Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Martin Koc

Vlastnosti a aplikace sigma-pórovitých množin

Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: **Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.**

Studijní program: matematika, matematická analýza

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu této diplomové práce, prof. RNDr. Luďku Zajíčkovi, DrSc., za zajímavé téma, cenné rady i podnětné připomínky a v neposlední řadě také za veškerý čas, který mi věnoval.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 7. srpna 2006 Martin Koc

Obsah

Název práce: Vlastnosti a aplikace sigma-pórovitých množin

Autor: Martin Koc

Katedra: Katedra matematické analýzy

Vedoucí diplomové práce: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.

e-mail vedoucího: `zajicek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstrakt: Tato práce se zabývá σ-pórovitými množinami v obecných metrických prostorech. Po stručném výčtu jejich základních vlastností zkonstruujeme uzavřenou, shora pórovitou a ne-σ-zdola pórovitou množinu v neprázdném topologicky úplném metrickém prostoru bez izolovaných bodů. Zavedeme nové pojmy pórovitost množiny vzhledem k míře, μ-pórovitá množina a σ-μ-pórovitá množina v neprázdném separabilním metrickém prostoru opatřeném borelovskou regulární mírou, které zobecňují v poslední době studovanou pórovitost měr, a dokážeme charakterizační věty o rozkladu σ-μ-pórovitých množin na σ-pórovité a μ-nulové množiny pro případy horní a zobecněné pórovitosti. V případě horní pórovitosti dokonce dokážeme silnější tvrzení, že σ-μ-shora pórovité množiny lze rozložit na σ-silně pórovité a μ-nulové množiny. V závěrečné části této práce ukážeme, že jedna konkrétní množina singulárních bodů v teorii derivování (množina bodů, ve kterých pro danou spojitou funkci existuje konečná jednostranná derivace ale neexistuje derivace) je σ-pórovitá. Přestože se jedná o dobře známý výsledek, my podáme jeho nový důkaz, který je založený na vepisovací větě o existenci kompaktní ne-σ-pórovité množiny v borelovské ne-σ-pórovité množině a na některých výsledcích L.Kantoroviče ze 30.let minulého století o redukovatelných množinách.

Klíčová slova: σ-pórovité množiny, pórovitost měr, Diniho derivace

Title: Properties and applications of sigma-porous sets

Author: Martin Koc

Department: Department of mathematical analysis

Supervisor: Prof. RNDr. Luděk Zajíček, DrSc.

Supervisor's e-mail address: `zajicek@karlin.mff.cuni.cz`

Abstract: This work deals with σ-porous sets in general metric spaces. After a short listing of their basic properties we construct a closed, upper porous and non-σ-lower porous set in a nonempty topologically complete metric space with no isolated points. We introduce new notions of set porosity with respect to a measure, μ-porous set and σ-μ-porous set in a separable metric space endowed with a Borel regular measure, that generalize recently studied notion of porosity of measures, and prove some characterizing theorems about decomposition of σ-μ-porous sets into σ-porous and μ-null sets for cases of upper and generalized porosities. In case of upper porosity we even prove a stronger proposition that σ-μ-upper porous sets can be decomposed into σ-strongly porous and μ-null sets. In the final part of this work we show that one particular set of singular points in the differentiation theory (the set of points at which for a given continuous function there exists a finite unilateral derivative but the derivative does not exist) is σ-porous. Although this is a well known result, we provide its new proof using an inscribing theorem about existence of a compact non-σ-porous set in any Borel non-σ-porous set and some results of L.Kantorovitch from 1930's concerning reducible sets.

Keywords: σ-porous sets, porosity of measures, Dini derivatives

Přehled značení

$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina všech přirozených čísel včetně 0 (tj. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$)
$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^n$	n-rozměrný eukleidovský prostor (s eukleidovskou normou $\lvert\cdot\rvert$ i metrikou)
$B(x,r)$	otevřená koule v metrickém prostoru (X,ϱ) se středem v bodě $x \in X$ a s poloměrem $r > 0$ (tj. $B(x,r) = \{y \in X : \varrho(x,y) < r\}$) (navíc definujeme $B(x,0) := \emptyset$)
$\overline{B}(x,r)$	uzavřená koule v metrickém prostoru (X,ϱ) se středem v bodě $x \in X$ a s poloměrem $r > 0$ (tj. $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : \varrho(x,y) \leq r\}$)
$\overline{A}$	uzávěr množiny A
$\operatorname{int} A$	vnitřek množiny A
A'	množina všech hromadných bodů množiny A (derivace množiny A)
$\operatorname{diam} A$	průměr (diametr) množiny A (tj. $\operatorname{diam} A = \sup\{\varrho(x,y) : x, y \in A\}$)
μ^*	vnější míra příslušná míře μ
μ_*	vnitřní míra příslušná míře μ
$H(A)$	měřitelný obal množiny A (tj. měřitelná nadmnožina množiny A taková, že $H(A) \setminus A$ má vnitřní míru 0)
ω_1	první nespočetný ordinál

1 Úvod

Už od své první aplikace na konci 60. let minulého století představují σ-pórovité množiny důležitý nástroj v teorii výjimečných množin, neboť se přirozeně objevují v řadě problémů reálné analýzy, zejména pak v teorii derivování.

Cílem této práce je prozkoumat některé nedávno publikované výsledky, především o pórovitosti měr na metrických prostorech, a tyto výsledky dále zobecnit.

V kapitole 2 je nejprve zadefinována pórovitost a silná pórovitost množin v obecných metrických prostorech a jsou uvedeny některé základní vlastnosti pórovitých a σ-pórovitých množin. Téměř všechna tvrzení této kapitoly jsou uváděna bez důkazů, protože se převážně jedná o dobře známé výsledky. Výjimku představuje tvrzení 2.12 o existenci uzavřené, shora pórovité a ne-σ-zdola pórovité množiny v neprázdném topologicky úplném metrickém prostoru bez izolovaných bodů, které je snadným, ale s důkazem dosud nikde nepublikovaným výsledkem. Jeho důkaz mírně zobecňuje konstrukci uvedenou v [19, Proposition 2.7]. V závěru této kapitoly jsou dále uvedeny některé výsledky týkající se σ-pórovitých množin a borelovských regulárních měr, poté následují definice a základní vlastnosti zobecněné pórovitosti. Většina uvedených výsledků se využívá v následující kapitole.

Další část této práce tvoří kapitola 3, ve které jsou definovány nové pojmy pórovitost množiny vzhledem k míře (zkráceně μ-pórovitost), μ-pórovitá množina a σ-μ-pórovitá množina, které jsou motivované definicemi pórovitosti měr [15, Definition 3.1] a [7, Definition 2.2]. V současnosti řadou autorů zkoumaná pórovitost měr přitom odpovídá μ-pórovitosti celého prostoru. Hlavním výsledkem této kapitoly je věta 3.14 o rozkladu σ-μ-shora pórovitých množin na σ-silně pórovité a μ-nulové množiny, která poměrně snadno vyplývá z obecnějšího tvrzení o rozkladu σ-μ-(g)-pórovitých množin (důsledek 3.12). Důkaz tohoto tvrzení je založen na metodách použitých v článku [15] o horní pórovitosti měr.

