Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta
Katedra logiky

Lukáš Holík

Aritmetická úplnost logiky R
Arithmetical completeness of the logic R

Diplomová práce

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Vítězslav Švejdar, CSc.

2014

Chtěl bych poděkovat vedoucímu své diplomové práce Doc. RNDr. Vítězslavu Švejdarovi, CSc. za skvělé vedení, mnoho cenných rad a velkou míru trpělivosti. Rád bych také poděkoval rodičům za jejich podporu a zázemí, kterého bylo při psaní práce potřeba. Děkuji také všem, kdo mi při psaní práce vypomohli radou nebo poukázáním na chybu, i díky Vám má práce nakonec tuto podobu.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Praze 8. srpna 2014

Lukáš Holík

Abstrakt

Cílem práce bylo s použitím novodobé notace vystavět teorii Rosserovy logiky, vysvětlit do detailu její vztah s Peanovou aritmetikou, ukázat kripkovskou sémantiku a nakonec pomocí autoreference v množném čísle zpracovat důkaz aritmetické úplnosti. V poslední kapitole se pak ukazují některé z vlastností rosserovských sentencí.

Klíčová slova: Logika dokazatelnosti, modální logiky, rosserovské modality, pevný bod

Abstract

The aim of this work is to use contemporary notation to build theory of Rosser logic, explain in detail its relation to Peano arithmetic, show its Kripke semantics and finally using plural self-reference show the proof of arithmetical completeness. In the last chapter we show some of the properties of Rosser sentences.

Keywords: Provability logic, modal logics, Rosser modalities, fixed point

Obsah

1 Úvod

1.1 Autoreference jako metoda a předmět výzkumu

Kapitoly a hlavní důkazy v této práci vycházejí z článku Guaspariho a Solovaye z roku 1979 [3], v mnoha případech jsou obohacené o další detaily a v některých případech používají odlišnou notaci, kterou v této práci uvádíme.

Počátek našeho zkoumání lze zařadit do doby vzniku Gödelových vět, tedy do roku 1931, kdy za pomocí *autoreference* Gödel dokázal věty o neúplnosti Peanovy aritmetiky [2]. Tím ukázal nemožnost splnění *Hilbertova programu*. Studium autoreference poskytuje mnoho zajímavých výsledků a v této práci se budeme zabývat některými méně používanými autoreferenčními sentencemi. Ještě předtím si ale položme otázku: Jaké podmínky by musela splňovat formule, která by vyjadřovala v Peanově aritmetice, nebo případně v jiné teorii, formální dokazatelnost formulí?

Nechť $\overline{\varphi}$ označuje *numerál* nebo také gödelovské číslo (kód) formule φ.

Σ_1-formule je formule v Peanově aritmetice s jedním neomezeným existenčním kvantifikátorem, tedy například formule tvaru $\exists x \varphi(x)$.

Formule ψ Σ_1-definuje množinu dokazatelných formulí teorie T v $\mathbb{N}$, když platí $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \psi(\overline{\varphi})$.

Potřebnou podmínku zmíněnou dříve označíme $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ a čteme ji „y je důkaz formule x v teorii T". Formulí $\mathrm{Prf}_\tau(x, y)$ pak budeme myslet formuli, která definuje v $\mathbb{N}$ podmínku $\mathrm{Prf}_T(x, y)$ a právě o tuto formuli máme v našem zkoumání největší zájem. Navíc budeme používat formuli $\mathrm{Pr}_\tau(x)$, která říká $\exists y\ \mathrm{Prf}_\tau(x, y)$. Obě tyto formule budeme v průběhu práce užívat v rámci Peanovy aritmetiky, a tedy je nejčastěji spojovat s indexem π, což bude značit jejich využití v Peanově aritmetice, kde π je přirozená definice axiomů Peanovy aritmetiky.

Formulí $\mathrm{Con}(\tau)$ budeme myslet formuli vyjadřující konzistenci nějaké teorie definované formulí τ, formulí $\mathrm{Con}(\pi)$ pak konzistenci Peanovy aritmetiky a budeme ji používat místo formule $\neg\Box\bot$.

V roce 1939 byly Hilbertem a Bernaysem formulovány podmínky pro dokazatelnost [5] pro jejich verzi důkazu Druhé Gödelovy věty o neúplnosti. Tyto podmínky ale o 16 let později, tedy v roce 1955, nahradily v Löbově článku [6] zavedené podmínky dokazatelnosti, které jsou používány dodnes:

Věta 1 (podmínky pro dokazatelnost). *Nechť T je rekurzivně axiomatizovatelná teorie obsahující Robinsonovu aritmetiku a nechť $\tau(z)$ Σ_1-definuje množinu axiomů teorie T v $\mathbb{N}$. Pak pro libovolné sentence φ, ψ platí*

D1 : *Když* $T \vdash \varphi$, *pak* $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi})$,

D2 : $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}) \wedge \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi \to \psi}) \to \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\psi})$,
D3 : $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}) \to \mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi})})$.

Alternativně lze podmínku D2 rovněž nalézt v následujícím znění:

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi \to \psi}) \to (\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}) \to \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\psi})).$$

Místo teorie T si můžeme představit například Peanovu aritmetiku, a protože budeme pracovat na aritmetické straně pouze s ní v průběhu celé práce, je již nyní dobré si tuto substituci uvědomit. Rozdíly mezi Hilbert Bernaysovými a Löbovými podmínkami pak popsal Smoryński [7].

Způsob zavedení těchto podmínek podnítil jejich modální prozkoumání a dal vzniknout *logice dokazatelnosti*, ze které rovněž v této práci vycházíme.

Jak již bylo řečeno, autoreferenci v logice, tedy možnost formulí tvrdit něco o sobě samých, využil Gödel ve svých důkazech neúplnosti Peanovy aritmetiky. Vychází přitom z věty o autoreferenci, která tvrdí, že ke každé aritmetické formuli $\psi(x)$ lze nalézt nějakou aritmetickou sentenci φ takovou, že $\mathrm{PA} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$. Tuto ekvivalenci si lze přeložit jako „sentence φ říká, že $\overline{\varphi}$ má vlastnost ψ“, Důkaz této věty je možné nalézt v knize Švejdara [9]. I zde může být PA nahrazena jinou vhodnou teorií.

Gödelova autoreferenční sentence říká: „Já jsem nedokazatelná.“ Ve formálním zápise pak $\nu \equiv \neg\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\nu})$. S pomocí Σ-korektnosti se ukáže, že taková sentence je v Peanově aritmetice nezávislá. Přitom ale byla Σ-korektnost využita jen v jedné části tohoto důkazu [9]. Pokud bychom tedy pracovali v nekorektní teorii, dosáhli bychom alespoň toho, že zkoumaná sentence opravdu je nedokazatelná.

O nějaké autoreferenční sentenci budeme říkat, že je *gödelovská*, pokud sentence $\psi(\overline{\varphi})$ v autoreferenční rovnici tvrdí něco o své dokazatelnosti či nedokazatelnosti, případně dokazatelnosti či nedokazatelnosti svého parametru nebo sentencí sestavených z ní samé a parametru; každopádně se v takové formuli nevyskytují žádné symboly pro porovnání hodnot. Právě popsaná Gödelova autoreferenční sentence je tedy gödelovská.

S jinou gödelovskou autoreferenční sentencí přišel L. Henkin, když představil formuli $\varphi \equiv \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi})$. Taková sentence naopak říká: „Jsem dokazatelná.“ Ovšem pokud bychom se ptali jen po řešení této autoreferenční sentence, nebyla by příliš zajímavá. Existuje totiž triviální řešení tvaru $(0 = 0)$ neboli $\top$, což je v bezesporném systému jistě pravda. Jeho otázka byla ve skutečnosti trochu jiného charakteru, a to:

Platí o každé formuli φ, která splňuje zmíněnou autoreferenční sentenci, že je dokazatelná? Tato otázka byla pozitivně vyřešena Löbem v již zmíněnem článku z roku 1955 [6]:

Věta 2 (Löbova)**.** *Nechť T je teorie obsahující* PA *a $\tau(z)$ je Σ_1-formule, která definuje v $\mathbb{N}$ množinu T. Nechť φ je libovolná sentence, pro kterou platí $T \vdash \varphi \equiv \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi})$. Pak je φ dokazatelná v T.*

Mezi další autoreferenční sentence patří například $\varphi \equiv \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\varphi}) \rightarrow \lambda$. Variací pro autoreferenční sentenci užitou v První Gödelově větě je pak $\varphi \equiv \mathrm{Pr}_\tau(\overline{\neg\varphi})$. Historií autoreference a modálním výzkumem dokazatelnosti se také zabývali George Boolos a Giovanni Sambin [1].

Existují ještě další gödelovské autoreferenční sentence, nás nyní bude ale zajímat jiný druh autoreference, kterou je autoreference *rosserovská*. Rosserova sentence vznikla v podobné době jako sentence Gödelova:

$$\forall z(\mathrm{Prf}_\tau(\rho, z) \rightarrow \exists v \leq z \ \ \mathrm{Prf}_\tau(\neg\rho, v)).$$

Tuto sentenci lze číst jako: „Před každým mým důkazem existuje důkaz mojí negace.“

Věta 3 (Rosserova)**.** *Nechť T je bezesporná teorie obsahující* PA *a $\tau(z)$ je Σ_1-formule, která definuje v $\mathbb{N}$ množinu T. Nechť ρ je sentence splňující* $\mathrm{Q} \vdash \forall z(\mathrm{Prf}_\tau(\rho, z) \rightarrow \exists v \leq z \ \ \mathrm{Prf}_\tau(\neg\rho, v))$*. Pak je ρ nezávislá na T. Navíc platí* $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Con}(\tau) \rightarrow \neg\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\rho}) \wedge \neg\mathrm{Pr}_\tau(\overline{\neg\rho})$*.*

Zatímco při důkazu nezávislosti sentence v Gödelových větách bylo potřeba předpokladu Σ-korektnosti, bez kterého bylo možné ukázat jen nedokazatelnost dané formule, Rosserova věta tento předpoklad nevyžaduje a platí tak i v nekorektních teoriích. Navíc lze důkazy nedokazatelnosti i nevyvratitelnosti formalizovat v Peanově aritmetice.

Gödelovské autoreferenční sentence navíc splňují dvě zajímavé vlastnosti. První z nich je, že jejich řešení lze *explicitně vyjádřit* bez použití autoreference. Kupříkladu pro formuli užitou v Gödelových větách je to sentence $\mathrm{Con}(\pi)$, v případě Henkinovy sentence pak $0 = 0$. Toto ale nejsou ojedinělé příklady a lze ukázat, že v logice dokazatelnosti tato vlastnost platí pro všechny gödelovské autoreferenční sentence.

Aritmetické sentenci φ, která je řešením nějaké autoreferenční rovnice, tedy která splňuje podmínku tvaru $\mathrm{PA} \vdash \varphi \equiv \psi(\overline{\varphi})$, říkejme *pevný bod* formule $\psi(x)$. Druhou vlastností splnitelnou gödelovskými autoreferenčními sentencemi je *jednoznačnost řešení* neboli *ekvivalence pevných bodů*. Řešení Gödelovy autoreferenční sentence $\mathrm{Con}(\pi)$ je tak až na ekvivalentní formule jediným řešením dané autoreferenční sentence. Důkaz těchto tvrzení lze nalézt například v knize Švejdara [9].

Pro rosserovské autoreferenční sentence ani jedna z těchto vlastností neplatí. S Rosserovou sentencí budeme pracovat v jejím opačném Σ_1 znění.

