Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martina Bekrová

Racionální minimální plochy

Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2014

Na tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce doc. RNDr. Zbyňku Šírovi, Ph.D. za ochotu, trpělivost a cenné rady. Také děkuji za podporu své rodině: Velmi si cením zájmu, který projevujete, přestože netušíte, o čem má práce je.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 19. května 2014 Podpis autora

Název práce: Racionální minimální plochy

Autor: Martina Bekrová

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Matematický ústav UK

Abstrakt: V této bakalářské práci se zabýváme racionálními plochami s racionálními offsety a minimálními plochami. Tyto dvě třídy ploch dáme do souvislosti. Uvedeme způsob, jakým lze nalézt všechny racionální plochy s racionálními offsety pomocí duální reprezentace plochy jako obálky svých tečných rovin. Propojíme minimální plochy s funkcemi komplexní proměnné a odvodíme známou Weierstrassovu-Enneperovu reprezentaci a její modifikace pro generování minimálních ploch. Pomocí těchto dvou nástrojů ukážeme, že všechny racionální minimální plochy získané z Weierstrassovy-Enneperovy reprezentace mají také racionální offsety.

Klíčová slova: racionální plochy, racionální offsety, Weierstrassova-Enneperova reprezentace, minimální plochy

Title: Rational minimal surfaces

Author: Martina Bekrová

Department: Mathematical Institute of Charles University

Supervisor: doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D., Mathematical Institute of Charles University

Abstract: This bachelor thesis deals with rational surfaces with rational offsets and minimal surfaces. We will give a connection between these two classes of surfaces. We will introduce a method of finding all rational surfaces with rational offsets using dual representation of surface as an envelope of its own tangent surfaces. A connection will be established between minimal surfaces and functions of a complex variable. Furthermore, we will derive the known Weierstrass-Enneper representation and its modifications for generating minimal surfaces. By means of these two tools we will show that all rational minimal surfaces obtained from the Weierstrass-Enneper representation also have rational offsets.

Keywords: rational surfaces, rational offsets, Weierstrass-Enneper representation, minimal surfaces

Obsah

Úvod

Při využití racionálních ploch v aplikacích často potřebujeme také jejich offsety, množiny bodů v dané vzdálenosti od plochy, které ovšem nemusí být racionální a je tedy nutné je aproximovat. Abychom se vyhnuli tomuto procesu s nejistým výsledkem, bylo by hezké najít plochy, jejichž offsety jsou racionální. Ukazuje se, že existuje překvapivě jednoduchý způsob, jak takovéto plochy charakterizovat, pokud uvažujeme plochy jako obálky svých tečných rovin. V práci uvádíme kompletní postup, jak všechny takovéto plochy najít, založený na článku Pottmann (1995).

Další zajímavou třídou ploch jsou plochy, jejichž střední křivost je nulová, tak zvané minimální plochy. Tento pojem je motivován hledáním ploch s nejmenším obsahem při dané hranici. Uvedeme vzorec, Weierstrassovu-Enneperovu reprezentaci, kterým lze vyjádřit každou minimální plochu, a také jeho odvození. V této části práce čerpáme především z knihy Pressley (2010).

Cílem práce bylo seznámit se s generováním racionálních ploch s racionálními offsety a minimálních ploch a dát tyto dvě skupiny ploch do souvislosti. Ukážeme, že všechny racionální minimální plochy získané Weierstrassovou-Enneperovou reprezentací mají zároveň racionální offsety. Tuto reprezentaci dále upravíme a odvodíme její další podoby, které vedou na jednoduchý vzorec pro generování racionálních minimálních ploch (s racionálními offsety) a je tedy možné najít libovolně mnoho takových ploch.

V první kapitole shrneme potřebné pojmy diferenciální geometrie a komplexní analýzy. Ve druhé se budeme věnovat racionálním plochám s racionálními offsety. Třetí kapitola pojednává o generování minimálních ploch a ve čtvrté pak dáme minimální plochy do souvislosti s racionálními plochami s racionálními offsety a ukážeme pro ně některé konkrétní vlastnosti.

Má práce spočívala v nalezení důležitých informací především v anglicky psané literatuře a jejich propojení v celek. Při konstrukci racionálních ploch s racionálními offsety jsem doplnila chybějící kroky v odvození. Ve třetí kapitole jsem upravila jeden důkaz převzatý z literatury a našla spojení mezi různými tvary Weierstrassovy-Enneperovy reprezentace. Ve čtvrté kapitole se pak věnuji vlastním výpočtům s modifikovanou Weierstrassovou-Enneperovou reprezentací, které vedou k zajímavým výsledkům. Vše jsem samozřejmě doplnila o příklady.

Kapitola 1

Základní pojmy

Zopakujme nejprve základní definice a věty z diferenciální geometrie a komplexní analýzy, které budeme potřebovat.

1.1 Diferenciální geometrie

Definice 1.1 (Parametrizovaná křivka)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval.* Parametrizovaná křivka *v $\mathbb{R}^3$ (resp. v $\mathbb{R}^2$) je hladké zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Množinu $\mathbf{c}(I)$ označíme $\langle \mathbf{c} \rangle$ a nazveme* obrazem křivky $\mathbf{c}$.

Parametrizovaná křivka je regulární v bodě $t_0 \in I$, pokud $\dot{\mathbf{c}}(t_0) \neq \mathbf{0}$. Parametrizovaná křivka je regulární, jestliže je regulární v každém bodě I.

Definice 1.2 (Plocha)**.** *Řekneme, že množina $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ je* hladká plocha, *pokud pro každý bod $s \in S$ existuje $W \subset \mathbb{R}^3$ otevřená, $U \subset \mathbb{R}^2$ otevřená a hladké regulární zobrazení $\mathbf{p} : U \to \mathcal{S} \cap W$, které je homeomorfismem U na $\mathcal{S} \cap W$.*

Zobrazení $\mathbf{p}$ se nazývá mapou *nebo také* parametrizací *plochy $\mathcal{S}$.*

Množinu $\mathbf{p}(U)$ označíme $\langle p \rangle$ a nazveme obrazem mapy $\mathbf{p}$.

Soubor map, které pokrývají celou plochu $\mathcal{S}$, se nazývá atlas plochy $\mathcal{S}$.

Definice 1.3 (Tečný prostor)**.** *Řekneme, že vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ je* tečný vektor *k ploše $\mathcal{S}$ v bodě $s \in \mathcal{S}$, jestliže existuje křivka $\mathbf{c}$ taková, že $\langle \mathbf{c} \rangle \subset \mathcal{S}$, $\mathbf{c}(t_0) = s$, $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{w}$. Množina všech tečných vektorů v bodě $s \in \mathcal{S}$ se nazývá* tečný prostor *k ploše $\mathcal{S}$ v bodě s a značí se $T_s\mathcal{S}$.*

Tečný prostor $T_s\mathcal{S}$ tvoří v libovolném bodě $s \in \mathcal{S}$ vektorový podprostor $\mathbb{R}^2$. Jestliže $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa $\mathcal{S}$ a $s = \mathbf{p}(u_0, v_0)$, pak vektory $\mathbf{p}_u(u_0, v_0)$, $\mathbf{p}_v(u_0, v_0)$ tvoří bázi $T_s\mathcal{S}$, viz Pressley (2010, Proposition 4.4.2)

Definice 1.4 (Jednotková normála)**.** *Nechť $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa na ploše $\mathcal{S}$, pak v každém jejím bodě definujeme* jednotkový normálový vektor *předpisem*

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v}{\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|}.$$

Pokud mají dvě mapy pro tentýž bod stejnou jednotkovou normálu, nazýváme je souhlasně orientované.

Definice 1.5 (1. fundamentální forma). *Nechť $\mathcal{S}$ je plocha a $s \in \mathcal{S}$. Pak skalární součin na $T_s\mathcal{S}$ definujeme jako restrikci kanonického Eukleidovského součinu na $\mathbb{R}^3$*

$$I_s(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2,$$

kde $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w_2} \in T_s\mathcal{S}$. Tuto symetrickou bilineární formu nazveme první fundamentální forma *plochy $\mathcal{S}$ v bodě s.*

Tvrzení 1.1 (1. fundamentální forma vyjádřená v mapě). *Nechť $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa plochy $\mathcal{S}$, pak první fundamentální formu plochy $\mathcal{S}$ vyjádříme v každém bodě vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí*

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}.$$

Důkaz koreknosti definice 1.5 a tvrzení 1.1 lze nalézt v knize Pressley (2010, str. 122).

Definice 1.6 (2. fundamentální forma plochy). *Nechť $\mathcal{S}$ je orientovaná plocha, $s \in \mathcal{S}$ a $\mathbf{N}_s$ je normála $\mathcal{S}$ v bodě s. Pak definujeme* druhou fundamentální formu *plochy jako kvadratickou formu na $T_s\mathcal{S}$ danou předpisem*

$$II_s(\mathbf{w}) = \ddot{\mathbf{c}}(t_0) \cdot \mathbf{N}_s,$$

kde $\mathbf{w} \in T_s\mathcal{S}$ a $\mathbf{c}(t)$ je libovolná křivka splňující $\mathbf{c}(t_0) = s$, $\dot{\mathbf{c}}(t_0) = \mathbf{w}$.

Definici druhé fundamentální formy jsme převzali z materiálů k přednášce Diferenciální geometrie Šír (2013, Definice 3.20). Důkaz korektnosti této definice není prozatím nikde publikován, proto jej zde uvedeme.

Důkaz. Chceme ukázat, že II_s je kvadratická forma nezávislá na volbě křivky $\mathbf{c}$. Nechť $\mathbf{p}$ je libovolná parametrizace plochy $\mathcal{S}$, pak křivka na této ploše je dána

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{p}(u(t), v(t)).$$

Její derivace jsou

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{p}_u \dot{u} + \mathbf{p}_v \dot{v},$$
$$\ddot{\mathbf{c}} = \mathbf{p}_{uu}(\dot{u})^2 + \mathbf{p}_{vu}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{p}_u\ddot{u} + \mathbf{p}_{vv}(\dot{v})^2 + \mathbf{p}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{p}_v\ddot{v}.$$

Normála $\mathbf{N}$ plochy $\mathcal{S}$ je kolmá na $\mathbf{p}_u$ a $\mathbf{p}_v$, tedy

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{N} &= (\mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N})(\dot{u})^2 + 2(\mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N})\dot{u}\dot{v} + (\mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N})(\dot{v})^2 = \\ &= (\dot{u}, \dot{v}) \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nyní vidíme, že II_s je symetrická bilineární (tedy kvadratická) forma na $T_s\mathcal{S}$. ❑

Poslední formule vede k vyjádření v mapě.