Poslední kapitola této práce, kapitola 4, se věnuje jedné z mnoha aplikací σ-pórovitých množin v teorii zobecněných derivací. Dává do souvislosti některé z výsledků obsažených v článcích [12] a [21]. Jejím cílem je ukázat, že jedna množina singulárních bodů v teorii derivování je σ-pórovitá. Konkrétně se jedná o množinu bodů, ve kterých má daná spojitá funkce konečnou jednostrannou derivaci a ve kterých zároveň nemá derivaci. Tento výsledek je sice dobře známý dokonce pro libovolnou funkci (důsledek 4.19), ale my pro speciální případ spojité funkce podáme jeho zcela nový důkaz (tvrzení 4.28). Mimo jiné v této kapitole dokážeme také lemma 4.22 a tvrzení 4.25 z článku [12], které je v tomto článku uvedeno bez důkazu, i několik nových pomocných tvrzení.

2 σ-pórovité množiny

Původní definice pórovitosti množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ v bodě x byla dána limitním chováním maximálního poměru $\frac{s}{r}$ pro $r \to 0_+$, kde čísla s jsou taková, že koule $B(x,r)$ se středem v bodě x a s poloměrem r obsahuje kouli $B(z,s)$, která je disjunktní s množinou A. V závislosti na konkrétních aplikacích se pak rozlišovalo mezi limitním chováním definovaným pomocí horní nebo dolní limity.

Tato definice pórovitosti množin je i dnes často užívána, ačkoli v obecných metrických prostorech může působit jisté potíže. Ty lze odstranit požadavkem, aby koule $B(z,s)$ nebyla obsažena v kouli $B(x,r)$ pouze geometricky, nýbrž i algebraicky (tj. aby platilo $\varrho(x,z) + s \leq r$). Jednou z výhod tohoto poněkud formálního přístupu je, že dává přirozenější výsledky také pro pórovitost měr a pórovitost množin vzhledem k mírám.

Někdy se lze také setkat s definicí pórovitosti množin, v níž se místo podmínky $B(z,s) \subset B(x,r)$ požaduje pouze $z \in B(x,r)$. Tento přístup sice není rozšířením původní definice z prostoru $\mathbb{R}^n$, nicméně vede jen k přeškálování hodnot horní a dolní pórovitosti pomocí zobrazení $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Horní pórovitost množiny v nějakém bodě zaručuje existenci relativně velkých pórů v libovolně malé vzdálenosti od tohoto bodu, zatímco dolní pórovitost zaručuje existenci relativně velkých pórů ve všech dostatečně malých vzdálenostech. Ukázalo se, že horní pórovitost nelze použít k odhadům dimenze množin, zatímco dolní pórovitost je k tomuto účelu vhodná. Existují však i ne-zdola pórovité množiny, které obsahují tolik pórů, že jejich dimenze je menší než dimenze prostoru, v němž jsou obsaženy. Byly proto zavedeny ještě další typy pórovitosti, například průměrná pórovitost ([13],[3]), zaručující, že určité množství vzdáleností, které jsou přirozenými mocninami nějakého pevného čísla, obsahuje póry pevné relativní velikosti.

Pórovitost množin se přirozeně objevuje v některých problémech reálné analýzy, zejména pak v teorii derivování. Pórovitost v $\mathbb{R}$ používal (pod jiným označením) již A.Denjoy kolem roku 1920 při studiu symetrických derivací druhého řádu ([5]).

Zkoumání σ-pórovitosti množin je motivováno především následujícími fakty: Některé zajímavé množiny singulárních bodů jsou σ-pórovité. Systém všech σ-pórovitých množin tvoří (ve většině zajímavých metrických prostorů) vlastní podsystém systému všech množin 1. kategorie. V $\mathbb{R}^n$ je to navíc vlastní podsystém systému všech lebesgueovsky nulových množin 1. kategorie. Proto představují σ-pórovité množiny významný nástroj v teorii výjimečných množin.

Zakladatelem teorie σ-pórovitých množin je E.P.Dolženko, který v roce 1967 použil σ-pórovité množiny při zkoumání hraničního chování funkcí ([6]) a který jako první použil pojem pórovitá množina. Později potom byly použity σ-pórovité množiny i v teorii derivování (1978 - [2]) a v teorii Banachových prostorů (1984 - [16]).

V této kapitole buď (X, ϱ) libovolný neprázdný metrický prostor.

Definice 2.1. Buď $A \subset X$ množina, $x \in X$ a $r > 0$. Symbolem $\gamma(x, r, A)$ označíme supremum z čísel $s > 0$, pro které existuje takový bod $z \in X$, že $\varrho(x, z) + s \leq r$ a $B(z, s) \cap A = \emptyset$. (Přitom položíme $\sup \emptyset := 0$.)

(i) *Horní pórovitost množiny A v bodě x* definujeme jako

$$\overline{p}(A, x) := \limsup_{r \to 0_+} \frac{\gamma(x, r, A)}{r}$$

a *dolní pórovitost množiny A v bodě x* jako

$$\underline{p}(A, x) := \liminf_{r \to 0_+} \frac{\gamma(x, r, A)}{r}.$$

(ii) *Horní pórovitost množiny A* (resp. *dolní pórovitost množiny A*) definujeme jako $\overline{p}(A) := \inf\{\overline{p}(A, x) : x \in A\}$ (resp. $\underline{p}(A) := \inf\{\underline{p}(A, x) : x \in A\}$).

(iii) Množina A se nazývá *shora pórovitá v bodě x* (resp. *zdola pórovitá v bodě x*), jestliže $\overline{p}(A, x) > 0$ (resp. $\underline{p}(A, x) > 0$).

(iv) Množina A se nazývá *shora pórovitá* (resp. *zdola pórovitá*), je-li shora pórovitá (resp. zdola pórovitá) v každém svém bodě.

(v) Množina A se nazývá *σ-shora pórovitá* (resp. *σ-zdola pórovitá*), je-li spočetným sjednocením shora pórovitých (resp. zdola pórovitých) množin.

Poznámka 2.2.

(i) Je-li $A \subset X$ a $x \in X$, pak $0 \leq \underline{p}(A, x) \leq \overline{p}(A, x) \leq 1$. Proto je každá zdola pórovitá množina také shora pórovitá a každá σ-zdola pórovitá množina je σ-shora pórovitá.

(ii) Každá shora pórovitá množina je řídká, protože doplněk jejího uzávěru protíná každou neprázdnou otevřenou kouli v prostoru X (otevřené koule v doplňku libovolné množiny jsou totiž zároveň otevřenými koulemi v doplňku uzávěru této množiny), a tedy každá σ-shora pórovitá množina je množinou 1. kategorie.

(iii) Je-li množina v prostoru $\mathbb{R}^n$ shora pórovitá v bodě x, pak bod x není bodem vnější hustoty této množiny. Přitom skoro všechny body libovolné množiny v $\mathbb{R}^n$ jsou body její vnější hustoty. Proto má každá shora pórovitá (a tedy také každá σ-shora pórovitá) množina v $\mathbb{R}^n$ nulovou Lebesgueovu míru.

(iv) Je-li $x \in \overline{A}$, potom $0 \leq \overline{p}(A, x) \leq \frac{1}{2}$ a $0 \leq \underline{p}(A, x) \leq \frac{1}{2}$, v opačném případě pak $\overline{p}(A, x) = \underline{p}(A, x) = 1$. Pro libovolnou neprázdnou množinu $A \subset X$ je tedy $\overline{p}(A) \leq \frac{1}{2}$.