V tomto duchu tedy je rosserovský pevný bod formule χ, pro kterou platí $\mathrm{PA} \vdash \chi \equiv \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\neg\chi}) < \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\chi})$. O tomto ale více až v kapitole 2.

S rozvojem výzkumu modálních logik a různou interpretací modálního operátoru nutnosti se jevilo jako další logický krok vytvořit modální systém, který by překládal modalitu formální dokazatelností v nějaké axiomatické teorii. I zde podstatnou roli sehrály podmínky dokazatelnosti D1-D3, díky kterým vznikla logika dokazatelnosti. Tato logika umožňuje hlouběji pochopit metodu autoreference. Navíc z její úplnosti a rozhodnutelnosti plyne obecná metoda řešení otázek, jaké položil L. Henkin, tedy modálně rozhodovat o dokazatelnosti různých formulí, které na aritmetické straně může být obtížné dokázat.

1.2 Logika dokazatelnosti a její aplikace

Logika dokazatelnosti (zkráceně GL podle Gödela a Löba) byla vytvořena jako modální logika, kde se modalita nutnosti překládá na aritmetickou formuli Pr_τ. Logika GL se tedy přesně podle svého názvu zabývá dokazatelností formulí.

Jazyk $\mathcal{L}$ je složen z atomů $p, q, r \ldots$ výrokovými spojkami $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. Rovněž budeme využívat nulárních spojek $\top, \bot$ a modální spojky $\Box$. Velkými latinskými písmeny $A, B, C \ldots$ pak budeme značit formule jazyka $\mathcal{L}$.

Aritmetický překlad jazyka $\mathcal{L}$ je funkce $*$ z atomů $\mathcal{L}$ do sentencí PA rozšířena na všechny formule jazyka $\mathcal{L}$ následujícím způsobem:

$\bot^*$ je sentence $0 = 1$,

$\top^*$ je sentence $0 = 0$,

$*$ komutuje s výrokovými spojkami, tedy například: $(A \wedge B)^* = A^* \wedge B^*$,

$(\Box A)^* = \mathrm{Pr}_\pi(\overline{A^*})$.

Definice 1. *Logika dokazatelnosti je teorie v jazyce $\mathcal{L}$, která axiomatizuje aritmeticky platné formule $\mathcal{L}$, tedy takové A, že* $\mathrm{PA} \vdash A^*$ *pro každý překlad* $*$*. Teorie* GL *se skládá z následujících axiomů/schémat:*

L1 : *všechny výrokové tautologie,*

L2 : *Pro každou A, B : $\Box(A \rightarrow B) \wedge \Box A \rightarrow \Box B$,*

L3 : $\Box A \rightarrow \Box\Box A$,

L4 : $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$,

a pravidel MP : $A, A \rightarrow B / B$ *a* Nec : $A / \Box A$.

Překlady axiomatických schémat L2 a L3 společně s pravidlem necesitace přesně odpovídají podmínkám dokazatelnosti D1-D3, o kterých jsme hovořili dříve, a stejně jako schéma L4, které odpovídá formalizované Löbově větě, jsou v PA dokazatelné. Proto lze již bez důkazu usoudit následující Větu o korektnosti logiky GL:

Věta 4. *Pro každou* $*$, *pokud* $\mathrm{GL} \vdash A$, *pak* $\mathrm{PA} \vdash A^*$.

Z definic vyplývá, že hodnoty atomů nejsou předem určeny a je tedy třeba brát v potaz jejich libovolné ohodnocení, které dále určí ohodnocení formulí.

Následující příklad je ukázkou PA-*platné* formule, což je formule, jejíž překlad je v PA dokazatelný, pro libovolně zvolený překlad.

Příklad 1. $A = \neg\Box\bot \to \neg\Box\neg\Box\bot$ *(modální verze Druhé Gödelovy věty). Překlad této formule* A^* *je totiž* $\mathrm{Con}(\pi) \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\mathrm{Con}(\pi)})$, *tedy formálně platná formule v* PA.

Následující příklad naopak ukazuje formuli, která PA-platná není.

Příklad 2. *Nechť* $A = \Box p \to p$. *Vezměme překlad* $*$, *který* p *ohodnotí sentencí* ν *z První Gödelovy věty.* A^* *je pak sentence* $\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\nu}) \to \nu$. *Ta je v* PA *nedokazatelná. Kdyby byla dokazatelná, pak by již totiž z dokazatelnosti sentence* $\neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\nu}) \to \nu$ *platilo* $\mathrm{PA} \vdash \nu$. *To ale není pravda (z výsledku První Gödelovy věty). Tedy existuje překlad* $*$, *pro který* $\mathrm{PA} \nvdash A^*$, *a tedy* $\mathrm{GL} \nvdash A$.

Ryze na modální straně lze ukázat i část důkazu První Gödelovy věty. Formule, která následuje, říká, že když nějaká sentence tvrdí vlastní nedokazatelnost, pak, pokud není dokazatelný spor, nedokazatelná opravdu je.

Příklad 3. *Chceme dokázat platnost formule* $\Box(p \equiv \neg\Box p) \to (\neg\Box\bot \to \neg\Box p)$. *Postupujme sporem:*

1:	$\Box(p \equiv \neg\Box p) \to (\Box p \to \Box\neg\Box p)$	z axiomu L2
2:	$\Box p \to \Box\Box p$	z axiomu L3
3:	$\Box p \to (\neg\Box p \to \bot)$	z axiomu L1
4:	$\Box(\Box p \to (\neg\Box p \to \bot))$	3, Nec
5:	$\Box\Box p \wedge \Box\neg\Box p \to \Box\bot$	4, dvakrát L2
6:	$\Box(p \equiv \neg\Box p) \wedge \Box p \to \Box\bot$	1, 2, 5.

Neplatnost dokazované formule by vedla ke sporu, proto je možné usoudit její platnost.

Poslední příklad ukazuje, jak lze ukázat z modální sentence jednostrannou nezávislost Gödelovy sentence překladem do PA.

Příklad 4. *Chceme ukázat znovu důkaz* $\Box(p \equiv \neg\Box p) \to (\neg\Box\bot \to \neg\Box p)$.

Pro sentenci φ *víme, že* $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi \equiv \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi})}) \to (\mathrm{Con}(\pi) \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi}))$ *z Gödelovy věty.*

Tedy i $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi \equiv \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi})}) \to (\mathrm{Con}(\pi) \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi}))$ *jako běžný důsledek v* PA.

Když je tedy φ *taková, že* $\mathbb{N} \models \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi \equiv \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi})})$*, dostáváme rovněž i* $\mathbb{N} \models \mathrm{Con}(\pi) \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi})$).

Když $\mathrm{PA} \vdash \varphi \equiv \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi})$*, což nutně existuje z věty o autoreferenci, pak z faktu, že* $\mathbb{N} \models \mathrm{Con}(\pi)$*, plyne* $\mathbb{N} \models \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\varphi})$*. Tedy ale také* $\mathrm{PA} \nvdash \varphi$*, což je příklad dosvědčující jednostrannou nezávislost zadané formule.*

Nyní se přesuneme ke kripkovské sémantice logiky GL, která nám poslouží jako vzor pro to, jak budou věci vypadat v logice R^- a R.

Definice 2. *Kripkovský model pro* GL *je trojice* $(W, R, \Vdash)$*, kde* (W, R) *je kripkovský rámec skládající se z množiny* W *uzlů nebo také dostupných světů,* R *je relace dosažitelnosti mezi světy a* $\Vdash$ *relace na uzlech mezi* $\mathcal{L}$ *splňující:*

i) lokálně zachovává platnost výrokových spojek, např.:
$a \Vdash A \to B \leftrightarrow a \nVdash A$ *nebo* $a \Vdash B$,

ii) $a \Vdash \Box A \Leftrightarrow \forall b \in W\ (a\ R\ b \to b \Vdash A)$.

Formule A platí v modelu, když platí v každém vrcholu.

Příklad 5.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] p,r \quad b & & c \quad \neg p,\neg r \\ & a \arrow[ul] \arrow[ur] & \\ & p,\neg r & \end{tikzcd}$$

V tomto modelu platí:

$$\forall A\ b \Vdash \Box A, \quad c \Vdash \Box A,$$
$$a \Vdash \Box(p \to r),$$
$$a \Vdash \Box\Box\bot,$$
$$a \Vdash \neg\Box\neg p.$$

Vrchol $x \in W$ je Δ-*korektní*, kde Δ je množina modálních formulí, jestliže x splňuje formuli $\Box B \to B$, kdykoli $\Box B$ je podformule některé formule z Δ. Model nazveme A-korektní, pokud je jeho kořen $\{A\}$-korektní.

Příklad 6. *Pro A libovolnou aritmetickou formuli, v níž se atom p vyskytuje pouze v rozsahu platnosti některé modality, nelze v* GL *dokázat formuli, která* *říká* $\Box(p \equiv A(p)) \to (\neg\Box\bot \to \neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p)$. *Pokud by tomu tak bylo, existuje modální formule* D *neobsahující atom* p *taková, že je dokazatelná formule* $\neg\Box\bot \to \neg\Box D \wedge \neg\Box\neg D$ [9].

Jako protipříklad nám poslouží jednoduchý model o dvou prvcích. V listu musí platit jedna z formulí $D, \neg D$. *Pokud je to* D, *pak v kořeni platí* $\Box D$, *v opačném případě* $\Box\neg D$. *V každém případě to znamená, že lze sestrojit kripkovský protipříklad.*

Právě dokončený příklad ilustruje, že v GL nelze ukázat oboustrannou nezávislost autoreferenčních sentencí tak, jako jsme toho nebyli schopni ani na aritmetické straně bez užití Σ-korektnosti. Vzhledem ke korektnosti logiky GL k PA ale říká něco i o PA, a to, že pomocí gödelovské autoreference si nelze opatřit nezávislou sentenci, jejíž důkaz nedokazatelnosti i nevyvratitelnosti lze v PA formalizovat. Nezávislost rosserovských sentencí v GL navíc naráží ještě na jiný problém, a to nemožnost vyjádřit modalitu porovnání důkazu.

Přitom v PA máme způsob, jak zachytit nezávislost těchto sentencí (viz Věta 3). Je tedy nutné rozšířit jazyk $\mathcal{L}$ tak, abychom tyto nové modality popsali.

2 Zavedení rosserovských modalit

Budeme uvažovat dva navzájem duální druhy rosserovských modalit porovnání důkazů. Nejprve uvažujme, co vyjadřují obě tyto modality v PA. To shrnují následující formule popisující porovnání důkazů dvou formulí:

Definice 3.

$$\Box\varphi \preceq \Box\psi =_{df} \exists x(\mathrm{Prf}_\pi(\varphi, x) \wedge \forall y{<}x\, \neg\mathrm{Prf}_\pi(\psi, y))$$
$$\Box\varphi \prec \Box\psi =_{df} \exists x(\mathrm{Prf}_\pi(\varphi, x) \wedge \forall y{\leq}x\, \neg\mathrm{Prf}_\pi(\psi, y))$$

Tyto modality nás budou zajímat vzhledem k důkazovému predikátu Prf_π, nicméně budeme využívat jejich přepisu přes predikát dokazatelnosti Pr_π tak, jak bylo napsáno v předchozí kapitole.

Rosserovský pevný bod je, jak již bylo napsáno, formule χ, pro kterou platí, že $\mathrm{PA} \vdash \chi \equiv \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\neg\chi}) < \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\chi})$. Zajímat nás budou hlavně Σ_1-formule PA.

Pokud φ a χ jsou Σ_1-formule, pak i $\varphi \prec \chi$ a $\varphi \preceq \chi$ jsou Σ_1-formule.