Tvrzení 1.2 (2. fundamentální forma vyjádřená v mapě). *Nechť $\mathbf{p}(u, v)$ je mapa plochy $\mathcal{S}$, pak druhou fundamentální formu plochy $\mathcal{S}$ vyjádříme v každém bodě vůči bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ symetrickou maticí*

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{N} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{N} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{N} \end{pmatrix}.$$

Definice 1.7 (Normálová křivost)**.** *Nechť* $\mathcal{S}$ *je orientovaná plocha,* $s \in \mathcal{S}$ *a* $\mathbf{w} \in T_s\mathcal{S}$ *je nenulový.* Normálovou křivost *v bodě* s *ve směru* $\mathbf{w}$ *definujeme předpisem*

$$\kappa_n = \frac{II_s(\mathbf{w})}{I_s(\mathbf{w})}.$$

Definice 1.8 (Hlavní křivosti)**.** *Minimum* κ_1 *a maximum* κ_2 *normálové křivosti se nazývají* hlavní křivosti *a odpovídající směry se nazývají* hlavní směry*.*

Definice 1.9 (Gaussova a střední křivost)**.** *V každém bodě definujeme* Gaussovu křivost K *a* střední křivost H *předpisem*

$$K = \kappa_1\kappa_2, \qquad H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Tvrzení 1.3 (Výpočet Gaussovy a střední křivosti v mapě)**.** *Nechť* $\mathcal{S}$ *je plocha daná parametrizací* $\mathbf{p}$ *a* $\mathbf{G}$ *a* $\mathbf{H}$ *jsou příslušné matice první a druhé fundamentální formy. Pak pro Gaussovu křivost platí:*

$$K = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{G}}.$$

Pro střední křivost platí:

$$H = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} = \frac{h_{11}g_{22} - 2h_{12}g_{12} + h_{22}g_{11}}{2 \det \mathbf{G}}.$$

Pro důkaz tohoto tvrzení viz Pressley (2010, Corollary 8.1.3).

1.2 Komplexní analýza

Definice 1.10 (Holomorfní funkce)**.** *Řekneme, že funkce* f *je* holomorfní *na otevřené množině* $M \subset \mathbb{C}$*, pokud* f *má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny* M*.*

Věta 1.4 (Cauchy-Riemannovy podmínky)**.** *Nechť* f *je komplexní funkce komplexní proměnné. Označme* $\tilde{f} = (\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)$ *funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v* $\mathbb{R}^2$ *odpovídající* f *při ztotožnění* $\mathbb{C}$ *a* $\mathbb{R}^2$*; tj. takovou, že*

$$f(u + iv) = \tilde{f}_1(u,v) + i\tilde{f}_2(u,v)$$

pro $u + iv$ *z definičního oboru* f*. Nechť* $\zeta = a + ib$*, kde* $a,b \in \mathbb{R}$*. Pak* f *má v bodě* ζ *derivaci podle komplexní proměnné, právě když* $\tilde{f}$ *má v bodě* (a,b) *totální diferenciál a platí*

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u}(a,b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial v}(a,b) \quad a \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial v}(a,b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial u}(a,b). \tag{1.1}$$

Důkaz. Uveden v knize Kopáček (2010, Věta 17.2). ❑

Pro jednoduchost budeme v dalším textu ztotožňovat funkce f a $\tilde{f}$. Označme $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\zeta}$, pak lze Cauchy-Riemannovy podmínky psát jako

$$f' = \frac{\partial f_1}{\partial u} + i\frac{\partial f_2}{\partial u} = f_u, \qquad if' = i\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial v} = f_v. \tag{1.2}$$

Pokud funkce f je holomorfní na prstencovém okolí bodu a, pak říkáme, že má v bodě a *izolovanou singularitu.* Tato singularita je podle Casorati- Weierstrassovy (viz Kopáček (2010, Věta 17.31)) věty jednoho ze tří typů:

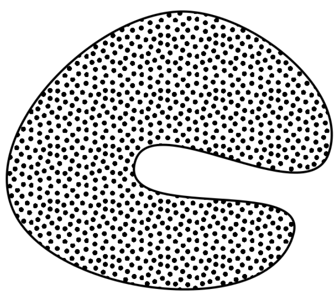
1. *Odstranitelná*, pokud existuje vlastní $\lim_{\zeta \to a} f(\zeta)$. Dodefinujeme-li funkci f spojitě v bodě a, dostaneme funkci holomorfní na $U(a,r)$.
2. *Pól násobnosti* p, pokud $\lim_{\zeta \to a} f(\zeta) = \infty$ a existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$, pro které existuje vlastní nenulová $\lim_{\zeta \to a}(\zeta - a)^p f(\zeta)$. Navíc existují taková čísla $a_{-p}, a_{-(p-1)}, \ldots, a_{-1} \in \mathbb{C}$, $a_{-p} \neq 0$, určená jednoznačně, že funkce
$$f - \frac{a_{-1}}{\zeta - a} - \frac{a_{-2}}{(\zeta - a)^2} - \cdots - \frac{a_{-p}}{(\zeta - a)^p}$$
má v bodě a odstranitelnou singularitu.
3. *Podstatná*, pokud $\lim_{\zeta \to a} f(\zeta)$ neexistuje.

Definice 1.11 (Meromorfní funkce)**.** *Řekneme, že funkce f je* meromorfní *na množině $M \subset \mathbb{C}$, jestliže body, ve kterých není holomorfní, jsou izolované a singularita v nich je buď odsranitelná, nebo pól.*

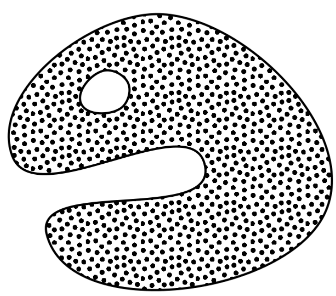
Příkladem meromorfních funkcí jsou všechny racionální funkce.

Definice 1.12 (Jednoduše souvislá množina)**.** *Řekneme, že $U \subset \mathbb{C}$ je* jednoduše souvislá množina*, pokud v ní lze každou jednoduchou uzavřenou křivku spojitě stáhnout do bodu.*

Jinak řečeno, takováto množina neobsahuje žádné „díry“.



(a) Jednoduše souvislá množina.



(b) Množina, která není jednoduše souvislá.

Věta 1.5 (Cauchyova věta)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená, jednoduše souvislá množina, $f : U \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce, x, $y \in U$ a $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ jsou libovolné křivky z bodu x do bodu y takové, že $\langle \mathbf{c}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{c}_2 \rangle \subset U$. Pak*

$$\int_{\mathbf{c}_1} f = \int_{\mathbf{c}_2} f.$$

Tedy křivkový integrál z f nezávisí na zvolené křivce.

Důkaz. Plyne přímo z vět 17.18a a 17.15 v knize Kopáček (2010). ❑

Věta 1.6 (O jednoznačnosti)**.** *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená souvislá množina a f,g jsou funkce holomorfní na U. Jestliže množina*

$$\{z \in U : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v U (tj. není izolovaná v U), pak $f = g$ na U.

Důkaz. Lze nalézt v knize Kopáček (2010, Věta 17.30). ❑

Kapitola 2

Konstrukce racionálních ploch s racionálními offsety

V této kapitole se budeme zabývat problémem, jak vytvořit plochy parametrizované racionálními funkcemi tak, aby také jejich offsety v libovolné vzdálenosti byly racionální. V mnoha aplikacích se využívají racionální plochy i s jejich offsety, které však obecně racionální být nemusí, podívejme se tedy blíže na způsob, jak najít racionální plochy, které racionální offsety mají.

2.1 Racionální plochy s racionálními offsety

Nejprve si ujasněme, co jsou racionální plochy, offsety a co musí být splněno, aby byly také racionální.

Definice 2.1 (Racionální plocha)**.** *Plochu $\mathcal{S}$ nazveme* racionální*, pokud existuje atlas plochy $\mathcal{S}$ složený z racionálních map, tzn. složky map jsou racionální funkce.*

Jako motivaci uveďme, že existují tak zvané PH křivky (Pythagorean hodograph curves), totiž racionální křivky $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, které mají racionální velikost hodografu, což je křivka první derivace

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)).$$

Tedy je splněna rovnost

$$\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = \sigma^2(t), \qquad \text{tj.} \qquad \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = \sigma(t),$$

pro nějakou racionální funkci $\sigma(t)$. Jinak řečeno, $(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \sigma(t))$ tvoří Pythagorejskou trojici. Více o těchto křivkách se můžete dozvědět v knize Farouki (2008). V analogii s tímto pojmem můžeme definovat Pythagorejskou normálu pro plochy, kde požadujeme racionalitu tak zvaného plošného elementu $\sqrt{\det G}$.

Definice 2.2 (Pythagorejská normála)**.** *Nechť $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrizací $\mathbf{p}(u,v)$ a $\mathbf{G}(u,v)$ je matice její první fundamentální formy vyjádřená v bázi $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$. Řekneme, že plocha $\mathcal{S}$ má* pythagorejskou normálu*, pokud existuje racionální funkce $\sigma(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tak, že*

$$\det \mathbf{G}(u,v) = (\sigma(u,v))^2 . \tag{2.1}$$

Definice 2.3 (Offsety). *Nechť $\mathcal{S}$ je plocha daná parametrizací $\mathbf{p}(u, v)$, pak* λ-offset *plochy $\mathcal{S}$ je množina bodů, jejichž vzdálenost od $\mathcal{S}$ je λ. Označme ji $\mathbf{p}^\lambda(u, v)$, pak*

$$\mathbf{p}^\lambda(u, v) = \mathbf{p}(u, v) \pm \lambda \mathbf{N}(u, v),$$

kde $\mathbf{N}$ je jednotková normála plochy $\mathcal{S}$.

Platí následující následující tvrzení, které dává do souvislosti pythagorejskou normálu a racionální offsety.

Tvrzení 2.1. *Nechť $\mathbf{p}$ je parametrizace a $\mathbf{G}$ je příslušná matice první fundamentální formy. Pak platí*

$$\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_u\| = \sqrt{\det \mathbf{G}}.$$

Důkaz. Tvrzení plyne ze vztahu

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}),$$

kde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ jsou libovolné vektory. Položíme-li $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{p}_u$ a $\mathbf{b} = \mathbf{d} = \mathbf{p}_v$, dostáváme

$$\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\| = \sqrt{(\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v)(\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v)} = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \sqrt{\det \mathbf{G}}.$$

❑

Nyní z definice jednotkové normály 1.4 vidíme, že racionální plocha má racionální offsety právě tehdy, když má pythagorejskou normálu. Jak uvidíme ve čtvrté kapitole, jednotková normála plochy může být racionální i bez podmínky (2.1) v případě, že se neracionální část $\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v\|$ zkrátí. To však pro racionální plochy není možné, jelikož vektorový součin $\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v$ je racionální, a proto pro racionální plochy platí ekvivalence mezi těmito pojmy.

2.2 Obálková formule

Abychom mohli použít postup konstrukce racionálních ploch s racionálními offsety z článku Pottmann (1995), musíme se nejprve seznámit s obálkou dvouparametrického systému ploch.

Definice 2.4 (Implicitně zadaná plocha). *Nechť $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je hladká funkce, která má nenulový gradient, pokud $F = 0$. Řekneme, že* implicitně zadaná plocha *je množina bodů splňujích $F(x, y, z) = 0$.*

Z implicitně zadané plochy lze podle věty o implicitních funkcích získat její parametrizaci vhodnou volbou parametru a vyjádřením jednotlivých souřadnic. Naopak z parametricky zadaných ploch získáme implicitně zadané eliminací parametru.

Příklad 2.1. Mějme kužel zadaný implicitně rovnicí

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{[0, 0, 0]\}. \tag{2.2}$$

Zvolíme-li jeden parametr $u = z$, pak dostamene $x^2 + y^2 = u^2$, což je kružnice s poloměrem u. Tu lze parametrizovat třeba volbou $x = u \cos v$, $x = u \sin v$. Parametrizace kužele je tedy například

$$\mathbf{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u \cos v, u \sin v, u), \tag{2.3}$$

kde $u \in \mathbb{R}$ a $v \in [0, 2\pi)$.