(v) Je-li $x \in \overline{A}$, pak $\overline{p}(A,x) = \frac{1}{2}$ právě když existuje taková posloupnost koulí $B(z_n, s_n) \subset X$, že $B(z_n, s_n) \cap A = \emptyset$, $z_n \to x$ a $\frac{s_n}{\varrho(x,z_n)} \to 1$ pro $n \to \infty$.

(vi) Systém všech shora pórovitých (resp. zdola pórovitých) množin je uzavřený vzhledem k operaci dělání podmnožin. Systém všech σ-shora pórovitých (resp. σ-zdola pórovitých) množin je dokonce uzavřený vzhledem k operacím dělání podmnožin i spočetných sjednocení, tedy tvoří σ-ideál.

(vii) Pórovitost množin závisí na metrice příslušného metrického prostoru. Uvažujme eukleidovský prostor $\mathbb{R}^n$ a v definici pórovitosti uvažujme postupně eukleidovskou a maximovou metriku. Neexistuje žádný vzorec převádějící pórovitost vzhledem k eukleidovské metrice na pórovitost vzhledem k metrice maximové nebo naopak. Samozřejmě platí, že je-li dolní pórovitost vzhledem k jedné z uvažovaných metrik kladná, pak je kladná i vzhledem k té druhé. Není však obtížné zkonstruovat takovou množinu, aby pórovitost vzhledem k maximové metrice nabývala v určitém bodě této množiny svou maximální možnou hodnotu $\frac{1}{2}$, zatímco pórovitost vzhledem k eukleidovské metrice nikoli (stačí například uvažovat sjednocení souřadnicových os a v počátku vyšetřovat hodnoty pórovitostí vzhledem k oběma výše zmíněným metrikám).

(viii) Položme $\gamma\langle x,r,A\rangle := \sup\{s > 0 : \exists z \in B(x,r) \text{ tak, že } B(z,s) \cap A = \emptyset\}$ a definujme $\overline{p}\langle A,x\rangle := \limsup_{r\to 0_+} \frac{\gamma\langle x,r,A\rangle}{r}$ (resp. $\underline{p}\langle A,x\rangle := \liminf_{r\to 0_+} \frac{\gamma\langle x,r,A\rangle}{r}$). Pak pro všechny body $x \in \overline{A}$ platí vztahy $\overline{p}\langle A,x\rangle = \frac{\overline{p}(A,x)}{1-\overline{p}(A,x)}$ a $\overline{p}(A,x) = \frac{\overline{p}\langle A,x\rangle}{1+\overline{p}\langle A,x\rangle}$ (resp. $\underline{p}\langle A,x\rangle = \frac{\underline{p}(A,x)}{1-\underline{p}(A,x)}$ a $\underline{p}(A,x) = \frac{\underline{p}\langle A,x\rangle}{1+\underline{p}\langle A,x\rangle}$). Pokud tedy v definici 2.1 nahradíme symbol $\gamma(x,r,A)$ symbolem $\gamma\langle x,r,A\rangle$, přeškálujeme jen hodnoty horní (resp. dolní) pórovitosti pomocí zobrazení $\alpha \mapsto \frac{\alpha}{1-\alpha}$.

Definice 2.3. Nechť $A \subset X$ je libovolná množina.

(i) Řekneme, že množina A je *silně pórovitá*, jestliže $\overline{p}(A) = \frac{1}{2}$ nebo $A = \emptyset$.

(ii) Řekneme, že množina A je *σ-silně pórovitá*, jestliže je spočetným sjednocením silně pórovitých množin.

Poznámka 2.4.

(i) Každá silně pórovitá množina je shora pórovitá a každá σ-silně pórovitá množina je σ-shora pórovitá.

(ii) Podobně jako systémy σ-shora pórovitých a σ-zdola pórovitých množin je také systém σ-silně pórovitých množin uzavřený na operace dělání podmnožin a spočetných sjednocení, takže tvoří σ-ideál.

(iii) V obecných prostorech je geometrická podmínka $B(z,s) \subset B(x,r)$ méně přirozená než více restriktivní algebraická podmínka $\varrho(x,z) + s \leq r$. Neekvivalentnost obou přístupů ukazuje následující příklad.

Příklad 2.5. [15, Remark 1.2 (iv)] Položme

$$S := \bigcup_{n=0}^{\infty} [4^{-2n-1}, 4^{-2n}],\ T := \bigcup_{n=0}^{\infty} \{4^{-2n-1}\},$$

$$X := (-S) \cup \{0\} \cup S,\ A := (-T) \cup \{0\} \cup T.$$

V metrickém prostoru X opatřeném eukleidovskou metrikou není množina A silně pórovitá, protože $\overline{p}(A,0) = \frac{3}{8} < \frac{1}{2}$, zatímco při "geometrické" definici je horní pórovitost množiny A rovna $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.

Tvrzení 2.6. [19, Proposition 2.2] *Nechť X je metrický prostor a $A \subset X$ je jeho podmnožina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) A je σ-zdola pórovitá.

(ii) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, kde každá množina P_n, $n \in \mathbb{N}$, má tuto vlastnost:

$$\exists \alpha > 0\ \exists r_0 > 0\ \forall x \in X\ \forall r \in (0, r_0)\ \exists y \in X : B(y, \alpha r) \subset B(x,r) \setminus P_n.$$

Je-li navíc X normovaný lineární prostor, pak jsou tvrzení (i) a (ii) dále ekvivalentní s tvrzením

(iii) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$, kde každá množina P_n, $n \in \mathbb{N}$, má tuto vlastnost:

$$\exists \alpha > 0\ \forall x \in X\ \forall r > 0\ \exists y \in X : B(y, \alpha r) \subset B(x,r) \setminus P_n.$$

Tvrzení 2.7. [19, Proposition 2.5] *Nechť A je σ-zdola pórovitá podmnožina metrického prostoru X. Pak lze množinu A pokrýt spočetně mnoha uzavřenými zdola pórovitými množinami.*

Tvrzení 2.8. [19, Proposition 2.6] *Nechť (X, ϱ) je neprázdný metrický prostor, F je topologicky úplný podprostor X. Nechť dále existuje množina $A \subset F$ hustá v F taková, že F není zdola pórovitá (vzhledem k X) v žádném bodě množiny A. Pak F není σ-zdola pórovitá podmnožina X.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že množina F je σ-zdola pórovitá. Podle tvrzení 2.7 existují uzavřené zdola pórovité množiny F_n, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Protože $(F, \varrho_{\restriction F \times F})$ je topologicky úplný metrický prostor, existují podle Baireovy věty neprázdná otevřená množina $G \subset X$ a index $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $G \cap F \neq \emptyset$

a $G \cap F \subset F_{n_0}$. Protože množina A je hustá v množině F a G je otevřená množina, existuje nějaký bod $y \in G \cap A$. Protože množina F_{n_0} je zdola pórovitá, je zdola pórovitá ve všech bodech množiny $G \cap F$ a speciálně tedy také v bodě y. Tudíž i množina F je zdola pórovitá v bodě y, což je spor s tím, že $y \in A$. Proto množina F není σ-zdola pórovitá. $\square$

Poznámka 2.9. Analogie tvrzení 2.7 a 2.8 pro σ-shora pórovité množiny neplatí. To je jedním z podstatných rozdílů mezi σ-zdola pórovitostí a σ-shora pórovitostí množin, díky němuž jsou důkazy ne-σ-zdola pórovitosti některých malých množin mnohem snazší než obdobné důkazy pro jejich ne-σ-shora pórovitost. Pro σ-zdola pórovité množiny lze totiž použít Baireovu větu, zatímco pro σ-shora pórovité množiny ji musíme obcházet, například užitím nějaké verze Foranova lemmatu [18, Lemma 4.3]. Dalším podstatným rozdílem mezi σ-zdola pórovitými a σ-shora pórovitými množinami je také následující tvrzení o rozkladu, které je užitečné při práci se σ-shora pórovitými množinami a které pro σ-zdola pórovité množiny neplatí.

