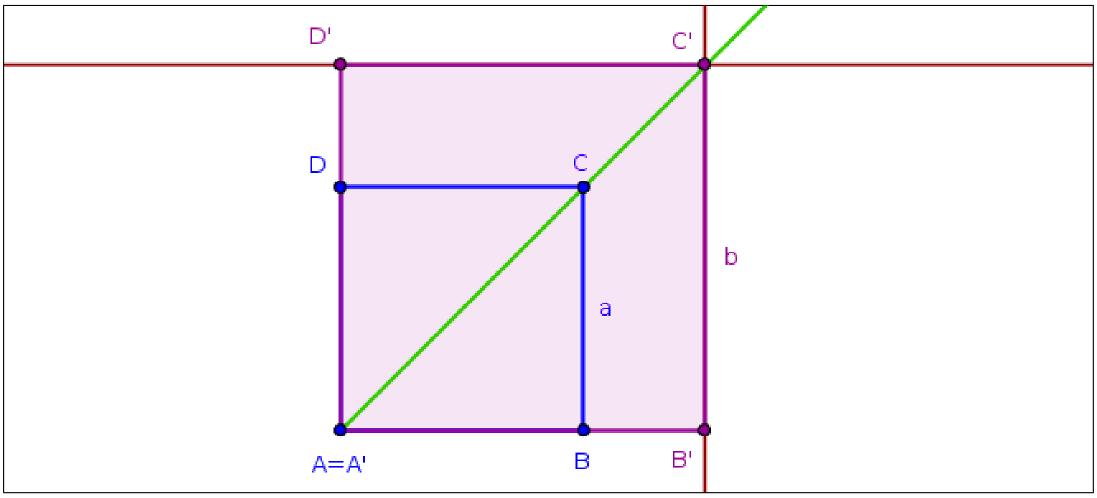
Je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte čtverec $A'B'C'D'$ tak, aby pro obsahy čtverců platilo $S_{ABCD} : S_{A'B'C'D'} = 4 : 9$, aby bod $A' = A$ a bod C ležel na úhlopříčce $A'C'$.

Rozbor

Označme si a stranu čtverce $ABCD$, b stranu čtverce $A'B'C'D'$.

- Má platit $S_{ABCD} : S_{A'B'C'D'} = 4 : 9$ neboli $S_{ABCD} = \frac{4}{9} \cdot S_{A'B'C'D'}$. Tzn. pro strany čtverců má platit vztah $a^2 = \frac{4}{9} \cdot b^2$, tj. $b = \frac{3}{2} \cdot a$.
- Víme, že bod $A' = A$ a že bod C má ležet na úhlopříčce $A'C' = AC'$. Proto musí bod C' ležet na polopřímce AC.
- Protože jsou čtverce $ABCD$, $A'B'C'D'$ podobné, bude platit $|AB| : |A'B'| = |AC| : |A'C'| = 2 : 3$. Body B', C', D' jsou tedy obrazy bodů B, C, D ve stejnolehlosti určené středem A a koeficientem $\frac{3}{2}$.

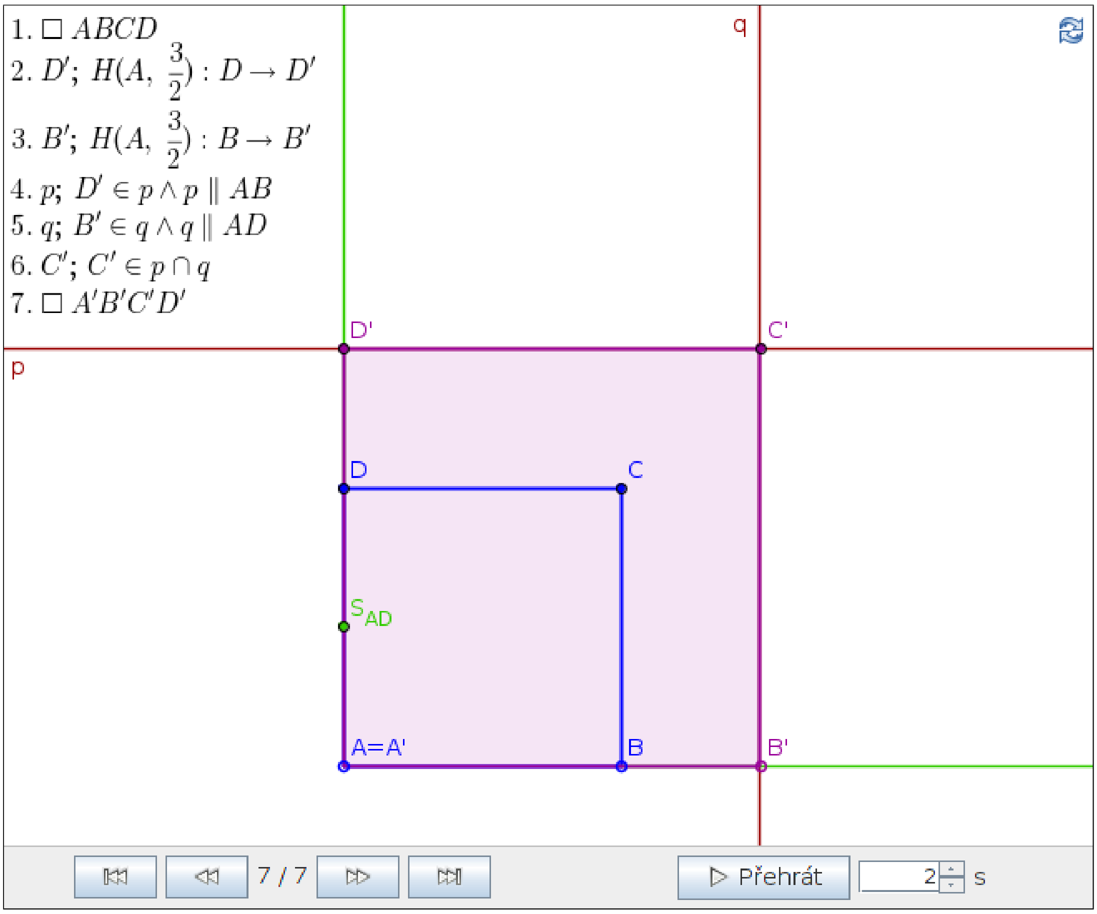
- Body B', D' získáme jako obrazy bodů B, D v dané stejnolehlosti a z vlastností stejnolehlosti plyne, že bod C' leží na příslušných rovnoběžkách se stranami čtverce $ABCD$ (obr. 3.6).



Obrázek 3.6: Náčrtek příkladu 2

- Platí: $\frac{3}{2}\cdot|AD| = |AD|+\frac{1}{2}\cdot|AD|$, polovinu strany AD získáme tak, že najdeme její střed. Chceme-li získat bod D' jako obraz bodu D ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{3}{2}$, stačí na polopřímku opačnou k DA vynést polovinu strany AD.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.7: Příklad 2

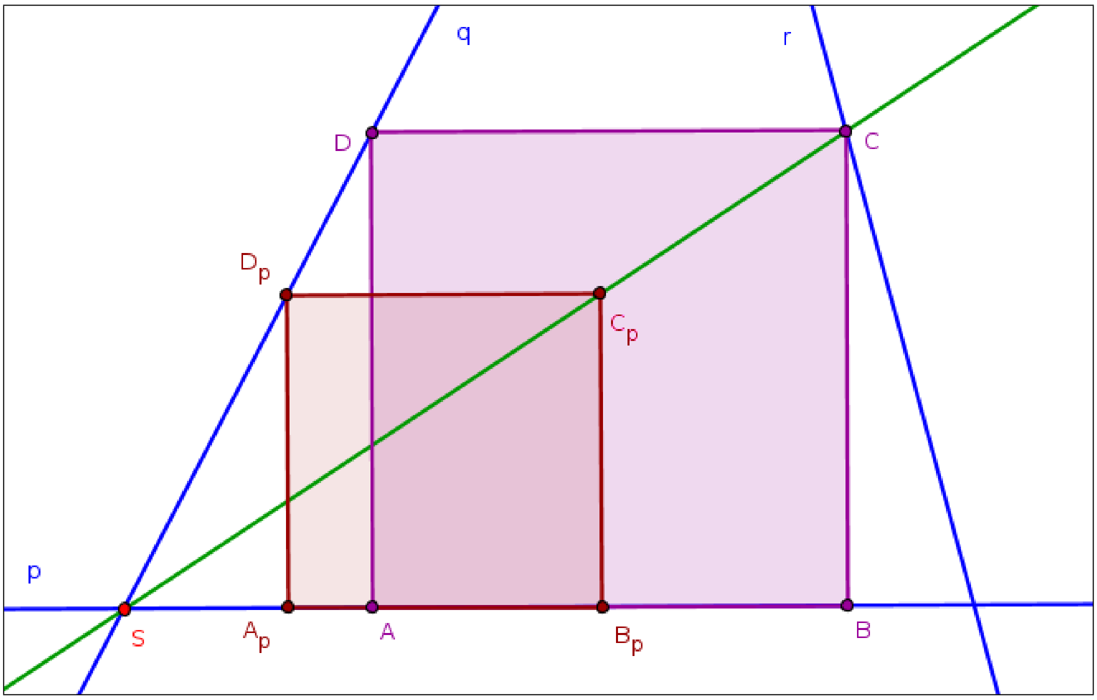
Závěr

Úloha má jedno řešení.

Příklad 3

Jsou dány různoběžné přímky p, q, r (jako na obr. 3.8). Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby body A, B ležely na přímce p, bod C ležel na přímce r a bod D ležel na přímce q.