Příklad 2.2. Vyjdeme-li z parametrizace

$$\mathbf{p}(u, v) = (u + v, u - v, uv),$$

kde u, $v \in \mathbb{R}$, dostaneme soustavu

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = uv.$$

Vidíme, že

$$x + y = 2u, \quad x - y = 2v.$$

Tedy

$$4z = 4uv = (x + y)(x - y)$$

a plocha je zadaná implicitně rovnicí

$$(x + y)(x - y) - 4z = 0,$$

pro x, y, $z \in \mathbb{R}$.

Definice 2.5 (Obálka ploch)**.** *Mějme dvou-parametrický systém ploch* $\mathbf{F}^{u,v}$ *zadaných pro pevné* u *a* v *implicitně rovnicí* $F(u, v, x, y, z) = 0$*, kde funkce* F *je hladká ve všech proměnných. Definujeme* obálku sytému $\mathbf{F}^{u,v}$ *jako množinu bodů* $[x, y, z]$ *splňujících*

$$F(u, v, x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial u}(u, v, x, y, z) = \frac{\partial F}{\partial v}(u, v, x, y, z) = 0 \tag{2.4}$$

pro nějaké u *a* v*.*

Obálku dvou-parametrického systému ploch si můžeme představit jako množinu průsečíků třech „sousedních“ či „nekonečně blízkých“ ploch. Pro $h > 0$ je průsečík rovin $\mathbf{F}^{u,v}$, $\mathbf{F}^{u+h,v}$ a $\mathbf{F}^{u,v+h}$ dán

$$F(u, v, x, y, z) = F(u + h, v, x, y, z) = F(u, v + h, x, y, z) = 0,$$

$$\begin{aligned} F(u, v, x, y, z) &= \frac{F(u, v, x, y, z) - F(u + h, v, x, y, z)}{h} = \\ &= \frac{F(u, v, x, y, z) - F(u, v + h, x, y, z)}{h} = 0. \end{aligned}$$

Aplikací limity $h \to 0$ dostaneme rovnice (2.4).

V případě, že za systém ploch $F^{u,v}$ vezmeme tečné roviny nerozvinutelné plochy dané parametrizací $\mathbf{p}$, tedy

$$F(u,v,x,y,z) = (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) \cdot \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{x} = (x,y,z)$, dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}
F &= (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) \cdot \mathbf{p} = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial u} &= (\mathbf{p}_{uu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{uv}) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p}_{uu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{uv}) \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) \cdot \mathbf{p}_u =\\
&= (\mathbf{p}_{uu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{uv}) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p}_{uu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{uv}) \cdot \mathbf{p} = 0,\\
\frac{\partial F}{\partial v} &= (\mathbf{p}_{vu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{vv}) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p}_{vu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{vv}) \cdot \mathbf{p} + (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) \cdot \mathbf{p}_v =\\
&= (\mathbf{p}_{vu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{vv}) \cdot \mathbf{x} - (\mathbf{p}_{vu} \times \mathbf{p}_v + \mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_{vv}) \cdot \mathbf{p} = 0.
\end{aligned}$$

Řešením těchto rovnic je zjevně $\mathbf{x} = \mathbf{p}$.

V případě rozvinutelných ploch toto nelze udělat, jelikož jejich těčné roviny závisí pouze na jednom parametru a dostali bychom tak soustavu rovnic se singulární maticí.

Nyní zformulujeme tyto poznatky jako větu.

Věta 2.2. *Každá nerozvinutelná plocha je obálkou systému svých tečných rovin.*

Ukažme si nyní tuto duální reprezentaci ploch na příkladu rotačního paraboloidu.

Příklad 2.3 (Rotační paraboloid). Uvažujme rotační paraboloid daný parametrizací

$$\mathbf{p}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2).$$

Abychom mohli určit, jak vypadají jeho tečné roviny, spočítejme nejdřív parciální derivace této parametrizace a jejich vektorový součin.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_u &= (1, 0, 2u),\\
\mathbf{p}_v &= (0, 1, 2v),\\
\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v &= (-2u, -2v, 1).
\end{aligned}$$

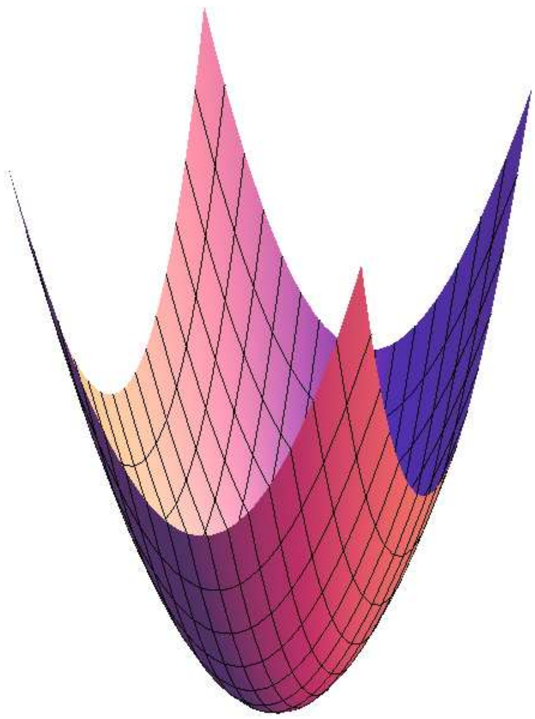
Tečná rovina τ je tedy v bodě $p(u,v)$ dána rovnicí

$$\tau(u,v): \quad -2ux - 2vy + z = -u^2 - v^2.$$

Spolu s derivacemi této roviny tvoří soustavu rovnic, jejímž vyřešením dostaneme obálku těchto rovin:

$$\begin{aligned}
\tau(u,v): &\quad -2ux - 2vy + z = -u^2 - v^2,\\
\tau_u(u,v): &\quad -2x = -2u,\\
\tau_v(u,v): &\quad -2y = -2v.
\end{aligned}$$

Řešením je $(x,y,z) = (u, v, u^2 + v^2)$, což není nic jiného, než rotační paraboloid, tedy původní plocha.



Obrázek 2.1: Rotační paraboloid, $u \in (-2; 2)$, $v \in (-2; 2)$.

2.3 Konstrukce racionálních ploch s racionálními offsety

V této části uvedeme postup konstrukce racionálních ploch s racionálními offsety na základě duální reprezentace ploch pomocí tečných rovin, kterou jsme si odvodili v předchozí podkapitole. Tento postup jsme převzali z článku Pottmann (1995).

Uvažujme racionální plochu $\mathcal{S}$ a její racionální parametrizaci $\mathbf{p}(u, v)$. Připomeňme, že offsety této plochy jsou podle definice 2.3

$$\mathbf{p}^{\lambda}(u, v) = \mathbf{p}(u, v) \pm \lambda \mathbf{N}(u, v).$$

Ty jsou racionální pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ pouze v případě, že $\mathbf{N}(u, v)$ je racionální parametrizace jednotkové sféry $\mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Stereografická projekce π z bodu $(0, 0, 1)$ na rovinu $z = 0$ nám dává souvislost mezi racionální parametrizací roviny a sféry.

$$\pi(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\alpha}{1 - \gamma}, \frac{\beta}{1 - \gamma} \right)$$

a její inverze je určená předpisem

$$\pi^{-1}(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Všechny racionální parametrizace roviny jsou dány jako racionální funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$:

$$\rho(u,v) = \left(\frac{a(u,v)}{c(u,v)}, \frac{b(u,v)}{c(u,v)}\right),$$

kde a, b a c jsou nesoudělné polynomy. Složením těchto dvou zobrazení získáme racionální parametrizace sféry, tedy

$$\mathbf{N} = \pi^{-1} \circ \rho = \left(\frac{2ac}{a^2+b^2+c^2}, \frac{2bc}{a^2+b^2+c^2}, \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}\right). \tag{2.5}$$

Mohlo by se zdát, že použitím stereografické projekce vynecháme parametrizace, které mají v nějakém bodě (u_0, v_0) normálový vektor $(0,0,1)$, nicnéně složením s racionálními parametrizacemi roviny tento problém odstraníme. Stačí vzít za $c(u,v)$ polynom, pro který $c(u_0,v_0) = 0$.

S jednotkovou normálou $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$ danou předpisem (2.5) má pak tečná rovina k ploše $\mathcal{S}$ tvar

$$\tau(u,v): \quad N_1(u,v)x + N_2(u,v)x + N_3(u,v)z = h(u,v).$$

Funkce h musí být racionální, protože racionální parametrizace $\mathbf{p}$ splňuje rovnici tečné roviny τ.

Pro jednoduchost budeme dále pracovat pouze s plochami, jejichž tečné roviny jsou závislé na obou parametrech u a v, a vyloučíme tedy tzv. rozvinutelné plochy, protože jejich tečné roviny závisí pouze na jednom parametru. V kontextu minimálních ploch pro nás nejsou zajímavé, neboť jejich Gaussova křivost je všude nulová (viz např. Do Carmo (1976, str. 194)) a ve tvrzení 3.2 uvidíme, že pro minimální plochu je Gaussova křivost nulová pouze v případě, že je tato plocha otevřenou podmnožinou roviny. V případě zájmu lze konstrukci rozvinutelných racionálních ploch s racionálními offsety nalézt v článku Pottmann (1995, Section 3.3).

Podle věty 2.2 dostaneme parametrizaci racionální plochy s racionálními offsety vyřešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned}
\tau(u,v):&\quad 2acx + 2bcy + (a^2+b^2-c^2)z = (a^2+b^2+c^2)h,\\
\tau_u(u,v):&\quad 2(a_uc + ac_u)x + 2(b_uc + bc_u)y + (2aa_u + 2bb_u - 2cc_u)z =\\
&\quad = (2aa_u + 2bb_u + 2cc_u)h + (a^2+b^2+c^2)h_u\\
\tau_v(u,v):&\quad 2(a_vc + ac_v)x + 2(b_vc + bc_v)y + (2aa_v + 2bb_v - 2cc_v)z =\\
&\quad = (2aa_v + 2bb_v + 2cc_v)h + (a^2+b^2+c^2)h_v
\end{aligned} \tag{2.6}$$

vzhledem k proměnným x, y a z. Tyto poznatky shrneme v následujícím důsledku.

Důsledek. Všechny nerozvinutelné racionální plochy s racionálními offsety získáme vyřešením soustavy (2.6) vzhledem k proměnným x, y, z. Výsledná parametrizace je pak $\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Offsety ve vzdálenosti λ získáme nahrazením h funkcí $h \pm \lambda$.

Explicitní řešení této soustavy rovnic je komplikované, nicméně lze ho nalézt v článku Pottmann (1995, Theorem 3.1).