Při sestrojení teorie pro $\prec$ a $\preceq$ vyvstane následující nejednoznačnost. Vlastnosti predikátu dokazatelnosti nejsou dostatečné pro rozhodnutí, zdali například $\mathrm{Pr}_\pi(\overline{0=0}) < \mathrm{Pr}_\pi(\overline{1=1})$ nebo $\mathrm{Pr}_\pi(\overline{1=1}) < \mathrm{Pr}_\pi(\overline{0=0})$. Abychom se vyvarovali náhodného rozhodnutí této otázky při pevném zvolení některého predikátu dokazatelnosti, je nutné při překladu brát v potaz libovolný predikát dokazatelností (tím bereme v potaz všechny možnosti předchozího porovnání důkazů, které nás ve výsledku nezajímá).

Definice 4. *$Pr(x)$ nazveme predikátem dokazatelnosti iff $Pr(x)$ Σ_1-definuje dokazatelné formule PA v $\mathbb{N}$ a navíc splňuje:*

$$\mathrm{PA} \vdash Pr(\overline{\varphi \to \chi}) \wedge Pr(\overline{\varphi}) \to Pr(\overline{\chi}),$$
$$\mathrm{PA} \vdash \sigma \to Pr(\overline{\sigma}),$$

pro každou sentenci χ a φ a každou Σ_1-sentenci σ.

Navíc definujeme $Pr(x) =_{df} \exists y Prf(x, y)$ a říkáme, že takový predikát dokazatelnosti Pr je asociován s důkazovým predikátem Prf.

Důkazový predikát nazveme standardním a zapíšeme ho formulí $Prf(x, y)$, pokud platí, že $\mathrm{PA} \vdash \forall x \exists y Prf(x, y) \equiv \mathrm{Pr}_\pi(x)$.

O predikátu $Pr(x)$ pak říkáme, že je asociován se standardním důkazovým predikátem, pokud platí $\forall x(Pr(x) \equiv \mathrm{Pr}_\pi(x))$.

Rozšíření jazyka $\mathcal{L}$ na $\mathcal{L}^+$ bude vypadat následovně: Pro libovolné formule A, B jsou formulemi i $\Box A {\preceq} \Box B$ a $\Box A {\prec} \Box B$ (lze tedy poměřovat jen oboxované formule).

Pro predikát dokazatelnosti $Pr(x)$ je pak aritmetický překlad formulí $\mathcal{L}^+$ založen na libovolném $Pr(x)$ se stejným vyhodnocením jako v $\mathcal{L}$ a navíc:

$$(\Box A \preceq \Box B)^* = (\Box A)^* \leq (\Box B)^*,$$
$$(\Box A \prec \Box B)^* = (\Box A)^* < (\Box B)^*.$$

Překlad v tomto smyslu tedy chápeme jako založený na libovolném predikátu dokazatelnosti.

Lemma 1. *Pro libovolný překlad $*$, pokud $A \in \mathcal{L}^+$ má hlavní spojku $\Box, \preceq$ nebo $\prec$, pak A^* je Σ_1-formule.*

Důkaz. Formule $\Box A$ se přeloží na formuli $Pr(\overline{A^*})$, což je z Definice 4 formule s jedním neomezeným existenčním kvantifikátorem, tedy Σ_1-formule.

Formule $\Box B \preceq \Box C$ se přeloží na formuli $(\Box B)^* \leq (\Box C)^*$. Z Definice 3 o vyhodnocení uspořádání v PA se jedná o formuli s jedním neomezeným existenčním kvantifikátorem. Je tedy rovněž Σ_1. Případ $\Box B \prec \Box C$ se vyřeší analogicky. $\Box$

2.1 Logika R$^-$

Definice 5. R$^-$ *má stejná pravidla jako* GL *a navíc následující axiomy* R$^-$*:*

R1 : *Všechna axiomatická schémata logiky* GL *pro formule jazyka* $\mathcal{L}^+$,
R2 : $\Box A \preceq \Box B \rightarrow \Box(\Box A \preceq \Box B)$,
R3 : $\Box A \prec \Box B \rightarrow \Box(\Box A \prec \Box B)$,
jednu z následujících množin axiomů uspořádání:

a) Původní axiomy uspořádání podle Guaspariho a Solovaye [3]:

A1 : $\Box A \rightarrow \Box A \preceq \Box A$,
A2 : $\Box A \preceq \Box B \rightarrow \Box A$,
A3 : $\Box A \preceq \Box B \wedge \Box B \preceq \Box C \rightarrow \Box A \preceq \Box C$,
A4 : $\Box A \vee \Box B \rightarrow \Box A \preceq \Box B \vee \Box B \prec \Box A$,
A5 : $\Box A \prec \Box B \rightarrow \Box A \preceq \Box B$,
A6 : $\Box A \preceq \Box B \rightarrow \neg(\Box B \prec \Box A)$,
A7 : $\Box A \wedge \neg\Box B \rightarrow \Box A \prec \Box B$.

b) Axiomy uspořádání podle Švejdara [10]:

A1 : $\Box A \rightarrow \Box A \preceq \Box A$,
A2 : $\Box A \preceq \Box B \rightarrow \Box A$,
A3 : $\Box A \preceq \Box B \wedge \Box B \preceq \Box C \rightarrow \Box A \preceq \Box C$,

$$\begin{aligned}&\mathrm{A4}: \Box A \vee \Box B \to \Box A \preceq \Box B \vee \Box B \prec \Box A,\\ &\mathrm{A8}: \Box B \prec \Box A \equiv \Box B \preceq \Box A \wedge \neg(\Box A \preceq \Box B).\end{aligned}$$

Tvrzení 1. *Obě množiny axiomů uspořádání a) i b) jsou spolu ekvivalentní. Axiom* A7 *je redundantní.*

Důkaz. Axiomy A1-A4 se nacházejí v obou množinách axiomů, zajímají nás tedy jen axiomy A5 a A6 v porovnání s axiomem A8. Navíc ukážeme, že axiom A7 lze v a) i b) již odvodit a je tedy redundantní.

a) $\to$ b)
Ukážeme obě implikace potřebné ekvivalence axiomu A8:

1: $\Box B \prec \Box A \to \Box B \preceq \Box A$	z axiomu A5
2: $\Box B \prec \Box A \to \neg(\Box A \prec \Box B)$	z axiomu A6
3: $\Box A \prec \Box B \to \Box A \preceq \Box B$	z axiomu A5
4: $\Box B \prec \Box A \to \Box B \preceq \Box A \wedge \neg(\Box A \preceq \Box B)$	MP na 1, 2, 3.

Opačná implikace:

1: $\neg(\Box A \preceq \Box B) \to \Box B \prec \Box A$	z axiomu A6
2: $\Box B \preceq \Box A \wedge \neg(\Box A \preceq \Box B) \to \Box B \prec \Box A$	MP na 1.

b) $\to$ a)
Implikace zleva doprava v A8 tvaru $\Box A \prec \Box B \to \Box A \preceq \Box B \wedge \neg(\Box B \preceq \Box A)$ nám již dává axiom A5.

1: $\Box A \preceq \Box B \vee \neg(\Box B \preceq \Box A) \to \neg(\Box B \prec \Box A)$	axiom A8
2: $\Box A \preceq \Box B \to \neg(\Box B \prec \Box A)$.	

Zbývá ukázat redundanci axiomu A7:

1: $\Box B \preceq \Box A \to \Box B$	z axiomu A2
2: $\Box A \vee \Box B \to \Box B \preceq \Box A \vee \Box A \prec \Box B$	z axiomu A4
3: $\Box A \wedge \neg\Box B \to \Box A \prec \Box B$.	

Formule $\Box B \preceq \Box A$ nemůže platit, jinak by platilo $\Box B$, což z předpokladů neplatí. Tedy lze odvodit druhý disjunkt, který určuje uspořádání a ukazuje, že lze informaci obsaženou v axiomu A7 již získat z axiomů A2 a A4. $\Box$

Všimněme si, že zatímco v GL lze odvodit pravidlo $\Box A/A$, v R$^-$ toto již není možné. Důkaz tohoto tvrzení ukážeme v následující sekci sestrojením kripkovského protipříkladu.

Následuje krátký přehled významu axiomů uspořádání. Ty postupně popisují, že $\preceq$ je kvaziuspořádání (je reflexivní a tranzitivní) pro všechny platné formule s hlavní spojkou $\Box$ (jiné se v dosahu $\preceq$ nemohou vyskytovat), že $\prec$ je striktní kvaziuspořádání (je oproti $\preceq$ antireflexivní) a nakonec, že všechna pravdivá tvrzení jsou dosvědčena před jakýmikoli nepravdivými.

Lemma 2. *Pro každou* $*$*, pokud* $\mathrm{R}^- \vdash A$*, pak* $\mathrm{PA} \vdash A^*$.

Důkaz. Díky platnosti Lemma 4 stačí ověřit překlady pravidel, která pracují s rosserovskými modalitami.

Nejprve vezměme sentenci $(\Box A \preceq \Box B) \to \Box(\Box A \preceq \Box B)$. Její překlad $*$ je tvaru $Pr(\overline{A^*}) \leq Pr(\overline{B^*}) \to Pr(\overline{Pr(\overline{A^*}) \leq Pr(\overline{B^*})})$. Dle Definice 4 platí $\mathrm{PA} \vdash \sigma \to Pr(\overline{\sigma})$ pro Σ_1-sentence σ a vzhledem k tomu, že $Pr(\overline{A^*}) \leq Pr(\overline{B^*})$ je Σ_1-sentence, $\mathrm{PA} \vdash Pr(\overline{A^*}) \leq Pr(\overline{B^*}) \to Pr(\overline{Pr(\overline{A^*}) \leq Pr(\overline{B^*})})$. Obdobně pro modalitu $\prec$.

Nyní ještě musíme ukázat platnost překladů axiomů uspořádání. Ukážeme například překlad axiomu A2:

Překlad formule $\Box A \preceq \Box B \to \Box A$ je $Pr(\overline{A^*}) \leq Pr(\overline{B^*}) \to Pr(\overline{A^*})$, což z definice znamená, že $\exists x(Prf(\overline{A^*}, x) \wedge \forall y{<}x \neg Prf(\overline{B^*}, y)) \to Pr(\overline{A^*})$. Pokud by tato formule v PA neplatila, znamenalo by to, že existuje číslo, které je svědkem důkazu formule A (a žádné menší číslo není svědkem důkazu formule B) a přitom neexistuje číslo, které by bylo svědkem formule A. To ovšem není možné, tedy tato formule v PA platí. $\Box$

2.2 Logika R

Definice 6. R *má oproti* R^- *navíc následující pravidlo:*

R4 : $\Box A/A$ *pro všechny formule* A.

Lemma 3. *Pro každou* $*$*, pokud* $\mathrm{R} \vdash A$*, pak* $\mathrm{PA} \vdash A^*$.

Hlavním bodem práce bude ukázat opak Lemma 3, a to v kapitole 4.

Jak v R^- tak v R lze zkonstruovat důkaz jednoho z důležitých rozdílů mezi logikou GL a R^- nebo R, nezávislost rosserovské autoreferenční sentence za předpokladu existence pevného bodu této autoreferenční rovnice. Ilustruje to následující příklad:

Příklad 7. *Formule* $\Box(p \equiv \Box\neg p \preceq \Box p) \to (\neg\Box\bot \to \neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p)$ *je v* R^- *i* R *platná. Postupujme sporem:*

1:	$\Box(p \equiv \Box\neg p \preceq \Box p) \to (\Box p \to \Box(\Box\neg p \preceq \Box p))$	z axiomu R2
2:	$\Box p \wedge \neg\Box\neg p \to \Box p \prec \Box\neg p$	z axiomu A7
3:	$\Box\neg p \preceq \Box p \to (\Box p \prec \Box\neg p \to \bot)$	z axiomu A6
4:	$\Box(\Box\neg p \preceq \Box p) \to (\Box(\Box p \prec \Box\neg p) \to \Box\bot)$	3, Nec, axiom R2
5:	$\Box(p \equiv \Box\neg p \preceq \Box p) \wedge (\Box p \wedge \neg\Box\neg p) \to \Box\bot$	1, 2, 4.

