Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Libor Peltan

Eliptické systémy rovnic s anizotropním potenciálem: existence a regularita řešení

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Studijní program: matematika

Studijní obor: matematická analýza

Praha 2014

Poděkování. Děkuji předně doc. Pertu Kaplickému Ph.D. za obětavé vedení práce, mnoho rad a výtek a výjimečnou trpělivost, s níž diskutoval mé nápady. Dále děkuji svým blízkým za to, že je mám. Nakonec děkuji Matfyzu a všem matfyzákům za to, co jsem při studiu zažil :)

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Název práce: Eliptické systémy rovnic s anizotropním potenciálem: existence a regularita řešení

Autor: Libor Peltan

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D., KMA

Abstrakt: Stručně shrneme dosavadní výsledky v teorii regularity minimizérů eliptických variačních funkcionálů. Předvedeme důkaz existence a regularity takového funkcionálu za předpokladu kvazikonvexity a izotropních růstových odhadů, diskutujeme možnost zobecnění na anizotropní případ. Důkaz je kompilací z více zdrojů, upraven s cílem v jednoduchosti, čitelnosti a detailním rozboru jednotlivých kroků.

Klíčová slova: variační funkcionál, minimizér, regularita, existence, variační počet

Title: Elliptic systems with anisotropic potential: existence and regularity of solutions

Author: Libor Peltan

Department: Department of Mathematical Analysis

Supervisor: doc. Mgr. Petr Kaplický, Ph.D.

Abstract: We briefly summarize existing result in theory of minimizers of elliptic variational functionals. We introduce proof of existence and regularity such functional under assumptions of quaziconvexity and izotrophic growth estimates, and discuss possiblůe generalization to anizotropic case. Our proof is a compilation from more sources, modified in order of simplicity, readability and detailed analysis of all steps.

Keywords: variational functional, minimizer, regularity, existence, calculus of variations

Obsah

Úvod

Cílem této práce je zmapovat existující důkazy regularity minimizérů eliptických variačních funkcionálů, a tuto problematiku přiblížit širšímu publiku: například i studentům, kteří se seznámili se základní teorií parciálních diferenciálních rovnic a základy variačního počtu. Prostředkem bude rozebrání konkrétního, vhodně vybraného důkazu existence a regularity, za podrobnějšího popsání jednotlivých kroků.

Historie zkoumání regularity minimizérů variačních funkcionálů je velmi poutavě popsána v [3].

V aplikacích na fyzikální problémy se někdy ukazuje výhodnější nepracovat s úlohami diferenciálních rovnic, ale s úlohami hledání minimizující funkce u (z nějaké třídy) eliptického funkcionálu typu

$$G(u) = \int g(x, u, \nabla u)$$

kde funkce g bývá spojitá a direfencovatelná, zato minimizér je a priori jen v nějakém Sobolevově prostoru a jeho lepší regularitu (vlastně i existenci) je potřeba dokázat. K tomu je potřeba dalších informací o úloze, které ze zadání obdržíme: konvexitu, či nějaký typ kvazikonvexity pro g ve třetí složce; růstové podmínky pro g, které mohou být buď izotropní (růst zdola i shora je odhadnut stejnou mocninou, ale různou konstantou), nebo anizotropní (růst shora je odhadnut větší mocninou (zpravidla ne libovolně větší, ale jen "o něco") než dolní i než s jakou je integrovatelný ∇u).

Typickým postupem důkazu regularity je nejprve si definovat exces (konkrétní definice se liší v závislosti na konkrétní úloze), což je veličina značící, jak moc se lokálně liší ∇u od svého průměru, a pak dokázat Main lemma, které zajistí, že kromě singulárních bodů, kde chování u můžeme stěží kontrolovat (viz dále), se exces vhodným způsobem zmenšuje při zmenšování koule, na němž ho počítáme. Z tohoto chování lze vyvodit Campanatova podmínka Hölderovské regularity, takže ve výsledku získáme, že minimizér je Hölderovsky spojitý až na malou množinu singulárních bodů.

Jednotlivé důkazy regularity se pak liší zejména tím, jakým způsobem dokazují Main lemma. Možné přístupy se dají rozdělit do třech základních strategií:

První z nich je přímá metoda. Je popsána v knize [2]. Minimizér "testujeme" vhodnou funkcí, z čehož spolu s dostatečnou diferencovatelností a konvexitou g přímo odvodíme odhad excesu. Používáme při tom techniku reverzní Hölderovy nerovnosti.

Druhou strategií je nepřímá metoda. Odkážeme například na [10]. Pro spor máme posloupnost zmenšujících se koulí, na nichž exces vyhovuje zadaným podmínkám, ale nezmenšuje se jak je požadováno. Škálováním těchto koulí (a odpovídajícím škálování minimizéru) na stejný poloměr získáme konvergentní posloupnost funkcí, o níž (a její limitě) zjistíme dodatečnou informaci a ta nám pomůže zpětně vyvodit spor.

Nejmodernější strategií je $\mathcal{A}$-harmonická aproximace. Představena byla v článku [6] a další zajímavé výsledky jsou v [14]. $\mathcal{A}$-harmonicita je obecnější vlastnost k harmonicitě s tím, že místo standardního skalárního součinu bereme jiný – v našem případě daný maticí druhého gradientu g v bodě průměru ∇u (na kouli).

O minimizéru nepřímou metodou ukážeme, že je v jistém smyslu aproximovaný $\mathcal{A}$-harmonickou funkcí, a z jejích speciálních vlastností už přímo získáme odhad excesu.

Výše jsme zmínili problém singulárních bodů. Je možné dokázat za dostatečně obecných podmínek Hölderovskou regularitu na celé zadané oblasti? Negativní výsledky najdeme jako součást příběhu v [3], přehledně jsou rovněž popsány v [1, str. 54-63]. Z nedávných výsledků v oblasti protipříkladu na regularitu na celé oblasti bych zmínil [12], kde konstruují ne-Lipschitzovský minimizér funkcionálu $u \mapsto \int_\Omega f(\nabla u)$, kde f je hladká a uniformně konvexní (tj. uniformní odhad na druhou derivaci).

V této práci rozebereme důkaz existence a částečné (tj. až na množinu nulové míry) Hölderovské regularity minimizéru eliptického funkcionálu ve velmi typickém případě

$$F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)$$

ve třídě funkcí $W^{1,p}(\Omega)$ ($p \in (\frac{6}{5}, \infty)$), za izotropních růstových podmínek

$$\frac{1}{c}|\xi|^p \leq |f(\xi)| \leq c(1 + |\xi|^p)$$

Jde sice o ne právě nejobecnější případ, ale cílem je jednoduchost, pochopitelnost hlavních myšlenek a detailní popis všech kroků.

Hlavní ideje důkazu jsou v případě existence převzaty z [4] a v případě regularity z [5] (důkaz věty o $\mathcal{A}$-harmonické aproximaci je zkompilován z [6] a [7], některá obecněji známá tvrzení z dalších zdrojů). Některé kroky důkazu jsou však vedené vlastní cestou. Protože je ve [5] důkaz pro anizotropní růstové podmínky, bude možné srovnat a popsat, jaké těžkosti přinášejí a jak je možné se s nimi vyrovnat.

Na druhou stranu pro případ funkcionálu závislého i na (x, u) odkážeme na [15, 13].

Na závěr úvodu bych rád zmínil [8], kde je veden důkaz rovněž pro anizotropní podmínky a rovněž $\mathcal{A}$-harmonickou aproximací, ale celý je uzavřen v teorii $L^{\varphi(x)}$ prostorů, která se jeví být mocným nástrojem i v této problematice.

1. Definice a lemmata

1.1 Úmluvy

Úmluva. Proměnná p bude dále představovat obecně zvolenou avšak stále stejnou hodnotu větší než šest pětin. Proměnné n, N jsou předem zafixovaná přirozená čísla a znak Ω značí libovolnou předem zafixovanou Lipschitzovskou ($\mathcal{C}^{0,1}$) oblast v $\mathbb{R}^n$. Pojem "funkce", nebude-li nějak upřesněn, značí funkci z Ω do $\mathbb{R}^N$. Všechny následující definice a tvrzení platí pro všechna $p \in (\frac{6}{5}, n)$, pokud v předpokladech není uvedeno, že platí jen pro p v určitém rozsahu.

Symbol c nemá roli proměnné, ale označuje vždy nějakou (tvrdíme že existující) kladnou konstantu, závisející jen na veličinách v daném kontextu zafixovaných. Pro kratší zápis definujeme ještě pár relací:

$$A \prec B \Leftrightarrow A \leq cB$$

$$A \sim B \Leftrightarrow A \prec B \prec A$$

Může se stát, že u Lebesgueovských funkcí (z L^p či $W^{1,p}$ prostorů) použijeme supremum (přes množinu M). V takovém případě máme na mysli samozřejmě esenciální supremum, to jest infimum pro $M' \subset M : |M'| = |M|$ ze suprem přes M'. To samé platí pro infima.

Kouli se středem x_0 a poloměrem R značíme $B(x_0, R)$ nebo $B_R(x_0)$. Tento zápis z praktických důvodů někdy zkracujeme, nedojde-li tím k možné nejednoznačnosti: na B_R, pokud je zřejmý (nebo na něm nezáleží) střed koule; na B, pokud je jasný i poloměr. Zvláštní znak $B/2$ značí $B_{R/2}$.