Tvrzení 2.10. [15, Proposition 1.3] *Nechť X je metrický prostor, $A \subset X$ jeho podmnožina a $p < \frac{1}{2}$ reálné číslo. Množinu A pak lze psát ve tvaru $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $\overline{p}(A_n) > p$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Tvrzení 2.11. [19, Proposition 2.7] *Nechť (X, ϱ) je neprázdný topologicky úplný metrický prostor bez izolovaných bodů. Potom existuje uzavřená řídká množina $F \subset X$, která není σ-zdola pórovitá.*

Pomocí postupu použitého v důkazu předchozího tvrzení nyní dokážeme následující silnější tvrzení:

Tvrzení 2.12. *Nechť (X, ϱ) je neprázdný topologicky úplný metrický prostor bez izolovaných bodů. Pak existuje uzavřená shora pórovitá množina $F \subset X$, která není σ-zdola pórovitá.*

Definice 2.13. Nechť (X, ϱ) je metrický prostor a $\varepsilon > 0$ reálné číslo.

(i) Řekneme, že množina $A \subset X$ je *ε-diskrétní*, jestliže pro každou dvojici bodů $x, y \in A$ platí $\varrho(x, y) > \varepsilon$.

(ii) Nechť $A \subset X$ je libovolná množina. Řekneme, že množina $B \subset A$ je *maximální ε-diskrétní podmnožina* množiny A, jestliže pro každý bod $z \in A \setminus B$ není $B \cup \{z\}$ ε-diskrétní množina v prostoru X.

V důkazu tvrzení 2.12 využijeme následující lemma:

Lemma 2.14. *Nechť (X, ϱ) je neprázdný topologicky úplný metrický prostor bez izolovaných bodů. Pak pro každý bod $z \in X$ existuje množina $M_z \subset X \setminus \{z\}$ s následujícími vlastnostmi:*

(a) $(M_z)' = \{z\}$,

(b) množina M_z je shora pórovitá v bodě z,

(c) množina M_z není zdola pórovitá v bodě z.

Důkaz. Zvolme bod $z \in X$. Protože bod z není izolovaným bodem prostoru X, můžeme sestrojit posloupnost prstenců $A_n := \{x \in X : \frac{1}{2}r_n \leq \varrho(x,z) < r_n\}$ tak, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platilo:

(1) $A_n \neq \emptyset$,

(2) $r_{n+1} < \min(\frac{1}{2}\,r_n, (r_n)^2)$.

Pro čísla $m \in \mathbb{N}_0$ definujeme množinu $P_m := B(z, r_{3m+1}) \setminus B(z, r_{3m+2})$ a symbolem M_m označíme její maximální $(r_{3m+1})^2$-diskrétní podmnožinu. Dále položíme $M_z := \bigcup\limits_{m=0}^{\infty} M_m$.

Množina M_z je zřejmě neprázdná, $M_z \subset X \setminus \{z\}$ a $(M_z)' = \{z\}$, takže podmínka *(a)* je splněna.

Z konstrukce množiny M_z dále vyplývá, že pro všechna $m \in \mathbb{N}$ je $M_z \cap (B(z, r_{3m+2}) \setminus B(z, r_{3m+4})) = \emptyset$. Zafixujme libovolné číslo $m \in \mathbb{N}_0$. Protože je množina A_{3m+3} neprázdná podle podmínky (1), existuje nějaký bod $y_m \in X$ takový, že $\frac{1}{2}\,r_{3m+3} \leq \varrho(y_m, z) < r_{3m+3}$. Uvažujme otevřenou kouli B_m se středem v bodě y_m a s poloměrem $\frac{1}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4}$. Pro tento poloměr podle podmínky (2) platí $0 < \frac{1}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4} < r_{3m+2}$, takže $B_m \subset (B(z, r_{3m+2}) \setminus B(z, r_{3m+4}))$, a tedy $B_m \cap M_z = \emptyset$. Označíme-li $u_m = \frac{3}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4}$, pak $B_m \subset B(z, u_m)$. Pro všechna $m \in \mathbb{N}_0$ proto platí $\gamma(z, u_m, M_z) \geq \frac{1}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4}$. Dostáváme tak dolní odhad pro horní pórovitost množiny M_z v bodě z:

$$\begin{aligned}
\overline{p}(M_z, z) &= \limsup_{r \to 0_+} \tfrac{\gamma(z,r,M_z)}{r} \geq \limsup_{m \to \infty} \tfrac{\gamma(z,u_m,M_z)}{u_m} \geq \limsup_{m \to \infty} \tfrac{\frac{1}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4}}{\frac{3}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4}} \\
&\geq \tfrac{2}{3} \limsup_{m \to \infty} \tfrac{\frac{1}{2}\,r_{3m+3} - r_{3m+4}}{r_{3m+3}} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} \limsup_{m \to \infty} \tfrac{r_{3m+4}}{r_{3m+3}} \\
&\geq \tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3} \lim_{m \to \infty} r_{3m+3} = \tfrac{1}{3} > 0,
\end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{n \to \infty} r_n = 0$, neboť pro všechna $n \in \mathbb{N}$ dostáváme z podmínky (2) $r_n \leq (\frac{1}{2})^{n-1}\,r_1$ a $\lim\limits_{n \to \infty} (\frac{1}{2})^{n-1}\,r_1 = 0$. Tím jsme ukázali, že množina M_z je shora pórovitá v bodě z a podmínka *(b)* je splněna.

Pro každé $m \in \mathbb{N}_0$ položme $l_m = r_{3m+1}$ a uvažujme libovolnou otevřenou kouli $\widetilde{B}_m = B(\widetilde{y}_m, s_m) \subset B(z, l_m)$ takovou, že $\widetilde{B}_m \cap M_z = \emptyset$. Existence nějaké takové koule plyne z již dokázané shora pórovitosti množiny M_z v bodě z. Zafixujeme nějaké $m \in \mathbb{N}_0$ a rozlišíme tyto dva případy:
1. Je-li střed $\widetilde{y}_m$ koule $\widetilde{B}_m$ obsažen v prstenci P_m, pak pro poloměr s_m této koule nutně platí $s_m < (r_{3m+1})^2 = (l_m)^2$, protože $M_z \cap P_m = M_m$ je maximální $(r_{3m+1})^2$-diskrétní podmnožina množiny P_m a v opačném případě bychom dostali spor s maximalitou množiny M_m.