Příklad 2.4. Zvolíme-li speciálně

$$a(u,v) = u, \qquad b(u,v) = v, \qquad c(u,v) = 1,$$

redukuje se soustava (2.6) na následující rovnice:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2ux & + & 2vy & + & (u^2+v^2-1)z & = & (u^2+v^2+1)h, & & \\ 2x & + & & & 2uz & = & 2uh & + & (u^2+v^2+1)h_u, \\ & & 2y & + & 2vz & = & 2vh & + & (u^2+v^2+1)h_v. \end{array}$$

Jejich vyřešením vzhledem k x, y, z dostaneme

$$\begin{aligned} x(u,v) &= \frac{2u}{u^2+v^2+1}h + \frac{1}{2}(-u^2+v^2+1)h_u - uvh_v, \\ y(u,v) &= \frac{2v}{u^2+v^2+1}h - uvh_u + \frac{1}{2}(u^2-v^2+1)h_v, \\ z(u,v) &= \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}h + uh_u + vh_v. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Všechny racionální plochy s racionálními offsety, jejichž normála je

$$N = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right),$$

jsou dány parametrizací $\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, kde $h = h(u,v)$ je libovolná racionální funkce proměnných u a v.

Uveďme jeden konkrétní příklad volby funkce h.

Příklad 2.5. Plocha, pro kterou

$$a(u,v) = u, \qquad b(u,v) = v, \qquad c(u,v) = 1$$

a navíc

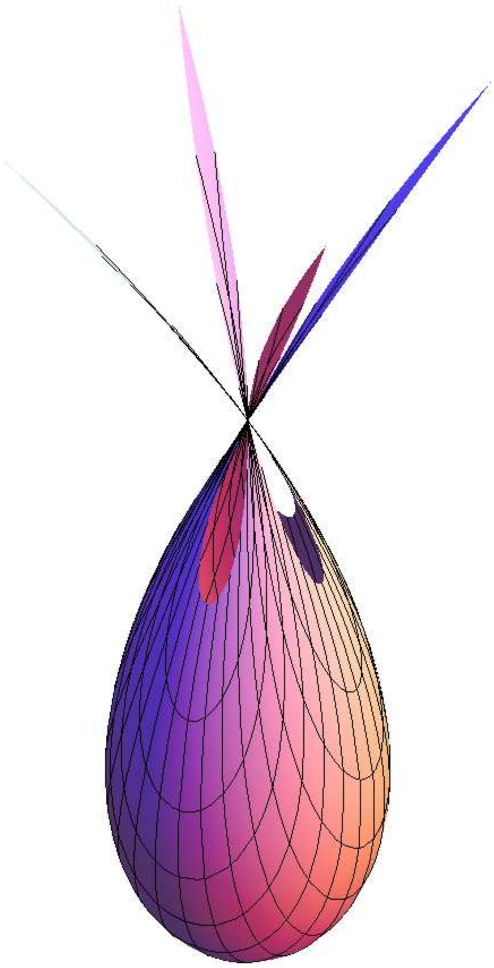
$$h(u,v) = u^2 + v^2 + 1,$$

má podle příkladu 2.4 parametrizaci $\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, kde

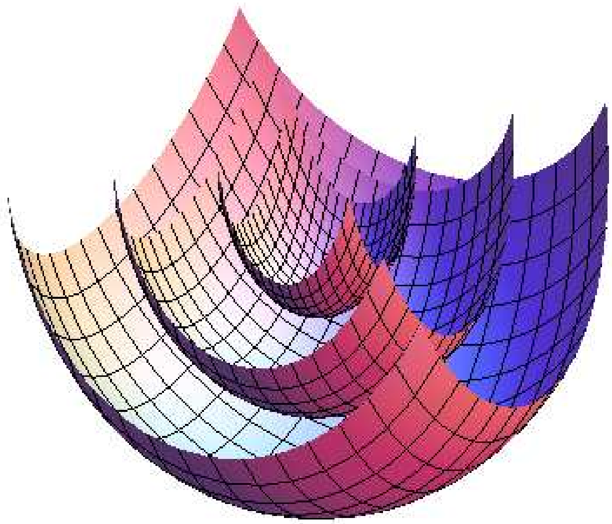
$$\begin{aligned} x(u,v) &= u(3-u^2-v^2), \\ y(u,v) &= v(3-u^2-v^2), \\ z(u,v) &= 3u^2+3v^2-1. \end{aligned}$$

Její offsety ve vzdálenosti λ jsou opět racionální plochy, které získáme nahrazením funkce $h = u^2+v^2+1$ funkcí $h+\lambda = u^2+v^2+1+\lambda$. Jsou tedy dány parametrizací $\mathbf{p}^\lambda(u,v) = (x^\lambda(u,v), y^\lambda(u,v), z^\lambda(u,v))$, kde

$$\begin{aligned} x^\lambda(u,v) &= u\left(3-u^2-v^2 \pm \frac{2\lambda}{u^2+v^2+1}\right), \\ y^\lambda(u,v) &= v\left(3-u^2-v^2 \pm \frac{2\lambda}{u^2+v^2+1}\right), \\ z^\lambda(u,v) &= 3u^2+3v^2-1 \pm \lambda\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}. \end{aligned}$$



(a) $u \in (-1{,}5; 1{,}5)$, $v \in (-1{,}5; 1{,}5)$.



(b) Offsety ve vzdálenosti 1, $u \in (-0{,}7; 0{,}7)$, $v \in (-0{,}7; 0{,}7)$.

Obrázek 2.2: Racionální plocha s racionálními offsety, pro $a = u$, $b = v$, $c = 1$, $h = u^2 + v^2 + 1$.

Kapitola 3

Konstrukce minimálních ploch

Tuto kapitolu věnujme problému minimálních ploch. Uvedeme postup generování minimálních ploch pomocí Weierstrassovy-Enneperovy reprezentace a odvodíme její modifikace, které budou užitečné při bližším zkoumání této třídy ploch.

3.1 Minimální plochy

Definice 3.1 (Minimální plocha)**.** *Plochu $\mathcal{S}$ nazveme* minimální*, pokud má v každém bodě nulovou střední křivost.*

Pojem minimální plochy je motivován hledáním ploch s co nejmenším obsahem, když máme danou jejich hraniční křivku. S odkazem na knihu Pressley (2010, Corollary 12.1.3) platí následující věta.

Věta 3.1 (Souvislost minimální plochy a minimálního obsahu)**.** *Nechť plocha $\mathcal{S}$ má nejmenší obsah mezi všemi plochami se stejnou hraniční křivkou. Pak $\mathcal{S}$ je minimální.*

Minimální plochy však svůj obsah minimalizují pouze lokálně a tedy opačná implikace neplatí, tzn. ne každá minimální plocha má nejmenší obsah mezi všemi plochami s danou hranicí. Příkladem může být katenoid, viz Pressley (2010, Example 12.1.4).

Tvrzení 3.2. *Nechť $\mathcal{S}$ je minimální plocha. Gaussova křivost plochy $\mathcal{S}$ je nekladná v každém bodě a je nulová v každém bodě právě tehdy, když $\mathcal{S}$ je otevřená podmnožina roviny.*

Důkaz. Jelikož $\mathcal{S}$ je minimální, z definice střední křivosti dostáváme $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$. Tedy $\kappa_1 \leq 0$ a $\kappa_2 \geq 0$. Pro Gaussovu křivost platí $K = \kappa_1\kappa_2 \leq 0$.

Pokud je Gaussova křivost nulová v každém bodě a zároveň je plocha minimální, pak $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ všude, tedy $\mathcal{S}$ je rovina. ❑

Zaveďme nyní speciální druh parametrizace, konformní. Lze ukázat, že tyto mapy zachovávají úhly, tedy dvě protínající se rovinné křivky zobrazené na plochu konformní mapou se protínají stále pod stejným úhlem.

Definice 3.2 (Konformní parametrizace)**.** *Řekneme, že parametrizace* $\mathbf{p}(u, v)$ *je* konformní, *pokud matice první fundamentální formy má v bázi* $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v\}$ *tvar*

$$G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} = g\mathbf{I},$$

kde $g(u, v)$ *je kladná funkce.*

Pro minimální plochy platí následující věta, jejíž důkaz lze nalézt v Pressley (2010, Theorem 12.4.1).

Věta 3.3 (Konformní parametrizace minimálních ploch)**.** *Nechť* $\mathcal{S}$ *je minimální plocha,* $s \in \mathcal{S}$*. Pak existuje* U *otevřená množina,* $s \in U$*, a konformní parametrizace* $\mathbf{p} : U \to \mathbb{R}^3$ *plochy* $\mathcal{S}$*.*

Konformně lze parametrizovat i jiné plochy než minimální. Konformní parametrizace minimálních ploch však můžeme odlišit od parametrizací ostatních takto parametrizovaných ploch následovně.

Tvrzení 3.4. *Nechť* $\mathbf{p}(u, v)$ *je komformní parametrizace plochy* $\mathcal{S}$*. Pak* $\mathcal{S}$ *je minimální právě tehdy, když* $\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv} = \mathbf{0}$*.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{G}$ je matice první fundamentální formy. Parametrizace je konformní, tedy $g_{11} = g_{22} = g$ a $g_{12} = g_{21} = 0$. Nechť $\mathbf{H}$ je odpovídající matice druhé fundamentální formy. Podle věty 1.3 vypočítáme střední křivost v mapě $\mathbf{p}$ následovně

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2g}.$$

Střední křivost je nulová, právě tehdy když $h_{11} + h_{22} = (\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv}) \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

Předpokládejme, že $\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv} = \mathbf{0}$, pak je střední křivost zjevně nulová a tedy plocha $\mathcal{S}$ je minimální.

Naopak pokud plocha $\mathcal{S}$ je minimální, vektor $(\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv})$ je kolmý na normálový vektor $\mathbf{N}$. Ukážeme, že je kolmý i na vektory $\mathbf{p}_u$ a $\mathbf{p}_v$.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{p}_u + \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{p}_u &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u)_u + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u)_v - \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_{uv} = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u + \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v)_u + (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u)_v = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, protože parametrizace je konformní. Analogicky se ukáže také rovnost $(\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv}) \cdot \mathbf{p}_v = \mathbf{0}$.

Protože $\{\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v, \mathbf{N}\}$ tvoří bázi $\mathbb{R}^3$, musí být vektor $(\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv})$ nulový. ❑

3.2 Minimální plochy a funkce komplexní proměnné

V této části dáme do souvislosti minimální plochy s komplexní analýzou. Nechť $U \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $\mathbf{p} : U \to \mathbb{R}^3$ je parametrizace nějaké plochy. Označme $\zeta = u + iv$, $(u, v) \in U$, pak zjevně

$$u = \frac{\zeta + \overline{\zeta}}{2}, \qquad v = \frac{\zeta - \overline{\zeta}}{2i}.$$

Parametrizaci p pak můžeme považovat i za funkci proměnných ζ a $\overline{\zeta}$. Definujme komplexní funkci $\boldsymbol{\varphi} : U \to \mathbb{C}^3$ předpisem

$$\boldsymbol{\varphi}(\zeta) = \mathbf{p}_u + i\mathbf{p}_v. \tag{3.1}$$

Tedy $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ má tři složky a každá z nich je komplexní funkce proměnných u, v, neboli ζ.

Důkazy následujících dvou vět lze nalézt například v knize Pressley (2010, Proposition 12.5.1, Theorem 12.5.2), pro úplnost je však uvedeme.

Mezi funkcí $\boldsymbol{\varphi}$ dané vzorcem (3.1) a minimalitou plochy existuje souvislost objasněná v další větě.