Nakonec, značme $\mathbb{R}^+$ reálný interval $(0, \infty)$, resp. $\mathbb{R}^{0+}$ interval $[0, \infty)$.

1.2 Kvazikonvexita a minimizér

Definice. *Funkce $f : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ je $W^{1,p}$-kvazikonvexní, pokud platí pro každou $A \in \mathbb{R}^k, \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$*

$$f(A) \leq \fint_\Omega f(A + \nabla\varphi)$$

Definice. *Funkcionál $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ je $W^{1,p}$-slabě sekvenciálně zdola polospojitý, když každá slabě konvergentní posloupnost $u_i \to u$ funkcí z $W^{1,p}(\Omega)$ splňuje*

$$F(u) \leq \liminf_{i\to\infty} F(u_i)$$

Definice. *Řekneme, že funkce f z $\mathbb{R}^{nN}$ do $\mathbb{R}$ je na oblasti $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ striktně $W^{1,p}$-kvazikonvexní, když pro každé $M > 0$ existuje $\lambda_M > 0$, že pro všechny koule $B_R \subset \Omega_0$, všechny body $A \in \mathbb{R}^N, |A| \leq M + 1$ a všechny funkce $\varphi \in W_0^{1,p}(B_R)$ platí*

$$\fint_{B_R} f(A + \nabla\varphi) \geq f(A) + \lambda_M \fint_{B_R} |V(\nabla\varphi)|^2$$

Definice. *Funkce $u \in W^{1,p}(\Omega)$ je $W^{1,p}$-minimizér funkcionálu F na Ω, je-li $F(u) \leq F(u + \varphi)\ \forall\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$.*

1.3 Růstový odhad

Lemma 1. *Je-li $u \in L^p(\Omega_0)$, platí pro skoro všechna $x \in \Omega_0$ při $R \to 0$*

$$\fint_{B(x,R)} |u - (u)_{B(x,R)}|^p \to 0$$

Důkaz. Zafixujeme $\varepsilon > 0$. Na Ω_0 aproximujeme funkci u spojitými funkcemi u_i, že $\|u_i - u\|^p_{L^p(\Omega_0)} \leq \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon)n2^i}$. ($c(\varepsilon)$ upřesníme s definicí později, nebude záviset na u_i) Odhadneme

$$\fint_{B(x,R)} |u - (u)_{B(x,R)}|^p \leq$$

$$\leq \fint_{B(x,R)} |u - u_i|^p + \fint_{B(x,R)} |u_i - (u_i)_{B(x,R)}|^p + |(u_i)_{B(x,R)} - (u)_{B(x,R)}|^p$$

zde třetí integrál je menší nebo roven prvnímu. Zásadní problém spočívá v tom, že kdybychom nyní chtěli nejprve $i \to \infty$, druhý integrál se vrátí do stavu ze zadání, naopak když pošleme jako první $R \to 0$, neumíme odhadnout první z integrálů lépe než nekonečnem.

Proto vstupuje do hry Hardy-Littlewoodova maximální funkce

$$\mathcal{M}(w)(x) := \sup_{r>0} \fint_{B(x,r)} w$$

o níž je víme

$$|\{x \in \Omega_0 : \mathcal{M}(w)(x) > \eta\}| \leq c(\eta)n \int_{\Omega_0} |w|$$

Značíme M_i množiny $\{x \in \Omega_0 : \mathcal{M}(|u_i - u|^p)(x) > \frac{\varepsilon}{3}\}$. Pro $x \in \Omega \setminus \bigcup_i M_i$ jsou u_i při malých R na $B(x,R)$ stejnoměrně spojité, takže nezávisle na X odhadneme

$$\fint_{B(x,R)} |u - (u)_{B(x,R)}|^p \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Na druhou stranu vidíme, že míra sjednocení $\bigcup_i M_i$ je menší než ε, které nakonec "pošleme" k nule. □

Lemma 2. *Pro $f \in L^p(\mathbb{R}^{nN}) \cap \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{nN})$ kvazikonvexní, $f(\psi) \leq c(1 + |\psi|^p)$, $\xi, \eta \in \Omega$ platí:*

$$|\nabla f(\xi)| \prec 1 + |\xi|^{p-1}$$

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq c(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1})|\xi - \eta|$$

Důkaz. Pro $j \in \{1, \dots, n\}$ je funkce jedné složky $\Theta_{j,\xi}(t) := f(\xi + te_j)$ (kde e_j je j-tý kanonický vektor) díky kvazikonvexitě f konvexní funkce reálné proměnné, takže

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(\xi) = \Theta'_{j,\xi}(0) \leq \frac{\Theta_{j,\xi}(t) - \Theta_{j,\xi}(0)}{t}$$

Volbou $t := |\xi| + 1$ a dosazením dostaneme $|\frac{\partial f}{\partial \xi_j}(\xi)| \prec 1 + |\xi|^{p-1}$, z čehož plyne první tvrzení. Druhé se už odvodí jednoduše z věty o střední hodnotě.

□

1.4 Funkce V

Použití funkce V v důkazech regularity není nutné [10, 11, ...], ale poměrně časté [9, 5, ...]. V naší práci s funkcí V pracujeme, i proto, abychom ilustrovali její použití.

Definice. *Definujeme funkci* $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *předpisem*

$$V(\xi) := (1 + |\xi|^2)^{\frac{p-2}{4}} \xi$$

Tvrzení 1. *(Vlastnosti V) Pro funkci V platí:*

1. *je v normě neklesající*
2. $|V|^\alpha$ *je konvexní pro* $\alpha \geq 2$
3. $|V(A + B)| \prec |V(A)| + |V(B)|$
4. $|V(t\xi)|^2 \in [min\{|t|^2, |t|^p\} |V(\xi)|^2, max\{|t|^2, |t|^p\} |V(\xi)|^2]$
5. *speciálně* $|V(\xi)|^2 \prec |\xi|^2 + |\xi|^p$
6. *pro* $p \geq 2$ *platí* $\max(|\xi|^2, |\xi|^p) \leq |V(\xi)|^2 \leq c(p) \max(|\xi|^2, |\xi|^p)$
7. *pro* $p \leq 2$ *platí* $\frac{1}{2} \min(|\xi|^2, |\xi|^p) \leq |V(\xi)|^2 \leq \min(|\xi|^2, |\xi|^p)$
8. *tudíž pro* $\xi \leq 1$ *shrneme* $|\xi|^2 \prec |V(\xi)|^2 \prec |\xi|^{\min(2,p)} \leq 1$
9. *a podobně také* $|V(\xi)| \prec (1 + |\xi|^p)$, $|\xi|^p \leq |V(\xi)|^2 + 1$
10. *funkcionál* $\xi \mapsto \int |V(\nabla\xi)|^2$ *je slabě sekvenciálně zdola polospojitý*

Důkaz. 1 ukážeme zderivováním reálné funkce $t \mapsto (1 + t^2)^{\frac{p-2}{4}} t$.

2 pro $\alpha = 2$ se ověří dvojím zderivováním reálné funkce $t \mapsto (1 + t^2)^{\frac{p-2}{2}} t^2$ – druhá derivace vyjde pro $t > 0$ nezáporná (včetně degenerovaných případů $p = 2$ a $p = 6$). Pro vyšší α pak máme složení již konvexní funkce s funkcí $z \mapsto z^{\alpha/2}$, jež je rovněž konvexní.

3: BÚNO je $|A| \geq |B|$, pak z 1 a 4

$$|V(A + B)| \leq |V(2A)| \prec |V(A)|$$

4: pro $p > 2\&|t|^2 \leq 1$ a $p \leq 2\&|t|^2 > 1$ odhadneme takto:

$$|V(t\xi)|^2 \leq |(1 + |\xi|^2)^{\frac{p-2}{4}} t\xi|^2 \leq |t|^2 |V(\xi)|^2$$

a pro $p > 2\&|t|^2 > 1$ a $p \leq 2\&|t|^2 \leq 1$ takto:

$$|V(t\xi)|^2 \leq |(|t|^2 + |t\xi|^2)^{\frac{p-2}{4}} t\xi|^2 \leq |t|^p |V(\xi)|^2$$

dolní odhady analogicky.

6, 7: se snadno ověří při rozebrání případů $p \leq 2$ a $p \geq 2$ pro $|\xi| \leq 1$ a $|\xi| \geq 2$.

10: díky 2 a 9 splňuje $|V|^2$ předpoklady věty 1 (viz dále). □

Poznámka. Důkaz bodu 2 tohoto tvrzení je právě to jediné místo, kde potřebujeme předpoklad $p > \frac{6}{5}$ (jinak bychom si vystačili s $p > 1$). Zvídavý čtenář si po prostudování jeho použití rozmyslí, jestli by bylo možné použít následující trik: funkce $W(\xi) := (1 + |\xi|)^{p-1}\xi$ je v absolutní hodnotě konvexní i s exponentem rovným jedné (či vyšším) a to pro libovolné $p > 1$. Na druhou stranu je ale s V ekvivalentní: $W \sim V$.

2. K existenci

2.1 Slabá zdola polospojitost

Věta 1. *Nechť je f $W^{1,p}$-kvazikonvexní splňující*

$$0 \leq f(\xi) \prec (1 + |\xi|^p)$$

pak je funkcionál $u \in W^{1,p}(\Omega) \mapsto F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)$ $W^{1,p}$-slabě sekvenciálně zdola polospojitý.