Rozbor



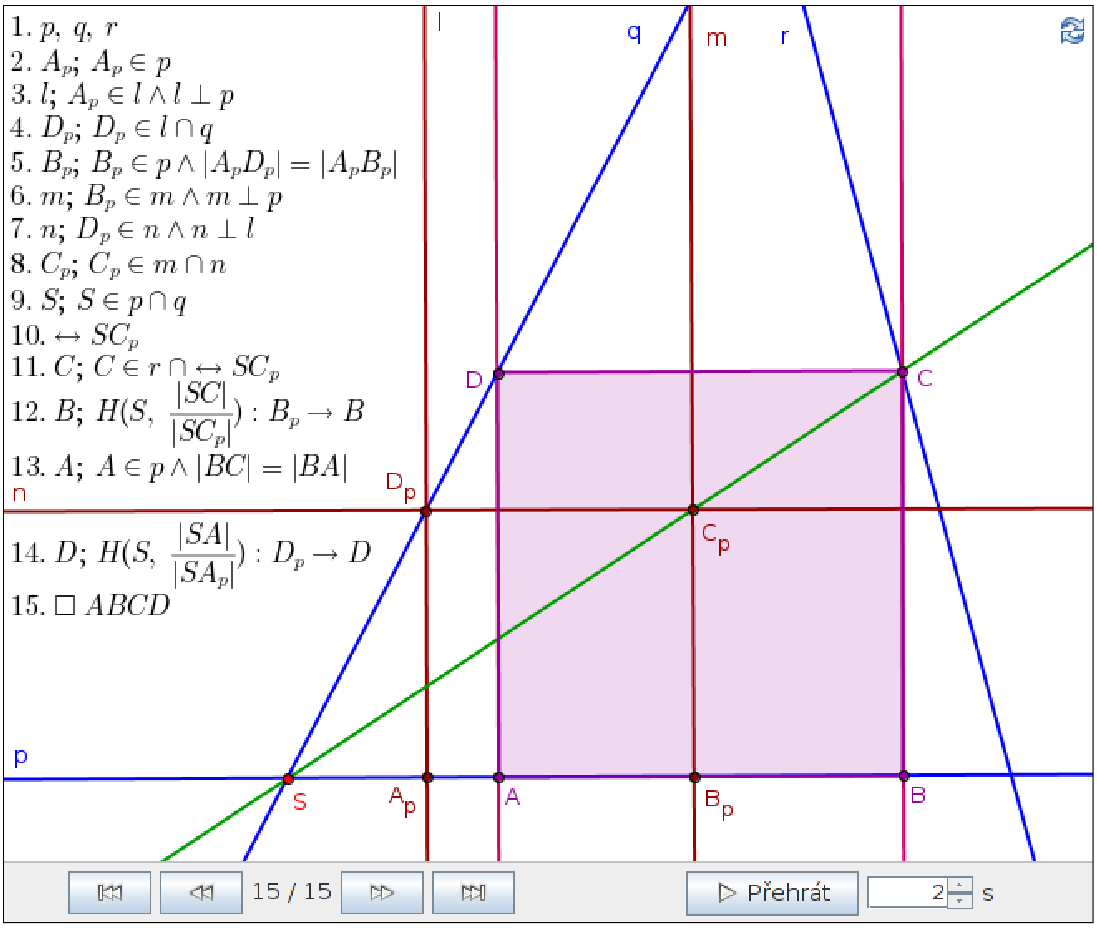
Obrázek 3.8: Náčrtek příkladu 3

- Protože neznáme délku strany čtverce, nemůžeme čtverec sestrojit přímo. Při konstrukci použijeme pomocný čtverec $A_pB_pC_pD_p$, který zobrazíme na čtverec $ABCD$ ve vhodné stejnolehlosti, aby byly splněny podmínky ze zadání (obr. 3.8).
- Sestrojíme pomocný čtverec $A_pB_pC_pD_p$ tak, aby body A_p, B_p ležely na přímce p a bod D_p ležel na přímce q. (Nejprve zvolíme bod A_p na přímce p a získáme bod D_p jako průsečík přímky q a kolmice k přímce p vedenou bodem A_p. Tím je dána strana pomocného čtverce, pak teprve můžeme sestrojit zbylé vrcholy pomocného čtverce.)
- Zvolíme střed stejnolehlosti v průsečíku S přímek p, q. Pak, jak je vidět z obrázku 3.8, budou čtverce $A_pB_pC_pD_p$, $ABCD$ stejnolehlé podle středu S.
- Bod C získáme jako průsečík přímky r a přímky SC_p, ostatní body získáme jako průsečíky rovnoběžek se stranami pomocného čtverce a příslušné přímky (p nebo q).

Závěr

Úloha má jedno řešení.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.9: Příklad 3

Příklad 4

Je dána kružnice k a její vnitřní bod X. Sestrojte všechny rovnoramenné lichoběžníky $ABCD$ vepsané kružnici k tak, aby střed S kružnice k ležel na základně AB, bod X ležel na základně CD a aby platilo $|DX| : |CX| = 1 : 3$.

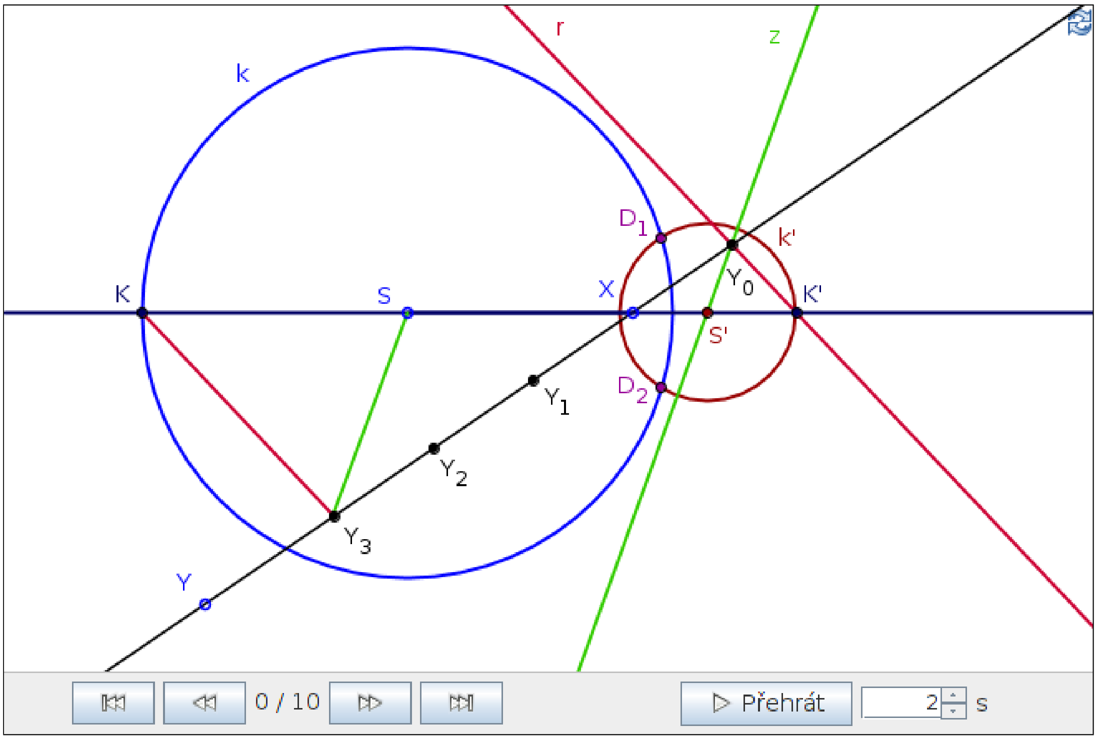
Rozbor

- Nejprve zkonstruujeme základnu CD. Pro ni má platit $|DX| = \frac{1}{3} \cdot |CX|$, přitom bod D bude ležet na polopřímce opačné k polopřímce XC. Proto je bod D obrazem bodu C ve stejnolehlosti se středem v bodě X a koeficientem $-\frac{1}{3}$.
- Bod C leží na kružnici k, bod D tak bude ležet na obrazu k' kružnice k ve stejné stejnolehlosti.

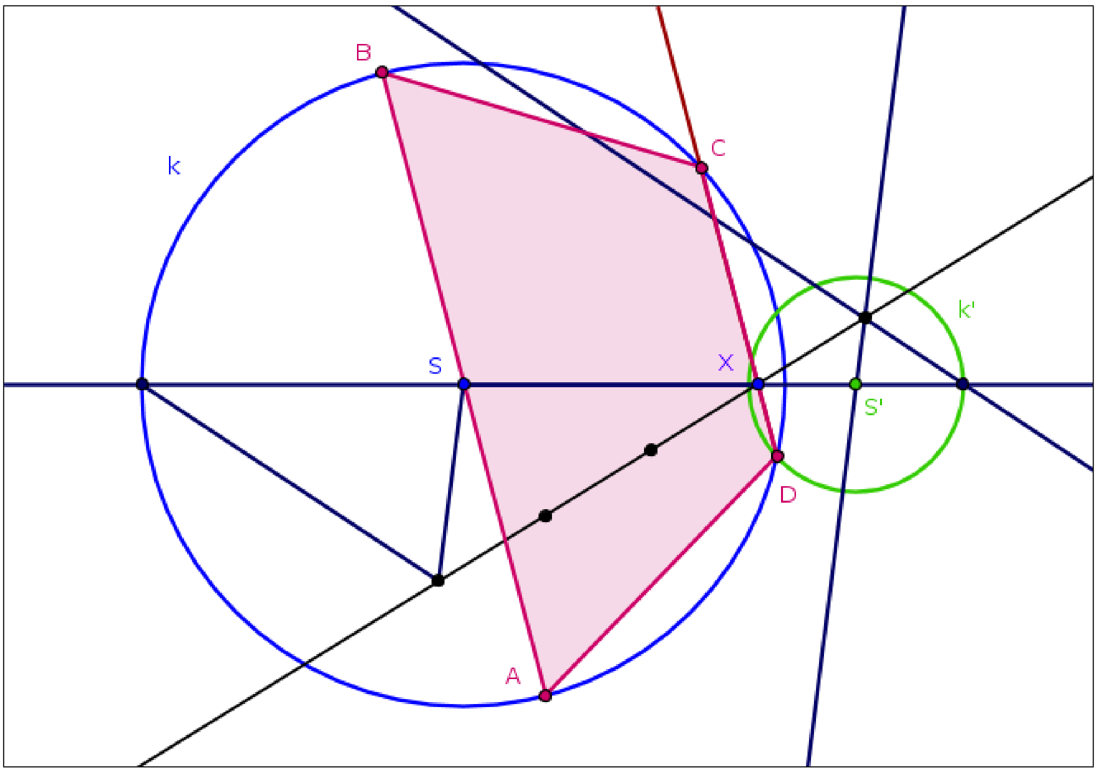
Pro ty z vás, kdo si nejste jistí, jak se zjistí střed kružnice k' a její poloměr, je to připomenuto zde: (obr. 3.10)

