

# Lukáš Holík, *Aritmetická úplnost logiky R*

(V. Švejdar, posudek vedoucího na magisterskou práci, září 2014)

Logika dokazatelnosti je modální logika, jejíž aritmetická sémantika je založena na tom, že modalita nutnosti se interpretuje jako dokazatelnost v Peanově aritmetice nebo jiné formální teorii. Logika dokazatelnosti je dnes známou a dobře probádanou logikou se zajímavými aplikacemi: s její pomocí lze dokázat či vysvětlit vlastnosti autoreferenčních sentencí a vyřešit i určité obecné problémy spojené s autoreferenční metodou. Logika dokazatelnosti je ale aplikovatelná pouze na gödelovské autoreferenční sentence, kterých vlastně není tak mnoho.

Logika R je rozšířením logiky dokazatelnosti o tzv. rosserovské modalitě neboli modalitě srovnávání svědků. Je aplikovatelná i na Rosserovu sentenci (která o sobě tvrdí, že před každým jejím důkazem existuje důkaz její negace) a na další podobné sentence, které tvrdí něco nejen o dokazatelnosti, ale případně i o tom, co má jak velký důkaz. Logika R je méně známá a méně populární než logika dokazatelnosti, avšak také má zajímavé aplikace. Cílem práce bylo podat čitelný výklad logiky R a jejích některých vlastností a aplikací, a zejména dle návodu poskytnutého vedoucím práce podat vlastní čitelnou verzi věty o aritmetické úplnosti logiky R, kterou dokázali Guaspari a Solovay.

Tento cíl je splněn a práci proto *doporučuji* k obhajobě.

Práce je psána dobrým jazykem a celkem bez gramatických chyb. Podstatné výsledky vyloženy jsou. Kladně hodnotím pasáž o neekvivalentních rosserovských sentencích, které jsou  $\Sigma_1$  (str. 29 a 30). Tento výsledek mi není známý ani povědomý. Práce ale bohužel není zvláště dobře čitelná a lze k ní mít řadu výhrad. Snadno by například bylo možné odstranit některé nevhodné řádkové lomy, třeba před posledním písmenem věty. Použití dvojité šipky mimo matematický symbolismus, místo slov “pak” či “pokud-pak”, pokládám za nevhodné a někdy to (bod (iv) v Definicí 7) opravdu hodně zhoršuje čitelnost. Poměrně četné odkazy k mé knize [9] mě, musím říci, ne vždy těší, čtenář by spíše ocenil odkaz k původnímu zdroji. Ale když už, bylo možné se důsledněji držet některých formulací a značení: *accessible* se v souvislosti s kripkovskými modely překládá jako dosažitelný (nikoliv dostupný), druhý pád od lemma je lemmatu, *section* doporučuji překládat jako oddíl. Místo “platí ve vrcholu” bych psal “je splněna ve vrcholu”.

V práci je poměrně velké množství nepřesných formulací. Nelze říci “jazyk je složen z atomů výrokovými spojkami”. Věta uprostřed str. 17, začínající “Řekneme”, je zcela nesrozumitelná. Také důkaz Důsledku 3 na str. 19 je nesrozumitelný. Do znění Definicí 1 na str. 7 je vlastně vložena i věta o aritmetické úplnosti logiky dokazatelnosti.

Pro tuto práci je obtížné navrhnout klasifikaci. Aritmetická úplnost logiky R je obtížná věta, problematika z oddílu 5.3 je, pokud vím, v českém prostředí úplně

neznámá. Myslím, že autor by při obhajobě měl dát najevo, že těmto obtížnějším výsledkům (jak přesně se v důkazu Věty 8 uplatňuje autoreference a kde se vzala funkce  $h$ , nebo co je obsahem oddílu 5.2, nebo co je obsahem oddílu 5.3) opravdu rozumí. Já o tom vzhledem k naší spolupráci v posledním školním roce nepochybuji, ale měl by o tom přesvědčit i komisi. A měl by komisi přesvědčit i o tom, že nějakou takovouto obtížnější problematiku dovede i vysvětlit. Pro určitost navrhuji klasifikaci *velmi dobře*, ale podle průběhu obhajoby bych počítal se změnou tohoto návrhu.

V Praze 10.9.2014

doc RNDr Vítězslav Švejdar CSc