Důkaz. Máme $u_i \to u$ slabě ve $W^{1,p}(\Omega)$, chceme $F(u) \leq \liminf_{i\to\infty} F(u_i)$. Budeme postupovat od jednodušších případů k obecnějším. Nejprve je $\nabla u = \xi$ na Ω konstantní, a navíc $u_i - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pro každé i.

V nerovnosti z definice kvazikonvexity $f(\nabla u) \leq \fint_\Omega f(\nabla u + \nabla\varphi)$ si zvolíme $\varphi = u_i - u$ a obě strany přeintegrujeme přes Ω. Nakonec vpravo připíšeme lim inf a je to.

Nyní máme stále konstantní gradient u, už se však u u_i mohou lišit hodnoty na hranici.

Zafixujeme $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $K \in \mathbb{N}$, $\Omega_j := \left\{x \in \Omega, dist(x, \Omega_0) < \frac{j}{K} dist(\partial\Omega, \Omega_0)\right\}$, $\eta_j \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ seřezávací funkce rovna nule mimo Ω_j a jedničce na Ω_{j-1} mající $|\nabla\eta_j| \leq C_{\Omega_0} K$. Definujeme $u_{ij} := u + \eta_j(u_i - u)$.

Pomocí definice $W^{1,p}$-kvazikonvexity odhadneme volbou $\varphi := u_{ij} - u$ a přeintegrováním přes Ω pro libovolné $j = 1 \dots K$

$$\int_\Omega f(\nabla u) \leq \int_\Omega f(\nabla u_{ij})$$

pak rozřezáním na případy (zvětšíme integrační obory vpravo)

$$\int_\Omega f(\nabla u) \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_0} f(\nabla u) + \int_{\Omega_j\setminus\Omega_{j-1}} f(\nabla u_{ij}) + \int_\Omega f(\nabla u_i)$$

V prostředním ze tří vzniklých integrálů integrand rozvineme (dosazením za u_{ij} při $|\nabla\eta_j| \prec K$)

$$f(\nabla u_{ij}) \prec 1 + |\nabla u_{ij}|^p \prec 1 + |\nabla u|^p + |\nabla u_i|^p + K^p|u_i - u|^p$$

abychom po sečtení celé nerovnosti přes $j = 1 \dots K$ a vydělení K získali

$$\int_{\Omega_0} f(\nabla u) \leq \int_\Omega f(\nabla u_i) + \frac{c}{K}\int_\Omega (1 + |\nabla u|^p + |\nabla u_i|^p + K^p|u_i - u|^p)$$

Trik je nakonec v tom, že nejprve aplikujeme na obě strany $\liminf_i$, čímž se díky kompaktnosti vnoření L^p do $W^{1,p}$ zbavíme členu $K^p|u_i - u|^p$ a až poté $\lim_{K\to\infty}$, pročež poslední integrál zmizí k nule. Protože jsme Ω_0 volili libovolně, můžeme ho nakonec supremovým přechodem vlevo nahradit za Ω. Tím jsme vyřešili případ konstantního ∇u.

Pro důkaz nejobecnějšího případu nejprve opět volíme $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, dále, fixujíce $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{2}$-aproximujeme (v L^p-normě) ∇u pomocí spojité $\tilde{u}$ (pozor, $\tilde{u}$ zde "odpovídá" ∇u a ne u), a v této situaci pokryjeme Ω_0 krychličkami Ω_j tak, že definujeme-li (konstantní) matice $U_j := \fint_{\Omega_j} \tilde{u}$, vyjde nám $\sum_j \int_{\Omega_j} |\tilde{u} - U_j|^p < \frac{\varepsilon}{2}$ máme tak $\sum_j \int_{\Omega_j} |\nabla u - U_j|^p \leq \int_{\Omega_0} |\nabla u - \bar{u}| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Nyní definujeme $v_i(x) := u_i(x) - u(x) + U_j x$ pro $x \in \Omega_j$. Máme slabě ve $W^{1,p} : v_i(x) \to v(x) := U_j x$. Na jednotlivých krychličkách tedy můžeme použít předchozí krok s konstantním gradientem v a po sesumení je $\sum_j \int_{\Omega_j} f(v) \leq \liminf \sum_j \int_{\Omega_j} f(\nabla v_n)$ (zaměnili jsme liminf a konečnou sumu). Zbývá zjistit, že přechodem od u_n k v_n, resp. od u k v, jsme se dopustili malé chyby. Odhadneme $|\int_\Omega f(\nabla u_i) - \int_\Omega f(\nabla v_i)|$, druhý případ je podobný.

Po aplikaci lemmatu 2 použijeme Hölderovu nerovnost:

$$\int_\Omega (1 + |\nabla u_i|^{p-1} + |\nabla v_i|^{p-1}) |\nabla u_i - \nabla v_i| \leq$$

$$\prec \left(\int_\Omega (1 + |\nabla u_i| + |\nabla v_i|)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} (\sum_j \int_{\Omega_j} |\nabla u - U_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq c\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

díky $\nabla u_i, \nabla v_i \in L^p$. Nakonec přejdeme od Ω_0 k Ω jako v minulém kroku a jsme hotovi.

□

2.2 Existence

Věta 2. *Nechť je f $W^{1,p}$-kvazikonvexní splňující*

$$|\xi|^p \prec f(\xi) \prec (1 + |\xi|^p)$$

a $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ je daná (okrajová podmínka). Pak F nabývá na množině funkcí

$$\left\{ v \in W^{1,p}(\Omega) : v - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \right\}$$

minima.

Důkaz. Je znám jako základní věta variačního počtu.

Protože je f a tedy i F zdola omezený nulou, má nezáporné infimum, a tedy nezápornou minimizující posloupnost $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ (to znamená $\liminf F(u_k) = \inf_{v \in W^{1,p}(\Omega)} F(v)$).

Protože je od určitého k výše $\int_\Omega |\nabla u_k|^p \prec \int_\Omega f(\nabla u_k) \leq \inf_{v \in W^{1,p}(\Omega)} F(v) + 1$ a tedy u_k ve $W^{1,p}(\Omega)$ omezená (díky odhadu na gradient a fixované okrajové podmínce), lze vybrat (stále minimizující) slabě konvergentní podposloupnost, a díky sekvenciální zdola polospojitosti F z věty 1 bude její limita hledaným minimizérem. □

Poznámka. Obecnější větu o existenci pro $f = f(x, u, \nabla u)$ lze najít například v [4, Theorem 1.2].

3. A-harmonická aproximace

3.1 Definice a regularita A-harmonické funkce

Úmluva. V následujícím bude $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}_k$, $\bar{\mathcal{A}}$) vždy označovat bilineární formu takovou, že pro od nynějška zafixovaná kladná λ, Λ platí

$$|\mathcal{A}| < \Lambda; \;\; \mathcal{A}(\xi x^T, \xi x^T) \geq \lambda |x|^2 |\xi|^2$$

Normou bilineární formy dále značíme její normu jakožto zobrazení, to znamená

$$|\mathcal{A}| := \sup_{x,y \in \mathbb{R}^{n\times N}\setminus\{0\}} \frac{|\mathcal{A}(x,y)|}{|x||y|}$$

Konvergencí bilineárních forem dále míníme konvergenci v této normě.

Definice. *Funkce h je na oblasti Ω_0 $\mathcal{A}$-harmonická, pokud je $W^{1,1}(\Omega_0)$ a pro všechna $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_0)$ platí*

$$\int \mathcal{A}(\nabla h, \nabla \varphi) = 0$$

Tvrzení 2. *(Vlastnosti $\mathcal{A}$-harmonických funkcí)*

Je-li $h \in W^{1,1}(B_R)$ $\mathcal{A}$-harmonická na kouli B_R, je $\mathcal{C}^\infty$ a pro $\kappa \in (0,1)$, za definice $R_2 := \kappa R$ platí

$$\sup_{B_{R_2}} |\nabla h| + R_2 \sup_{B_{R_2}} |\nabla^2 h| \leq c(\kappa)(|\nabla h|)_{B_R}$$

Důkaz. Tento důkaz zasahuje do jiného tématu a není právě krátký, proto uvedeme pouze jeho hlavní myšlenky. Detaily jsou k přečtení v [7, Lemma 5 str 436] a [9, Prop 2.10 str 10].

Pokud je $h \in W^{1,2}(B_R)$, je z teorie paricálních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty hladká. Pokud není, nasadíme na ni techniku zhlazovačů, na hladké aproximující funkce aplikujeme následující důkaz a nakonec zjistíme, že h je hladká.