- Pro určení středu a poloměru kružnice k' v dané stejnolehlosti využijeme podobnosti trojúhelníků podle věty *uu* (dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou úhlech).
- Trojúhelník SXY_3 je podobný trojúhelníku $S'XY_0$, protože $|XY_3| = 3 \cdot |XY_0|$, platí i $|XS| = 3 \cdot |XS'|$.

- Pro získání poloměru zvolíme na kružnici k bod K tak, že K leží na přímce SX. Nyní půjde o podobnost trojúhelníků XKY_3 a $XK'Y_0$, vzdálenost bodu K' od bodu S' je poloměrem kružnice k'.



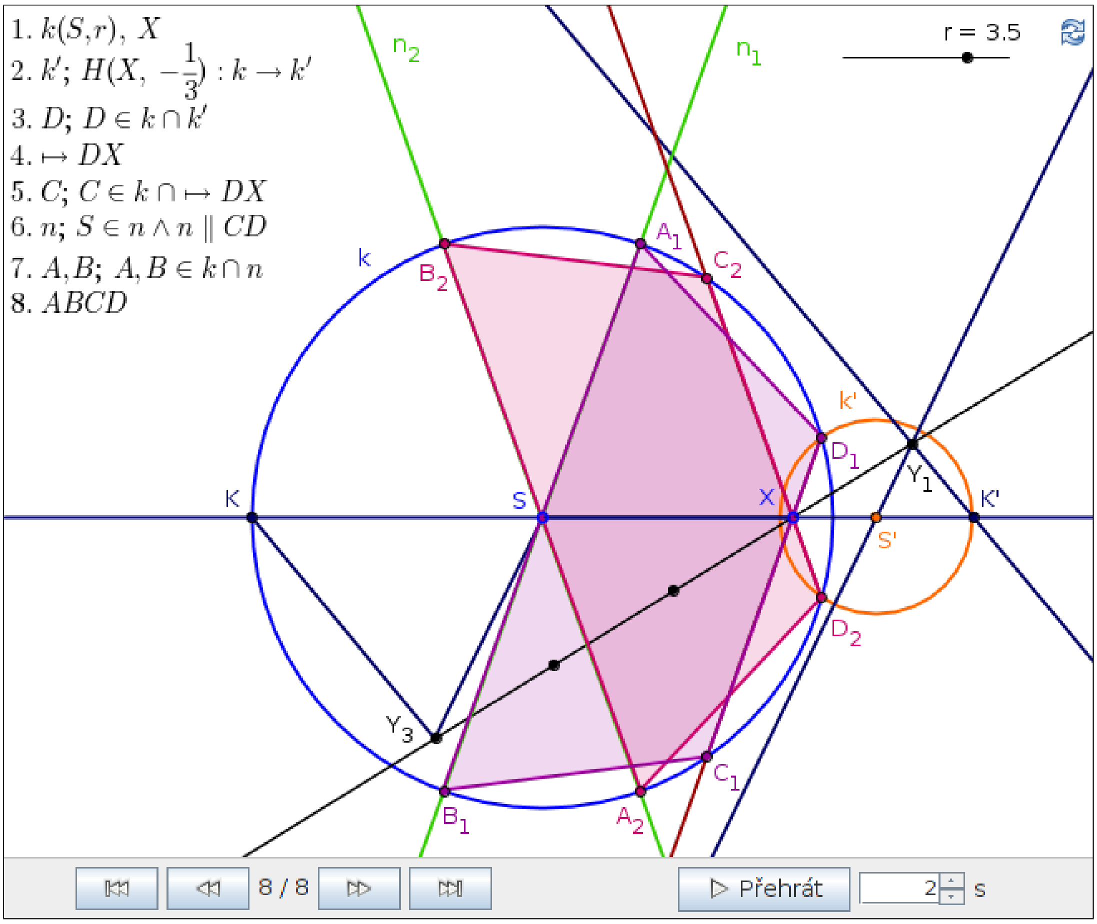
Obrázek 3.10: Pomocná konstrukce



Obrázek 3.11: Náčrtek příkladu 4

- Bod D získáme jako průsečík kružnic k, k', bod C jako průsečík kružnice k a polopřímky DX.
- Body A, B pak získáme z rovnoběžnosti základen lichoběžníka.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.12: Příklad 4

Diskuse

- Úloha nemá řešení, pokud:
  - bod X leží na kružnici k,
  - bod X leží ve vnější oblasti kružnice l soustředné s kružnicí k, která má poloviční poloměr.
- Úloha má jinak 2 řešení.

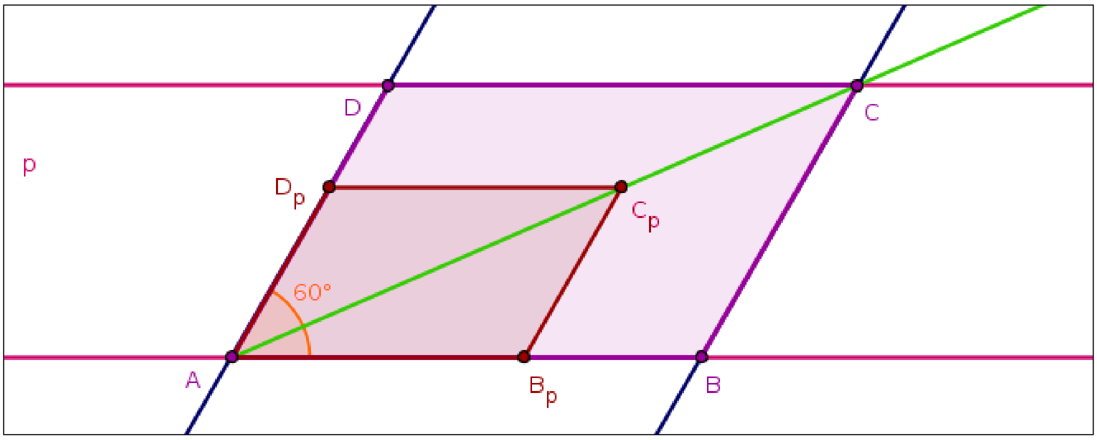
Příklad 5

Sestrojte kosodélník $ABCD$ o úhlopříčce AC délky e cm, $e > 0$, pro který platí $a : b = 3 : 2$ a $\alpha = 60°$.

Rozbor

Kosodélník $ABCD$ nemůžeme sestrojit přímo, neznáme délky stran. Sestrojíme proto pomocný kosodélník $A_pB_pC_pD_p$, který ve vhodné stejnolehlosti zobrazíme na kosodélník požadovaných vlastností.

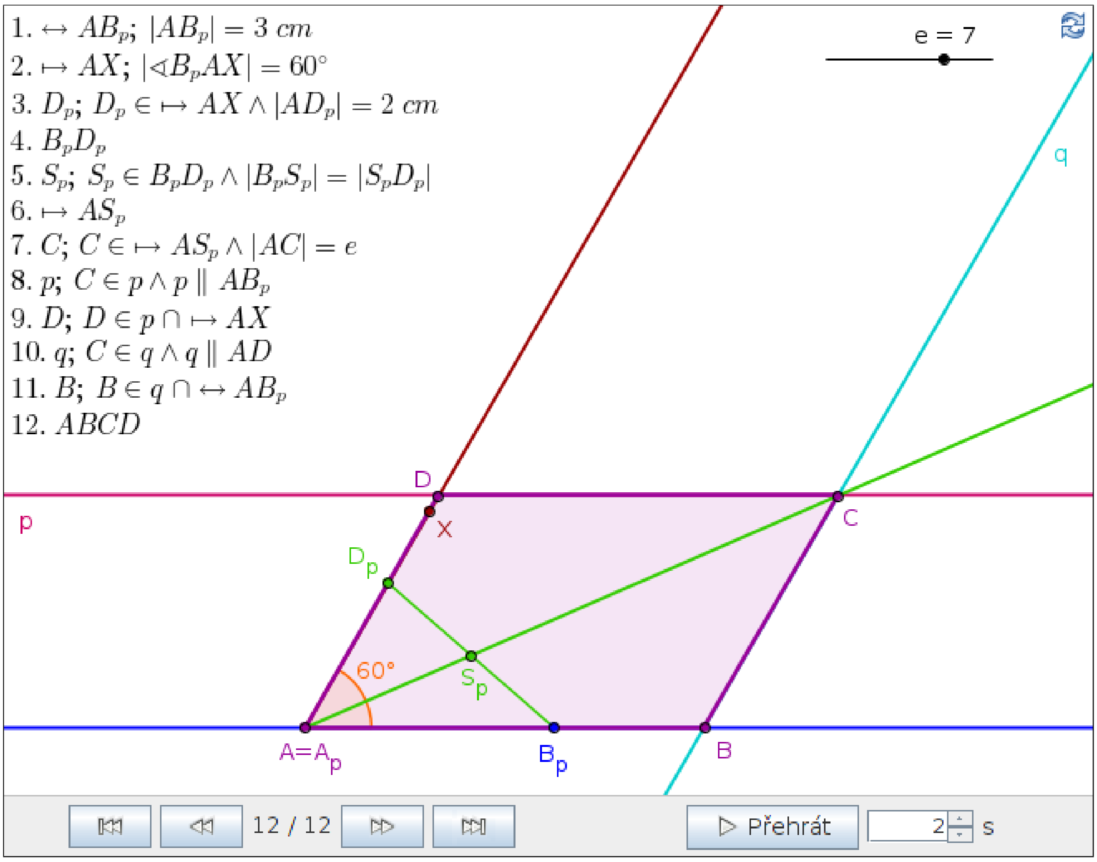
- Sestrojíme kosodélník $A_pB_pC_pD_p$ tak, aby úhel $B_pA_pD_p$ byl $60°$ a aby $|D_pA_p| : |A_pB_p| = 2 : 3$. (Zvolíme například délku stran 2 cm a 3 cm.)