2. Je-li střed $\widetilde{y}_m$ koule $\widetilde{B}_m$ obsažen v kouli $B(z, r_{3m+2})$, potom s využitím podmínky (2) opět dostaneme stejný odhad $s_m \leq r_{3m+2} < (r_{3m+1})^2 = (l_m)^2$, neboť v opačném případě by koule $\widetilde{B}_m$ obsahovala bod z i s nějakým jeho otevřeným okolím, což není možné, protože bod z je hromadným bodem množiny M_z a $\widetilde{B}_m \cap M_z = \emptyset$.
V obou případech jsme tedy dostali odhad $s_m < (l_m)^2$. Protože byla koule $\widetilde{B}_m$ libovolná otevřená koule neprotínající množinu M_z a číslo $m \in \mathbb{N}_0$ bylo také libovolné, ukázali jsme, že $\gamma(z, l_m, M_z) \leq (l_m)^2$ pro všechna $m \in \mathbb{N}_0$. Dostáváme tak následující horní odhad pro dolní pórovitost množiny M_z v bodě z:

$$\begin{aligned}\underline{p}(M_z, z) &= \liminf_{r\to 0_+} \tfrac{\gamma(z,r,M_z)}{r} \leq \liminf_{m\to\infty} \tfrac{\gamma(z,l_m,M_z)}{l_m} \leq \lim_{m\to\infty} \tfrac{(l_m)^2}{l_m} \\ &= \lim_{m\to\infty} r_{3m+1} = 0,\end{aligned}$$

takže množina M_z není zdola pórovitá v bodě z a také podmínka *(c)* je splněna.

$\square$

Důkaz tvrzení 2.12. Matematickou indukcí nejprve zkonstruujeme uzavřené množiny $F_1 \subset F_2 \subset ...$ a otevřené množiny $G_1 \supset G_2 \supset ...$, které při označení $F_0 := \emptyset$ a $D_n := F_n \setminus F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, splňují:

(1) $(D_n)' = F_{n-1}$ pro $n \in \mathbb{N}$,

(2) pro každý bod $x \in D_{n-1}$ je množina D_n shora pórovitá v bodě x a není zdola pórovitá v bodě x pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$,

(3) $D_n \subset G_n$ pro $n \in \mathbb{N}$,

(4) pro každý bod $x \in \overline{G_n}$ existuje bod $w \notin F_n \cup \overline{G_n}$ takový, že $\varrho(x, w) < \frac{1}{n}$ a $B(w, \frac{\varrho(x,w)}{10}) \cap (F_n \cup \overline{G_n}) = \emptyset$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Konstrukce objektů:

Zvolme bod $a \in X$ libovolně a položme $F_1 := \{a\}$. Protože bod a není izolovaným bodem prostoru X, můžeme zvolit nějaký další bod $b \in X$, $b \neq a$, tak, aby $\varrho(a, b) < \frac{1}{3}$. Definujeme $G_1 := B(a, \frac{3\varrho(a,b)}{2}) \setminus \overline{B(b, \frac{\varrho(a,b)}{4})}$. Ověříme, že zkonstruované množiny F_1 a G_1 splňují požadované podmínky:

- $(D_1)' = (F_1 \setminus F_0)' = \{a\}' = \emptyset = F_0$ a podmínka (1) je tedy splněna.
- Podmínku (2) pro případ $n = 1$ nepožadujeme.
- $D_1 = \{a\} \subset B(a, \frac{3\varrho(a,b)}{2}) \setminus \overline{B(b, \frac{\varrho(a,b)}{4})} = G_1$ a podmínka (3) je tedy splněna.
- Zvolme libovolný bod $x \in \overline{G_1}$ a položme $w := b$. Potom $w \notin F_1 \cup \overline{G_1} = \overline{G_1}$ a $\varrho(x, w) \leq \varrho(x, a) + \varrho(a, b) \leq \frac{5\varrho(a,b)}{2} < 1$. Proto také $\frac{\varrho(x,w)}{10} \leq \frac{\varrho(a,b)}{4}$, tedy $B(w, \frac{\varrho(x,w)}{10}) \cap (F_1 \cup \overline{G_1}) \subset B(b, \frac{\varrho(a,b)}{4}) \cap (F_1 \cup \overline{G_1}) = \emptyset$ a také podmínka (4) je splněna.

Předpokládejme, že máme zkonstruovány množiny F_1, G_1, ..., F_{k-1}, G_{k-1} pro nějaké přirozené číslo $k \geq 2$ s vlastnostmi (1) - (4) pro $n = k-1$. Ke každému bodu $z \in D_{k-1}$ zvolíme bod $w_z \notin F_{k-1}$, aby $\varrho(z, w_z) < \min(\frac{1}{3k}, \frac{\varrho(z, F_{k-1} \setminus \{z\})}{3})$. Nějaký takový bod w_z existuje, protože bod z není ani izolovaným bodem prostoru X, ani hromadným bodem množiny D_{k-1}, neboť podle indukčního předpokladu $(D_{k-1})' = F_{k-2}$ a $D_{k-1} \cap F_{k-2} = \emptyset$. Položíme $B_z := B(z, \frac{3\varrho(z,w_z)}{2}) \setminus \overline{B(w_z, \frac{\varrho(z,w_z)}{4})}$, definujeme $G_k := G_{k-1} \cap \bigcup\limits_{z \in D_{k-1}} B_z$ a $F_k := F_{k-1} \cup \bigcup\limits_{z \in D_{k-1}} (M_z \cap G_k)$, kde M_z je množina sestrojená pro bod z podle předchozího lemmatu 2.14. Potom je zřejmě G_k otevřená podmnožina množiny G_{k-1}, F_k nadmnožina množiny F_{k-1} a $D_k = F_k \setminus F_{k-1} = \bigcup\limits_{z \in D_{k-1}} (M_z \cap G_k)$. Uzavřenost množiny F_k je důsledkem uzavřenosti množiny $M_z \cup \{z\}$ pro každé $z \in X$. Dále ověříme splnění podmínek (1) - (4) pro $n = k$:

- Protože $(M_z \cap G_n)' = \{z\}$, dostáváme $D_{n-1} \subset (D_n)'$. Proto platí také $(D_{n-1})' \subset (D_n)'' \subset (D_n)'$ a podle indukčního předpokladu $(D_{n-1})' = F_{n-2}$, čili $F_{n-2} \subset (D_n)'$. Odtud $(D_n)' = F_{n-1}$ a podmínka (1) je splněna.

- Pro libovolný bod $z \in D_{n-1}$ je $M_z \cap G_n \subset D_n$ a navíc podle předchozího lemmatu $(M_z)' = \{z\}$, množina M_z je shora pórovitá v bodě z a není zdola pórovitá v bodě z. Odtud plyne, že množina D_n je shora pórovitá v bodě z a není zdola pórovitá v bodě z, takže podmínka (2) je splněna.

- Podmínka (3) je zřejmě splněna, protože $D_n = \bigcup\limits_{z \in D_{n-1}} (M_z \cap G_n) \subset G_n$.