V prvním kroku pomocí testování rovnice funkcí $\eta \nabla^k h$ (kde η je vhodná hladká seřezávací funkce) a λ-Λ odhadů na $\mathcal{A}$ odvodíme Cacciopoliho nerovnost pro lineární eliptické rovnice:

$$\int_{B_{\varrho-\delta}} |\nabla^{k+1} h|^2 \prec \frac{1}{\delta^2} \int_{B_\varrho} |\nabla^k h|^2$$

Druhý krok: zřetězením těchto odhadů pro (libovolně málo) zmenšující se ϱ dostaneme odhad $W^{n,2}$ normy h pomocí L^2 normy h na maličko větší kouli. Vlevo pak zaměstnáme vnoření $W^{n,2}$ do L^∞ a vpravo Hölderovu nerovnost pro jedničku a nekonečno. Zapojením iteračního lemmatu (podobného jako v kapitole 4) nakonec získáme

$$\sup_{B_{\varrho-\delta'}} |h| \prec \fint_{B_\varrho} |h|$$

Závěrečným krokem je provést stejnou úvahu pro ∇h a $\nabla^2 h$ a za použití podobného triku s Hölderovou nerovností získat požadované. $\square$

3.2 Věta o A-harmonické aproximaci

Věta 3. *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ že pro všechna $\mathcal{A}$, $s \in (0,1]$, $u \in W^{1,p}(B_R)$ splňující*

$$\fint_{B_R} |V(\nabla u)|^2 \leq s^2$$

$$\left| \fint_{B_R} \mathcal{A}(\nabla u, \nabla \varphi) \right| \leq s\delta \sup |\nabla \varphi| \; \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$$

existuje funkce h, $\mathcal{A}$-harmonická na $B_{\frac{3}{4}R}$ taková, že

$$\fint_{B_{\frac{3}{4}R}} |\nabla h| \leq c(n,p)$$

$$\fint_{B_{\frac{R}{2}}} \left| V\left(\frac{u - sh}{R} \right) \right|^2 \leq s^2 \varepsilon$$

Poznámka. Idea důkazu je převzata z [5], kde se autor s jistými korekcemi odkazuje na [6] (v případě $p \geq 2$) a [7] (v případě $p < 2$), jež nesou hlavní část důkazu. V této práci je uveden důkaz vzniklý kompilací těchto zdrojů, značně upravený a pokud možno zjednodušený.

Důkaz. Nejprve si definujeme

$$p_2' := min(2,p)$$

$$\mathcal{H}_{\mathcal{A}} := \left\{ f \in W^{1,p} : \; f \text{ je na } B_{\frac{3}{4}R} \; \mathcal{A}\text{−harmonická}, \fint_{B_{\frac{3}{4}R}} |\nabla f| \leq \tau \right\}$$

kde $\tau \geq 2$ je konstanta závisející jen na n a p upřesněná později.

BÚNO $B := B_R = B(0,1)$, jinak místo funkce u použijeme přeškálovanou $u'(x) := Ru\left(\frac{x-x_0}{R}\right)$, mající

$$\nabla u'(x) = \nabla u \left(\frac{x - x_0}{R} \right); \;\; \nabla((u')^{-1}) \left(\frac{x - x_0}{R} \right) = \nabla u(x)$$

BÚNO $\fint_{B/2} u = 0$ (jinak ji posuneme tak, aby uvedené platilo, a nakonec adekvátně posuneme aproximující h).

Pro spor mějme $\varepsilon > 0$ zafixované, $\mathcal{A}_k$ bilineární formy, $s_k \in (0,1]$ a funkce $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$: $\fint_{B/2} u_k = 0$ a předpokládejme že platí:

$$\fint_B |V(\nabla u_k)|^2 \leq s_k^2 \tag{3.1}$$

$$\left| \fint_B \mathcal{A}_k(\nabla u_k, \nabla \varphi)) \right| \leq s_k \frac{1}{k} sup|\nabla \varphi| \; \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty \tag{3.2}$$

$$\fint_{B/2} |V(u_k - s_k h)|^2 > s_k^2 \varepsilon \; \forall h \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}_k} \tag{3.3}$$

Jak je spor vlastně veden? Ve znění tvrdíme existenci $\mathcal{A}$-harmonické funkce h splňující dva odhady. Množina $\mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ je množinou funkcí, které jsou $\mathcal{A}$-harmonické a splňují první odhad – chceme tedy dojít k tomu, že nesplňují odhad druhý (jak je výše napsáno). Celá situace sporu je ještě zesložitěna tím, že věta je typu "pro každé ε existuje δ", takže musíme přejít k zafixovanému ε a posloupnosti situací takových, že δ se zmenšuje s nějakou posloupností (zde $\frac{1}{k}$) k nule.

Pro $p < 2$ tvrzením 1 body 9 a 4 zařídíme

$$\fint_B |\nabla \frac{u_k}{s_k}|^p \leq \fint_B \max(\frac{1}{s_k^2}, \frac{1}{s_k^p})|V(\nabla u_k)|^2 + 1 \leq 2$$

a pro $p \geq 2$ zřejmě $\fint |\nabla \frac{u_k}{s_k}|^2 \leq 1$, takže (přechodem k vybrané podposloupnosti) máme $\frac{u_k}{s_k} \to \bar{u} \in W^{1,p_2'}(B)$ (konvergence je silná v $L^{p_2'}(B)$ a slabá ve $W^{1,p_2'}(B)$), dalším přechodem k podposloupnosti (díky $|\mathcal{A}_k| \leq \Lambda$) konverguje i $\mathcal{A}_k \to \bar{\mathcal{A}}$.

Z výše uvedeného rovněž:

$$\fint_B |\nabla \bar{u}|^{p_2'} \leq \liminf_k \fint_B \left|\frac{\nabla u_k}{s_k}\right|^{p_2'} \leq 2 \leq \tau$$

Při $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B)$ rozepíšeme

$$\fint_B \bar{\mathcal{A}}(\nabla \bar{u}, \nabla\varphi) = \fint_B \bar{\mathcal{A}}(\nabla \bar{u} - \nabla u_k, \nabla\varphi) + \fint_B (\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_k)(\nabla u_k, \nabla\varphi) + \fint_B \mathcal{A}_k(\nabla u_k, \nabla\varphi)$$

zde jdou všechny sčítance s rostoucím k k nule: první díky slabé konvergenci $u_k \to \bar{u}$, druhý díky konvergenci $\mathcal{A}_k$ (a omezenosti posloupnosti $|\nabla u_k|$ v $L^{p_2'}(B)$), a třetí díky (3.2). Zjistili jsme tedy, že $\bar{u}$ je $\bar{\mathcal{A}}$-harmonická, a tudíž hladká (viz tvrzení 2).

Chtěli bychom teď, aby $\bar{u}$ byla $\mathcal{A}_k$-harmonická, tudíž v $\mathcal{H}_{\mathcal{A}_k}$ a mohli jsme s ní "testovat" (3.3). Obecně není, ale pomůžeme si definicí – pro jednotlivá k nezávisle si funkci $\bar{u}$ "$\mathcal{A}_k$-harmonizujeme", budeme však potřebovat ukázat, že výsledné funkce aproximují $\bar{u}$.

h_k si označíme řešení úlohy $\mathcal{A}_k(\nabla h_k, \nabla\psi) = 0$ $\forall \psi \in \mathcal{C}_0^\infty(B')$ (kde značíme $B' := B(0, \frac{3}{4})$) s okrajovou podmínkou $h_k = \bar{u}$ na $\partial B'$. To lze, protože je $\mathcal{A}_k$ eliptická a $\bar{u} \in \mathcal{C}^\infty(\bar{B}')$. Poznamenejme, že díky aproximaci $\mathcal{C}_0^\infty(B')$ funkcemi můžeme $\mathcal{A}_k$ harmoničnost h_k "testovat" i funkcemi z $W_0^{1,p}(B')$. Samozřejmě je h_k v B' hladká.

Silnou konvergenci $h_k \to \bar{u}$ ve $W^{1,2}(B')$ normě odvodíme odhadem

$$\lambda \int_{B'} |\nabla h_k - \nabla \bar{u}|^2 \leq \int_{B'} \mathcal{A}_k(\nabla h_k - \nabla \bar{u}, \nabla h_k - \nabla \bar{u}) = -\int_{B'} \mathcal{A}_k(\nabla \bar{u}, \nabla h_k - \nabla \bar{u}) =$$

$$= \int_{B'} (\bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}_k)(\nabla \bar{u}, \nabla h_k - \nabla \bar{u}) \leq |\mathcal{A}_k - \bar{\mathcal{A}}| \sup_{B'} |\nabla \bar{u}| \left(\int_{B'} |\nabla h_k - \nabla \bar{u}|^2\right)^{1/2}$$

kde první nerovnost platí z elipticity $\mathcal{A}_k$ (plynoucí z Legendre-Hadamardovy podmínky pomocí teorie Fourierovy transformace – důkaz viz [17, Theorem 4.4.1]), následující rovnost z $\mathcal{A}_k$-harmonicity h_k a další z $\bar{\mathcal{A}}$-harmonicity $\bar{u}$ (závorkou na konci nakonec vydělíme).