Obrázek 3.13: Náčrtek příkladu 5

- Na polopřímku A_pC_p vyneseme bod C tak, aby $|A_pC| = e$. Bod $A_p = A$ je tedy středem stejnolehlosti. Zbylé vrcholy kosodélníka již sestrojíme snadno (obr. 3.13). (Ke konstrukci kosodélníka vůbec nemusíme konstruovat pomocný kosodélník celý, stačí sestrojit pouze body A_p, B_p a D_p. Protože se úhlopříčky kosodélníka půlí, stačí určit střed S_p úhlopříčky A_pD_p a bod C budeme vynášet na polopřímku AS_p.)

Konstrukce a zápis konstrukce



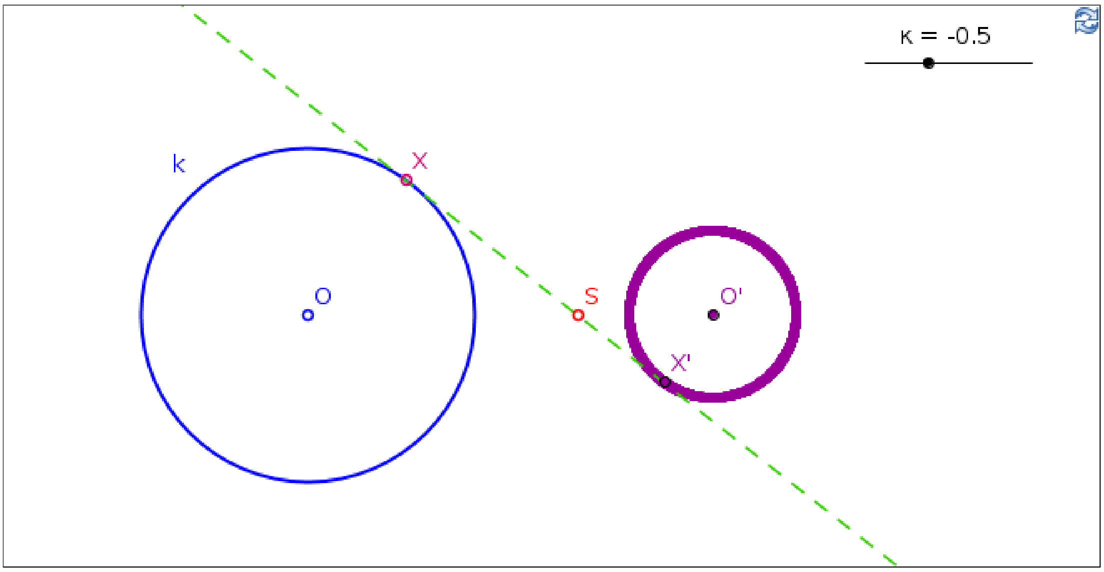
Obrázek 3.14: Příklad 5

Závěr

Úloha má pro $e > 0$ jedno řešení.

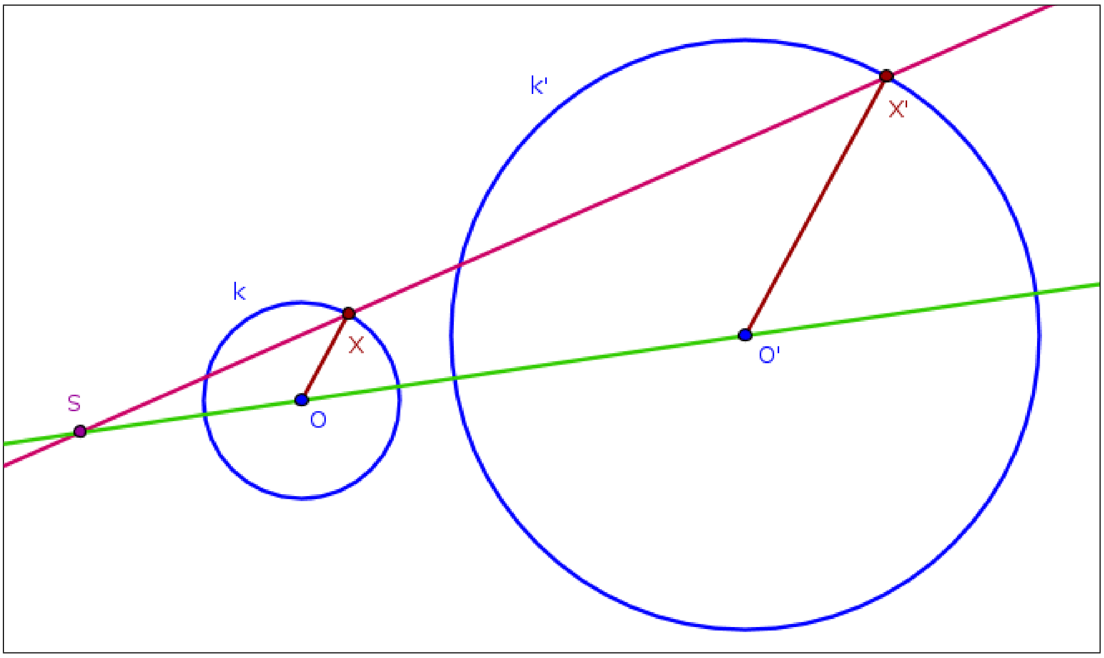
3.2.4 Stejnolehlost kružnic

Zamyslete se, co je obrazem kružnice k ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$. Pomůže vám k tomu následující applet (obr. 3.15). Pohybujte bodem X na kružnici k a pozorujte, co vytvoří obrazy X' bodu X.



Obrázek 3.15: Stejnolehlost kružnic

Obrazem kružnice k se středem O a poloměrem r ve stejnolehlosti určené středem S a koeficientem κ je kružnice k' se středem O' a poloměrem $|\kappa| \cdot r$, přitom bod O' je obrazem bodu O.



Obrázek 3.16: Stejnolehlost kružnic

Každé dvě kružnice jsou stejnolehlé. Střed O kružnice k se zobrazí na střed O' kružnice k' tak, že $|O'S| = |\kappa| \cdot |OS|$. Libovolný bod X na kružnici k se v dané stejnolehlosti zobrazí na bod X' takový, že $|X'S| = |\kappa| \cdot |XS|$. Z podobnosti trojúhelníků SOX a $SO'X'$ plyne $|O'X'| = |\kappa| \cdot |OX|$.

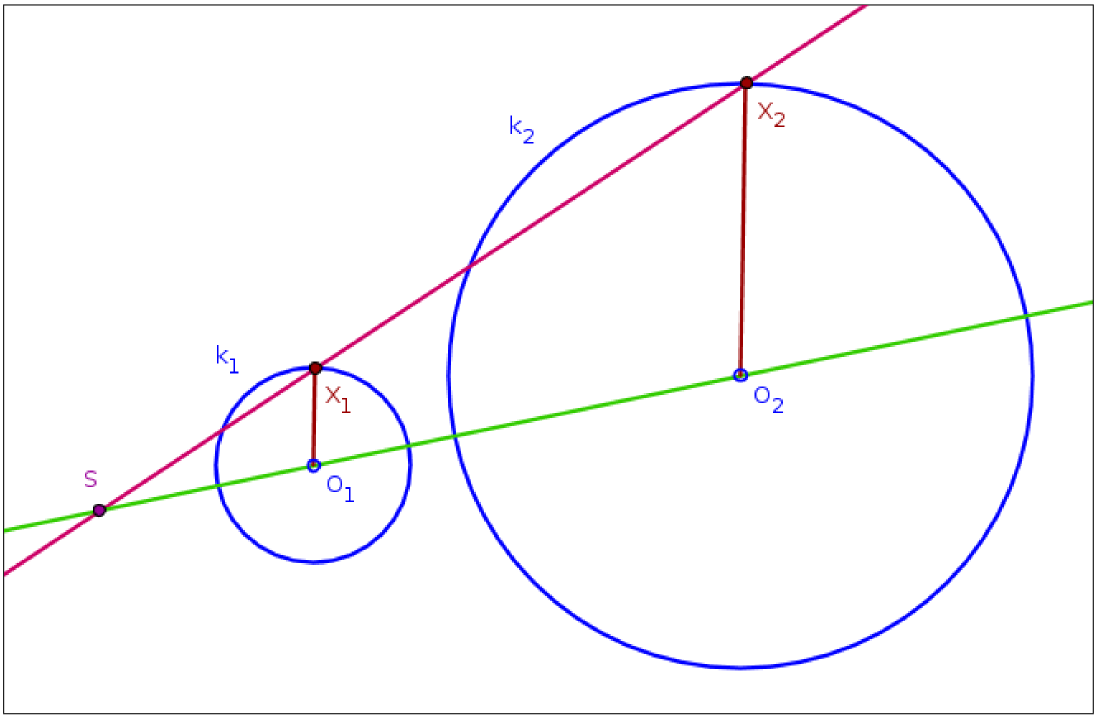
U stejnolehlosti kružnic nás bude zajímat střed stejnolehlosti, který zobrazí jednu kružnici na druhou, a společné tečny dvou kružnic. Tyto problémy jsou detailněji rozebrány v příkladech.