- Zvolme libovolný bod $x \in \overline{G_n}$. Z konstrukce množiny G_n existuje k bodu x bod $z = z_x \in D_{n-1}$ tak, že $x \in \overline{B_z}$, kde $B_z = B(z, \frac{3\varrho(z,w_z)}{2}) \setminus \overline{B(w_z, \frac{\varrho(z,w_z)}{4})}$ a $w_z \notin F_{n-1} \cup \overline{G_n} = F_n \cup \overline{G_n}$. Přitom poslední uvedená rovnost platí, protože je-li nějaký bod $y \in F_n = D_n \cup F_{n-1}$, pak je buď $y \in F_{n-1}$, nebo $y \in G_n$ díky již dokázané podmínce (3). Z nerovnosti $\varrho(z, w_z) < \frac{1}{3n}$ dostáváme $\varrho(x, w_z) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, w_z) \leq \frac{5\varrho(z,w_z)}{2} < \frac{1}{n}$, odkud dále vyplývá $B(w_z, \frac{\varrho(x,w_z)}{10}) \subset B(w_z, \frac{\varrho(z,w_z)}{4})$, takže stačí položit $w := w_z$ a podmínka (4) je také splněna.

<u>Dokončení důkazu</u>:

Položíme $F := \overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k}$ a $A := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Množina F je uzavřená a množina A je hustá v množině F. Protože $F_1 \subset F_2 \subset ...$, lze psát také $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$ a díky podmínce (2) není množina A zdola pórovitá v žádném svém bodě. Proto není ani množina $F = \overline{A}$ zdola pórovitá v žádném bodě množiny A. Jsou tedy splněny předpoklady tvrzení 2.8, takže množina F není σ-zdola pórovitá.

Podmínka (2) dále zaručuje, že množina A je shora pórovitá. Protože každá otevřená koule ležící v doplňku množiny A leží díky své otevřenosti také v doplňku množiny $\overline{A} = F$, je i množina F shora pórovitá ve všech bodech množiny A. Zbývá tedy jen dokázat shora pórovitost množiny F v bodech množiny $F \setminus A$.

Nejprve si uvědomíme, že pro zkonstruované objekty platí, že $F \subset F_n \cup \overline{G_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Díky uzavřenosti množiny na pravé straně poslední inkluze a monotonii uzávěru stačí dokázat, že $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \subset F_n \cup \overline{G_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Zvolme pevně nějaké $n \in \mathbb{N}$. Protože $F_1 \subset F_2 \subset ...$, zřejmě $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = F_n$ a potřebujeme tedy dokázat, že $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} F_k \subset \overline{G_n}$. Z podmínky (3) ihned dostáváme, že $D_k \subset \overline{G_k}$ a proto také $(D_k)' \subset G_k$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Vzhledem k podmínce (1) platí též $F_k = D_k \cup (D_k)' \subset \overline{G_k}$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, čili $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} F_k \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} \overline{G_k}$. Množiny G_k jsou ale do sebe zařazené a proto $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} F_k \subset \overline{G_n}$.

Zvolme dále libovolný bod $x \in F \setminus A$. Podle právě dokázané vlastnosti $F \subset F_n \cup \overline{G_n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy nutně $x \in \overline{G_n}$ pro libovolný index $n \in \mathbb{N}$. Z podmínky (4) proto získáme posloupnost bodů $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují $w_n \notin F_n \cup \overline{G_n}$, $\varrho(x, w_n) < \frac{1}{n}$ a $B(w_n, \frac{\varrho(x,w_n)}{10}) \cap (F_n \cup \overline{G_n}) = \emptyset$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně tedy pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $w_n \notin F$ a $B(w_n, \frac{\varrho(x,w_n)}{10}) \cap F = \emptyset$. Označme $r_n := \frac{11\varrho(x,w_n)}{10}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a uvažujme otevřené koule $B_n := B(x, r_n)$. Potom $B(w_n, \frac{\varrho(x,w_n)}{10}) \subset B_n$ a tedy $\gamma(x, r_n, F) \geq \frac{r_n}{11}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Proto $\overline{p}(x, F) = \limsup\limits_{r \to 0_+} \frac{\gamma(x,r,F)}{r} \geq \limsup\limits_{n \to \infty} \frac{\gamma(x,r_n,F)}{r_n} \geq \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{r_n}{11}}{r_n} = \frac{1}{11} > 0$, takže množina F je shora pórovitá v bodě x. $\square$

Definice 2.15. Nechť X je metrický prostor. Řekneme, že míra μ je *borelovská regulární míra* na prostoru X, jestliže μ je taková úplná míra, že všechny borelovské množiny jsou μ-měřitelné a pro každou μ-měřitelnou množinu $M \subset X$ platí $\mu(M) = \sup\{\mu(F) : F \subset M, F \text{ uzavřená}\}$.

Tvrzení 2.16. [15, Proposition 2.1] *Nechť μ je borelovská regulární míra na metrickém prostoru X a $A \subset X$ je μ-měřitelná σ-shora pórovitá množina konečné míry. Pak pro každé reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje uzavřená silně pórovitá množina S taková, že $\mu(A \setminus S) < \varepsilon$.*

Definice 2.17. Nechť μ je míra na prostoru X a I je σ-ideál podmnožin X. Řekneme, že míra μ je *absolutně spojitá vzhledem k σ-ideálu I*, jestliže $\mu(A) = 0$ pro každou množinu $A \in I$.

Věta 2.18. [15, Theorem 2.2] *Nechť X je metrický prostor a μ je σ-konečná borelovská regulární míra na X. Pak platí:*

(i) *Je-li $A \subset X$ σ-shora pórovitá μ-měřitelná množina, pak* $\mu(A) = \sup\{\mu(S) : S \subset A, S$ *uzavřená a silně pórovitá*$\}$.

(ii) *Je-li $B \subset X$ σ-shora pórovitá μ-měřitelná množina, pak existuje σ-silně pórovitá F_σ-množina $K \subset B$ taková, že $\mu(B \setminus K) = 0$.*

(iii) *Pro každou σ-shora pórovitou množinu $C \subset X$ existuje σ-silně pórovitá množina $T \subset C$ taková, že $\mu(C \setminus T) = 0$.*

(iv) *Je-li míra μ absolutně spojitá vzhledem k σ-ideálu všech σ-silně pórovitých množin, pak je absolutně spojitá také vzhledem k σ-ideálu všech σ-shora pórovitých množin.*

V závěru této kapitoly ještě zadefinujeme zobecněnou pórovitost množin a zmíníme některé její vlastnosti, protože tento pojem budeme používat také v následující kapitole.

Existuje několik odlišných přístupů ke zobecněné pórovitosti definované pomocí rostoucí funkce $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ nebo systému takových funkcí.

Protože se nadále omezíme jen na zobecněnou pórovitost definovanou pomocí horní limity, budeme místo formálně přesného názvu (g)-shora pórovitá množina užívat pouze pojem (g)-pórovitá množina.

Označme symbolem $\mathcal{G}$ systém všech reálných funkcí g s následujícími vlastnostmi:

- $g(0) = 0$,
- g je rostoucí a spojitá na intervalu $[0, h_1)$ pro nějaké $h_1 > 0$,
- existují čísla $K > 0$ a $h_2 > 0$ tak, že $g^{-1}(x) \leq Kx$ pro $x \in [0, h_2)$.

Definice 2.19. Buď $A \subset X$ množina, $g \in \mathcal{G}$, $x \in X$ a $r > 0$. Symbolem $\gamma(x, r, A)$ označíme supremum z čísel $s > 0$, pro které existuje takový bod $z \in X$, že $\varrho(x, z) + s \leq r$ a $B(z, s) \cap A = \emptyset$. (Přitom položíme $\sup \emptyset := 0$.)