Při porušení nezávislosti a za předpokladu existence pevného bodu tedy získáme spor dokládající platnost dokazované formule a tím pádem nezávislost Rosserovy sentence, což jsme byli schopni ukázat i v PA.

3 Kripkovská sémantika

V této sekci se zaměříme na plnohodnotné využití kripkovské sémantiky pro logiku rosserovských sentencí.

3.1 Kripkovská sémantika R^-

Kripkovský rámec pro logiky R^- a R budeme značit zkratkou $\boldsymbol{<}$ (tučnější nerovnostní znaménko), která vyjadřuje konečné, antireflexivní, stromové, částečné uspořádání na uzlech s nejvyšším uzlem nazvaným *kořen*. Malými písmeny a, b, c... budeme značit uzly tohoto uspořádání.

Definice 7. *Kripkovský model pro logiky* R^- *a* R *je dvojice* $(\boldsymbol{<}, \Vdash)$*, kde* $\boldsymbol{<}$ *je kripkovský rámec a* $\Vdash$ *je relace mezi uzly a* $\mathcal{L}^+$ *formulemi, která splňuje:*

(i) $\Vdash$ *respektuje výrokové spojky lokálně, např.:*

  (a) $a \Vdash A \wedge B$ *iff* $a \Vdash A$ *a* $a \Vdash B$,

  (b) $a \Vdash \neg A$ *iff* $a \nVdash A$.

(ii) $a \Vdash \Box A$ *iff* $\forall b \boldsymbol{<} a, b \Vdash A$.

(iii) *Persistence: Pokud formule A má jako hlavní spojku* $\Box, \preceq, \prec$, *a pokud* $a \Vdash A, b \boldsymbol{<} a$, *pak* $b \Vdash A$.

(iv) *Všechny axiomy uspořádání ve tvaru implikací: Pokud* $a \Vdash$ *levá strana* $\Rightarrow a \Vdash$ *pravá strana.*

Všimněme si, že ani zde definice nic nehovoří o persistenci atomů, jak je to běžné v intuicionistické logice. Atomy tedy mohou v různých uzlech platit či neplatit, a to nezávisle na situaci v uzlech předchozích.

Sekvenci znaků $a \Vdash A$ budeme číst jako „formule A platí v uzlu a". Oproti běžně zažitým modelům je rovněž důležité si uvědomit, že zde je kořen nejvyšším uzlem a persistence tedy platí „směrem dolů". Vzhledem k antireflexivitě $\boldsymbol{<}$ je dobré si uvědomit, že formule $\Box A \to A$ nemusí platit.

Příklad 8. *Předpokládejme, že b je přímý následník a,* $a \Vdash \neg\Box A, \neg\Box B$ *a* $b \Vdash \Box A, \Box B$. *Pak v b platí právě jedna z* $\Box A \prec \Box B, \Box B \prec \Box A, \Box A \equiv \Box B$.

Příklad 9. *Předpokládejme, že b je přímý následník a,* $a \Vdash \Box A, \neg\Box B$. *Pak* $a \Vdash \Box A \prec \Box B$ *a díky persistenci i* $b \Vdash \Box A \prec \Box B$. *Platí tedy, že důkaz A je dosvědčen před důkazem B.*

Pokud $(\boldsymbol{<}, \Vdash)$ je model a b je uzel, pak je podmodel generovaný uzlem b, který je novým kořenem, také modelem. Je tomu tak proto, že výrokové spojky jsou vyhodnocovány lokálně, $\Box$ je vyhodnocen jen směrem dál (tedy informace zapomenutá useknutím uzlů nad b na vyhodnocení $\Box$ nic nezmění) a platnost rosserovských modalit se jednak stejně jako platnost $\Box$ přenáší modelem směrem dolů, ale je určena (někdy nejednoznačně) z platnosti jednotlivých formulí, které svou platnost či neplatnost nezměnily, tedy nebude porušovat podmínky určené Definicí 7. Může nastat situace, že takto vzniklý model bude připouštět i jinou variantu uspořádání formulí, vždy ale bude připouštět tu předchozí.

Uvažujme naopak rozšíření $<$ na $<'$ přidáním uzlu a_0 nad kořen a modelu $(<, \Vdash)$. Pak se může stát, že dvojice $(<', \Vdash)$ nebude model. Uvažujme například $a \Vdash \Box p, \neg p, \Box q, q, \Box p \prec \Box q$. Potom by ovšem muselo platit v novém rozšíření při zachování relace $\Vdash$, že $a_0 \Vdash \neg\Box p \wedge \Box q$, a tedy i $a_0 \Vdash \Box q \prec \Box p$. Persistencí ovšem získáme, že $a \Vdash \Box q \prec \Box p, \Box p \prec \Box p$, což vede ke sporu.

Nemožnost rozšířit model o nový kořen je v R$^-$ způsobena nepřítomností pravidla korektnosti. Jak GL, tak logika R toto pravidlo obsahuje a je tedy možné prodlužovat stonek modelu o nové kořeny, jak se využije i v důkazu úplnosti logiky R v kapitole 4.

Řekneme, že formule A je platná v $(<, \Vdash)$, pokud A platí v každém uzlu a $(<, \Vdash)$ je protipříklad na formuli A. Pokud A není v tomto modelu platná, pak v některém uzlu platí $\neg A$. Model může být současně protipříkladem na formuli A i $\neg A$.

Lemma 4. *Pro každou formuli A platí, že* $\mathrm{R}^- \vdash A \Rightarrow A$ *platí v každém modelu.*

Důkaz. Je třeba ukázat, že všechny axiomy a pravidla logiky R$^-$ budou platné v kořeni každého modelu.

Důkaz provedeme po případech. Pro výrokové spojky je situace jednoduchá. Platné výrokové formule musí z Definice 7 v každém modelu platit, protože je platnost zachovávána lokálně.

Pokud v kořeni platí formule $\Box(A \to B) \wedge \Box A$, pak v každém dostupném uzlu (pokud žádný neexistuje, pak $\Box B$ platí triviálně) platí $A \to B, A$ tedy také B. V tom případě ale v kořeni platí $\Box B$.

Pokud v kořeni platí formule $\Box A$, pak ve všech dostupných uzlech platí formule A a ze schématu persistence i $\Box A$. V kořeni tak platí formule $\Box\Box A$, případně i jakékoli jiné množství $\Box$ předcházejících formuli A. Podobně vypadá i důkaz pro axiom $\Box A \preceq \Box B \to \Box(\Box A \preceq \Box B)$ a duální rosserovskou modalitu.

Pokud v kořeni platí formule $\Box(\Box A \to A)$, pak ve všech dostupných uzlech platí $\Box A \to A$. Podíváme-li se do libovolného listu tohoto modelu, platí zde $\Box A$ a tedy i A. V tom případě ale i před tímto listem platí $\Box A$ a tak dále až ke kořeni, kde platí $\Box A$, což zakončuje důkaz platnosti tohoto axiomu.

Poslední případ jsou axiomy uspořádání. Ty jsou v kripkovském modelu platné ve tvaru implikací, tedy jejich platnost dostáváme rovněž automaticky. $\square$

To, jestli je nějaká formule A platná v modelu nebo některém uzlu, závisí na tom, jak model vyhodnotí podformule A a uspořádání těchto podformulí. Následující definice nám pomáhá zachytit tuto množinu prvků potřebných k určení platnosti A.

Definice 8. *Množina S formulí jazyka $\mathcal{L}^+$ se nazývá adekvátní, pokud je uzavřena na podformule a obsahuje $\Box A \preceq \Box B$ a $\Box A \prec \Box B$, kdykoli obsahuje $\Box A, \Box B$. Pokud je S adekvátní, je dvojice $(<, \Vdash)$ S-model, pokud Definice 7 platí pro všechny formule z S. A-model je S-model, kde S je nejmenší adekvátní množina obsahující A.*

Lemma 5. *Pokud je S adekvátní a $(<, \Vdash)$ je S-model, pak existuje $\Vdash'$ taková, že $(<, \Vdash')$ je model a $\Vdash$ a $\Vdash'$ se shodují na formulích z S.*

Důsledek 1. *Pro každou formuli A platí, že $\mathrm{R}^- \vdash A \Rightarrow A$ platí v každém A-modelu.*

Důsledek 2. *Pravidlo $\Box A/A$ není v R^- odvoditelné.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že $\mathrm{R}^- \vdash \Box(\Box\top \prec \Box\bot)$, a poté, že $\mathrm{R}^- \nvdash \Box\top < \Box\bot$. Jelikož ze sporu plyne cokoliv, platí i pro každou formuli A, $\mathrm{R}^- \vdash \Box\bot \to \Box A$. Nyní uvažujme po případech:

Jistě platí $\Box\top$. Pokud navíc $\neg\Box\bot$, pak dle axiomů uspořádání $\Box\top \prec \Box\bot$, a tedy $\Box(\Box\top \prec \Box\bot)$. Pokud platí $\Box\bot$, pak již lze odvodit $\Box A$ pro libovolnou A, tedy i $\Box(\Box\top \prec \Box\bot)$. V každém případě tedy platí $\Box(\Box\top \prec \Box\bot)$.

Pro sestrojení protipříkladu na formuli $\Box\top \prec \Box\bot$ stačí vzít model splňující Definici 7 pro všechny podformule $\Box\top \prec \Box\bot$. Nechť $<$ je částečné uspořádání sestávající z jednoho bodu, řekněme a. Potom $a \Vdash \Box\top, \Box\bot$ a můžeme zvolit například $a \Vdash \Box\bot \prec \Box\top$. $\square$

Věta 5. *Kripkovská úplnost logiky* R^-*:*

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^- \vdash A \quad &\textit{iff} \quad A \textit{ je platné ve všech modelech,} \\ &\textit{iff} \quad A \textit{ platí v kořeni každého modelu.} \end{aligned}$$

Důkaz. Úplnost R^- se ukáže převodem formulí jazyka $\mathcal{L}^+$ na formule jazyka $\mathcal{L}$, kde se následně využije znalost úplnosti logiky GL. To uvádíme bez důkazu, důkaz úplnosti logiky GL zpracoval Robert M. Solovay [8]. Pokud $B \in \mathcal{L}$, GL $\nvdash B$, pak existuje model pro $\mathcal{L}$ formule, ve kterém B neplatí v kořeni.

Nechť $A \in \mathcal{L}^+$ a $\mathrm{R}^- \nvdash A$. Nechť S je adekvátní konečná množina obsahující A. Nechť $D_0, \ldots, D_n$ jsou formule z množiny S s hlavní spojkou $\preceq, \prec$ a $p_0, \ldots, p_n$ různé atomy $\mathcal{L}^+$ nepatřící do množiny S. Formule množiny S přeložíme na formule jazyka $\mathcal{L}$ a přitom se pokusíme zachovat jejich strukturu. Překlad bude vypadat následovně:

Každé formuli $B \in S$ přiřadíme unikátní $B^i \in \mathcal{L}$ takové, že B je výsledek po substituci D_i za p_i v B^i pro každé $0 \leq i \leq n$. Tímto sice ztratíme všechna D_i, jejich logické vlastnosti ale mohou být zachovány. Pro každé B nechť $\Box' B = B \wedge \Box B$. Nechť X je množina formulí jazyka $\mathcal{L}$ skládající se z:

(a) $\Box'(p_i \to \Box p_i)$ pro $0 \leq i \leq n$,
(b) B^i pro každý axiom uspořádání v B obsahující pouze formule z S.