3.2.5 Příklady na stejnolehlost kružnic

Příklad 1

Jsou dány kružnice k_1, k_2. Sestrojte střed stejnolehlosti, která zobrazí kružnici k_1 na kružnici k_2. Určete koeficient stejnolehlosti.

Rozbor



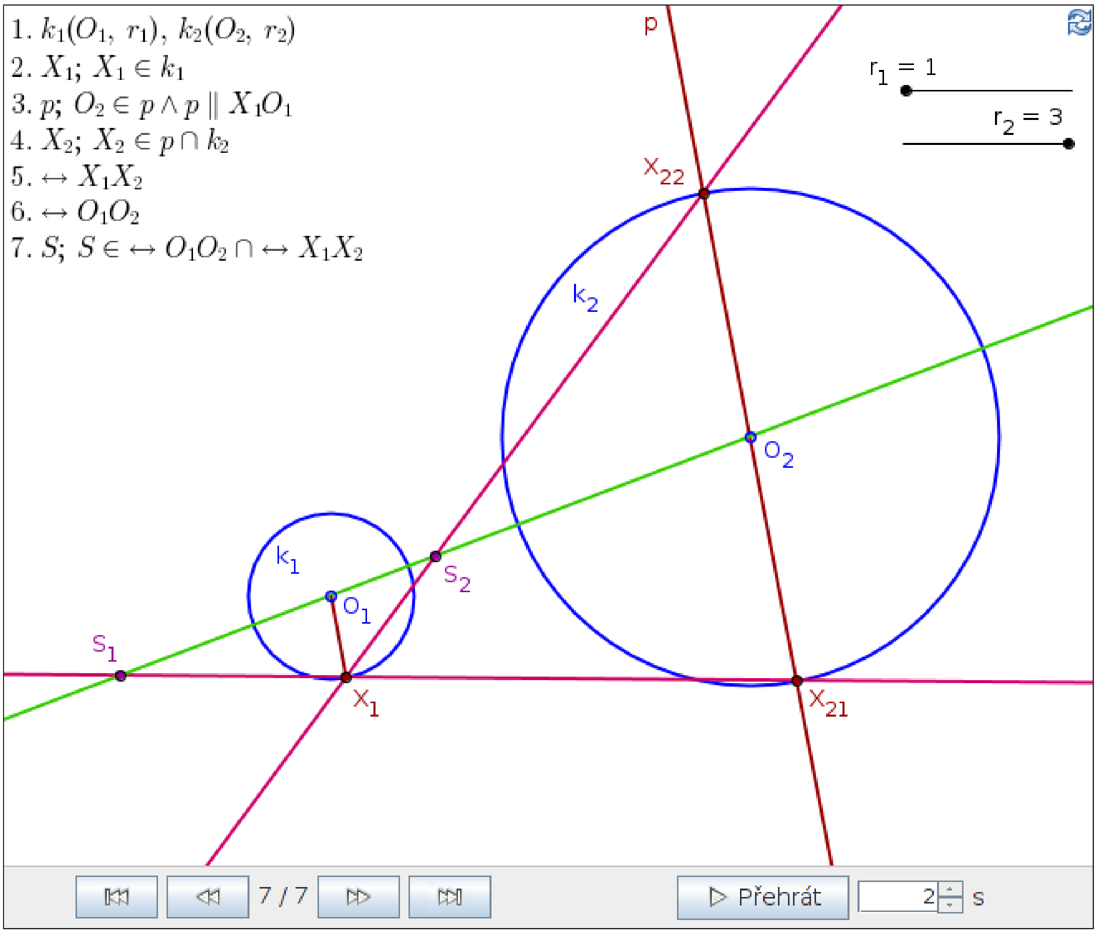
Obrázek 3.17: Náčrtek příkladu 1

Předpokládejme, že kružnice k_1 a k_2 jsou nesoustředné jako na obrázku 3.17. (Pokud budou kružnice k_1, k_2 soustředné, bude střed stejnolehlosti splývat se středem kružnic.)

- Z definice stejnolehlosti plyne, že libovolná úsečka XY se zobrazí na úsečku $X'Y'$, přičemž $XY \parallel X'Y'$ a $|X'Y'| = |\kappa| \cdot |XY|$, kde κ je koeficient stejnolehlosti. Toho využijeme k získání středu stejnolehlosti.
- Střed O_1 kružnice k_1 se v hledané stejnolehlosti se středem S a koeficientem κ zobrazil na střed O_2 kružnice k_2. Zvolme libovolný bod X_1 na kružnici k_1. Pak se úsečka X_1O_1 zobrazí na úsečku X_2O_2 s ní rovnoběžnou.
- Protože se bod X_1 má v dané stejnolehlosti zobrazit na bod X_2, bude bod X_2 ležet na polopřímce SX_1 (nebo na polopřímce k ní opačné). Sestrojíme přímku X_1X_2, průsečík přímky X_1X_2 a přímky O_1O_2 bude hledaný střed stejnolehlosti, ve které se kružnice k_1 zobrazí na kružnici k_2.

- Jelikož platí $|O_2X_2| = |\kappa| \cdot |O_1X_1|$, bude $|\kappa| = \frac{|O_2X_2|}{|O_1X_1|}$. Koeficient κ bude kladný, pokud bude bod X_2 ležet na polopřímce SX_1. Pokud bude ležet na polopřímce opačné k SX_1, bude koeficient záporný.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.18: Příklad 1

Diskuse

- Úloha má 2 řešení, pokud mají kružnice k_1 a k_2 různé poloměry.
- Úloha má 1 řešení, pokud mají kružnice stejné poloměry.

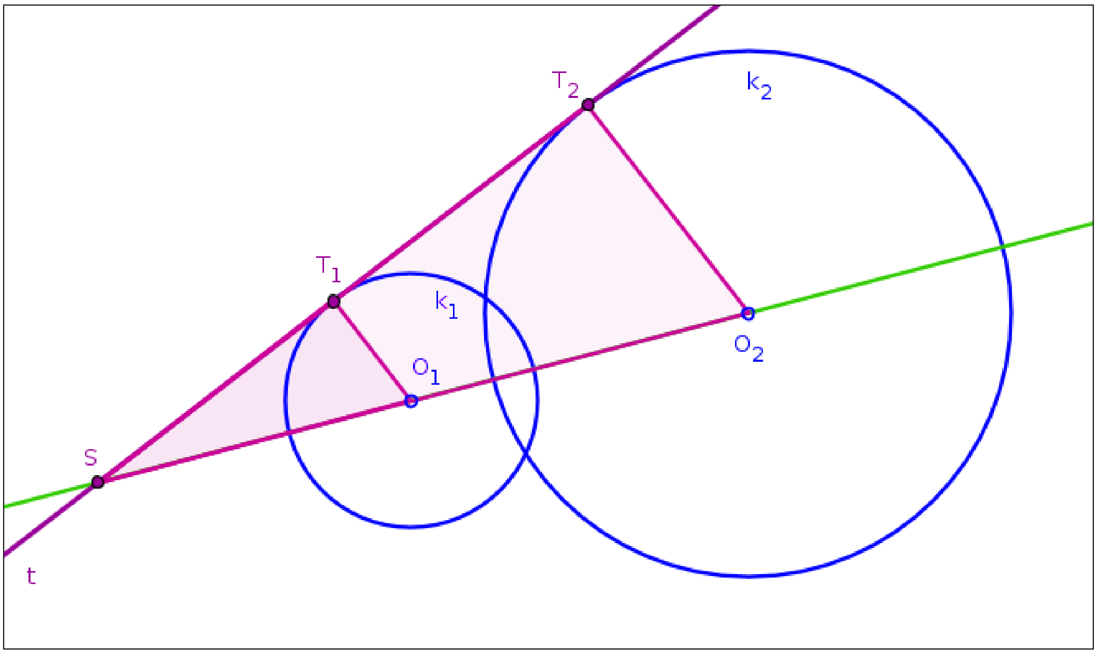
Příklad 2

Jsou dány kružnice k_1 se středem O_1, k_2 se středem O_2. Sestrojte přímku t takovou, aby byla přímka t tečnou kružnice k_1 a zároveň tečnou kružnice k_2.

Rozbor

Než začnete řešit tento příklad, pokuste se vyřešit předchozí příklad.

- Předpokládejme, že taková tečna existuje (obr. 3.19). Pak bude existovat bod T_1 na kružnici k_1 takový, že tečna t bude kolmá na T_1O_1 (jinak by existovalo více průsečíků přímky t a kružnice k_1 a přímka t by byla sečnou kružnice k_1). Analogicky bude existovat bod T_2 na kružnici k_2 (obr. 3.19).