(i) *(g)-pórovitost množiny A v bodě x* definujeme jako

$$\overline{p}_{(g)}(A, x) := \limsup_{r \to 0_+} \frac{g(\gamma(x, r, A))}{r}.$$

(ii) Množina A se nazývá *(g)-pórovitá v bodě x*, jestliže $\overline{p}_{(g)}(A, x) > 0$.

(iii) Množina A se nazývá *(g)-pórovitá*, je-li (g)-pórovitá v každém svém bodě.

(iv) Množina A se nazývá *σ-(g)-pórovitá*, pokud je spočetným sjednocením (g)-pórovitých množin.

Poznámka 2.20.

(i) Uvedená definice je vhodná pro množiny s malými póry. Někdy se lze setkat s odlišnými definicemi (g)-pórovitosti (např. [20]).

(ii) Také σ-(g)-pórovité množiny jsou pro libovolné $g \in \mathcal{G}$ uzavřené na operace dělání podmnožin a spočetných sjednocení, takže tvoří σ-ideál.

(iii) Obyčejná shora pórovitost z definice 2.1 odpovídá volbě identické funkce $g(x) = x$. Nejzajímavější případ, který je odlišný od obyčejné pórovitosti, dostaneme pro funkce $g(x) = x^q$, kde $0 < q < 1$.

(iv) Nechť $0 < q < 1$. Pak existuje perfektní (x^q)-pórovitá množina $E \subset \mathbb{R}$ kladné Lebesgueovy míry ([18, Proposition 2.41]).

(v) Nechť X je metrický prostor. Potom pojem σ-(x^q)-pórovitosti v prostoru X nezávisí na čísle $0 < q < 1$, tj. jsou-li $0 < \alpha < \beta < 1$ a $A \subset X$, pak A je σ-(x^α)-pórovitá právě když je σ-(x^β)-pórovitá ([18, Theorem 2.40]).

Poznámka 2.21. Uvažujme reálné číslo $q \in (0,1)$. Podobně jako pro obyčejnou pórovitost zkusíme zavést také pojem silné (x^q)-pórovitosti. Pro libovolnou množinu $A \subset X$ obecně neexistuje žádný konečný horní odhad na hodnoty funkce $x \mapsto \overline{p}_{(x^q)}(A,x)$. Ve shodě s definicí 2.3, kde jsme definovali silnou pórovitost množiny pomocí největší hodnoty, kterou mohla nabývat horní pórovitost množiny, tedy definujme silně (x^q)-pórovitou množinu jako takovou množinu $A \subset X$, pro kterou je $\overline{p}_{(x^q)}(A,x) = \infty$ v každém bodě $x \in A$. Pomocí poznámky 2.20 (v) snadno dokážeme ekvivalenci σ-silné (x^q)-pórovitosti se σ-(x^q)-pórovitostí, takže na úrovni těchto σ-ideálů nedostaneme žádný silnější pojem.

Každá σ-silně (x^q)-pórovitá množina je zřejmě podle definice 2.19 také σ-(x^q)-pórovitá. Uvažujme tedy naopak nějakou σ-(x^q)-pórovitou množinu $A \subset X$. Zvolme libovolné reálné číslo $q' \in (q,1)$. Podle poznámky 2.20 (v) je množina A σ-$(x^{q'})$-pórovitá, takže existují takové $(x^{q'})$-pórovité množiny A_n ($n \in \mathbb{N}$), že $A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro libovolný bod $x \in A_n$ platí $0 < \overline{p}_{(x^{q'})}(A_n,x) = \limsup\limits_{r\to 0_+} \frac{\gamma(x,r,A_n)^{q'}}{r}$ a snadno můžeme vypočítat (x^q)-pórovitost množiny A_n v bodě x:

$$\begin{aligned}\overline{p}_{(x^q)}(A_n,x) &= \limsup_{r\to 0_+} \frac{\gamma(x,r,A_n)^{q}}{r} = \limsup_{r\to 0_+} \left[\frac{\gamma(x,r,A_n)^{q'}}{r}\,\gamma(x,r,A_n)^{q-q'}\right] \\ &= \overline{p}_{(x^{q'})}(A_n,x)\cdot \limsup_{r\to 0_+} \gamma(x,r,A_n)^{q-q'} = \infty,\end{aligned}$$

protože první činitel je kladný a druhý je nekonečný, neboť pro $r \to 0_+$ jde také $\gamma(x,r,A_n) \to 0_+$ a $q - q' < 0$. Číslo $n \in \mathbb{N}$ i bod $x \in A_n$ byly zcela libovolné, takže každá množina A_n je silně (x^q)-pórovitá a tedy množina A je σ-silně (x^q)-pórovitá.

3 σ-μ-pórovité množiny

Zatímco pojem pórovitosti množin je již poměrně starý, pórovitost měr je naopak relativně novým pojmem. Dolní pórovitost měr zavedli J.-P.Eckmann, E.Järvenpää a M.Järvenpää ([7]), horní pórovitost měr pak M.E.Mera a M.Morán ([14]). V článku [7] bylo dokázáno, že packing-dimenzi libovolné doubling míry lze shora odhadnout pomocí funkce závisející na dolní pórovitosti této míry. Tento výsledek byl později v článku [10] (erratum [11]) rozšířen na Hausdorffovu dimenzi libovolné míry. Podobně jako v případě pórovitosti množin je horní pórovitost měr pro odhady dimenzí měr příliš slabým pojmem. Horní pórovitost měr totiž může nabývat pouze hodnot 0, $\frac{1}{2}$ a 1, jak bylo dokázáno v článku [14]. D.B.Beliaev a S.K.Smirnov později sjednotili přístup k odhadům dimenzí měr zavedením pojmu střední pórovitosti míry ([1]).

V celé této kapitole buď (X, ϱ) neprázdný separabilní metrický prostor. Nechť μ je borelovská regulární pravděpodobnostní míra na prostoru X.

Symbolem μ^* budeme označovat vnější míru příslušnou míře μ (pro libovolnou množinu $A \subset X$ je tedy $\mu^*(A) = \inf\{\mu(M) : M \supset A, M\ \mu\text{-měřitelná}\}$).

Definice 3.1. Buď $A \subset X$ libovolná množina, $x \in X$, $r > 0$ a $\varepsilon > 0$. Označíme symbolem $\gamma(\mu, x, r, \varepsilon, A)$ supremum z čísel $s > 0$, pro které existuje bod $z \in X$ tak, že $\varrho(x, z) + s \leq r$ a $\mu^*(B(z, s) \cap A) \leq \varepsilon\mu(B(x, r))$. (Přitom položíme $\sup \emptyset := 0$.)

(i) *Horní pórovitost množiny A v bodě x vzhledem k míře μ* definujeme jako

$$\overline{p_\mu}(A, x) := \lim_{\varepsilon \to 0_+} \limsup_{r \to 0_+} \frac{\gamma(\mu, x, r, \varepsilon, A)}{r} \tag{3.1}$$

a *dolní pórovitost množiny A v bodě x vzhledem k míře μ* jako

$$\underline{p_\mu}(A, x) := \lim_{\varepsilon \to 0_+} \liminf_{r \to 0_+} \frac{\gamma(\mu, x, r, \varepsilon, A)}{r}. \tag{3.2}$$

(ii) Množina A se nazývá *μ-shora pórovitá v bodě x* (resp. *μ-zdola pórovitá v bodě x*), jestliže $\overline{p_\mu}(A, x) > 0$ (resp. $\underline{p_\mu}(A, x) > 0$).

