

Posudek oponenta diplomové práce:

Břetislav Skovajsa: Zobecněné obyčejné diferenciální rovnice v metrických prostorech

Obsah práce. Termín „zobecněný“ v názvu práce odkazuje k faktu, že diferenciální rovnice jsou studovány nikoliv v kontextu Lebesgueova integrálu (Carathéodoryho řešení), nýbrž (silného) Kurzweil-Henstockova integrálu (nebo ekvivalentně MC-integrálu, viz Bendová a Malý, 2011). Cílem práce bylo navrhnout a studovat pojem řešení takto zobecněné „diferenciální“ rovnice pro funkce dokonce s hodnotami v obecném metrickém prostoru.

Úvod práce stručně připomíná definici (a ekvivalenci) SKH a MC neurčitého integrálu. Jádrem práce je jednak (původní) definice zobecněného řešení (Definition 2.1), a dále věty o jednoznačnosti (Theorem 3.5) a o existenci (Theorem 4.3). Závěrečná kapitola diskutuje vztah dokázaných vět k předchozím výsledkům ve speciálním případě eukleidovských prostorů.

Hodnocení práce. KLADY: náročné téma, původní výsledky (návrh nového pojmu řešení + dvě technicky hodně náročné věty); jazykově a typograficky téměř perfektní

ZÁPORY: snad příliš stručné zpracování (30 stran, chybí „kompilační“ část); čtenář si musí místy domýšlet (text blíže úrovni článku než diplomky). Podrobnější a soustavnější diskusi by si dle mého názoru zasloužily předpoklady obou hlavních vět. — Viz níže.

Práci doporučuji uznat jako diplomovou; navrhuji hodnocení známkou

V Praze dne 27.8.2014

Dalibor Pražák

.....

- s. 3 v takto formulované Arzela-Ascoliho větě platí ekvivalence
- s. 4 za těchto podmínek bude Carathéodoryho řešení existovat *globálně*
- s. 6 „... Saks-Henstock Lemma ...” – bylo by dobré uvést odkaz a snad komentář, zda podstatnou je pro danou implikaci úplnost či konečná dimenze E
- s. 11 klíčová Definition 2.1 by zasluhovala nějaký komentář; např. je takovéto řešení nutně spojité? Je v nějaké smyslu diferencovatelné? Dá se nalepovat?
- s. 11 bylo by dobré výslovně zmínit Theorem 1.7; body (i) a (ii) definovat jako výroky
- s. 13 poznámku o „continuous case ... regulated functions” (před Definition 3.1) by bylo vhodné rozvést – jaké zobecnění (asi podmínky (U1) v Theorem 3.5?) máme na mysli?
- s. 13 ve formulaci Theorem 3.3 by bylo vhodné uvést, s kterým pojmem řešení tato věta (původně) operuje

- s. 14 podmínka (U3) by zasluhovala dřívější a obsírnější komentář. Teprve na s. 24 najdeme, že v případě $X = R^n$ jde o zobecnění podmínky (3.2), ale stálo by za to i vysvětlit, že (3.2) zobecňuje patrně pojem lokální lipschitzovskosti (z Carathéodoryho theorie)?

Nejlépe by ovšem bylo vysvětlit, jak by se tato podmínka prakticky ověřovala (v případě m. p.), nebo uvést nějaké příklady.

- s. 16 přechod k poslední nerovnosti mi není jasný. Vypadá to, že jmenovatel nalevo se zmenší – co když je však čitatel záporný? Alespoň první rozdíl se záporný zdá (neboť Φ klesá).
- s. 17 v poznámce před Lemma 4.2 opět není jasné, jak přesně by se měla zobecnit podmínka spojitosti (zřejmě (E2) v Theorem 4.3 ?).
- s. 18 podmínka (E3) působí velice silně ($F(\cdot, t, \tau)$ je na) pro každé t, τ); nevidím analogii např. v Carathéodoryho teorii.

Dodatečné komentáře (s. 25, 26) mi připadají trochu neúplné: zobrazení, které je stejnoměrně blízko identitě, bude nejspíše na , pokud $X = R^n$, ovšem pokud X je omezená množina (dokonce jen nějakého metrického prostoru), bez dalšího to jasné není.

Dále se zde operuje předpokladem malosti $|t - \tau|$ (který v (E3) nemáme). Znamená to, že Theorem 4.3 je fakticky použitelný jen lokálně?

- s. 18 mohlo by se rovnou říci, že z (volené na začátku důkazu) se musí rovnat $u_k(\tau_i)$ díky normalizaci.
- s. 20 fakt, že stejnoměrná spojitost implikuje (je ekvivalentní) existenci modulu spojitosti, který je rostoucí a spojitý, určitě není těžký, ale mohl by zde být odkaz
- s. 22 v nerovnostech $\omega(|\tau - \tau_{j+1}|) < \eta(\tau)$ se asi vychází z toho, že $\beta(h) > 0$
- s. 21–22 poznámka na okraj: v důkazu Theorem 4.3 se čtenář už trochu ztrácí. Stálo by za úvahu, zda například druhý krok (limitní přechod) by nebylo možné vyvodit z nějaké obecnější věty o záměně limity a integrálu (která by zároveň osvětlovala roli podmínky (E4) jako jistého druhu „majoranty“?)
- s. 24 Theorem(s) 3.3, 3.5, 4.1
- s. 27 „since H' is SKH integrable ...” – tato klíčová vlastnost zobecněných integrálů by stála za komentář a příslušný odkaz

Poznámka. Při obhajobě by bylo vhodné reagovat na připomínky ohledně předpokladů (U3), (E3) a poznámku ke s. 16.