Protože $\mathrm{R}^- \nvdash A$, lze odvodit, že $\mathrm{GL} \nvdash \bigwedge X \to A^i$. Nyní tedy ze znalosti úplnosti logiky GL vezměme model $(<, \Vdash)$, který splňuje $\bigwedge X \wedge \neg A^i$ v kořeni. Musí tedy platit i $\bigwedge X$, protože $\Box' B$ je pravdivá v každém uzlu, když je pravdivá v kořeni.

Ponecháme-li $<$ a $\Vdash$ upravíme na $\Vdash'$ tak, že pro formule $B \in S$, pak:

$$a \Vdash' B \text{ iff } a \Vdash B^i,$$

bude $(<, \Vdash')$ S-model, který v kořeni nesplňuje formuli $\neg A$. $\square$

Důsledek 3. R^- *je rozhodnutelná.*

Důkaz. Množina formulí dokazatelných v R^- je algoritmicky rozhodnutelná (za pomocí axiomů a pravidel), a tedy rekurzivně spočetná a podle Věty 5 je i množina nedokazatelných formulí rekurzivně spočetná, protože nám v takovém případě stačí prohledat konečné modely k nalezení protipříkladu. Množina dokazatelných formulí v R^- je tedy obecně rekurzivní a logika R^- je rozhodnutelná. $\square$

Důkaz úplnosti říká, že pro libovolnou formuli A může existovat jen konečná množina protipříkladů. To nám omezuje i čas výpočtu pro rozhodovací procedury, a to na 2^{cn}, kde n je délka formule a c je konstanta.

3.2 Kripkovská sémantika R

V této sekci navíc uvažujme následující vlastnost zakládající se na pravidle, které v R máme navíc:

$$\forall A \in \mathcal{L}^+,\ SA = \bigwedge\{\Box B \to B \mid \Box B \text{ je podformulí } A\}.$$

Model nazveme A-korektním, pokud v kořenu platí SA. Navíc platí, že $(SA)^*$ je vždy pravdivá (i když ne nutně dokazatelná) formule. Nyní můžeme v jazyce $\mathcal{L}^+$ definovat pravidlo, které bude zajišťovat důležitou vlastnost a to, že každá Σ_1-formule je dokazatelná v PA:

Definice 9 (Pravidlo korektnosti)**.** *Pro formule A s hlavní spojkou $\Box, \preceq, \prec$ platí:*

$$(SA \to A)/A.$$

Překlad tohoto pravidla je v PA odvoditelné pravidlo. Protože pokud $(SA \to A)^*$ je v PA dokazatelná, pak A^* musí být také pravdivá, a tedy když víme, že jde o Σ_1-formuli, i dokazatelná. Jak bylo řečeno již dříve, pravidlo korektnosti nám umožňuje provádět konstrukci prodlužování stonku, která bude využita v následujícím Lemma, které je podstatné pro důkaz úplnosti.

Uvažujme logiku R^+, která představuje logiku R s přidaným pravidlem korektnosti:

Lemma 6. $\mathrm{R}^+ \nvdash A$ *iff existuje A-korektní protipříklad na formuli A.*

Důkaz. $\Rightarrow$ Nechť $\mathrm{R}^+ \vdash A$. Je potřeba najít $\Box A$-korektní protipříklad na formuli $\Box A$. Předpokládejme, že takový model neexistuje. Pak platí, že $S\Box A \wedge \neg\Box A$ neplatí v kořeni žádného modelu (pokud $\neg\Box A$ platí kdekoli v modelu, pak nutně i v kořeni). Nyní podle Věty 5 platí, že $\mathrm{R}^+ \vdash S\Box A \to \Box A$. Pak ale $\mathrm{R}^+ \vdash \Box A$, a tedy i podle pravidla korektnosti $\mathrm{R}^+ \vdash A$.

$\Leftarrow$ Ukážeme, že $\mathrm{R}^+ \vdash A$ implikuje, že je A platné v každém A-korektním modelu. Nechť $\mathrm{R}^+ \vdash A$ a X je konečná množina, která obsahuje všechny formule z nějakého pevně daného důkazu A v R^+. Nechť $(<, \Vdash)$ je libovolný A-korektní model. Pokud je $(<, \Vdash)$ X-korektní, pak A platí v $(<, \Vdash)$. Nechť je S nejmenší adekvátní množina, která obsahuje A a $\Vdash_A$ je restrikce $\Vdash$ na formule množiny S. Sestrojíme model $(<', \Vdash')$ rozšiřující model $(<, \Vdash_A)$, který bude X-korektní (rovnou lze předpokládat, že množina X je adekvátní a $S \subseteq X$). Potom ale musí A platit v $(<', \Vdash')$, a tedy muselo platit již v $(<, \Vdash)$. Obecně tedy lze říci, že $<'$ X-korektně rozšiřuje $<$, protože $<$ nemusí být dostatečně dlouhé, aby bylo X-korektní (žádný model nemůže být $\Box\Box\bot$-korektní, pokud neobsahuje řetízek alespoň o 3 sestupných uzlech).

Nyní tedy k samotné konstrukci: Nechť $d(B)$ označuje hloubku $\Box$ ve formuli B, tedy přesněji:

$$d(p) = 0,$$

$$d(\Box B) = d(B) + 1,$$

$$d(B) = \max\{d(C) \mid C \text{ je podformule } B\}, \text{ pokud hlavní spojka } B \text{ není } \Box.$$

Nechť $N = \max\{d(B) \mid B \in X\}$ a definujme rozšíření $<'$ rámce $<$ přidáním lineárního uspořádání délky $N+1$ nad kořen. Nechť a_0 je kořen v $<$ a vyberme nové uzly $a_1, \ldots, a_{N+1}$. Nechť $<'$ se shoduje s $<$ na společných uzlech a jinde platí $\forall b \in <,\ b <' a_1 <' a_2 <' \ldots <' a_{N+1}$.

Indukcí následně definujme rozšíření modelu $(<, \Vdash_A)$ na model $(<', \Vdash')$ tak, aby pro každou formuli $B \in X$ platilo:

$(*)$ Pokud $d(B) \leq i, j$, pak $a_i \Vdash' B \Leftrightarrow a_j \Vdash' B$.

Potom budou v a_N a a_{N+1} platit stejné formule z množiny X, což zaručuje, že a_N a tedy i a_{N+1} bude X-korektní. V každém kroku indukce také chceme zajistit, aby dosud definované $\Vdash'$ splňovalo Definici 7 pro všechny uzly $<'$ a všechny formule S.

Nejprve pro formule $B \in S$ nechť:

$$b \Vdash' B \Leftrightarrow b \text{ je uzel } < \text{ a } b \Vdash_A B,$$
$$\text{nebo } b \text{ je jeden z uzlů } a_1, a_2, \ldots, a_{N+1} \text{ a } a_0 \Vdash_A B.$$

Protože $\Vdash_A$ je A-korektní, splňuje $\Vdash'$ Definici 7 pro formule z množiny S (a také je A-korektní).

Krok 0: V tomto kroku rozhodneme, že každý atom z $X \backslash S$ platí v každém uzlu $<'$ (vlastně potřebujeme jen tolik, aby každý atom platný v některém a_i platil v každém a_j). Nechť $D_m = \{B \mid d(B) \leq m\}$. Rozšířením $\Vdash'$ na všechny výrokové kombinace atomů dostaneme $\Vdash'$ splňující Definici 7 pro $S \cup D_0$ a platnost vlastnosti $(*)$ pro $B \in D_0$ (vyhodnocení se provede na základě platnosti atomů, a pokud formule množiny D_0 platí v některé a_i, platí v každém a_j).

Krok m+1: Předpokládejme, že $\Vdash'$ splňuje Definici 7 pro $S \cup D_m$ a $(*)$ platí pro $B \in D_m$. Formule hloubky $m+1$ sestrojíme ve 3 podkrocích a současně rozšíříme $\Vdash'$:

$$Y_1 = \{\Box B \mid d(B) = m\},$$
$$Y_2 = \{B \mid B \text{ je } C \preceq C' \text{ nebo } C \prec C' \text{ a } C, C' \in Y_1 \cup D_m\},$$
$$Y_3 = \{B \mid B \text{ je kombinace výrokových formulí z } D_m \text{ s jednou nebo více formulemi z } Y_1 \cup Y_2\}.$$

Podkrok 1: $\Vdash'$ se rozšíří na formule z Y_1 podle platnosti formulí z indukčního předpokladu, o kterých víme, že Definici 7 neporušují. Musíme tedy ověřit platnost $(*)$. Předpokládejme $\Box B \in Y_1$. Nechť $i, j \geq d(\Box B) = m+1$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme $j < i$. Je třeba ověřit následující implikaci: $a_j \Vdash' \Box B \to a_i \Vdash' \Box B$ (opačná implikace triviálně plyne z persistence). Nechť tedy $a_j \Vdash \Box B$, pak pro každé $b <' a_j, b \Vdash' B$. Je tedy třeba ukázat, že B platí v každém z uzlů $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{i-1}$. Protože B platí v a_{j-1} a $j-1 \geq m = d(B)$, lze použít indukční předpoklad a vyvodit, že B platí v a_j.

Podkrok 2: I v tomto kroku rozšíření $\Vdash'$ proběhne na základě vyhodnocení platnosti formulí z $Y_1 \cup D_m$, o kterých víme, že zachovávají Definici 7. Znovu je potřeba pro formule z Y_2 ověřit splnění $(*)$. Pokud by neplatila, vezměme například C, C' z množiny $Y_1 \cup D_m$ a nějaké i takové, že $C \prec C'$ neplatí v a_{i+1}, ale platí v a_i. Mohou nastat dvě situace:

a) C, C' platí v a_i. Pak dle předpokladu také platí v a_{i+1}, a tedy v a_{i+1} platí i $C' \preceq C$, což díky persistenci znamená, že platí i v a_i, což je spor.
b) C platí v a_i, ale C' ne. Pak to samé platí v a_{i+1}, a tedy $C \prec C'$ platí v a_{i+1}, což je znovu spor.

Podkrok 3: V tomto kroku se vše rozšíří automaticky dle Definice 7 na základě indukčního předpokladu. □

Nyní již můžeme konečně s použitím předchozího Lemma dokázat větu o úplnosti logiky R.

Věta 6. *Pravidlo korektnosti je v* R *odvoditelné.*

Věta 7. $\mathrm{R} \nvdash A$ *iff existuje* A*-korektní protipříklad na formuli* A.