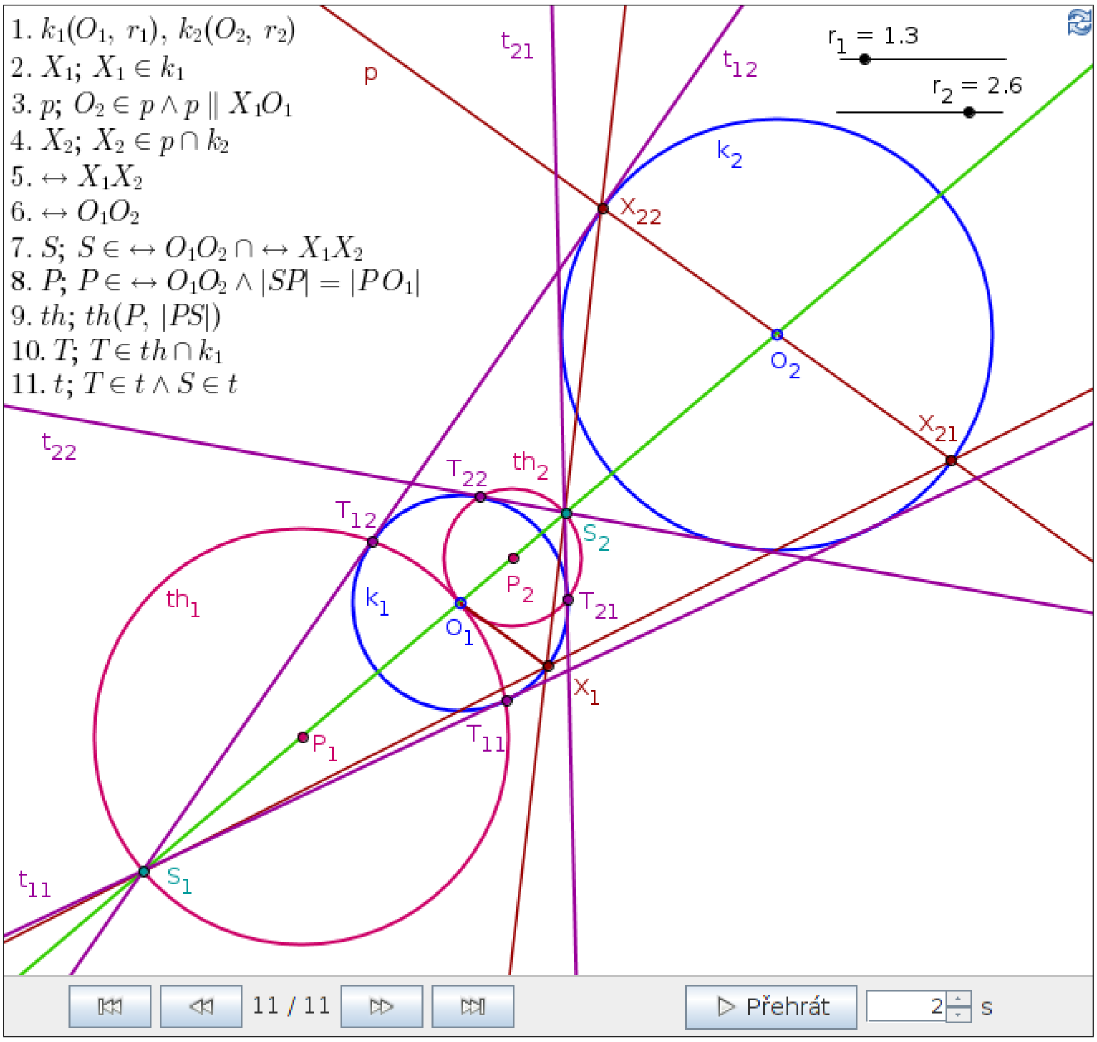
Obrázek 3.19: Náčrtek příkladu 2

- Průsečík přímky O_1O_2 a tečny t označme S. Pak platí, že trojúhelník ST_1O_1 je podobný trojúhelníku ST_2O_2. Trojúhelník ST_2O_2 získáme jako obraz trojúhelníka ST_1O_1 ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $k = \frac{|O_2T_2|}{|O_1T_1|}$. V této stejnolehlosti je kružnice k_2 obrazem kružnice k_1.
- Abychom mohli sestrojit tečnu t, potřebujeme sestrojit dva body, které leží na tečně. Bod S, střed dané stejnolehlosti, umíme získat – postupujeme stejně jako v předchozím příkladě.
- Dále nám stačí určit jeden z bodů T_1, T_2. Takový bod nalezneme snadno, víme, že úhel ST_1O_1 (resp. ST_2O_2) je pravý, takže využijeme Thaletovu kružnici.

Diskuse

- Úloha má 4 řešení, pokud kružnice k_1, k_2 nejsou soustředné a nemají žádný společný bod.
- Úloha má 3 řešení, pokud kružnice k_1, k_2 nejsou soustředné, dotýkají se v jednom společném bodě a střed kružnice k_1 (resp. k_2) neleží ve vnitřní oblasti kružnice k_2 (resp. k_1).
- Úloha má 2 řešení, pokud kružnice k_1, k_2 nejsou soustředné a existují dva průsečíky kružnic k_1, k_2.
- Úloha má 1 řešení, pokud kružnice k_1, k_2 nejsou soustředné, dotýkají se v jednom společném bodě a střed kružnice k_1 (resp. k_2) leží ve vnitřní oblasti kružnice k_2 (resp. k_1).
- Úloha má nekonečně mnoho řešení, pokud jsou kružnice k_1, k_2 soustředné a mají stejný poloměr.
- Úloha nemá jinak řešení.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 3.20: Příklad 2

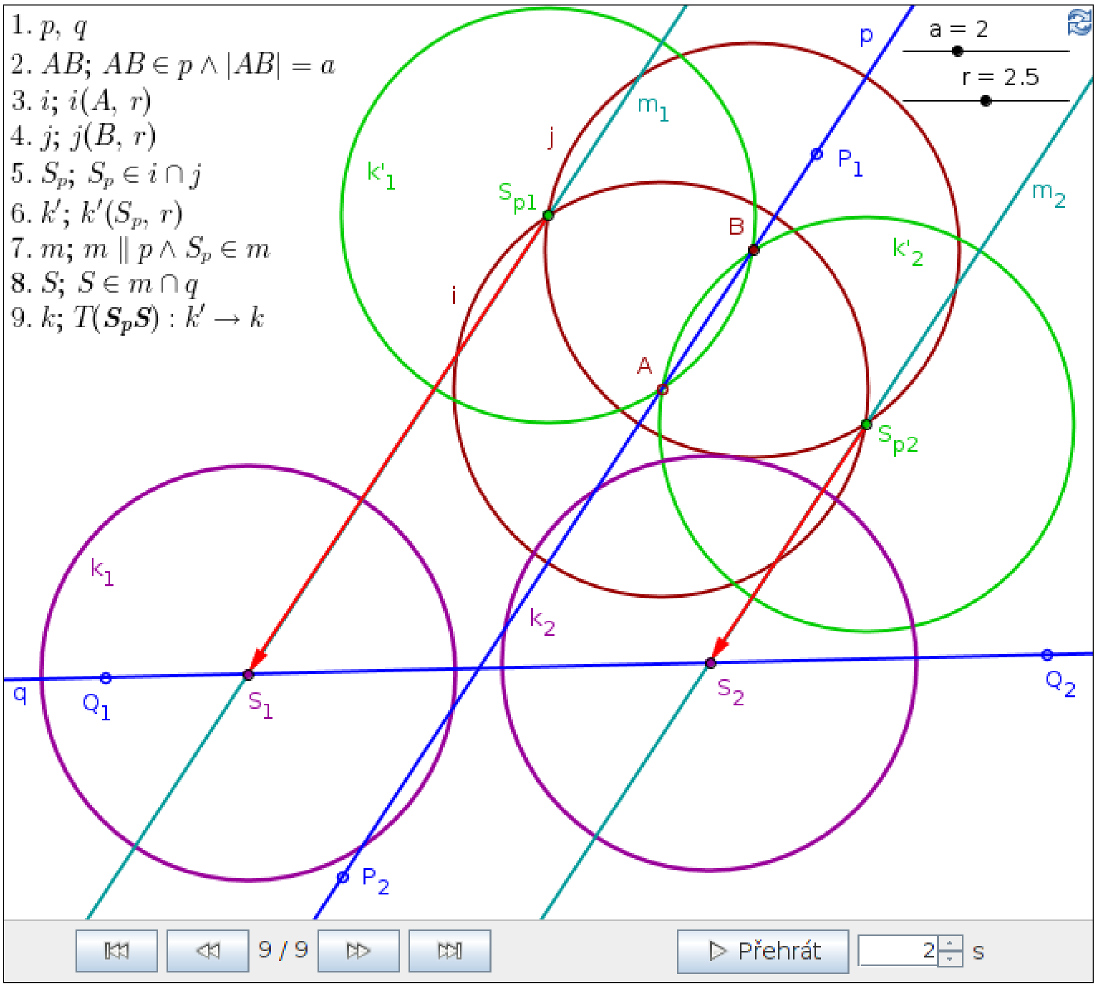
Pokud mají kružnice k_1, k_2 stejný poloměr, pak existují dvě tečny kružnic rovnoběžné s přímkou O_1O_2, které nezískáme pomocí stejnolehlosti (neexistuje průsečík tečny a přímky O_1O_2). Tyto tečny získáme tak, že vedeme kolmici k přímce O_1O_2 bodem O_1 (resp. O_2), tečna bude rovnoběžka s přímkou O_1O_2 vedená průsečíkem kolmice a kružnice k_1 (resp. k_2).