Věta 3.5. *Nechť $\mathbf{p} : U \to \mathbb{R}^3$ je komformní parametrizace plochy $\mathcal{S}$. Pak $\mathcal{S}$ je minimální, právě tehdy když funkce $\boldsymbol{\varphi}$ definovaná vzorcem* (3.1) *je holomorfní na U (tzn. všechny její složky φ_1, φ_2 a φ_3 jsou holomorfní).*

Důkaz. Podle věty 1.4 je komplexní funkce holomorfní právě tehdy, když platí rovnosti (1.1). Aplikujeme-li tyto podmínky na každou složku $\boldsymbol{\varphi}$, dostáváme

$$\mathbf{p}_{uu} = -\mathbf{p}_{vv}, \qquad \mathbf{p}_{uv} = \mathbf{p}_{vu}.$$

Druhá rovnost je pro hladké zobrazení díky záměně parciálních derivací vždy splněna, první je pak ekvivalentní s $\mathbf{p}_{uu} + \mathbf{p}_{vv} = \mathbf{0}$. Parametrizace $\mathbf{p}$ je podle předpokladu konformní, proto z tvrzení 3.4 získáme ekvivalenci minimality plochy dané mapou $\mathbf{p}$ a holomorfie funkce $\boldsymbol{\varphi}$.

❑

Funkce $\boldsymbol{\varphi}$ není libovolná holomorfní funkce, ale musí splňovat určité podmínky.

Věta 3.6. *Nechť $\mathbf{p} : U \to \mathbb{R}^3$ je komformní parametrizace minimální plochy $\mathcal{S}$. Pak funkce $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ definovaná vzorcem* (3.1) *splňuje následující podmínky:*

(i) $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$.

(ii) $\boldsymbol{\varphi}(\zeta) \neq 0$ *pro každé* $\zeta = u + iv$, $(u, v) \in U$.

Naopak pokud U je jednoduše souvislá množina a φ_1, φ_2, φ_3 jsou holomorfní funkce na U splňující podmínky (i), (ii), pak existuje konformní parametrizace $\mathbf{p} : U \to \mathbb{R}^3$ nějaké minimální plochy $\mathcal{S}$ taková, že $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ splňuje vzorec (3.1)*. Tato parametrizace je určena jednoznačně až na posunutí.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{p} = (p^1, p^2, p^3)$ je parametrizace minimální plochy a $\varphi_k = p^k_u - ip^k_v$, $k = 1, 2, 3$. Pak

$$\sum_{k=1}^{3} \varphi_k^2 = \sum_{k=1}^{3} \left[(p^k_u)^2 - (p^k_v)^2 - 2ip^k_u p^k_v \right] = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u - \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v - 2i\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0, \quad (3.2)$$

protože $\mathbf{p}$ je konformní.

Pokud naopak máme danou funkci $\boldsymbol{\varphi}$ splňující podmínky (i), (ii), zvolme $(u_0, v_0) \in U$ pevné a definujme

$$\mathbf{p}(u, v) = \operatorname{Re} \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varphi}(\xi) \, \mathrm{d}\xi,$$

kde $\mathbf{c}$ je libovolná křivka v U z bodu (u_0, v_0) do $(u, v) \in U$. Protože U je jednoduše souvislá, nezávisí podle Cauchyovy věty tento integrál na volbě křivky $\mathbf{c}$. Nyní, $\boldsymbol{\Phi}(\zeta) = \int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varphi}(\xi) \, \mathrm{d}\xi$ je holomorfní funkce $\zeta = u + iv$ a $\boldsymbol{\Phi}'(\zeta) = \boldsymbol{\varphi}(\zeta)$. Podle (1.2)

$$\begin{aligned} \mathbf{p_u} &= \operatorname{Re}(\boldsymbol{\Phi}_u) = \operatorname{Re}(\boldsymbol{\Phi}') = \operatorname{Re}(\boldsymbol{\varphi}), \\ \mathbf{p_v} &= \operatorname{Re}(\boldsymbol{\Phi}_v) = \operatorname{Re}(i\boldsymbol{\Phi}') = -\operatorname{Im}(\boldsymbol{\varphi}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

a tedy $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{p}_u - i\mathbf{p}_v$.

Zbývá ukázat, že $\mathbf{p}$ je konformní parametrizace minimální plochy. Z podmínky (ii) a rovnic (3.3) plyne, že $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ nejsou obě nulové. Podmínka (i) spolu s rovností (3.2) dává:

$$\mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v, \qquad \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v = 0,$$

z čehož dostáváme, že $\mathbf{p}$ je konformní regulární parametrizace. Plocha daná parametrizací $\mathbf{p}$ je minimální podle věty 3.5, protože $\boldsymbol{\varphi}$ je holomorfní.

Pokud nějaká jiná plocha $\mathbf{q}$ přísluší stejné funkci $\boldsymbol{\varphi}$, pak $\mathbf{q}_u = \mathbf{p}_u$ a $\mathbf{q}_v = \mathbf{p}_v$ všude na U. Z toho plyne, že $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ je konstanta, řekněme $\mathbf{a}$, pak dostaneme $\mathbf{q}$ posunutím $\mathbf{p}$ o vektor $\mathbf{a}$.

❑

Definice 3.3. *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená, f je nenulová holomorfní funkce na U, g je meromorfní funkce na U. Dále předpokládejme, že pokud má g v bodě ζ_0 pól násobnosti m, pak f má v tomto bodě nulový bod násobnosti $2m$ a zároveň f nemá jiné nulové body. Pak řekneme, že funkce f a g jsou* kompatibilní *na U.*

Věta 3.7. *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená a funkce f a g jsou kompatibilní na U. Pak funkce*

$$\boldsymbol{\varphi} = \big(f(1 - g^2), if(1 + g^2), 2fg \big) \quad (3.4)$$

splňuje podmínky (i) a (ii) z věty 3.6 a také naopak pro každou funkci $\boldsymbol{\varphi}$ splňující tyto podmínky a navíc φ_3 není identicky nulová (vyloučíme tedy rovinu $z =$ konst.), lze na U nalézt kompatibilní funkce f a g tak, aby platila rovnost (3.4).

Důkaz. Mějme funkce f a g kompatibilní na U. Pokud g má v bodě ζ_0 pól násobnosti m, pak f má v bodě ζ_0 nulový bod násobnosti $2m$. Laurentovy rozvoje f a g mají v okolí bodu ζ_0 tvar

$$f(\zeta) = a(\zeta - \zeta_0)^{2m} + \dots \qquad \text{a} \qquad g(\zeta) = \frac{b}{(\zeta - \zeta_0)^m} + \dots,$$

kde a, b jsou nenulová komplexní čísla a $\dots$ značí vyšší mocniny $\zeta - \zeta_0$. Pak

$$f(1 \pm g^2) = \pm ab^2 + \dots \qquad \text{a} \qquad fg = ab(\zeta - \zeta_0)^m + \dots$$

obsahují pouze nezáporné mocniny $\zeta - \zeta_0$, tedy jsou to holomorfní funkce na okolí ζ_0. Zároveň je zřejmé, že $\boldsymbol{\varphi}$ je holomorfní všude tam, kde g je holomorfní. Tedy $\boldsymbol{\varphi}$ je holomorfní na U.

Takto definované $\boldsymbol{\varphi}$ splňuje podmínku (i):

$$\big(f(1-g^2)\big)^2 + \big(if(1+g^2)\big)^2 + (2fg)^2 = f^2\left(1 - 2g^2 + g^4 - 1 - 2g^2 - g^4 + 4g^2\right) = 0.$$

Funkce $\boldsymbol{\varphi}$ je nulová pouze v bodech, kde f a fg^2 jsou nulové. Z kompatibility funkcí f a g však takové body neexistují, tedy podmínka (ii) je splněna.

Naopak mějme holomorfní funkci $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ splňující podmníky (i), (ii) a φ_3 není identicky nulová. Pak z podmínky (i) plyne

$$(\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2) = -\varphi_3^2, \tag{3.5}$$

tedy $\varphi_1 - i\varphi_2$ není identicky nulová holomorfní funkce a podle věty 1.6 jsou její nulové body izolované. Definujme funkce f a g jako inverzi vztahu (3.4)

$$f = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{2}, \qquad g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}.$$

Funkce f je holomorfní, g je meromorfní a platí

$$-fg^2 = \varphi_1 + i\varphi_2. \tag{3.6}$$

Dostáváme

$$\begin{aligned} f(1-g^2) &= \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{2} + \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{2} = \varphi_1, \\ if(1+g^2) &= \frac{i\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \frac{i\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \varphi_2, \\ 2fg &= (\varphi_1 - i\varphi_2)\frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = \varphi_3. \end{aligned}$$

Výrazy $\varphi_1 - i\varphi_2$ a $\varphi_1 + i\varphi_2$ nemohou být oba zároveň nulové. Kdyby byly, pak $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ a z rovnice (3.5) $\varphi_3 = 0$, což je ve sporu s podmínkou (ii).

Pokud tedy $f = \varphi_1 - i\varphi_2 = 0$ v nějakém bodě, pak $\varphi_1 + i\varphi_2 \neq 0$, tedy podle rovnice (3.6) $fg^2 \neq 0$, což nám dává žádanou podmínku na nulové body f.

❑

Obdoba předchozí věty je taktéž uvedena v knize Pressley (2010, Proposition 12.5.4), nicnéně není tam přesně specifikována podmínka pro nulové body funkce f a takto formulovaná věta vede k plochám, jež nemusí být v některých bodech regulární, protože v důkazu nedostaneme nenulovost funkce $\boldsymbol{\varphi}$ ve všech bodech, která je pro regularitu plochy nezbytná.

Také je nutné vyloučit plochu, pro kterou je složka φ_3 identicky nulová. Při bližším zkoumání důkazu uvedeného v citované knize zjistíme, že postup uvedený pro tento případ nefunguje. Ukažme například, že rovinu parametrizovanou jednoduše

$$\mathbf{p}(u,v) = (u, v, 0)$$

nelze získat uvedeným způsobem. Funkce $\boldsymbol{\varphi}$ má pro tento případ jednoduchý tvar $\boldsymbol{\varphi} = (1, -i, 0)$. Chceme-li ji vyjádřit ve tvaru (3.4), musí být splněny následující rovnice:

$$\begin{aligned} 1 &= f(1-g^2), \\ -i &= if(1+g^2), \\ 0 &= 2fg. \end{aligned}$$

Funkce f nemůže být nulová, proto ze třetí rovnice dostáváme $g = 0$. První dvě rovnice pak dávají $f = 1$, resp. $f = -1$, čímž dostáváme spor.

Není třeba vyloučit všechny parametrizace, pro něž $\varphi_3 \equiv 0$, ale stačí, když výraz $\varphi_1 - i\varphi_2$ není identicky nulový. Nicméně stále se jedná pouze o rovinu, kterou lze ze vzorce (3.4) získat například volbou $f = 1$, $g = 0$.