Důkaz Vět 6, 7. Bude stačit ukázat, že pokud $\mathrm{R} \nvdash A$, pak existuje A-korektní protipříklad na formuli A. Nechť $\mathrm{R} \nvdash A$. Pak pro každé $n \in \omega$, $\mathrm{R} \nvdash \Box^n A$, kde $\Box^n A$ označuje formuli A, před kterou je zapsán n-krát $\Box$. Nechť N je kardinalita (počet prvků množiny) $X = \{\Box B \mid \Box B \text{ je podformule } A\}$ a $(<, \Vdash)$ je kripkovský protipříklad na formuli $\Box^{N+1} A$. Pak existuje posloupnost uzlů $a_0 > a_1 > \ldots > a_{N+1}$ takových, že:

$$a_0 \Vdash \neg \Box^{N+1} A, a_1 \Vdash \neg \Box^N A, \ldots, a_i \Vdash \neg \Box^{N+1-i} A.$$

Nechť $X_i = \{\Box B \in X \mid a_i \Vdash \Box B\}$. Z persistence pak $j \geq i \to X_j \subseteq X_i$, a tedy dle Dirichletova principu existuje i takové, že $X_i = X_{i+1}$. Pak ale pro každé $\Box B \in X_i, a_i \Vdash \Box B \to B$, což znamená, že $a_i \Vdash SA$. Nechť $(<', \Vdash')$ je restrikce $(<, \Vdash)$ na uzly $\leq a_i$. Pak je $(<', \Vdash')$ kripkovský protipříklad na formuli A. □

Důsledek 4. R *je rozhodnutelná.*

Důkaz. Stejným argumentem jako v logice R^-. □

Důsledek 5. *Platí následující:*

1) *V logice* R *není možné ukázat nezávislost Rosserovy sentence.*

2) $\Box\neg p \prec \Box p$ *nemá v* R *pevný bod.*

Důkaz. 1) Nechť A je formule jazyka $\mathcal{L}^+$ a B je tvaru $\neg\Box\bot\rightarrow\neg\Box A\wedge\neg\Box\neg A$, to znamená formule dosvědčující nezávislost formule A. Sestrojíme B-korektní protipříklad na formuli B. S využitím argumentu v Lemma 6 existuje B-korektní model, ve kterém $<$ je lineární uspořádání délky alespoň 2. Nechť b je list $<$ a a jeho přímý předchůdce. Pak $a \Vdash \neg\Box\bot$, takže bude stačit, aby $a \Vdash \Box A$ nebo $a \Vdash \Box\neg A$. V b ovšem platí jedno z $A, \neg A$. Pokud je to A, pak $a \Vdash \Box A$, pokud $\neg A$, pak $a \Vdash \Box\neg A$.

2) V R je možné za pomoci existence pevného bodu zkonstruovat důkaz o nezávislosti Rosserovy sentence, proto by tato existence pro $\Box\neg p \prec \Box p$ byla v rozporu s existencí protipříkladu na formuli B. $\square$

4 Aritmetická úplnost R

V článku Guaspariho a Solovaye [3] byla k důkazu aritmetické úplnosti použita věta o rekurzi, my tento důkaz provedeme užitím autoreference v množném čísle. Následující důkaz je adaptací důkazu aritmetické úplnosti logiky GL [8].

Věta 8. *Když* $\mathrm{R} \nvdash A$*, pak existuje překlad* $*$ *založený na standardním důkazovém predikátu* $Prf(x, y)$ *takový, že* $\mathrm{PA} \nvdash A^*$.

Důkaz. Podmínka v zadání říká, že A má A-korektní kripkovský protipříklad. Nechť $M = (<, \Vdash)$ o n uzlech, kde a_1 je kořen a formule A je někde v modelu nesplněna. M obohatíme o nový kořen a_0, což je možné ze znalosti A-korektnosti modelu (technika prodlužování stonku užitá v Lemma 6). Nový model je rovněž A-korektní a všechny podformule A mají v a_0 i a_1 stejnou pravdivostní hodnotu.

$Ad(X)$ budeme značit nejmenší adekvátní množinu pro množinu formulí X. Pokud je A formule, pak $Ad(A) = Ad(\{A\})$.

Nechť $S = Ad(A) \cup \{\neg B \mid B \in Ad(A)\}$. Množina S je také adekvátní (přidáním znegovaných formulí adekvátnost neporušíme) a pro každou formuli $C \in S$ platí, že $\neg C \in S$ nebo je C negací některé formule z S. Říkáme, že S je uzavřena na negace svých formulí. Všechny formule z S mají v a_0 i a_1 stejnou pravdivostní hodnotu (všechny formule z $Ad(A)$ měly v a_0 i a_1 stejnou pravdivostní hodnotu, přidáním formulí s negacemi bude platit stejná podmínka i pro tyto formule).

Opatřeme si sentence $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ dle počtu uzlů v modelu $(<, \Vdash)$ skrz autoreferenci v množném čísle, to znamená, že budeme každou sentenci definovat na základě rámce $<$ a čísel $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$. Funkci g definujme na základě čísel $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$ a na základě přirozeného důkazového predikátu $\mathrm{Prf}_\pi(x, y)$ následovně:

$$g(0) = 0,$$

$$g(x+1) = \overline{j}, \text{ pokud platí } Prf(\overline{\neg\lambda_j}, x) \text{ a přitom } g(x) > \overline{j} \text{ nebo } g(x) = 0.$$
$$\text{Jinak } g(x+1) = g(x).$$

Hodnoty funkce g jsou tedy buď 0 nebo hodnota některého z uzlů našeho modelu. Funkce g přitom začíná v nule a v každém kroku se buď pohne modelem na některý z nižších uzlů, nebo stojí. Tedy je vidět, že skoků nemůže být nekonečně mnoho (dříve či později musí g dostat pomocí skoků do některého listu).

Pokud je proveden skok do některého uzlu $\overline{i}$, pak to znamená, že byl nalezen důkaz sentence s číslem $\overline{\neg\lambda_i}$, a pokud g v některém uzlu od okamžiku x již zůstane, znamená to, že za číslem x již nebyl nalezen žádný důkaz sentence $\overline{\neg\lambda_j}$ pro $j < i$. To ale znamená, že taková sentence nemá žádný důkaz, protože pokud má důkaz nějaké délky, může mít i neomezeně delší důkaz. Tedy:

$$\mathrm{PA} \vdash \lim g = \bar{i} \to \bigwedge_{j<i} \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\neg\lambda_j}).$$

Sentence $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ definujeme jako

$$\mathrm{PA} \vdash \lambda_i \equiv \lim g = \bar{i}$$

a sentenci λ_0 jako

$$\mathrm{PA} \vdash \lambda_0 \equiv \lim g = \bar{0}.$$

V definicích všech sentencí $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ vystupují numerály $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}$, ale ne numerál $\overline{\lambda_0}$.

Sentence $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mají obvyklé vlastnosti:

i) Každá λ_i je s PA bezesporná,

ii) $\vdash \lambda_i \to \neg\lambda_j$ pro $i \neq j$, $\vdash \bigvee_{i=0}^{n} \lambda_i$,

iii) $\vdash \lambda_i \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\neg\lambda_j})$ pro $j < i$,

iv) $\vdash \lambda_i \to \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\vee_{j<i}\lambda_j})$ pro $i \neq 0$.

Ukáže se, že funkce g ve skutečnosti žádný skok neprovede a zůstane v uzlu 0.

Aritmetický překlad $*$ založíme na důkazovém predikátu *Prf* a predikátu dokazatelnosti *Pr*, které odvodíme na základě nespecifikované funkce h:

$$Prf(x, y) = x \in D_{h(y)}, \qquad Pr(x) = \exists y\ \mathrm{Prf}(x, y).$$

Předpokládejme očíslování výrokových atomů $p_0, p_1, p_2, \dots$

Překlad atomů:

Pokud $p_k \in S$, pak $p_k^* = \bigvee\{\lambda_i \mid i \Vdash p_k\} \wedge (\bar{k} = \bar{k})$.

Pokud $p_k \notin S$, pak $p_k^* = \lambda_0 \wedge (\bar{k} = \bar{k})$.

Tento trik užitý v překladu atomů je zde proto, aby bylo možné z B^* odvodit původní formuli B. Formule se již přeloží „běžným způsobem“, například:

$(\Box B \preceq \Box C)^* = \overline{B^*}$ je prvek množiny $D_{h(y)}$ pro takové y, že žádná z $D_{h(0)}, \dots, D_{h(y-1)}$ neobsahuje $\overline{C^*}$.

$(\Box B \prec \Box C)^* = \overline{B^*}$ je prvek množiny $D_{h(y)}$ pro takové y, že žádná z $D_{h(0)}, \dots, D_{h(y)}$ neobsahuje $\overline{C^*}$.

$(\Box B)^* = \overline{B^*}$ je prvek některé množiny $D_{h(y)}$.

Funkce h se definuje v krocích na základě překladu $*$ z numerálu $\overline{h}$. Před krokem m je definováno číslo k_m a hodnoty $h(0), \dots, h(k_m - 1)$. Speciálně pak $k_0 = 0$.

V kroku m definujeme $k_{m+1} > k_m$ a hodnotu $h(k_{m+1} - 1)$. Pokud m není důkaz ve smyslu důkazového predikátu $Prf(x, y)$ nebo když m je důkaz sentence tvaru $\overline{B^*}$ pro $\Box B \in S$, tedy $Prf(\overline{B^*, m})$, položíme $D_{h(k_m)} = \emptyset$. Pokud m je důkaz sentence A odlišné od $\overline{B^*}$ pro $\Box B \in S$, položíme $D_{h(k_m)} = \{A\}$.

Případ 1: Když $m \neq 0$ a $g(m+1) = g(m)$ (když nebyl nalezen důkaz sentence s číslem m), položíme $k_{m+1} = k_m + 1$ a přejdeme na další krok.

Případ 2: Pokud platí $g(m+1) \neq g(m)$ postupujeme následovně: V případě $g(m+1) \neq g(m)$ je m důkaz některé $\overline{\neg\lambda_i}$ pro $1 \leq i \leq m$, totiž $\overline{\neg\lambda_{g(m+1)}}$. Nechť

$$Y = \{\overline{B^*} \mid \Box B \in S, g(m) \nVdash \Box B, g(m+1) \Vdash \Box B\},$$

tedy množina nově dokazatelných formulí v kroku $m+1$. Na Y definujme uspořádání $\leq$ následovně:

$$\begin{aligned} \overline{B^*} \leq \overline{C^*} &\equiv g(m+1) \Vdash \Box B \preceq \Box C, \\ \overline{B^*} < \overline{C^*} &\equiv g(m+1) \Vdash \Box B \prec \Box C. \end{aligned}$$

Pokud lze nějaké formule uspořádat oběma způsoby ($\leq$ i $\geq$), hovoříme o jejich ekvivalenci. Třídy ekvivalence označme $E_1, \dots, E_k$ takové, že $E_1 < \dots < E_k$. Může nastat situace $k = 0$.

Nyní definujme $D_{h(k_m+i)} = E_i,\ k_{m+1} = k_m + k + 1$.

Poznámka: Většinou má $D_{h(k_m)}$ jeden nebo žádný prvek pro sentenci, jejímž důkazem je m. Nikdy ale nebude přijata, je-li tvaru $\overline{B^*}$ pro $\Box B \in S$, někdy naopak prohlásíme prvky množiny Y za dokazatelné bez ohledu na to, zda jsou opravdu dokazatelné. Díky tomu může nastat, že predikát dokazatelnosti, který zde využíváme, tvrdí více, než by měl, a to $\exists x(\mathrm{Pr}_\pi(x) \neq Pr(x))$.

Lemma 7. *Pokud $B \in S$, pak když $i \Vdash B \Rightarrow \vdash \lambda_i \to B^*$, a když nastane $i \Vdash \neg B \Rightarrow \vdash \lambda_i \to \neg B^*$.*

Důkaz. Když B je atom $p_k \in S$ a $i \Vdash p_k$, pak $\vdash \lambda_i \to \bigvee\{\lambda_j \mid j \Vdash p_k\} \wedge (\overline{k} = \overline{k})$. Pokud $i \nVdash p_k$, pak $\vdash \lambda_i \to \neg \bigvee\{\lambda_j \mid j \Vdash p_k\}$, protože pro každý $j \Vdash p_k$ máme $\vdash \lambda_i \to \neg\lambda_j$.

Rozšíření na výrokové spojky funguje přímočaře.