4. Úlohy na procvičení

4.1 Úloha 1

Jsou dány různoběžné přímky p, q. Sestrojte všechny kružnice k o poloměru r cm se středem na přímce q takové, aby přímka p vytínala na kružnici k tětivu délky a cm.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 4.1: Úloha 1

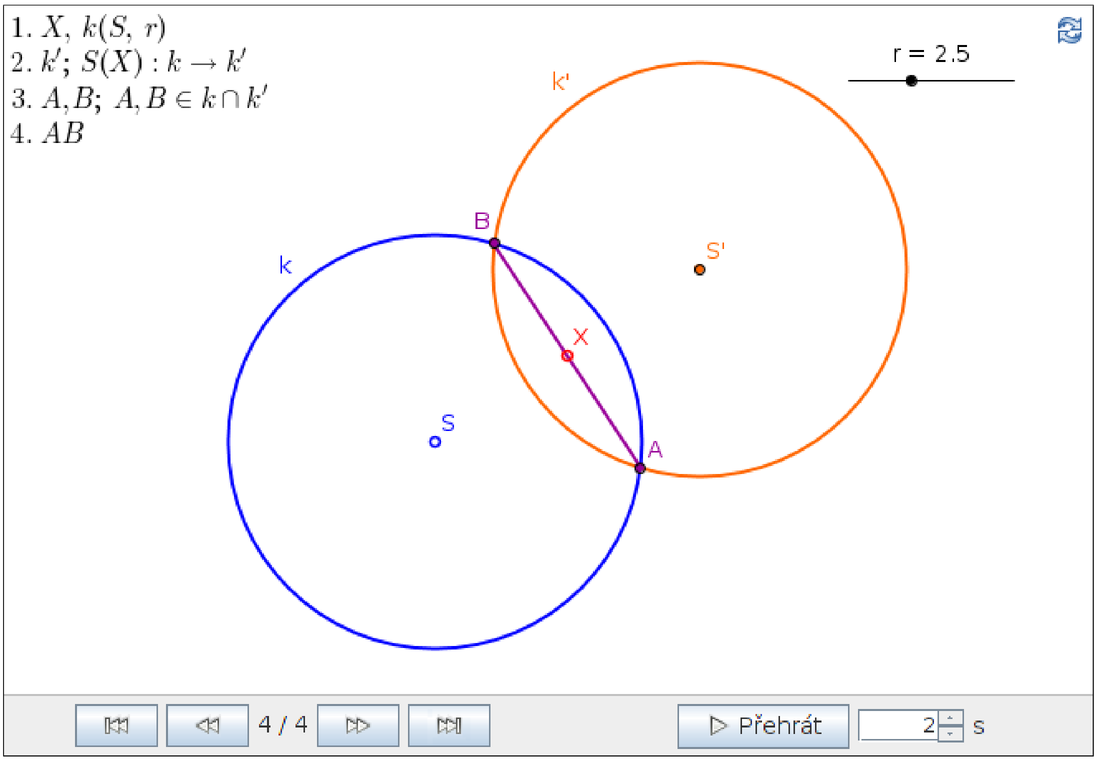
Diskuse

- Úloha nemá řešení, pokud je délka tětivy a větší než průměr kružnice k.
- Úloha má právě jedno řešení, pokud je délka tětivy a rovna průměru kružnice k.
- Úloha má právě dvě řešení, pokud je délka tětivy a menší než průměr kružnice k.

4.2 Úloha 2

Je dána kružnice k s poloměrem r a bod X. Sestrojte všechny úsečky AB takové, že bod X je středem úsečky AB a krajní body úsečky leží na kružnici k.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 4.2: Úloha 2

Diskuse

- Úloha má nekonečně mnoho řešení, pokud bod X splývá se středem kružnice k.
- Úloha má právě jedno řešení, pokud bod X leží uvnitř kružnice k a nesplývá s jejím středem.
- Úloha nemá řešení, pokud bod X leží na kružnici nebo leží ve vnější oblasti kružnice k.

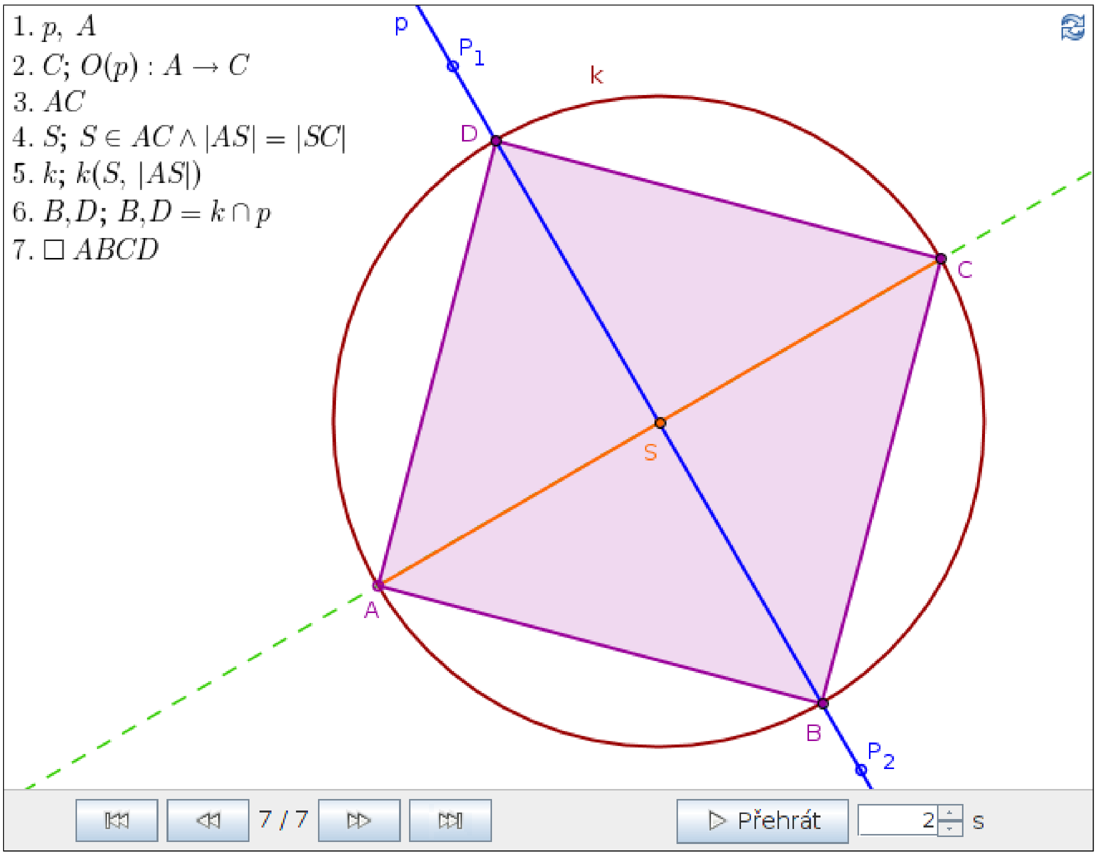
4.3 Úloha 3

Je dána přímka p a bod A. Sestrojte čtverec $ABCD$, aby jeho úhlopříčka BD ležela na přímce p.

Diskuse

- Úloha nemá řešení, pokud bod A leží na přímce p.
- Úloha má právě jedno řešení, pokud bod A neleží na přímce p.

Konstrukce a zápis konstrukce

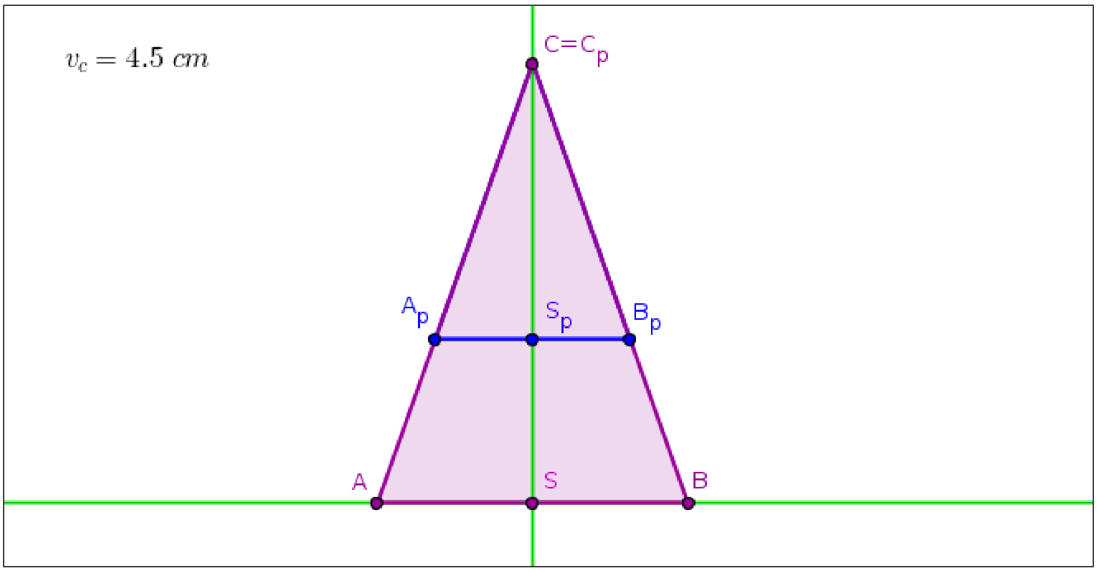


Obrázek 4.3: Úloha 3

4.4 Úloha 4

Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB takové, že $|AB| : |BC| = 2 : 3$, a výškou na základnu délky v_c cm.