Příklad 3.1 (Katenoid). Zkusme nyní tento proces použít na konkrétním příkladu. Uvažujme konformní parametrizaci katenoidu:

$$\mathbf{p}(u,v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), \tag{3.7}$$

pro $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Pomocí prvních derivací této parametrizace,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_u &= (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1), \\ \mathbf{p}_v &= (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0), \end{aligned}$$

vypočítáme podle vzorce (3.1) příslušnou funkci $\boldsymbol{\varphi}$:

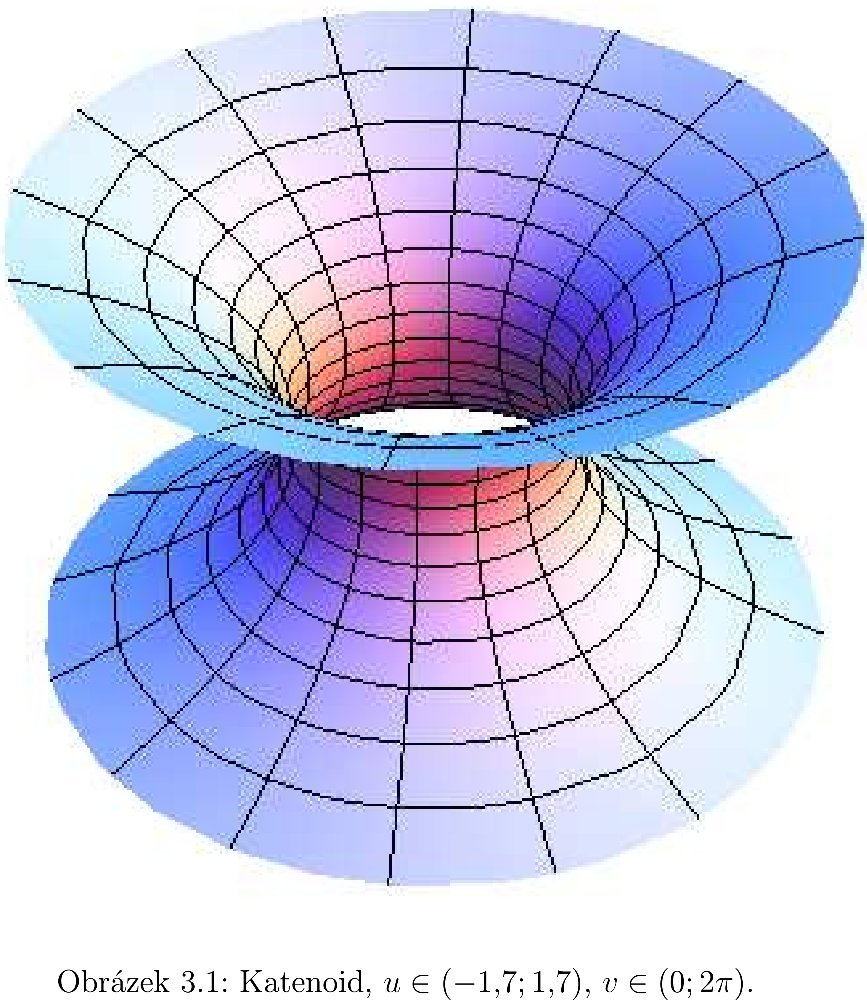
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(\zeta) &= (\sinh u \cos v + i \cosh u \sin v, \sinh u \sin v - i \cosh u \cos v, 1) = \\ &= (\sinh \zeta, -i \cosh \zeta, 1), \end{aligned}$$

kde $\zeta = u + iv$. Definujme funkce f a g:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\varphi_1 - i\varphi 2}{2} = \frac{\sinh \zeta - \cosh \zeta}{2} = -\frac{e^{-\zeta}}{2}, \\ g &= \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2} = \frac{1}{\sinh \zeta - \cosh \zeta} = -e^{\zeta}. \end{aligned}$$

Parametrizaci (3.7) můžeme zpětně vypočítat

$$\begin{aligned}
x(u,v) &= \mathrm{Re}\int f(1-g^2)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int -e^{-\zeta}+e^{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{-\zeta}+e^{\zeta}) = \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{-u-iv}+e^{u+iv}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(e^{-u}(\cos v - i\sin v)+e^{u}(\cos v + i\sin v)) = \\
&= \frac{e^u+e^{-u}}{2}\cos v = \cosh u\cos v, \\
y(u,v) &= \mathrm{Re}\int if(1+g^2)\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int -e^{-\zeta}-e^{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{-\zeta}-e^{\zeta}) = \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{-u-iv}-e^{u+iv}) = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{-u}(\cos v - i\sin v)-e^{u}(\cos v + i\sin v)) = \\
&= \frac{e^u+e^{-u}}{2}\sin v = \cosh u\sin v, \\
z(u,v) &= 2\mathrm{Re}\int fg\,\mathrm{d}\zeta = \mathrm{Re}\int 1\,\mathrm{d}\zeta = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(u+iv) = u.
\end{aligned}$$



Obrázek 3.1: Katenoid, $u \in (-1{,}7; 1{,}7)$, $v \in (0; 2\pi)$.

3.3 Weierstrassova-Enneperova reprezentace

Kombinací vět 3.6 a 3.7 dostáváme následující formuli pro generování minimálních ploch.

Věta 3.8 (Weierstrassova-Enneperova reprezentace I). *Nechť $U \subset \mathbb{C}$ je otevřená a jednoduše souvislá, f a g jsou kompatibilní, $\zeta \in U$, $\zeta = a + ib$. Pak $\mathbf{p}(a,b) = (x(a,b), y(a,b), z(a,b))$, kde*

$$
\begin{aligned}
x(a,b) &= \operatorname{Re} \int f(1-g^2)\,\mathrm{d}\zeta, \\
y(a,b) &= \operatorname{Re} \int if(1+g^2)\,\mathrm{d}\zeta, \\
z(a,b) &= 2\operatorname{Re} \int fg\,\mathrm{d}\zeta,
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

je parametrizace minimální plochy. Zároveň každá minimální plocha může být parametrizována tímto způsobem.

Pokud navíc funkce g a její inverze g^{-1} jsou holomorfní, můžeme zvolit novou proměnnou $\tau = g$ a definovat funkci $F(\tau) = f/g'$. Pak $\mathrm{d}\tau = g'\,\mathrm{d}\zeta$, tedy $f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Označme $V = g(U)$, z věty o substituci dostaneme parametrizaci z následující věty.

Věta 3.9 (Weierstrassova-Enneperova reprezentace II). *Nechť $V \subset \mathbb{C}$ je otevřená, jednoduše souvislá množina, F je holomorfní funkce na V nenulová v každém bodě, $\tau \in V$, $\tau = u + iv$. Pak $\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, kde*

$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= \operatorname{Re} \int (1-\tau^2)F\,\mathrm{d}\tau, \\
y(u,v) &= \operatorname{Re} \int i(1+\tau^2)F\,\mathrm{d}\tau, \\
z(u,v) &= 2\operatorname{Re} \int \tau F\,\mathrm{d}\tau,
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

je parametrizace minimální plochy.

Důkaz. Označme $\boldsymbol{\varphi} = ((1-\tau^2)F, i(1+\tau^2)F, 2\tau F)$. Tato funkce splňuje podmínky (i) a (ii) z věty 3.6:

$$(1-\tau^2)^2F^2 - (1+\tau^2)^2F^2 + 4\tau^2F^2 = 0$$

a $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ právě tehdy, když $F = 0$, což podle předpokladu nemůže nastat. Tedy podle věty 3.6 je (3.9) parametrizace minimální plochy.

❑

Každá holomorfní funkce má na jednoduše souvislé množině holomorfní primitivní funkci. Označme $F_1 = \int F$, $F_2 = \int F_1$, $\mathcal{F} = \int F_2$. Pak s pomocí per partes můžeme integrály z rovností (3.9) přepsat jako

$$\begin{aligned}\int (1-\tau^2)F(\tau)\,\mathrm{d}\tau &= (1-\tau^2)F_1(\tau) + \int 2\tau F_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= (1-\tau^2)F_1(\tau) + 2\tau F_2(\tau) - \int 2F_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= (1-\tau^2)F_1(\tau) + 2\tau F_2(\tau) - 2\mathcal{F}(\tau) = \\ &= (1-\tau^2)\mathcal{F}''(\tau) + 2\tau\mathcal{F}'(\tau) - 2\mathcal{F}(\tau) \\ \int i(1+\tau^2)F\,\mathrm{d}\tau &= i\left[(1+\tau^2)\mathcal{F}''(\tau) - 2\tau\mathcal{F}'(\tau) + 2\mathcal{F}(\tau)\right] \\ 2\int \tau F\,\mathrm{d}\tau &= 2\left[\tau\mathcal{F}''(\tau) - \mathcal{F}'(\tau)\right].\end{aligned}$$

Dostaneme tak formuli, která neobsahuje integrály. Třetí primitivní funkce jsou stejné až na polynom druhého stupně, nicméně v průběhu výpočtu se nekonstantní části tohoto polynomu odečtou a dostaneme pokaždé stejnou parametrizaci až na konstantu, tedy jednotivé plochy se liší maximálně posunutím.

Věta 3.10 (Weierstrassova-Enneperova reprezentace III)**.** *Nechť $V \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $\mathcal{F}$ je holomorfní funkce na V s nenulovou třetí derivací, $\tau \in V$, $\tau = u+iv$. Pak $\mathbf{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, kde*

$$\begin{aligned}x(u,v) &= \mathrm{Re}\left[(1-\tau^2)\mathcal{F}''(\tau) + 2\tau\mathcal{F}'(\tau) - 2\mathcal{F}(\tau)\right], \\ y(u,v) &= \mathrm{Im}\left[-(1+\tau^2)\mathcal{F}''(\tau) + 2\tau\mathcal{F}'(\tau) - 2\mathcal{F}(\tau)\right], \\ z(u,v) &= 2\mathrm{Re}\left[\tau\mathcal{F}''(\tau) - \mathcal{F}'(\tau)\right],\end{aligned} \tag{3.10}$$

je parametrizace minimální plochy.

Důkaz. Pro jednoduše souvislé množiny V plyne tvrzení této věty z per partes a věty 3.9. Důkaz obecnějšího případu, kdy nepožadujeme jednoduchou souvislost množiny V, nalezneme v následující kapitole. Vyplývá z rovnosti (4.8) a předchozích výpočtů.

❑

Při odvozování parametrizace z věty 3.10 jsme se inspirovali podobnou formulí z knihy Pottmann a kol. (2007, str. 649).

Nyní máme k dispozici silný nástroj, jak generovat minimální plochy. Stačí dosadit například do formule (3.10) libovolnou holomorfní funkci (s nenulovou třetí derivací) a vypočítat konkrétní parametrizaci. Dosazením racionální funkce dostaneme racionální parametrizaci. Racionální funkce však nejsou holomorfní na celé komplexní rovině, proto je nutné z oboru hodnot dané parametrizace vynechat kořeny jmenovatele.