Dostali jsme $\mathcal{A}_k$-harmonické funkce, ale pořád nejsou obecně $h_k \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}_k}$. Pomůžeme si tedy opět definicí

$$\tilde{h}_k := \min\left\{1, \tau\left(\fint_{B'} |\nabla h_k|^{p_2'}\right)^{-1}\right\} h_k$$

kterou si nepokazíme $\mathcal{A}_k$-harmoničnost ani $W^{1,2}$-konvergenci k $\bar{u}$:

$$\tau\left(\fint_{B'}|\nabla h_k|^{p_2'}\right)^{\frac{-1}{p_2'}}\to\tau\left(\fint_{B'}|\bar{u}|^{p_2'}\right)^{\frac{-1}{p_2'}}\geq c\tau\left(\fint_{B}|\bar{u}|^{p_2'}\right)^{\frac{-1}{p_2'}}\geq c\tau 2^{\frac{-1}{p_2'}}>1$$

Zde na konci jsme volili předtím tajemné τ tak, aby odhad platil. Získali jsme tak $\fint_{B'}|\tilde{h}_k|\leq\tau$, tudíž $\tilde{h}_k\in\mathcal{H}_{\mathcal{A}_k}$, konvergující $\tilde{h}_k\to\bar{u}$ silně ve $W^{1,2}(B')$. Navíc máme na poloviční kouli díky tvrzení 2 zajištěno

$$\|\nabla\tilde{h}_k\|_{L^\infty(B/2)}\prec\fint_{B'}|\nabla\tilde{h}_k|\prec\left(\fint_{B'}|\nabla\tilde{h}_k|^{p_2'}\right)^{1/p_2'}\prec\tau$$

Ještě nás zajímají průměry ($k\to 0$):

$$\fint_{B/2}\tilde{h}_k\prec\frac{1}{s_k}\fint_{B/2}u_k+\fint_{B'}|\tilde{h}_k-\bar{u}+\bar{u}-\frac{u_k}{s_k}|\to 0$$

Nakonec chceme ukázat odhad $\fint_{B/2}|V(u_k-s_k\tilde{h}_k)|^2\leq s_k^2\varepsilon$, což bude spor s (3.3). Odhad provedeme zvlášť pro $p\geq 2$ a $p<2$, ale základní (vágní) idea bude stejná: Hölderovou interpolační nerovností interpolujeme na malou mocninu a zbytek. V malé mocnině použijeme blízkost $\frac{u_k}{s_k}$ a $\tilde{h}_k$ a zbytek odhadneme vnořením pomocí norem gradientů zúčastněných funkcí, na něž máme rovněž omezení.

Nejprve tedy případ $p\geq 2$: při označení $p^*:=\frac{np}{n-p}$, zatím libovolném $\theta>0$ (zvoleném později) a definici $t:\ \frac{1}{p}=\frac{1-t}{2}+\frac{t}{p^*}$ (odhad platí pro dost velká k aby $\fint_{B/2}|\frac{u_k}{s_k}-\tilde{h}_k|^2\leq\theta$):

$$\fint_{B/2}|V(u_k-s_k\tilde{h}_k)|^2\leq s_k^2\fint_{B/2}|\frac{u_k}{s_k}-\bar{u}+\bar{u}-\tilde{h}_k|^2+\fint_{B/2}|u_k-s_k\tilde{h}_k|^p\prec$$

$$\prec s_k^2\theta+\left(\fint|u_k-s_k\tilde{h}_k|^2\right)^{(1-t)p/2}\left(\left(\fint_{B/2}|u_k-s_k\tilde{h}_k+s_k(\tilde{h}_k)_{B/2}|^{p^*}\right)^{\frac{p}{p^*}}+|s_k(\tilde{h}_k)_{B/2}|^p\right)^t\prec$$

$$\prec s_k^2\theta+(s_k^2\theta)^{(1-t)p/2}\left(\fint_{B/2}|\nabla u_k|^p+s_k^p\fint_{B/2}|\nabla\tilde{h}_k|^p+s_k^p\right)^t\prec$$

$$\prec s_k^2\theta+(s_k^2\theta)^{(1-t)p/2}(s_k^2+s_k^p)^t\prec s_k^2\theta^{(1+t)p/2}$$

Požadovanou veličinu jsme odhadli pomocí $Cs_k^2\theta^{(1+t)p/2}$ a volbou $\theta:=\left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{2}{(1+t)p}}$ dokončíme důkaz věty pro $p\geq 2$.

Pro odhad v případě $p<2$ označíme $p^\#:=\frac{2n}{n-p}$, opět predikujeme $\theta>0$ a v odhadu použijeme nerovnost Sobolev-Poincarého typu ve tvaru (viz [7, Theorem 2])

$$\left(\fint_{B(x_0,\varrho)}\left|V\left(\frac{u-(u)_{B(x_0,\varrho)}}{\varrho}\right)\right|^{p^\#}\right)^{\frac{1}{p^\#}}\prec\left(\fint_{B(x_0,\varrho)}|V(\nabla u)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Zmíněný odhad pro $p<2$ provedeme za definice $t:\ \ 1=2t+\frac{2(1-t)}{p^\#}$ (zřejmě $t<1/2$):

$$\fint_{B/2}|V(u_k-s_k\tilde{h}_k)|^2\leq\fint_{B/2}|V(u_k-s_k\tilde{h}_k)|^{2t}|V(u_k-s_k\tilde{h}_k)|^{2(1-t)}\leq$$

$$\le \left(\fint_{B/2} |V(u_k - s_k\tilde{h}_k)| \right)^{2t} \left(\fint_{B/2} |V(u_k - s_k\tilde{h}_k)|^{p^\#} \right)^{\frac{2(1-t)}{p^\#}} \prec$$

$$\prec \left(s_k \fint_{B/2} |\frac{u_k}{s_k} - \tilde{h}_k| \right)^{2t} \left(\left(\fint_{B/2} |V(u_k - s_k\tilde{h}_k + s_k(\tilde{h}_k)|^{p^\#} \right)^{1/p^\#} + |V(s_k(\tilde{h}_k))| \right)^{2(1-t)} \prec$$

$$\prec s_k^{2t}\theta \left(\left(\fint_{B/2} |V(\nabla(u_k - s_k\tilde{h}_k))|^2 \right)^{1/2} + |s_k(\tilde{h}_k)_{B/2}| \right)^{2(1-t)} \prec$$

$$\prec s_k^{2t}\theta \left(s_k + \left(\fint_{B/2} |V(s_k\nabla\tilde{h}_k)|^2 \right)^{1/2} + s_k \right)^{2(1-t)} \prec$$

$$\prec s_k^{2t}\theta \left(s_k + s_k \left(\fint_{B/2} |\nabla\tilde{h}_k|^2 \right)^{1/2} \right)^{2(1-t)} \prec s_k^2\theta$$

A nastavením θ na ε vydělené konstantami z odhadů dokončíme i důkaz v případě $p < 2$.

□

3.3 Definice excesu

Definice. *Definujeme exces Φ závisející na p, funkci u, bodu x_0 ležícím v Ω, poloměru ρ a prvku $A \in \mathbb{R}^N$ vztahem*

$$\Phi(p, u, x_0, \rho, A) := \fint_{B_\rho(x_0)} |V(\nabla u - A)|^2 dx$$

Jsou-li některé parametry Φ vynechány, rozumí se jimi ty představující stejné symboly, a jsou v daném kontextu zafixovány. Je-li vynechán parametr A, rozumí se $A := (\nabla u)_{x_0,\rho}$

3.4 Lemma o přibližné A-harmonicitě

Pozorování. *Pokud $f \in \mathcal{C}^2, M > 0$, pak existuje reálná funkce ν_M taková že $\nu_M(t) \searrow 0 (t \to 0+)$ splňující pro všechna $A, B > 0, |A|, |B| < M + 1$ podmínku $|\nabla^2 f(A) - \nabla^2 f(B)| \le \nu_M(|A - B|^2)$, jsa neklesající, ν_M^2 konkávní a $\nu_M(t) \ge t$ na $\mathbb{R}^{0+}$.*

Poznámka. [5] toto pozorování uvádí bez důkazu. My alespoň naznačíme: hledanou funkci bychom zkoušeli definovat jako

$$z \mapsto \max \left(z, \sup_{A,B \in B(0,M+1):|A-B|^2 \le z} |\nabla^2 f(A) - \nabla^2 f(B)| \right)$$

začež by splňovala všechny předpoklady kromě konkavity. To se dá opravit použitím její konkávní obálky (konstruované nad ν_M^2, tedy infima ze všech majorizujících lineárních funkcí (funguje díky omezenosti).

Věta 4. *[5, str. 19] Nechť je $f \in \mathcal{C}^2$ kvazikonvexní, $q < p + \frac{\min(2,p)}{2n}$, $f \prec (1+|u|^q)$, $u \in W^{1,p}(B_R)$ buď $W^{1,p}$-minimizér F, pak pro všechna A taková, že $|A| < M+1$ a všechna $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R)$ platí*

$$|\fint_{B_R} \nabla^2 f(A)(\nabla u - A, \nabla\varphi)| \prec \sqrt{\Phi(u,R,A)}\nu_M(\Phi(u,R,A))sup|\nabla\varphi|$$

Důkaz. BÚNO $x_0 = 0, sup|\nabla\varphi| = 1$, def $v(x) := u(x) - Ax$. Z Euler-Lagrangeovy rovnice pro minimizér F vyplývá $\fint_{B_R} \nabla f(\nabla u)\nabla\varphi = 0$, navíc díky $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R)$ platí $\fint_{B_R} \nabla f(A)\nabla\varphi = 0$, takže

$$|\fint_{B_R} \nabla^2 f(A)(\nabla v, \nabla\varphi)| \leq \fint_{B_R} |\nabla^2 f(A)(\nabla v, \nabla\varphi) + \nabla f(A)\nabla\varphi - \nabla f(\nabla u)\nabla\varphi|$$

Pravou stranu teď odhadneme zvlášť na množinách $P := \{x \in B_R : |\nabla v| \leq 1\}$ a $Q := \{x \in B_R : |\nabla v| > 1\}$ – nejprve na P (za použití pozorování výše):

$$\begin{aligned}
&\prec \frac{1}{|B_R|}\int_P \int_0^1 |\nabla^2 f(A) - \nabla^2 f(A + t\nabla v)|dt|\nabla v|dx \leq \\
&\leq \fint_{B_R} \nu_M(|\nabla v|^2)|\nabla v| \prec \fint_{B_R} \nu_M(|V(\nabla v)|^2)|V(\nabla v)| \prec \\
&\prec \left(\fint_{B_R} \nu_M(|V(\nabla v)|^2)^2\right)^{1/2} \left(\fint_{B_R} |V(\nabla v)|^2\right)^{1/2} \prec \\
&\prec \nu_M(\fint_{B_R} |V(\nabla v)|^2) \left(\fint_{B_R} |V(\nabla v)|^2\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

kde jsme využili Cauchy-Schwartze, Jensena a konkavitu ν_M.