Nápověda:

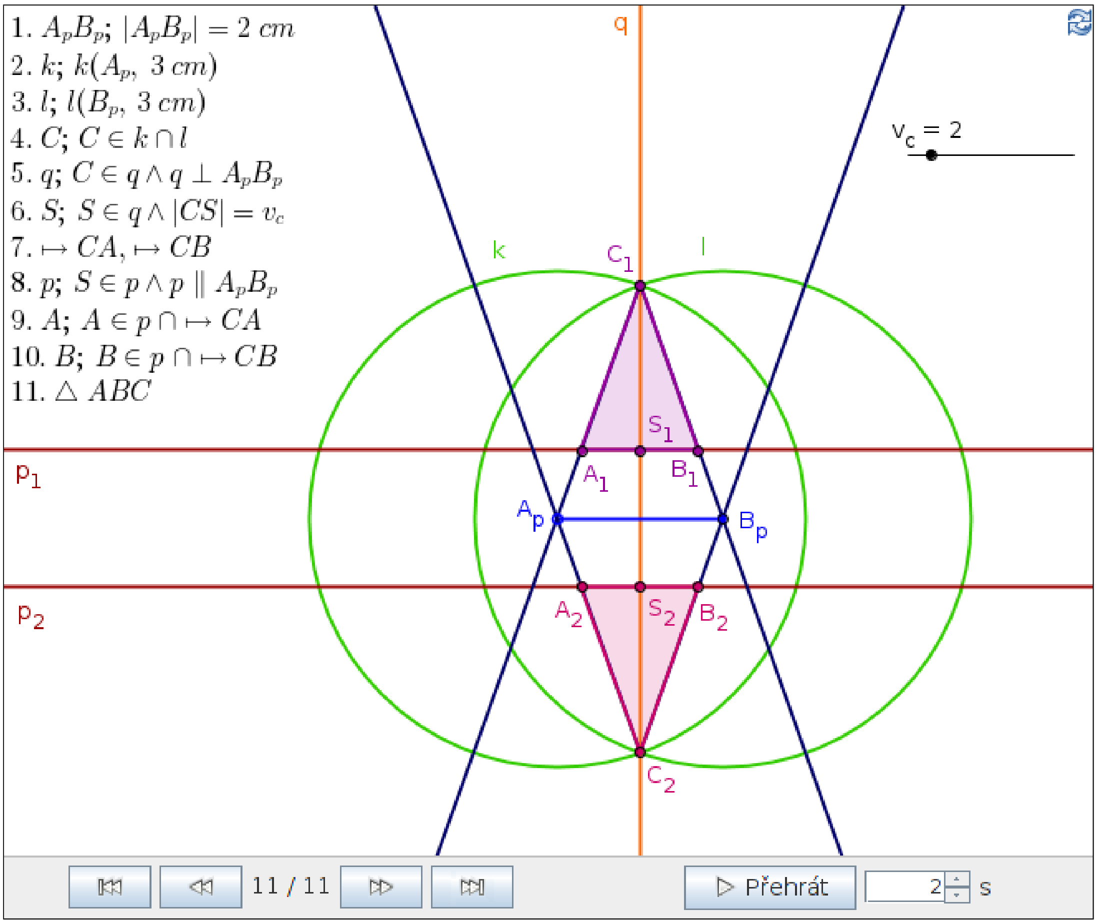


Obrázek 4.4: Náčrtek úlohy 4

Trojúhelník ABC nemůžeme sestrojit přímo, neznáme délky stran. Sestrojíme proto pomocný trojúhelník $A_pB_pC_p$, pro který bude platit $|A_pB_p| : |B_pC_p| = 2 : 3$ (zvolíme například délku stran 2 cm a 3 cm), který ve vhodné stejnolehlosti zobrazíme na trojúhelník požadovaných vlastností.

Pro výšku C_pS_p na základnu pomocného trojúhelníka a výšku CS na základnu trojúhelníka ABC musí platit $|CS| = \kappa \cdot |C_pS_p|$, zvolme například bod $C_p = C$ jako střed stejnolehlosti, a protože známe délku výšky CS, můžeme zkonstruovat trojúhelník ABC.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 4.5: Úloha 4

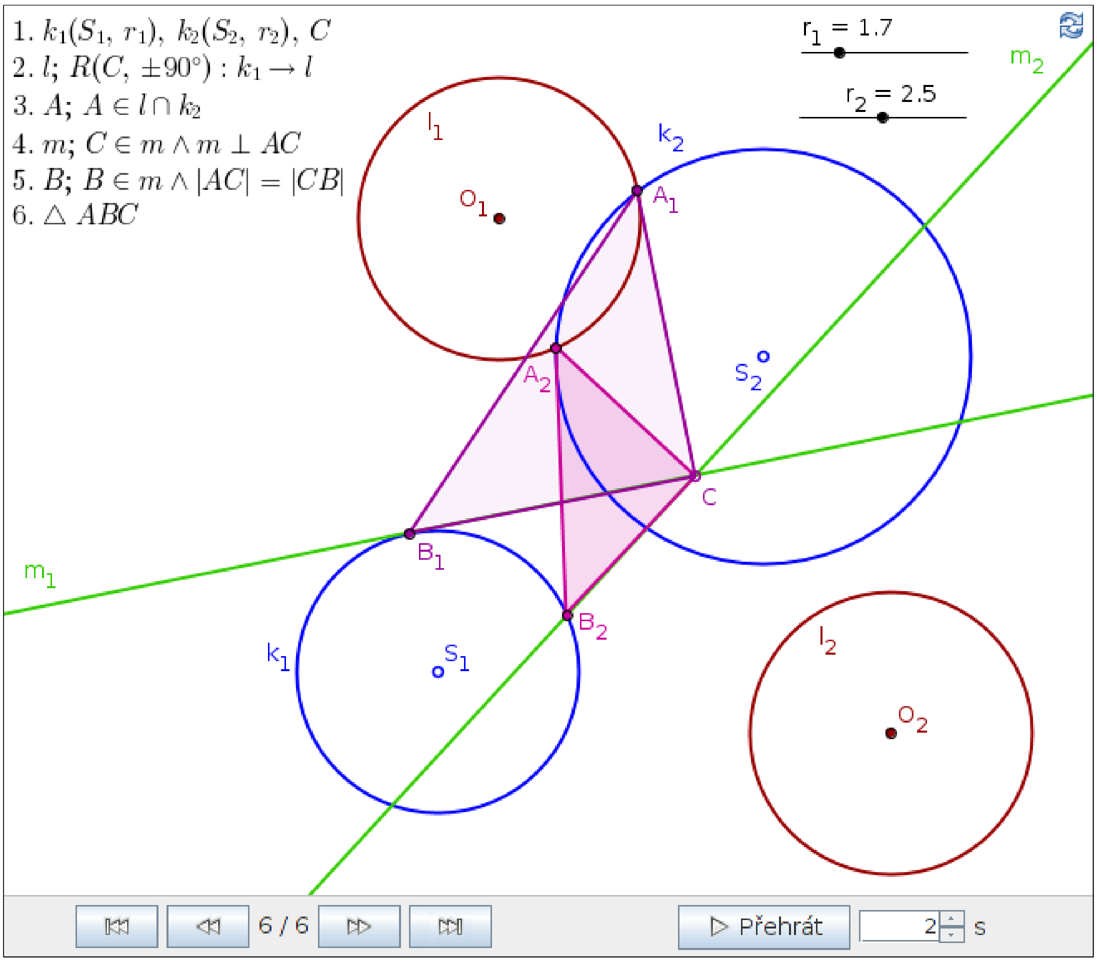
Diskuse

Úloha má dvě řešení pro každé v_c kladné.

4.5 Úloha 5

Jsou dány kružnice k_1, k_2 a bod C. Sestrojte všechny rovnoramenné trojúhelníky ABC s pravým úhlem u vrcholu C takové, aby bod A ležel na kružnici k_2 a bod B na kružnici k_1.

Konstrukce a zápis konstrukce



Obrázek 4.6: Úloha 5

Diskuse

Počet řešení závisí na počtu průsečíků kružnice k_2 a obrazů kružnice k_1 v daném otočení.

- Úloha má 4 řešení, pokud existují čtyři průsečíky kružnice k_2 a kružnic $l_{1,2}$.
- Úloha má 3 řešení, pokud kružnice k_2 má dva průsečíky s kružnicí l_1 (resp. l_2) a jeden průsečík s kružnicí l_2 (resp. l_1).
- Úloha má 2 řešení, pokud:
  - kružnice k_2 má dva průsečíky s kružnicí l_1 (resp. l_2),
  - kružnice k_2 má jeden průsečík s kružnicí l_1 a jeden průsečík s kružnicí l_2.
- Úloha má 1 řešení, pokud existuje jeden průsečík kružnice k_2 a kružnice l_1 (resp. l_2).
- Úloha nemá řešení, pokud neexistuje průsečík kružnic k_2, l_1 ani průsečík kružnic k_2, l_2.

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit webové stránky pro výuku shodných a podobných geometrických zobrazení v rovině s důrazem na konstrukci úloh využívající zobrazení. Stránky budou dostupné na portálu středoškolské matematiky, webových stránkách katedry didaktiky matematiky, kde je studenti budou moci využívat.

V práci jsou shrnuty důležité poznatky o jednotlivých zobrazeních a ke každému zobrazení jsou vytvořeny příklady, na kterých má student pochopit, jak použít nabyté znalosti daného zobrazení ke konstrukcím úloh. Student si může ověřit, že zvládl danou látku na několika úlohách.

Práce by se do budoucna mohla rozšířit o kruhovou inverzi či o skládání zobrazení. Tato zobrazení se málokdy vyučují na středních školách, a proto je obtížné k nim nalézt výukový materiál.

Seznam použité literatury

[1] Kadleček, J.: *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 1996.

[2] Pomykalová, E.: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Vyd. 3, dotisk. Praha: Prometheus, 1993.

[3] Petáková, J.: *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* Vyd. 1, dotisk. Praha: Prometheus, 1998.

[4] Odvárko, O., Kadleček, J.: *Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 2004.

[5] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Vyd. 9, přepr. Praha: Prometheus, 2008.

[6] Molnár, J.: *Matematika pro střední odborné školy – Planimetrie.* Vyd. 1. Praha: Prometheus, 2011.