Příklad 3.2 (Bourova minimální plocha). Zvolme funkce f a g z 3.8 následovně:

$$f = 1, \qquad g = \sqrt{\zeta}.$$

Dostaneme

$$\begin{aligned}
x(a,b) &= \mathrm{Re} \int (1-\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\\
y(a,b) &= \mathrm{Re} \int i(1+\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\mathrm{Im} \int (1+\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,\\
z(a,b) &= 2\mathrm{Re} \int \sqrt{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

Získat reálné části těchto integrálů není snadné, proto je převedeme pomocí substituce $\tau = \sqrt{\zeta}$ na formuli odpovídající (3.9) s funkcí

$$F(\tau) = \frac{1}{(\sqrt{\zeta})'} = 2\sqrt{\zeta} = 2\tau$$

a zjednodušíme je. Získáme

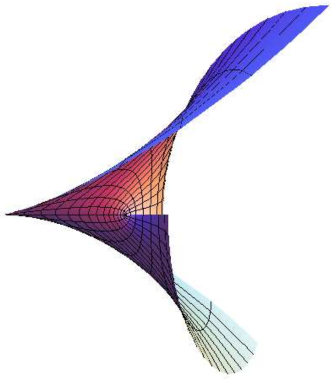
$$\begin{aligned}
x(u,v) &= 2\mathrm{Re} \int (1-\tau^2)\tau\,\mathrm{d}\tau,\\
y(u,v) &= -2\mathrm{Im} \int (1+\tau^2)\tau\,\mathrm{d}\tau,\\
z(u,v) &= 4\mathrm{Re} \int \tau^2\,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Tyto integrály buď můžeme snadno spočítat, nebo použít (3.10) například s funkcí $\mathcal{F} = \tau^4/12$, jejíž třetí derivace je $F = 2\tau$:

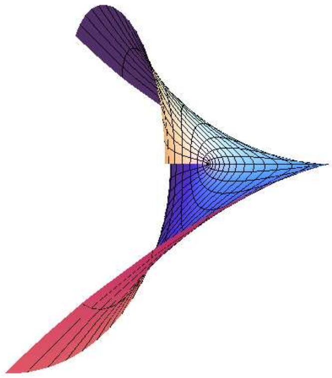
$$\begin{aligned}
x(u,v) &= \mathrm{Re}\left[(1-\tau^2)\tau^2 + \frac{2}{3}\tau^4 - \frac{1}{6}\tau^4)\right] = \mathrm{Re}\left[\tau^2 - \frac{\tau^4}{2}\right] =\\
&= u^2 - \frac{u^4}{2} - v^2 + 3u^2v^2 - \frac{v^4}{2},\\
y(u,v) &= \mathrm{Im}\left[-(1+\tau^2)\tau^2 + \frac{2}{3}\tau^4 - \frac{1}{6}\tau^4\right] = \mathrm{Im}\left[-\tau^2 - \frac{\tau^4}{2}\right] =\\
&= -2uv - 2u^3v + 2uv^3,\\
z(u,v) &= 2\mathrm{Re}\left[\tau^3 - \frac{1}{3}\tau^3\right] = \frac{4}{3}\mathrm{Re}\left[\tau^3\right] =\\
&= \frac{4}{3}u^3 - 4uv^2.
\end{aligned}$$

Tak zvanou Bourovu minimální plochu lze tedy vyjádřit explicitně parametrizací

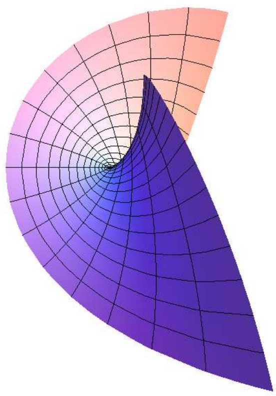
$$\mathbf{p}(u,v) = \left(u^2 - \frac{u^4}{2} - v^2 + 3u^2v^2 - \frac{v^4}{2}, -2uv - 2u^3v + 2uv^3, \frac{4}{3}u^3 - 4uv^2\right).$$



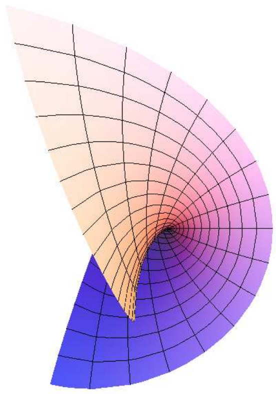
(a) Pohled shora.



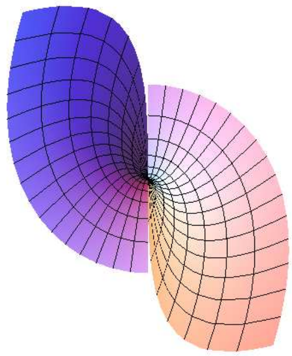
(b) Pohled zdola.



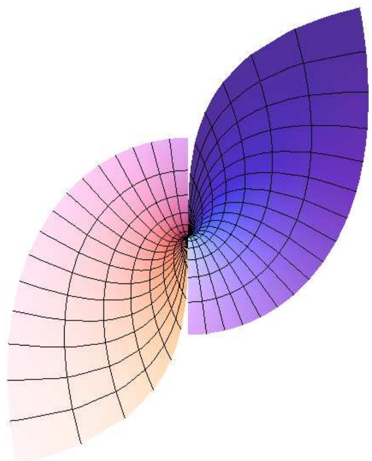
(c) Pohled zepředu.



(d) Pohled zezadu.

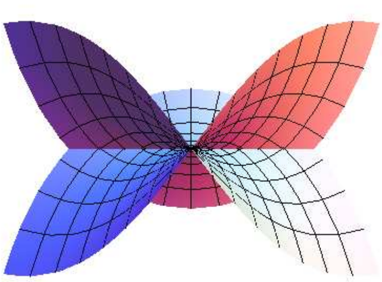


(e) Pohled zleva.

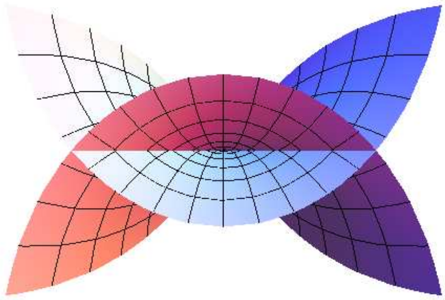


(f) Pohled zprava.

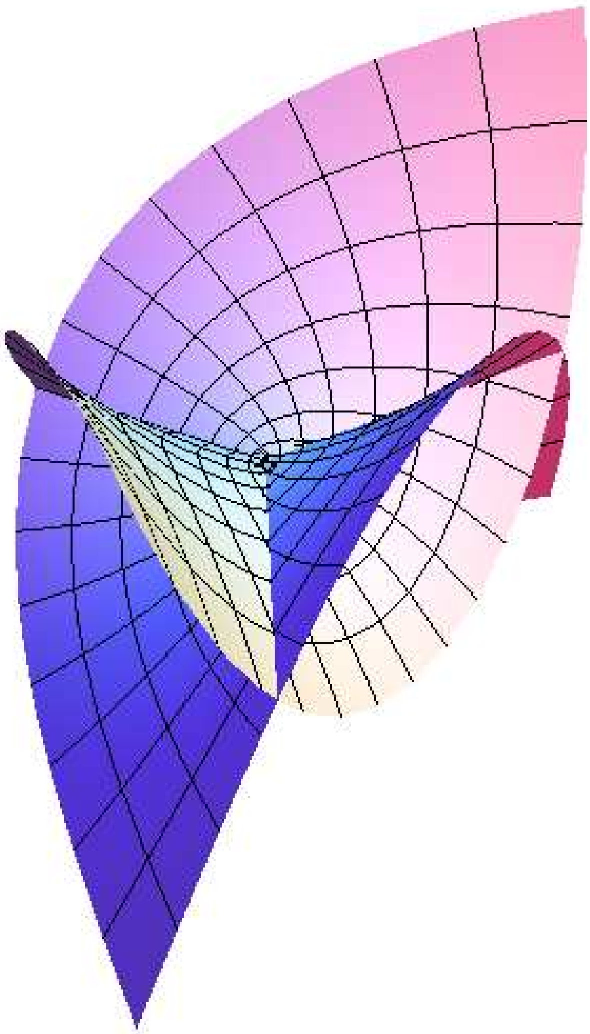
Obrázek 3.2: Bourova minimální plocha, $u \in (-1; 1)$, $v \in (0; 1)$.



(a) Pohled zleva.



(b) Pohled zprava.



Obrázek 3.3: Bourova minimální plocha, $u \in (-0,5; 0{,}5)$, $v \in (-0{,}5; 0{,}5)$.

Kapitola 4

Minimální plochy s racionálními offsety

Nyní se zaměříme podrobněji na parametrizaci z věty 3.10 a dáme do souvislosti minimální plochy generované touto parametrizací a racionální plochy s racionálními offsety. Klíčem je následující tvrzení.

Tvrzení 4.1. *Nechť* $\mathbf{p}$ *je racionální konformní parametrizace plochy* $\mathcal{S}$. *Pak plocha* $\mathcal{S}$ *má pythagorejskou normálu.*

Důkaz. Parametrizace je racionální a konformní, tudíž $g = \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u = \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v$ je racionální funkce. Determinant matice první fundamentální formy je g^2, tedy normála takto parametrizované plochy je pythagorejská.

❑

Již víme, že racionální plochy generované vzorcem (3.8), mají racionální offsety, protože z odvození této parametrizace je zřejmé, že je konformní. Problémem však je nalézt racionální parametrizace, protože integrálem racionální funkce nemusí být racionální funkce. Proto zvolíme pro další postup parametrizaci (3.10), která neobsahuje integrály a tedy dosazením racionální funkce za $\mathcal{F}$, dostaneme racionální parametrizaci minimální plochy.

Ověříme že plochy získané z parametrizace (3.10) splňují předpoklady tvrzení 4.1. Označme funkci $\mathcal{F}$ z věty 3.10 následovně $\mathcal{F}(\tau) = \mathcal{F}(u+iv) = \mathcal{F}(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v))$. Cauchy-Riemannovy podmínky dávají rovnosti:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{\partial f_2}{\partial v}, \qquad & \frac{\partial f_1}{\partial v} = -\frac{\partial f_2}{\partial u}, \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial u \partial v}, \qquad & \frac{\partial^2 f_1}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}, \\
\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3} = -\frac{\partial^3 f_1}{\partial u \partial v^2} = \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^2 \partial v} = -\frac{\partial^3 f_2}{\partial v^3}, \qquad & \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^2 \partial v} = -\frac{\partial^3 f_1}{\partial v^3} = -\frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3} = \frac{\partial^3 f_2}{\partial u \partial v^2}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Parametrizaci (3.10) můžeme přepsat pomocí funkcí f_1 a f_2, pro přehlednost používáme pouze jejich derivace podle u.

$$\begin{aligned}
x(u,v) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(1-u^2+v^2) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}(2uv) + \frac{\partial f_1}{\partial u}(2u) + \frac{\partial f_2}{\partial u}(-2v) + f_1(-2),\\
y(u,v) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(-2uv) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}(-1-u^2+v^2) + \frac{\partial f_1}{\partial u}(2v) + \frac{\partial f_2}{\partial u}(2u) + f_2(-2),\\
z(u,v) &= \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(2u) + \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}(-2v) + \frac{\partial f_1}{\partial u}(-2).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Abychom mohli spočítat fundamentální formy a normálu, zderivujeme tyto vztahy podle u a v.

$$\begin{aligned}
x_u &= \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(1-u^2+v^2) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(2uv),\\
x_v &= \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(2uv) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-1+u^2-v^2),\\
y_u &= \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-2uv) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-1-u^2+v^2),\\
y_v &= \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-1-u^2+v^2) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(2uv),\\
z_u &= \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(2u) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-2v),\\
z_v &= \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-2v) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-2u).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Podle tvrzení 1.1 vypočteme první fundamentální formu, která má po úpravách tvar

$$\mathbf{G} = \left[\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}\right)^2\right](u^2+v^2+1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Ověřili jsme, že parametrizace je konformní, jak se dalo očekávat z odvození Weierstrassovy-Enneperovy reprezentace. Předpoklad nenulovosti třetí derivace je potřeba pro regularitu parametrizace.