Nechť $\Box B \in S$ a $i \Vdash \Box B$. Opět nastane $\vdash \lambda_i \to Pr(\overline{B^*})$. Je tomu tak proto, že funkce g po možná několika skocích nabyla definitivní hodnotu $\overline{i}$. Existuje tedy numerál $\overline{i_0}$ a číslo m takové, že $\overline{i_0} > \overline{i}$ nebo $\overline{i_0} = \overline{i}$ a $g(m) = \overline{i_0}$ a $i_0 \Vdash \Box B$. Ve všech okamžicích $m' < m$ je $g(m')$ takový uzel z $\{0, \dots, m\}$, že nesplňuje $\Box B$. V okamžiku m je některé z čísel $k_m + i$ pokládáno za důkaz $\overline{B^*}$.

Pro $\Box B \in S$ a $i \nVdash \Box B$ se postupuje analogicky.

Nechť $\Box B, \Box C \in S$, $i \Vdash \Box B \preceq \Box C$. Uvažujme za předpokladu λ_i. Máme $\bar{i} \Vdash \Box B$. Při cestě funkce g do $\bar{i}$ nastal okamžik m, ve kterém proběhl skok do $\overline{i_0}$ tak, že $\overline{i_0} > \bar{i}$ nebo $\overline{i_0} = \bar{i}$ takový, že v něm byla poprvé splněna $\Box B$. Formule $\Box C$ nemohla být splněna dříve, jinak by dříve rovněž byla splněna $\Box C \prec \Box B$, tím by se persistencí dostala do $\bar{i}$, což není možné. Tedy ve stádiu m se $\overline{B^*}$ ocitne v některé E_i a přitom $\overline{C^*}$ se ocitne v té samé, pozdější nebo žádné. Ve všech případech je ale formuli $\overline{B^*}$ přidělen důkaz, který je $\leq$ než jakýkoli důkaz přidělený formuli $\overline{C^*}$.

Pro $\Box B, \Box C \in S$, $i \nVdash \Box B \preceq \Box C$ a obě varianty s modalitou $\prec$ se postupuje obdobně. $\Box$

V dalším Lemma je potřeba si uvědomit, že budeme pracovat s predikátem dokazatelnosti asociovaným se standardním důkazovým predikátem, ne tím vytvořeným pro účely tohoto důkazu. Záhy se ovšem ukáže, že jsou spolu oba ekvivalentní.

Lemma 8. *Nechť* $\Box B \in S$. *Pak když* $i \Vdash B \Rightarrow \vdash \lambda_i \to \mathrm{Pr}_\pi(\overline{B^*})$, *a když* $i \Vdash \neg B \Rightarrow \vdash \lambda_i \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{B^*})$.

Důkaz. Nechť nejprve $i \Vdash \neg\Box B$ a $i \neq 0$. Tedy pro jisté $j < i$ platí $j \nVdash B$. Lemma 7 říká $\vdash \lambda_j \to \neg B^*$. Dále platí:

$$\vdash \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\lambda_j \to \neg B^*}),$$
$$\vdash \lambda_i \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{\neg\lambda_j}).$$

Z těchto dvou pak i:

$$\vdash \lambda_i \to \neg\mathrm{Pr}_\pi(\overline{B^*}).$$

Případ pro $i \Vdash \Box B$ a $i \neq 0$ je analogický, využije se $\vdash \lambda_i \to \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\bigvee_{j<i} \lambda_j})$.
Nechť $i = 0$. Získáme $0 \Vdash \Box B$. Pak dle korektnosti $0 \Vdash B$ a navíc:

$$\vdash \lambda_0 \to B^* \text{ dle Lemma 7},$$
$$\vdash \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\lambda_0 \to B^*}),$$
$$\vdash \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\textstyle\bigvee_{i\neq 0} \lambda_i \to B^*}), \text{ protože } i \Vdash B \text{ pro každé } i \neq 0,$$
$$\vdash \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\textstyle\bigvee_{i\neq 0}^{m} \lambda_i \to B^*}),$$
$$\vdash \mathrm{Pr}_\pi(\overline{B^*}), \text{ protože } \vdash \textstyle\bigvee_{i\neq 0}^{m} \lambda_i.$$

$\Box$

Lemma 9. $\vdash \forall x(\mathrm{Pr}_\pi(x) \equiv Pr(x))$.

Důkaz. Nově zkonstruovaný predikát Pr se od toho asociovaného se standardním důkazovým predikátem může lišit pouze na formulích tvaru $\overline{B^*}$, kde $\Box B \in S$.

Předpokládejme λ_i. Když $i \Vdash \Box B$, pak Lemma 7 dává $\vdash \lambda_i \to Pr(\overline{B^*})$, zatímco Lemma 8 dává $\vdash \lambda_i \to \mathrm{Pr}_\pi(\overline{B^*})$. Případ $i \nVdash \Box B$ je analogický. Protože některá z λ_i platí, rozbor případů dává $\mathrm{Pr}_\pi(\overline{B^*}) \equiv Pr(\overline{B^*})$. □

Vzhledem k ekvivalenci obou predikátů dokazatelnosti byla konstrukce provedena opravdu na základě standardního důkazového predikátu (viz Definice 4). Nyní pokud $\mathrm{R} \nvdash A$, pak $0 \nVdash A$, a tedy $\mathrm{PA} \vdash \lambda_0 \to \neg A^*$. Protože je ale každé λ_i konzistentní s PA, je tento argument postačující k zjištění $\mathrm{PA} \nvdash A^*$. □

5 Rosserovské sentence

V této poslední kapitole se zaměříme na různé vlastnosti rosserovských sentencí a podíváme se, jaké vlastnosti by měl Rosserovský predikát dokazatelnosti, který by měl v sobě přímo zabudovánu vlastnost porovnávání důkazu.

5.1 Neekvivalence rosserovských sentencí

Připomeňme si, že χ je rosserovská sentence pro predikát dokazatelnosti $\mathrm{Pr}_\pi(x)$, když $\mathrm{PA} \vdash \chi \equiv \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\neg\chi}) < \mathrm{Pr}_\pi(\overline{\chi})$.

Věta 9. *Existuje takový predikát dokazatelnosti, pro který nejsou všechny rosserovské sentence dokazatelně ekvivalentní. Pro libovolný predikát dokazatelnosti můžeme najít predikát dokazatelnosti k němu ekvivalentní, který má* Σ_1*-neekvivalentní rosserovské sentence.*

Důkaz. Nejprve se zaměřme na situaci, ve které nevystupují Σ_1-sentence. Model zkonstruujeme po částech. Uvažme:

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{\neg p, \neg q}{\bullet} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg p, q \;\; \bullet & & \bullet \;\; p, \neg q
\end{tikzcd}
$$

Všimněme si, že v kořeni platí $\neg\Box p, \neg\Box\neg p, \neg\Box q, \neg\Box\neg q$, protože v množině listů není jednoznačně rozhodnuta platnost p, q, proto můžeme $\Vdash$ rozšířit následovně:

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{\neg\Box(p \leftrightarrow q)}{\bullet} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\Box p \prec \Box\neg p, \Box\neg q \prec \Box q \;\; \bullet & & \bullet \;\; \Box\neg p \prec \Box p, \Box q \prec \Box\neg q
\end{tikzcd}
$$

Nechť $R(v) = \Box\neg v \prec \Box v$. Nechť $A = \Box(p \leftrightarrow R(p)) \wedge \Box(q \leftrightarrow R(q)) \wedge \neg\Box(p \wedge q)$. Tvrdíme, že tento model je A-korektní a A platí v jeho kořeni. Proto existuje překlad $*$ takový, že A^* je pravdivá, což přesně znamená, že p^* a q^* jsou rosserovské sentence a nejsou dokazatelně ekvivalentní.

Abychom nyní větu splnili pro Σ_1-rosserovské sentence, stačí vzít formule B a C s hlavní spojkou $\Box, \preceq, \prec$ a postupovat podobně s tím, že nahradíme p a q formulemi B a C:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \neg B, \neg C \; \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \neg B, C \; \bullet & & \bullet \; B, \neg C \end{tikzcd}$$

je model a je $(B \wedge C)$-korektní. Jako příklad formulí B a C můžeme vzít například $B = \Box\bot \prec \Box(\bot \wedge \bot)$ a $C = \Box(\bot \wedge \bot) \prec \Box\bot$. $\Box$

5.2 Rosserovský predikát dokazatelnosti

Definice 10. *Pokud Pr(x) je predikát dokazatelnosti asociovaný s důkazovým predikátem Prf, pak nechť:*

$$Pr^R(x) =_{df} Pr(x) < Pr(\neg x).$$

$Pr^R(x)$ je tedy Σ_1-formule a stejně jako $Pr(x)$ definuje formule PA v $\mathbb{N}$. Můžeme se ptát, zdali lze $Pr^R(x)$ také asociovat s důkazovým predikátem, tedy jestli platí:

a) $\mathrm{PA} \vdash Pr^R(\overline{\varphi}) \wedge Pr^R(\overline{\varphi \to \chi}) \to Pr^R(\overline{\chi})$,
b) $\mathrm{PA} \vdash Pr^R(\overline{\varphi}) \to Pr^R(Pr^R(\overline{\varphi}))$.

Navíc má $Pr^R(x)$ tu vlastnost, že pokud je dokazatelné $\neg\varphi$, musí být dokazatelné i $\neg Pr^R(\overline{\varphi})$ (je-li $\neg\varphi$ dokazatelné, pak dle axiomu uspořádání $\Box\neg\varphi \prec \Box\varphi$, a tedy platí $\neg Pr^R(\overline{\varphi})$). Jak je tomu pro opačnou implikaci, platí:

c) $\mathrm{PA} \vdash \neg Pr^R(\overline{\varphi})$, pak $\mathrm{PA} \vdash \neg\varphi$?

Lemma 10. *$Pr^R(x)$ nelze asociovat s důkazovým predikátem $Prf(x, y)$. Pro každou z vlastností a), b), c) existuje protipříklad.*

Důkaz. a) Nejprve nechť:

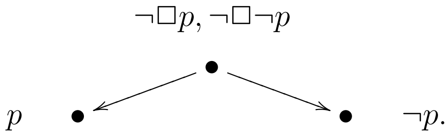
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \neg\Box p, \neg\Box\neg p, \neg\Box q, \neg\Box\neg q, \neg\Box(p \to q), \neg\Box\neg(p \to q) \; \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ p, \neg q, \neg(p \to q) \; \bullet & & \bullet \; \neg p, q, p \to q. \end{tikzcd}$$

Vzhledem k formulím, platným v kořeni můžeme v listech zvolit uspořádání mezi $\Box p$ a $\Box\neg p$, $\Box q$ a $\Box\neg q$, $\Box(p \to q)$ a $\Box\neg(p \to q)$. Formule A nechť je tvaru $\neg\Box(\Box^R p \wedge \Box^R(p \to q) \to \Box^R q)$. Platí:

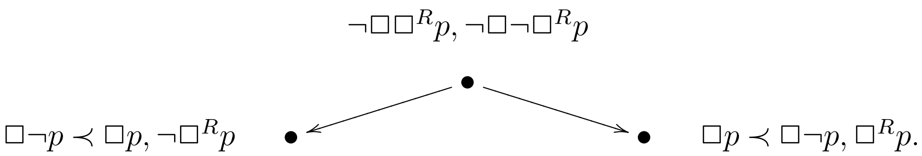
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A \; \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \bullet & & \bullet \; \Box p \prec \Box\neg p, \Box\neg q \prec \Box q, \Box(p \to q) \prec \Box\neg(p \to q). \end{tikzcd}$$

V pravém listu proto platí formule $\Box^R p, \Box^R(p \to q)$ a $\neg\Box^R q$ (v levém listu zvolíme uspořádání přesně naopak, a tím získáme negace právě zmíněných formulí), což potvrzuje platnost formule A v kořeni. Navíc jsme zajistili, že je daný model A-korektní (všechny podformule A tvaru $\Box B$ jsou v kořeni neplatné, takže je triviálně zachována korektnost). Překlad, který zajistí platnost A^*, učiní neplatné a), kde $\varphi = p^*$ a $\chi = q^*$.

b) Nejprve nechť:

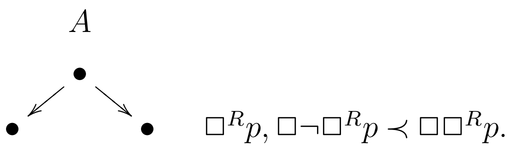


Protože platí v kořeni $\neg\Box p, \neg\Box\neg p$, můžeme v listech zvolit uspořádání mezi $\Box p, \Box\neg p$. Z toho vyplývá, že následující rozšíření je platné:



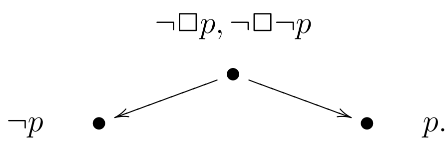
Protože v kořeni platí $\neg\Box\Box^R p, \neg\Box\neg\Box^R p$, můžeme podobně jako v minulém kroku zvolit uspořádání mezi $\Box\Box^R p$ a $\Box\neg\Box^R p$ v listech.