Teď onu pravou stranu nahoře na Q odhadujeme pomocí lemmatu 1:

$$\prec \frac{c(M)}{|B_R|}\int_Q \nu_M(M+1)|\nabla v| + (1 + |\nabla v|^{q-1}) \prec \fint_{B_R} |\nabla v|^{max(1,q-1)} \prec \fint_{B_R} |V(\nabla v)|^2$$

□

3.5 Shrnutí této kapitoly

Důsledek 1. *Nechť je $f \in \mathcal{C}^2$ kvazikonvexní, $f \prec (1+|u|^q)$, $u \in W^{1,p}(B_\rho)$ buď $W^{1,p}$-minimizér F, $|A| < M+1$, pak pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že je-li R dost malé, aby $\nu_M(\Phi(u,R,A)) < \delta$, za podmínky (značíme $s := \sqrt{\Phi(u,R,A)}$)*

$$\fint_{B_R} |V(\nabla u)|^2 \leq s^2$$

existuje h, splňující

$$\fint_{B_{\frac{R}{2}}} \left|V\left(\frac{u - sh}{R}\right)\right|^2 \leq s^2\varepsilon$$

$$\sup_{B_{R/2}} |\nabla h| + R\sup_{B_{R/2}} |\nabla^2 h| \prec 1$$

kde konstanta posledního odhadu nezávisí na R.

Důkaz. Označme $\mathcal{A} := \nabla^2 f(A)$. Předpoklad kvazikonvexity implikuje úmluvou výše požadovanou Legendre-Hadamarovu podmínku – důkaz viz [**?**, Theorem 1.2].

Z věty 4 obdržíme pro všechna $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(B_R)$

$$|\fint_{B_R} \mathcal{A}(\nabla u - A, \nabla\varphi)| \prec s\delta \sup |\nabla\varphi|$$

díky čemuž můžeme aplikovat větu 3 a na obdržené h ještě nasadit tvrzení 2. □

4. Odhad excesu metodou A-harmonické aproximace

4.1 Cacciopoliho nerovnost

Lemma 3. *(Iterační lemma) Mějme $r < s$ kladná reálná čísla, f omezenou funkci z $[r, s]$ do $\mathbb{R}^{0+}$, A, B, C, D nezáporná reálná čísla že $D < 1$. Pak platí-li pro každá $\alpha < \beta$ z intervalu $[r, s]$ vztah*

$$f(\alpha) \leq A(\beta - \alpha)^{-C} + B + Df(\beta)$$

dostaneme

$$f(r) \prec A(s - r)^{-C} + B$$

Důkaz. [1, chapter V, Lemma 3.1 str. 161] □

Poznámka. Pro pochopení významu tohoto lemmatu je vhodné uvést, že při jeho aplikaci bereme za funkci f typicky přiřazení typu $\varrho \mapsto \int_{B(x_0,\varrho)} G(x)\mathrm{d}x$, tedy proměnný je poloměr koule, přes kterou integrujeme.

Lemma 4. *$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{nN})$, $f(x) \prec (1 + |x|^p)$, $A, B \in \mathbb{R}^{nN}$: $|A| \leq M + 1$. Pak*

$$|f(A + B) - f(A) - \nabla f(A)B| \prec |V(B)|^2$$

$$|\nabla f(A + B) - \nabla f(A)| \prec |V'(B)| := \frac{1}{|B|}|V(B)|^2$$

a $|V'(\xi)|$ je rostoucí funkce $|\xi|$.

Důkaz. Důkaz zjednodušen z [11, Lemma II.3 str 264].

Definujme $K_M := \max_{|x| \leq M+2} |\nabla^2 f(x)|$. První odhad nejprve pro $|B| \leq 1$ odhadneme pomocí věty o střední hodnotě jako

$$|f(A + B) - f(A) - \nabla f(A)B| \leq \frac{1}{2}|\nabla^2 f(A + \xi B)(B, B)| \leq \frac{1}{2}K_M|B|^2 \prec |V(B)|^2$$

kde ξ je blíže neznámé číslo v $[0, 1]$, a tudíž $|A + \xi B| \leq M + 2$ a odhad platí. Pro $|B| > 1$ užijeme prostě růstového odhadu na f a na ∇f (z lemmatu 2):

$$|f(A + B) - f(A) - \nabla f(A)B| \prec 1 + |B|^p + |B| \prec |B|^p \prec |V(B)|^2$$

Druhý z požadovaných odhadů zvládneme naprosto stejnou technologií. □

Věta 5. *Platí-li předpoklady:*

1. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N)$
2. $f(u) \prec (1 + |u|^p)$
3. *f je striktně $W^{1,p}$-kvazikonvexní*
4. *$u \in W^{1,p}(B_R)$ je $W^{1,p}$-minimizér F na B_R*

pak pro všechna $\xi \in \mathbb{R}^N$ a $A \in \mathbb{R}^{n\times N}$ splňující $|A| \leq M+1$ platí

$$\Phi(u, R/2, A) = \fint_{B_{R/2}} |V(\nabla v)|^2 \prec \fint_{B_R} \left|V\left(\frac{v}{R}\right)\right|^2$$

kde $v(x) := u(x) - \xi - A(x-x_0)$.

Poznámka. Důkaz této věty odpovídá v hlavních rysech známým důkazům jednodušších Cacciopoliho nerovností. Nejprve "testujeme" pomocí řešení vynásobeného seřezávací funkcí, pak provedeme přechod od rozdílu k $\int_0^1$ tam a zpět, a nakonec nasadíme iterační lemma. Musíme však dávat pozor na technické záležitosti.

Důkaz. Definujeme seřezávací funkci $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{R_1})$ nulovou mimo B_R a jedničkovou na $B_{R/2}$, jejíž gradient v absolutní hodnotě nepřekračuje R. Definujeme dále funkce $\psi := (1-\eta)v$ a $\varphi := v - \psi$, takže $\nabla u - A = \nabla\varphi + \nabla\psi$. Ze striktní kvazikonvexity f plyne

$$\lambda_M \fint_{B_R} |V(\nabla\varphi)|^2 \leq \int_{B_R} f(\nabla u - \nabla\psi) - f(A)$$

$$\lambda_M \fint_{B_{R/2}} |V(\nabla v)|^2 \leq \int_{B_R} f(\nabla u - \nabla\psi) - f(\nabla u) dx + \int_{B_R} f(\nabla u) - f(\nabla u - \nabla\varphi) dx +$$
$$+ \int_{B_R} f(A + \nabla\psi) - f(A)$$

Zde druhý integrál je ≤ 0 jelikož u je minimizér F. První integrál rozepíšeme trikem, takže odhad pokračuje:

$$\leq \int_{B_R}\int_0^1 (\nabla f(A) - \nabla f(\nabla u - t\nabla\psi)) dt \nabla\psi dx + \int_{B_R} f(A+\nabla\psi) - f(A) - \nabla f(A)\nabla\psi dx$$

Po pokračování odhadu použijeme oba odhady lemmatu 4.

$$\leq \int_{B_R}\int_0^1 |V'(\nabla v - t\nabla\psi)| dt |\nabla\psi| + |V(\nabla\psi)|^2 \prec$$

$$\prec \int_P |V(\nabla\psi)|^2 + \int_P |V(\nabla v)|^2 \frac{|\nabla\psi|}{|\nabla v|} + \int_P |V(\nabla\psi)|^2$$

kde P jsme označili mezikruží $B_R \setminus B_{R/2}$ a odhad platí, neboť ψ je na $B_{R/2}$ konstantně nulová. Pro další odhad si rozepíšeme:

$$\nabla\psi \leq |\nabla(1-\eta)||v| + |\nabla v|(1-\eta) \leq \frac{|v|}{R} + |\nabla v|$$

$$|V(\nabla\psi)|^2 \prec \left|V\left(\frac{v}{R}\right)\right|^2 + |V(\nabla v)|^2$$

a pro odhad prostředního z integrálů ještě potřebujeme

$$|V(\nabla v)|^2 \left|\frac{\frac{v}{R}}{\nabla v}\right| \leq |V(\frac{v}{R})|^\alpha |V(\nabla v)|^{2-\alpha} \prec |V(\frac{v}{R})|^2 + |V(\nabla v)|^2$$

kde $\alpha := \frac{1}{\min(2,p)}$ pro ta $x \in P$, kde $|v(x)| \geq R|\nabla v(x)|$ a $\alpha := \frac{1}{\max(2,p)}$ pro zbývající $x \in P$, a použili jsme Youngovu nerovnost. Dostaneme tak nakonec:

$$\prec \int_P |V(\nabla v)|^2 + \int_P |V\left(\frac{v}{R}\right)|^2$$

Nyní celý řetězec nerovností shrneme (konstanty shrneme do C_1):

$$\int_{B_{R/2}} |V(\nabla v)|^2 \leq C_1 \int_P |V(\nabla v)|^2 + C_1 \int_{B_R} |V\left(\frac{v}{R}\right)|^2$$