Z tvrzení 4.1 plyne, že veškeré racionální minimální plochy získané parametrizací (3.10) mají pythagorejskou normálu. Podívejme se blíže, jak jednotková normála z parametrizace (3.10) vypadá. Nejprve spočteme vektorový součin $\mathbf{p}_u$ a $\mathbf{p}_v$:

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p_v} = \left[\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}\right)^2\right] \big(2u(u^2+v^2+1), 2v(u^2+v^2+1), (u^2+v^2-1)(u^2+v^2+1)\big).$$

Norma tohoto součinu je podle tvrzení 2.1 odmocnina z determinantu matice (4.4), tedy

$$\|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p_v}\| = \left[\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}\right)^2\right](u^2+v^2+1).$$

Z definice jednotkové normály 1.4 pak

$$\mathbf{N} = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right), \tag{4.5}$$

což je stereografická projekce z roviny na jednotkovou sféru bez bodu $(0, 0, 1)$. Vidíme, že normála libovolné plochy dané parametrizací (3.10) nezávisí na zvolené funkci $\mathcal{F}$ a je tedy pro každou takovouto plochu stejná. Nicméně pouze pro racionální plochy je tato normála pythagorejská podle definice 2.2.

Pro výpočet druhé fundamentální formy budeme potřebovat druhé derivace parametrizace $\mathbf{p}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{uu} = \Bigg(&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-2u) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(1-u^2+v^2) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(2v) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(2uv), \\
&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-2v) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(-2uv) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-2u) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(-1-u^2+v^2), \\
&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(2) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(2u) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(-2v) \Bigg), \\
\mathbf{p}_{uv} = \Bigg(&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(2v) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(2uv) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(2u) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(-1+u^2-v^2), \\
&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-2u) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(-1-u^2+v^2) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(2v) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(2uv), \\
&\frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(-2v) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-2) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(-2u) \Bigg), \\
\mathbf{p}_{vv} = \Bigg(&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(2u) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(2uv) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(-2v) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(-1+u^2-v^2), \\
&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(2v) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(-1-u^2+v^2) + \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3}(2u) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(2uv), \\
&\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3}(-2) + \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4}(-2v) + \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4}(-2u) \Bigg).
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Podle tvrzení 1.2 vynásobíme skalárně příslušné druhé derivace s normálou (4.5) a dostaneme

$$\mathbf{H} = 2 \begin{pmatrix} -\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3} & \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3} & \frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Stejně jako ve tvrzení 3.4 využijeme konformitu parametrizace k výpočtu střední křivosti:

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2g} = 0. \tag{4.8}$$

Střední křivost je nulová, dokázali jsme tedy konečně větu 3.10.

Všechny racionální minimální plochy z věty 3.10 jsou zároveň racionální plochy s racionálními offsety, dokonce jejich normála odpovídá volbě a, b, c z příkladu 2.4, tedy $a(u, v) = u$, $b(u, v) = v$, $c(u, v) = 1$. Jak ale vypadá funkce h, když chceme, aby výsledná funkce byla minimální? Vynásobíme-li skalárně $\mathbf{N}$ a $\mathbf{p}$, získáme její předpis:

$$h(u, v) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{p} = 2\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{4u}{u^2+v^2+1} f_1 - \frac{4v}{u^2+v^2+1} f_2.$$

Dosazením můžeme ověřit, že pro takto zvolené h odpovídá parametrizace (2.7) parametrizaci (4.2). Offsety ve vzdálenosti λ získáme dosazením $h + \lambda$ do parametrizace (2.7) a dostaneme jejich přesné vyjádření

$$
\begin{aligned}
x^\lambda(u,v) &= x(u,v) \pm \lambda \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \\
y^\lambda(u,v) &= y(u,v) \pm \lambda \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \\
z^\lambda(u,v) &= z(u,v) \pm \lambda \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Příklad 4.1 (Enneperova plocha). Zvolíme-li $\mathcal{F} = \tau^3/6$ dostaneme asi nejznámější minimální plochu, Enneperovu plochu. Nejprve určíme reálnou a imaginární část této funkce

$$\mathcal{F} = \frac{t^3}{6} = \frac{(u+iv)^3}{6} = \frac{u^3}{6} + \frac{iu^2v}{2} - \frac{uv^2}{2} - \frac{iv^3}{6},$$

tedy

$$f_1(u,v) = \frac{u^3}{6} - \frac{uv^2}{2}, \qquad f_2(u,v) = \frac{u^2v}{2} - \frac{v^3}{6}.$$

Potřebné parciální derivace jsou

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial u} = \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}, &\qquad \frac{\partial f_2}{\partial u} = uv, \\
\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} = u, &\qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} = v, \\
\frac{\partial^3 f_1}{\partial u^3} = 1, &\qquad \frac{\partial^3 f_2}{\partial u^3} = 0.
\end{aligned}
$$

Dosazenám do rovnic (4.2) získáme

$$
\begin{aligned}
x(u,v) &= u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \\
y(u,v) &= -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, \\
z(u,v) &= u^2 - v^2,
\end{aligned}
$$

známou parametrizaci Enneperovy plochy. Ze vzorců (4.3) můžeme spočítat parciální derivace této mapy, nebo rovnou podle (4.4) určit její první fundamentální formu

$$\mathbf{G} = (u^2+v^2+1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Normála má opět tvar stereografické projekce (4.5) a druhou fundamentální formu určíme pomocí (4.7)

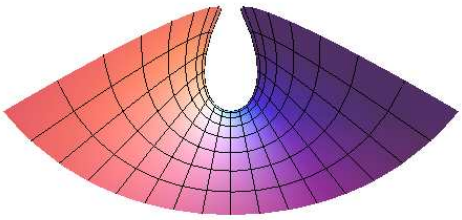
$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Funkce h vzdálenosti od počátku je v tomto případě

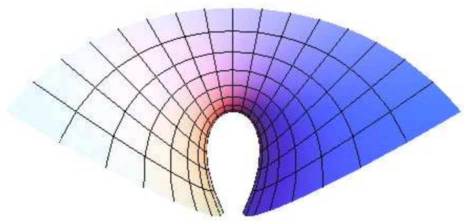
$$h(u,v) = u^2 - v^2 - \frac{2}{3} \frac{u^4 - v^4}{u^2+v^2+1}.$$

Podle (4.9) jsou offsety Enneperovy plochy ve vzdálenosti λ dány

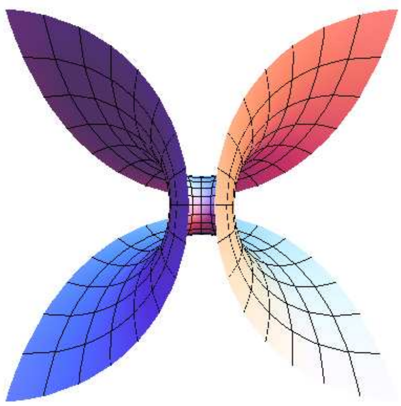
$$x^\lambda(u,v) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2 \pm \lambda \frac{2u}{u^2+v^2+1},$$
$$y^\lambda(u,v) = -v - u^2 v + \frac{v^3}{3} \pm \lambda \frac{2v}{u^2+v^2+1},$$
$$z^\lambda(u,v) = u^2 - v^2 \pm \lambda \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}.$$



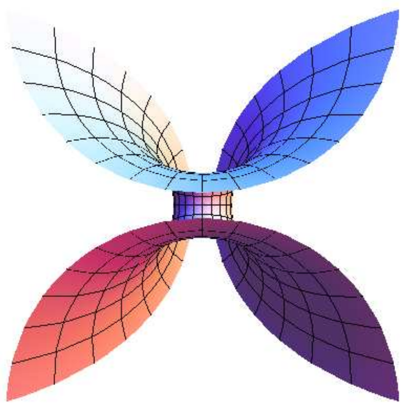
(a) Pohled zepředu/zezadu.



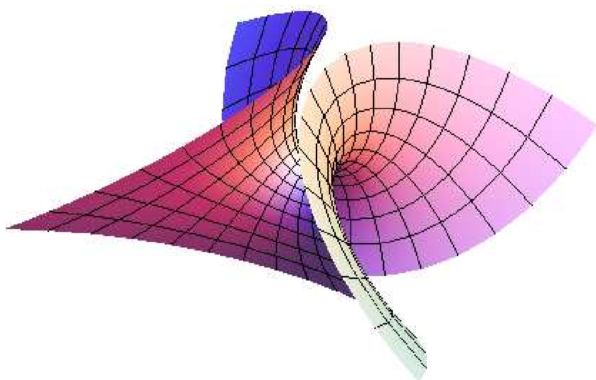
(b) Pohled zleva/zprava.



(c) Pohled shora.



(d) Pohled zdola.



Obrázek 4.1: Enneperova minimální plocha, $u \in (-1{,}6; 1{,}6)$, $v \in (-1{,}6; 1{,}6)$.

Závěr

Uvedli jsme jednoduchý postup jak generovat všechny racionální plochy s racionálními offsety založený na tvrzení, že každá (nerozvinutelná) plocha je obálkou svých tečných rovin, a taktéž elegantní způsob jak charakterizovat všechny minimální plochy Weierstrassovou-Enneperovou reprezentací. Zjistili jsme, že všechny racionální minimální plochy získané Weierstrassovou-Enneperovou reprezentací mají racionální offsety a nalezli tak nekonečně mnoho racionálních minimálních ploch s racionálními offsety.

Nemůžeme však prozatím tvrdit, že racionální minimální plochy jsou podmnožinou racionálních ploch s racionálními offsety. Víme, že každou minimální plochu můžeme získat z Weierstrassovy-Enneperovy reprezentace, ale zůstává otevřeným problémem, zda racionální minimální plochy mají vždy racionální Weierstrassovu-Enneperovu reprezentaci. Konkrétně by stačilo dokázat, že pro každou racionální minimální plochu existuje racionální konformní parametrizace. Toto tvrzení se nepodařilo dokázat ani vyvrátit a je nad rámec této bakalářské práce.

Seznam použité literatury

DO CARMO, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, New Jersey. ISBN 0-13-212589-7.

FAROUKI, R. T. (2008). *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable.* Springer. ISBN 978-3-540-73398-0.

KOPÁČEK, J. (2010). *Matematická analýza nejen pro fyziky (IV).* Třetí opravené vydání. MatfyzPress, Praha. ISBN 978-80-7378-120-0.

POTTMANN, H. (1995). Rational curves and surfaces with racional offsets. *Computer Aided Geometric Design*, **12**, 175–192.

POTTMANN, H., ASPERL, A., HOFER, M. a KILIAN, A. (2007). *Architectural Geometry.* Bentley Institute Press. ISBN 978-1-934493-04-5.

PRESSLEY, A. (2010). *Elementary Differential Geometry.* Second Edition. Springer, London. ISBN 978-1-84882-890-2.

ŠÍR, Z. (2013). Materiály k přednášce diferenciální geometrie. URL `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~sir/soubory/seznam2013.pdf`. Datum přístupu: 16. 5. 2014.