Nechť $A = \neg\Box(\Box^R p \to \Box^R\Box^R p)$. Model rozšíříme následovně:



V pravém listu našeho modelu musí platit dle zvoleného uspořádání $\neg\Box^R\Box^R p$, a tedy i $\neg(\Box^R p \to \Box^R\Box^R p)$(antecedent zde platí, konsekvent nikoli). Tím jsme ověřili platnost formule A v kořeni. Navíc jsme zajistili, že je daný model A-korektní (všechny podformule A tvaru $\Box B$ jsou v kořeni neplatné). Překlad, který zajistí platnost A^*, učiní neplatné b), kde $\varphi = p^*$.

c) Podobně jako v předchozích dvou případech sestrojíme kripkovský protipříklad:



Stejně jako dříve zvolíme uspořádání v listech:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \neg\Box(\neg\Box^R p \to \neg p) & \\
 & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg p \quad \bullet & & \bullet \quad p, \neg\Box^R p.
\end{tikzcd}$$

Pravý list znovu dokládá platnost formule v kořeni, čímž je popřena vlastnost c) pro $\varphi = p^*$. $\Box$

5.3 Ekvivalence rosserovských sentencí

V této sekci budeme uvažovat pouze predikáty dokazatelnosti s vlastností, kterou má dosud používaný predikát Pr_π:

(+) PA dokazuje, že „$\{x \mid Pr(x)\}$ je uzavřena na tautologický důsledek a obsahuje všechny pravdivé Σ_1-sentence“.

Věta 10. *Existuje predikát dokazatelnosti, jehož všechny rosserovské sentence jsou dokazatelně ekvivalentní. (Pro libovolný predikát dokazatelnosti splňující (+) můžeme zkonstruovat predikát dokazatelnosti, který s ním bude dokazatelně ekvivalentní a všechny jeho rosserovské sentence budou dokazatelně ekvivalentní.)*

Důkaz. Nechť $Pr(x)$ je predikát dokazatelnosti splňující (+) a g je obecně rekurzivní funkce, která v $\mathbb{N}$ definuje množinu $\{x \mid Pr(x)\}$. Sestrojíme funkci f dle věty o rekurzi v krocích. Řekněme, že v některém kroku může zazvonit zvonek. Pokud tato situace nastane, dojde k radikální změně instrukcí. Při konstrukci rovněž vytváříme a ukládáme seznam rosserovských sentencí. Na tento seznam můžeme umístit jen f-rosserovské sentence, což jsou rosserovské sentence vzhledem k predikátu dokazatelnosti, který je závislý na funkci f. Označujeme ho $Pr_f(x)$.

Krok m: Jak bude zřejmé, bude nám stačit uvažovat kroky, ve kterých zvonek ještě nezazvonil, nebo kroky, kde právě zazvonil.

Případ 1: Zvonek ještě nezazvonil. Prozkoumejme $g(m)$. Pokud je $g(m)$ některá z $\overline{\varphi}$, $\overline{\neg\varphi}$ pro nějakou φ z našeho rosserovského seznamu, zazvoň a přejdi k případu 2. Jinak přiřaď $f(m) = g(m)$ a znovu se podívej na $g(m)$. Pokud je $g(m)$ tvaru $\overline{\chi \leftrightarrow Pr_f(\overline{\neg\chi}) \prec Pr_f(\overline{\chi})}$, přidej χ na seznam, pokud nenastane, že:

a) $\neg\chi$ už je na seznamu, nebo

b) $\chi = \neg\varphi$ a formule φ již je na seznamu.

Přejdi do kroku $m+1$. Touto konstrukcí bude na seznamu vždy právě nejvýše jedno z $\varphi, \neg\varphi$ pro libovolnou formuli φ.

Případ 2: Právě zazvonil zvonek.

Případ 2a: Zvonek zazvonil, protože $g(m)$ je $\overline{\varphi}$ a φ je na seznamu. Předpokládejme, že seznam sestává z množiny formulí $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Pak hodnotám $f(m), \ldots, f(m+2k-1)$ přiřadíme po řadě formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \neg\varphi_1, \ldots, \neg\varphi_k$ a pokračujeme v definování $f(i)$ pro $i \geq m+2k$ tak, aby f definovala všechny sentence dokazatelné v PA v $\mathbb{N}$.

Případ 2b: Zvonek zazvonil, protože $g(m)$ je $\overline{\neg\varphi}$ a φ je na seznamu. Pak $f(m), \ldots, f(m+2k-1)$ přiřadíme po řadě formule $\neg\varphi_1, \ldots, \neg\varphi_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ a pokračujeme v definování $f(i)$ pro $i \geq m+2k$ tak, aby f definovala všechny sentence dokazatelné v PA v $\mathbb{N}$.

Lemma 11. PA $\vdash$ *Pokud zvonek zazvonil, je* $\{x \mid Pr(x)\}$ *sporná.*

Důkaz. Uvažujme v PA. Předpokládejme například, že zvonek zazvonil, protože $g(m)$ je $\overline{\varphi}$ a φ již je na seznamu. Pak g vydalo $Pr_f(\overline{\neg\varphi}) \prec Pr_f(\overline{\varphi})$, aby se φ mohlo na seznam vůbec dostat. Nyní tedy pro nějaké $i < m$ bude $g(i) = \overline{\neg\varphi}$, ale v tom případě již bude $\{x \mid Pr(x)\}$ sporná, nebo $g(i) \neq \overline{\neg\varphi}$ pro $i < m$. V tom případě ale dle konstrukce f vydá $\overline{\varphi}$ před $\overline{\neg\varphi}$.

Následující Σ_1-sentenci ψ považuje predikát dokazatelnosti Pr za platnou:

$$\exists x(Pr_f(x) \prec Pr_f(\neg x) \wedge Pr_f(\neg x) \prec Pr_f(x)).$$

Protože ale PA dokazuje $\neg\psi$ (lze předpokládat jen jednu z nerovností, obě nerovnosti zároveň již obsahují spor), dle našich požadavků na predikát dokazatelnosti Pr dokazuje PA $Pr(\overline{\neg\psi})$. Máme tedy $Pr(\overline{\psi})$ i $Pr(\overline{\neg\psi})$, a protože Pr je uzavřen na tautologický důsledek, dostáváme $\forall x\ Pr(x)$. Druhý případ je vyřešen obdobně. □

Lemma 12. PA $\vdash \mathrm{rng}(f) = \mathrm{rng}(g)$

Důkaz. Pokud zvonek nikdy nezazvonil, platí $\forall m\ f(m) = g(m)$. Pokud zazvonil, pak dle předchozího lemmatu definuje g spornou množinu obsahující všechny sentence a z konstrukce platí to stejné i pro f. □

Lemma 13. *Pokud je χ f-rosserovská, pak bude χ v některém kroku přidána na seznam.*

Důkaz. Protože zvonek nemůže zazvonit (kvůli spornosti množiny sentencí v takovém případě určených predikátem dokazatelnosti), jediný způsob, jak by se χ nemohlo dostat na seznam, je pokud již seznam obsahuje rosserovskou sentenci φ, pro kterou platí $\chi = \neg\varphi$ nebo $\varphi = \neg\chi$. Pokud by ale kterákoli z těchto možností platila, znamenalo by to, že získáme pravdivou a přitom nezávislou rosserovskou sentenci (měli bychom dvě rosserovské sentence, které jsou svými negacemi, tedy právě jedna by byla pravdivá), což je ve sporu s větou o Σ-úplnosti, která říká, že každá nezávislá Σ_1-sentence je nepravdivá. $\square$

Dokončení důkazu: Nechť nyní φ a χ jsou f-rosserovské. Žádná není dokazatelná a v některém kroku m budou obě na seznamu. V PA uvažujme následovně: $\overline{\varphi}$ i $\overline{\chi}$ jsou na seznamu v kroku m a přitom žádné z těchto gödelovských čísel nebylo vydáno g v kterémkoli kroku $\leq m$. Z konstrukce f vyplývá, že $\overline{\neg\varphi}$ je vydáno před $\overline{\varphi}$ iff $\overline{\neg\chi}$ je vydáno před $\overline{\chi}$ (stejná podmínka pro obě formule). Platí proto ovšem i $\varphi \leftrightarrow \chi$. $\square$

Není jasné, jestli nastává situace odpovídá Větě 9 nebo Větě 10.

Tímto se zakončuje tato práce zkoumající rosserovskou autoreferenci a logiku R. Jako hlavní výsledek jsem s pomocí autoreference v množném čísle ukázali Větu o aritmetické úplnosti Rosserovy logiky, se kterou můžeme považovat náš výzkum logiky R za přínosný. Kapitola, zabývající se vlastnostmi rosserovských sentencí, pak představuje možný směr, kterým se mohou ubírat další zkoumání.

Výzkum autoreference tímto samozřejmě zdaleka není vyčerpán další autoreferenční sentence představují například Petr Hájek a Marie Hájková [4], nebo zeslabení logiky R na logiku Z, které představuje Vítězslav Švejdar [11].

Reference

[1] George Boolos and Giovanni Sambin. Provability: The emergence of a mathematical modality. *Studia Logica L*, 1:1–23, 1991.

[2] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37:349–360, 1931.

[3] David Guaspari and Robert M. Solovay. Rosser sentences. *Annals of Math. Logic*, 16:81–99, 1979.

[4] Petr Hájek and Marie Hájková. On interpretability in theories containing arithmetic. *Fundamenta Mathematicae*, 76:131–137, 1972.

[5] David Hilbert and Paul Bernays. *Grundlagen der Mathematik*. Springer, New York, 2nd edition, 1968.

[6] M. H. Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *J. Symbolic Logic*, 20:115–118, 1955.

[7] Craig Smoryński. *Self-Reference and Modal Logic*. Springer, New York, 1985.

[8] Robert M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel J. Math.*, 25:287–304, 1976.

[9] Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost a nutnost*. Academia, Praha, 2002.

[10] Vítězslav Švejdar. A note on arithmetical completeness of theories with rosser modalities. *Miscellanea Logica V*, pages 123–132, 2003. ISBN 80-246-0799-9.

[11] Vítězslav Švejdar. On modal systems with rosser modalities. *The Logica Yearbook 2005*, pages 203–214, 2006.