Po přičtení $C_1 \int_{B_{R/2}} |V(\nabla v)|^2$ k oběma stranám a vydělení $C_1 + 1$:

$$\int_{B_{R/2}} |V(\nabla v)|^2 \leq \frac{C_1}{C_1+1} \int_{B_R} |V(\nabla v)|^2 + \int_{B_R} |V\left(\frac{v}{R}\right)|^2$$

můžeme použít iterační lemma 3 a dostaneme požadované. □

Poznámka. Kostra tohoto důkazu je převzata z [5], kde je však obecnější věta – předpoklad 2 tam je oslaben na q-růst ($q < p + \frac{\min(2,p)}{2n}$). Na druhou stranu je obecnější důkaz velice technický a špatně čitelný, i když nepoužívá žádnou hlubší (zde nepředstavenou) teorii. Proto je zde uveden důkaz zjednodušený, kdy díky "zkrocenému" růstu stačí pracovat s poloviční koulí a jedním druhem mezikruží, a nekombinují se integrály přes proměnné průměry.

4.2 Main lemma - odhad excesu

Věta 6. *Mějme $M > 0$, $\alpha \in (0,1)$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{nN})$ $W^{1,p}$-striktně kvazikonvexní odhadnutou $f(\xi) \leq \Gamma(1 + |\xi|^p)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $W^{1,p}$-minimizér F. Pak existují $\varepsilon_0 > 0$, $\theta \in (0,1)$ takové, že podmínky pro kouli $B(x_0, R) \subset \Omega$*

$$\Phi(u, x_0, R) \leq \varepsilon_0$$

$$|(\nabla u)_{B_{x_0,R}}| \leq M$$

implikují

$$\Phi(u, x_0, \theta R) \leq \theta^{2\alpha} \Phi(u, x_0, R)$$

Důkaz. Můžeme brát (až na posunutí) $x_0 = 0$. Označme $A := (\nabla u)_{B_R} \leq M$, $w(x) := u(x) - Ax$ a definujme $s^2 := \Phi(R) = \Phi(p, u, 0, R, A) = \fint_{B_R} |V(\nabla w)|^2$, kde můžeme předpokládat $s \leq \sqrt{\varepsilon_0} \leq 1$. Zvolme $\mathcal{A} := \nabla^2 f(A)$ a aplikujeme důsledek 1.

Získáme tak hladkou $\mathcal{A}$-harmonickou h splňující

$$\sup_{B_{R/2}} |\nabla h| + R \sup_{B_{R/2}} |\nabla^2 h| \prec 1$$

$$\fint_{B_{\frac{R}{2}}} \left| V\left(\frac{w - sh}{R}\right) \right|^2 \leq s^2 \varepsilon_0$$

Nyní zafixujeme – a později upřesníme – malé $\theta \in (0, \frac{1}{4})$.

Hlavním krokem je použití Cacciopoliho nerovnosti (věta 5) na funkci u, kde za ξ bereme $sh(0)$ a za A bereme $A + s\nabla h(0)$ (z vlastností h máme $|s\nabla h(0)|^2 \leq c\Phi(R) \leq 1$ pro dost malá ε_0, takže splníme $|A + s\nabla h(0)| \leq M + 1$).

$$
\begin{aligned}
\Phi(u, \theta R, A + s\nabla h(0)) &\prec \fint_{B_{2\theta R}} \left| V\left(\frac{w(x) - sh(0) - s\nabla h(0)x}{2\theta R}\right)\right|^2 \prec \\
&\prec \theta^{-n-max(2,p)} \fint_{B_{R/2}} \left| V\left(\frac{w - sh}{R}\right)\right|^2 + \\
&+ \fint_{B_{2\theta R}} \left| V\left(s\frac{h(x) - h(0) - \nabla h(0)x}{2\theta R}\right)\right|^2
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Trik je nyní použít odhad zbytku v Taylorově rozvoji (a poté tvrzení 2):

$$
\sup_{2\theta R} |h(x) - h(0) - \nabla h(0)x| \leq \frac{1}{2}(2\theta R)^2 \sup_{B_{R/2}} |\nabla^2 h| \prec \theta^2 R
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi(u, \theta R, A + s\nabla h(0)) &\prec \theta^{-n-max(2,p)} \fint_{B_{R/2}} \left| V\left(\frac{w - sh}{R}\right)\right|^2 + |V(\theta s)|^2 \prec \\
&\prec \theta^{-n-max(2,p)} s^2 \varepsilon_0 + \theta^2 s^2 \prec \theta^2 \Phi(u, R)
\end{aligned}
$$

kde poslední nerovnost můžeme předpokládat nastavíme-li $\varepsilon_0 := \theta^{n+2+max(2,p)}$. Máme tedy

$$
\Phi(u, \theta\varrho, A + s\nabla h(0)) \leq C\theta^2 \Phi(u, R)
$$

a z konstanty zde označené C zpětně určíme, jak jsme zafixovali θ, aby platilo $C\theta^2 \leq \theta^{2\alpha}$ a tudíž i požadované tvrzení. $\square$

Poznámka. Idea tohoto důkazu je opět převzata z [5], kde je však opět obecnější případ q-růstu ($q < p + \frac{\min(2,p)}{2n}$). V tomto případě není Schmidtův důkaz o mnoho složitější: v odhadu 4.1 na pravé straně přibudou členy navíc (přišedší z obecnější Cacciopoliho nerovnosti), které však není těžké "zkrotit".

4.3 Iterace main lemmatu

Tvrzení 3. *Mějme $M > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{nN})$ $W^{1,p}$-striktně kvazikonvexní odhadnutou $f(\xi) \prec (1+|\xi|^p)$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $W^{1,p}$-minimizér F. Pak existují $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, $\theta \in (0, 1)$ takové, že podmínky pro kouli $B(x_0, R) \Subset \Omega$*

$$
\Phi(u, x_0, R) \leq \tilde{\varepsilon}_0
$$

$$
|(\nabla u)_{B_{x_0,R}}| \leq \frac{M}{2}
$$

implikují

$$
\Phi(u, x_0, \theta^k R) \leq \theta^{2\alpha k} \Phi(u, x_0, R)
$$

pro všechna $k = 1, 2, \ldots$

Důkaz. Důkaz je upraven z [13, section 6]

Pro $k = 1$ je stejné tvrzení dokázané větou 6. Budeme chtít v indukčním kroku od k ke $k+1$ splnit předpoklady věty 6 (bez vlivu na θ zvolené větou 6 v kroku $k = 1$). Koule $B(x_0, \theta^k R)$ je zřejmě v Ω a $\Phi(u, x_0, \theta^k R) \leq \theta^{2\alpha k} \tilde{\varepsilon}_0 \leq \tilde{\varepsilon}_0$, takže jediný problém je odhad $|(\nabla u)_{B_{x_0, \theta^k R}}| \leq M$.

$$|(\nabla u)_{\theta^k R}| \leq |(\nabla u)_R| + \sum_{i=0}^{k-1} |(\nabla u)_{\theta^{i+1} R} - (\nabla u)_{\theta^i R}| \leq$$

$$\leq \frac{M}{2} + \theta^{-n} \sum_{i=0}^{k-1} \fint_{B_{\theta^i R}} |\nabla u - (\nabla u)_{\theta^i R}| \leq \frac{M}{2} + \theta^{-n} \sum_{i=0}^{k-1} \Phi(\theta^i R)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{M}{2} + \theta^{-n} \Phi(R)^{1/2} \sum_{i=0}^{\infty} \theta^{\frac{i\alpha}{2}} + \theta^{\frac{i\alpha p}{2}}$$

kde v prostředním odhadu jsme mohli předpokládat $\tilde{\varepsilon}_0 \leq 1$ a tudíž použít bod 8 tvrzení 1. Suma na konci konverguje, takže volíme-li $\tilde{\varepsilon}_0$ v závislosti na M dost malé, odhadli jsme celý výraz pomocí M (nezávisle na k). $\square$

5. Hölderovská regularita

5.1 Hölderovsky spojitá funkce

Definice. *Funkce u je α-Hölderovsky spojitá (značíme $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$), je-li*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)} := \sup_{\Omega} |u| + \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} < \infty$$

Je-li $\nabla u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$, píšeme $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$.

Věta 7. *Je-li Ω Lipschitzovská oblast a pro každou kouli $B(x,R)$ v ní obsaženou splňuje funkce u pro nějaké p odhad*

$$\fint_{B(x,R)} |u - (u)_{B(x,R)}|^p \leq cR^{p\alpha}$$

pak je $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$.

