

# Posudek diplomové práce Lukáše Holíka „Aritmetická úplnost logiky $R$ “

Mgr. Marta Bílková (oponentka)

13. září 2014

Předložená diplomová práce se zabývá modálními logikami dokazatelnosti s rosserovskými modalitami, konkrétně logikami  $R$  a  $R^-$  zavedenými v článku [3] Guaspariho a Solovaye. Z tohoto článku také práce, obsahem i strukturou, převážně vychází.

Autor nejprve, po úvodní kapitole týkající se autoreference a logiky dokazatelnosti, zavede rosserovské modality, axiomatically popíše logiky  $R$  a  $R^-$  (zde je drobným přínosem vysvětlení ekvivalence původní axiomatiky  $R^-$  z článku [3] a axiomatiky zavedené V. Švejcarem v článku [10]), a v příkladu 7 ilustruje axiomatiky důkazem formalizované Rosserovy věty. Důkaz v příkladu je však nečitelný: není jasné, co se myslí tím, že důkaz je veden sporem. Odvozená formule na řádku 5 není dokazovaná formule (kterou není těžké dokázat přímo) ani jí ekvivalentní formule. Co se myslí „porušením nezávislosti“? Podformule  $\Box p \wedge \neg \Box \neg p$  formule na řádku 5 to jistě není. Jak je odvozen řádek 5 z řádků 1, 2, 4?

Práce pokračuje výkladem Kripkovské sémantiky logik s rosserovskými modalitami. Problém této části práce vidím v tom, že je téměř doslova reprodukována z článku [3], včetně příkladů a včetně vedení všech důkazů. Vysvětluji si to nezkušeností a nejistotou autora v psaní vlastních textů. Pokud autor považuje za nutné reprodukovat tuto část doslova, měl by pro to mít silné důvody a uvést a vysvětlit je přímo v kapitole 3 (práce [3] je sice řádně citována, ale jen na začátku textu a bez konkrétních odkazů k jednotlivým tvrzením).

Hlavním přínosem práce se zdá být důkaz aritmetické úplnosti logiky  $R$  v kapitole 4. Důkaz v práci obsažený je jiný než ten v článku [3], a je inspirován Solovayovým důkazem aritmetické úplnosti logiky dokazatelnosti  $GL$  (jejímž rozšířením logika  $R$  je) z článku [8]. Jedná se o poměrně obtížný výsledek, je autorův vlastní? Oceňuji, že jej autor zvládl korektně vyložit. Bohužel jej však nezvládl vyložit příliš čitelně, výklad dokonce vzbuzuje pochybnosti, zda problematice skutečně do hloubky rozumí: to, že budeme sentence  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  definovat na základě čísel  $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}$  je neobratně formulováno a je to matoucí. V definici funkce a dále v důkazu  $g$  autor zaměňuje symboly uspořádání na přirozených číslech  $<$  a uzlech modelu  $<$ , uzly modelu nejprve značí  $a_i$  a posléze  $i$ , což mate čtenáře. Co se myslí tím, že sentenci  $\lambda_i$  definujeme jako  $PA \vdash \lambda_i \equiv \lim g = \overline{i}$ ? Není tak jasné,

zda  $\lambda_i$  je definována jako  $\lim g = \bar{i}$ , nebo jako  $\overline{Pr_\pi(\lambda_i \equiv \lim g = \bar{i})}$ . Nejlepší by bylo definici sentencí  $\overline{\lambda_0}, \dots, \overline{\lambda_n}$  rozepsat tak, aby dávala smysl následující věta, že „v definicích všech sentencí  $\overline{\lambda_0}, \dots, \overline{\lambda_n}$  vystupují numerály  $\overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_n}$  ale ne numerál  $\overline{\lambda_0}$ “. To, že každá  $\lambda_i$  je s *PA* bezesporná by bylo dobré zdůvodnit. Kde se vezme funkce  $h$  a jaká je její role? Je to (totální) rekurzivní funkce? Na straně 26 dole se tvrdí, že může nastat, že  $\exists x(Pr_\pi(x) \not\equiv Pr(x))$ , ale posléze se ukáže, že jsou oba predikáty dokazatelnosti ekvivalentní. V Lemmatu 7 a 8 koliduje značení  $B$  a  $\Box B$ . Mám dojem, že bez předchozí znalosti Solovayova důkazu aritmetické úplnosti logiky dokazatelnosti je autorem podaný důkaz těžko pochopitelný.

V poslední kapitole se autor věnuje rosserovským sentencím, vychází zde opět z článku [3]: zde v části 5.2 skutečně autor doplnil některé části důkazu, které se v článku [3] nevyskytují, konkrétně protipříklady v důkazu Lemmatu 10 a) a c).

K části 5.3 mám poznámku: v článku Christophera von Bülow „A Remark on Equivalent Rosser Sentences“, *APAL*, Volume 151, 2008, pp 62–67, je ukázáno, že podmínka (+) v článku [3, strana 97] je příliš slabá, a jak ji opravit, aby výsledek platil.

Jsem poněkud na rozpacích, jak předloženou práci hodnotit. Na jedné straně pravděpodobně obsahuje vlastní ne zcela triviální přínos autora, a sice výklad důkazu aritmetické úplnosti logiky  $R$  v duchu Solovayova důkazu aritmetické úplnosti logiky dokazatelnosti, a některé další doplněné detaily, které v článku [3] chybí. Na druhé straně celé pasáže článku [3] opakuje téměř doslovně, a vlastní výklad není veden zcela přesvědčivým způsobem. Připadá mi, že po vícetím čtení a konzultacích se školitelem mohla být práce podstatně lepší. Práci doporučuji k obhajobě a navrhuji hodnotit známkou „dobře“. Pokud během obhajoby autor přesvědčí mě i komisi, že tématu skutečně rozumí (například reakcí na výše uvedené námitky a otázky), jsem ochotná hodnocení o stupeň zvýšit.

V Brnkách 12.9.2014

Marta Bílková