Důkaz. Viz [1, Theorem 1.2, page 70] □

5.2 Singulární množina

Definice. *Singulární množina oblasti Ω závisí na fixovaných p a u, a je definována:*

$$\Sigma_{u,\Omega} := \left\{x \in \Omega : \liminf_{r \searrow 0} \Phi(p,u,x,r) > 0\right\} \bigcup \left\{x \in \Omega : \limsup_{r \searrow 0} |(\nabla u)_{x,r}| = \infty\right\}$$

Tvrzení 4. *Pokud je $u \in W^{1,p}(\Omega)$, pak singulární množina $\Sigma_{u,\Omega}$ oblasti Ω má Lebesgueovu míru 0.*

Poznámka. O množině $\Sigma_{u,\Omega}$ singulárních bodů je známo, že je dokonce ještě menší – má Hausdorffovu dimenzi menší než $n-2$. Detaily a důkazy lze najít v [1, Chapter IV, section 2-3, page 98].

Důkaz. Díky lemmatu 1 nám skoro všude při $R \to 0$ konverguje

$$\fint_{B(x,R)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x,R)}|^{\min(2,p)} \to 0$$

Máme tak pro tato x speciálně odhad

$$\fint_{B(x,\varrho} |u - (u)_{B(x,\varrho)}| \leq 1$$

díky čemuž použijeme bod 8 tvrzení 1 k získání odhadu

$$fint_{B(x,R)} \Phi(x,R) \prec \fint_{B(x,R)} |\nabla u - (\nabla u)_{B(x,R)}|^{\min(2,p)}$$

takže první "část" množiny singulárních bodů má nulovou míru.

A protože je u skoro všude konečná a s $R \to 0$ konverguje $|(\nabla u)_{B(x,R)}|$ k $\nabla u(x)$ bodově skoro všude, musí být $\limsup_{r \searrow 0} |(\nabla u)_{x,r}|$ skoro všude konečná. □

5.3 Částečná regularita

Tvrzení 5. *Platí-li na otevřené množině* Ω_0 *pro funkci* $u \in W^{1,p}(\Omega_0)$ *pro všechny koule* $B_R(x_0) \subset \Omega_0$ *podmínka*

$$\Phi(u, x_0, \rho) \prec \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2\alpha} \Phi(u, x_0, R) \; \forall \rho \in (0, R)$$

je na Ω_0 *funkce* u *Hölderovská:* $u \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\frac{2\alpha}{p}}(\Omega_0)$.

Důkaz. Campanatova podmínka Hölderovskosti nám stačí splnit lokálně, zafixujeme tedy kouli $B(x_1, R_1) \subset B(x_1, 2R_1) \subset \Omega_0$, díky čemuž jsou odteď veličiny R_1 a $\Phi(u, x_1, 2R_1)$ konstantami. Pro $B(x, R) \subset B(x_1, R_1)$ máme

$$\fint_{B(x,R)} |\nabla u - (\nabla u)|^p \leq \Phi(u, x, R) \prec \left(\frac{R}{R1}\right)^{2\alpha} \Phi(u, x, R_1) \prec$$

$$\prec \left(\frac{R}{R1}\right)^{2\alpha} \Phi(u, x_1, 2R_1) \prec R^{p\frac{2\alpha}{p}}$$

□

Důsledek 2. *Je-li* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $W^{1,p}$*-minimizérem funkcionálu* $F(u) := \int_\Omega f(\nabla u)$*, kde* $f \in \mathcal{C}^{nN}$ *je* $W^{1,p}$*-striktně kvazikonvexní s růstovou podmínkou* $f(\xi) \prec 1 + |\xi|^p$*, je* $\Omega \setminus \Sigma_{u,\Omega}$ *otevřená a* $u \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\frac{2\alpha}{p}}(\Omega \setminus \Sigma_{u,\Omega})$.

Důkaz. Pro každý bod $x_0 \in \Omega \setminus \Sigma_{u,\Omega}$ najdeme $R > 0$, že $\Phi(u, x_0, R) < \tilde{\varepsilon}_0$ ($\tilde{\varepsilon}_0$ z tvrzení 5) a $|(\nabla u)_{B(x_0,R)}| < M'$. Díky spojitosti integrálu můžeme to samé předpokládat i na koulích $B(x_1, R)$, kde $x_1 \in B(x_0, \delta_{x_0})$ pro jistá δ_{x_0}. Můžeme pak na všech zmíněných koulích aplikovat tvrzení 3. Sjednocením těchto koulí dostaneme otevřenou množinu, na niž můžeme použít tvrzení 5 (pro přechod od závěru tvrzení 3 k předpokladu tvrzení 5 viz [18, Proof of Theorem 2.1, str. 14]), a dostaneme Hölderovskou regularitu pro u na této množině. Zpětně z této regularity vidíme, že žádný bod ze $\Sigma_{u,\Omega}$ v této množině není, takže regularitu máme přesně na $\Omega \setminus \Sigma_{u,\Omega}$. □

Závěr

Viděli jsme, že předpoklady striktní $W^{1,p}$-kvazikonvexity a izotropní růstové odhady spolu s předpokladem $f \in \mathcal{C}^2$ zaručují existenci a částečnou (tj. až na množinu míry nula) Hölderovskou $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ regularitu pro minimizér funkcionálu $\int_\Omega f(\nabla u)$. Navíc jsme si řekli, že zobecnění růstových podmínek na anizotropní (s omezením na to jak se exponenty růstových bariér liší) je možné, za cenu složitějšího důkazu hlavně Cacciopoliho nerovnosti.

Náš důkaz regularity se sestával jen ze dvou specifičtějších ingrediencí: vět týkajících se $\mathcal{A}$-harmonické aproximace (shrnutých do důsledku 1) a speciální Cacciopoliho nerovnosti. Obě jsou smíchány (a krátce orestovány) v důkazu main lemmatu. Zbytek tvrzení je poměrně standardní a známý, pro úplnost jsme však u většiny z nich uvedli rovněž důkazy.

Po pozorném přečtení této práce a jejímu porozumění by již čtenáři nic nemělo scházet k tomu, aby se mohl pustit do studia vědeckých článků zabývajících se regularitou minimizérů eliptických funkcionálů.

Seznam použité literatury

[1] Giaquinta, Mariano. *Multiple integrals in the calculus of variations and non linear elliptic systems.* Princeton: Princeton University Press 1983

[2] Giusti, Enrico. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* World Scientific Pub Co Inc (2003)

[3] Mingione, Giuseppe. *Regularity of minima: an invitation to the Dark Side of the Calculus of Variations.* Applications of Mathematics, Vol. 51 (2006), No. 4, 355–426

[4] Marcellini, Paolo. *Approximation of quaziconvex functions, and lower semicontinuity of multiple integrals.* manuscripta math. 51, 1 - 28 (1985)

[5] Schmidt, Thomas. *Regularity of minimizers of $W^{1,p}$-quasiconvex variational integrals with (p,q)-growth.* Calc. Var. 32-1:24 (2008)

[6] Duzaar, Frank, Steffen, Klaus. *Optimal interior and boundary regularity for almost minimizers to elliptic variational integrals.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal). Vol 2002, Issue 546, Pages 73-138 (2006)

[7] Duzaar, Frank, Grotowski, Joseph F., Kronz, Manfred. *Regularity of almost minimizers of quasi-convex variational integrals with subquadratic growth.* Annali di Matematica 184, 421-448 (2005)

[8] Diening, Lars, Strofolini, Bianca, Verde, Anna. *Everywhere regularity of functionals with ϕ-growth.* Manuscripta Math. 129 (2009), no. 4, 449-481.

[9] Carozza, Menita, Fusco, Nicola, Mingione, Giuseppe. *Partial Regularity of Minimizers Of Quaziconvex Integrals with Subquadratic Growth.* Annali di Matematica Pura ed Applicata, Volume 175, Issue 1 , pp 141-164 (1999)

[10] Acerbi, Emilio, Fusco, Nicola. *Partial regularity under anisotropic (p, q) growth conditions.* J. Differential Equations 107 (1994), no. 1, 46-67.

[11] Acerbi, Emilio, Fusco, Nicola. *A regularity theorem for minimizers of quasiconvex integrals.* Arch. Rat. Mech. vol 99, Issue 3, pp 261-281 (1987)

[12] Šverák, Vladimír, Yan, Xiaodong. *Non-Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex functionals.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 99, no. 24, 15269-15276 (2002)

[13] Fusco, Nicola, Hutchinson, John. *$\mathcal{C}^{1,\alpha}$ Partial regularity of functions minimising quasiconvex integrals.* manuscripta math. 54, Issue 1-2, pp 121-143 (1985)

[14] Schmidt, Thomas. *A Simple Partial Regularity Proof for Minimizers of Variational Integrals.* Nonlinear Differ. Equ. Appl. 16 (1), p.109-129. (2009)

[15] Giaquinta, Mariano, Modica, Giuseppe. *Partial regularity of minimizers of quasiconvex integrals.* Ann. Inst. Henri Poincare, Anal. Non Lineaire 3 (1986), 185-208.

[16] Dacorogna, Bernard. *Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the calculus of variations.* J Funct Anal 46:102-118 (1982)

[17] Morrey, Charles Bradfield. *Multiple Integrals in the Calculus of Variations.* Springer Science & Business Media (2009)

[18] Acerbi, Emilio, Fusco, Nicola. *Local Regularity for Minimizers of non Convex Integrals.* Ann. Scuola Norm. Sup. (4) 16, 603-636 (1989)