(iii) Množina A se nazývá *μ-shora pórovitá* (resp. *μ-zdola pórovitá*), je-li μ-shora pórovitá (resp. μ-zdola pórovitá) v každém svém bodě.

(iv) Množina A se nazývá *σ-μ-shora pórovitá* (resp. *σ-μ-zdola pórovitá*), je-li spočetným sjednocením μ-shora pórovitých (resp. μ-zdola pórovitých) množin.

Poznámka 3.2.

(i) Uvažujme libovolnou množinu $A \subset X$ a bod $x \in X$. Pro libovolná čísla $r > 0$ a $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ zřejmě platí $\frac{\gamma(\mu,x,r,\varepsilon_1,A)}{r} \leq \frac{\gamma(\mu,x,r,\varepsilon_2,A)}{r}$ a stejná nerovnost platí i mezi $\limsup_{r\to 0_+}$ (resp. $\liminf_{r\to 0_+}$) těchto podílů. Proto jsou reálné funkce $\varepsilon \mapsto \limsup_{r\to 0_+} \frac{\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A)}{r}$ (resp. $\varepsilon \mapsto \liminf_{r\to 0_+} \frac{\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A)}{r}$) neklesající na intervalu $(0,\infty)$. Přitom $0 \leq \gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A) \leq r$ pro libovolná kladná čísla r a ε, tedy také $0 \leq \limsup_{r\to 0_+} \frac{\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A)}{r} \leq 1$ (resp. $0 \leq \liminf_{r\to 0_+} \frac{\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A)}{r} \leq 1$), takže jsou tyto funkce zároveň omezené (speciálně tedy zdola omezené). Ve vzorcích (3.1) (resp. (3.2)) proto existují vlastní limity pro $\varepsilon \to 0_+$.

(ii) Pro libovolnou množinu $A \subset X$ a pro libovolný bod $x \in X$ platí $0 \leq \underline{p_\mu}(A,x) \leq \overline{p_\mu}(A,x) \leq 1$.

Poznámka 3.3.

(i) Každá μ-zdola pórovitá množina je μ-shora pórovitá a tedy každá σ-μ-zdola pórovitá množina je σ-μ-shora pórovitá.

(ii) Každá μ-nulová množina je μ-zdola pórovitá a tedy také μ-shora pórovitá.

(iii) Každá zdola pórovitá množina je μ-zdola pórovitá a každá shora pórovitá množina je μ-shora pórovitá. Proto také každá σ-zdola pórovitá množina je σ-μ-zdola pórovitá a každá σ-shora pórovitá množina je σ-μ-shora pórovitá.

(iv) Systémy σ-μ-zdola pórovitých a σ-μ-shora pórovitých množin jsou uzavřené na operace dělání podmnožin a spočetných sjednocení, takže tvoří σ-ideál.

Dále v této kapitole dokážeme větu o rozkladu σ-μ-shora pórovitých množin na množiny σ-silně pórovité a μ-nulové. Inspirací k této větě jsou výsledky obsažené v článku [15], kde je zkoumána především horní pórovitost měr, která podle naší definice odpovídá horní pórovitosti celého prostoru vzhledem k příslušné míře.

Zcela analogickými postupy lze navíc dosáhnout podobných výsledků také pro obecnější (g)-pórovitost (viz. definice 2.19). Příslušná tvrzení proto budeme formulovat v tomto obecnějším kontextu a verze těchto tvrzení, které odpovídají σ-μ-shora pórovitosti, dostaneme jako jejich přímé důsledky.

Definice 3.4. Buď $A \subset X$ libovolná množina, $g \in \mathcal{G}$, $x \in X$, $r > 0$ a $\varepsilon > 0$. Symbolem $\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A)$ označíme supremum z čísel $s > 0$, pro které existuje bod $z \in X$ tak, že $\varrho(x,z) + s \leq r$ a $\mu^*(B(z,s) \cap A) \leq \varepsilon\mu(B(x,r))$. (Přitom položíme $\sup\emptyset := 0$.)

(i) *(g)-pórovitost množiny A v bodě x vzhledem k míře μ* definujeme jako

$$\overline{p_{\mu,(g)}}(A,x) := \lim_{\varepsilon\to 0_+} \limsup_{r\to 0_+} \frac{g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A))}{r}. \tag{3.3}$$

(ii) Množina A se nazývá *μ-(g)-pórovitá v bodě x*, jestliže $\overline{p_{\mu,(g)}}(A,x) > 0$.

(iii) Množina A se nazývá *μ-(g)-pórovitá*, je-li μ-(g)-pórovitá v každém svém bodě.

(iv) Množina A se nazývá *σ-μ-(g)-pórovitá*, je-li spočetným sjednocením μ-(g)-pórovitých množin.

Poznámka 3.5.

(i) Uvažujme libovolnou množinu $A \subset X$, funkci $g \in \mathcal{G}$ a nějaký bod $x \in X$. Pro libovolné dostatečně malé číslo $r > 0$ a libovolná čísla $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ platí $\frac{g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon_1,A))}{r} \leq \frac{g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon_2,A))}{r}$, protože funkce g je rostoucí na nějakém pravém okolí 0, a stejná nerovnost platí i mezi $\limsup_{r\to 0_+}$ těchto podílů, tudíž je funkce $\varepsilon \mapsto \limsup_{r\to 0_+} \frac{g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A))}{r}$ neklesající na intervalu $(0,\infty)$. Přitom $0 \leq g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A))$ pro libovolná kladná čísla r a ε, tedy také $0 \leq \limsup_{r\to 0_+} \frac{g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A))}{r}$, takže je tato funkce zároveň zdola omezená. Proto ve vzorci (3.3) existuje limita pro $\varepsilon \to 0_+$. Tato limita je vždy nezáporná, ale může nabývat i hodnoty $+\infty$.

(ii) Každá μ-nulová množina je μ-(g)-pórovitá pro libovolné $g \in \mathcal{G}$.

(iii) Pro libovolné $g \in \mathcal{G}$ je každá (g)-pórovitá množina μ-(g)-pórovitá.

(iv) Pro libovolné $g \in \mathcal{G}$ je systém σ-μ-(g)-pórovitých množin uzavřený na operace dělání podmnožin a spočetných sjednocení, takže tvoří σ-ideál.

Tvrzení 3.6. *Pro každou množinu $A \subset X$ a každou funkci $g \in \mathcal{G}$ je funkce $x \mapsto \overline{p_{\mu,(g)}}(A,x)$ borelovsky měřitelná na X.*

Důkaz. Uvažujme libovolnou množinu $A \subset X$ a funkci $g \in \mathcal{G}$. Podle poznámky 3.5 (i) je funkce $\varepsilon \mapsto \limsup_{r\to 0_+} \frac{g(\gamma(\mu,x,r,\varepsilon,A))}{r}$ neklesající na intervalu $(0,\infty)$. Vzorec (3.3) lze proto přepsat do tvaru $\overline{p_{\mu,(g)}}(A,x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{l\to\infty} \sup\{\frac{g(\gamma(\mu,x,r,\frac{1}{k},A))}{r} : 0 < r < \frac{1}{l}\}$.

Stačí tedy dokázat, že funkce $u_{k,l} : x \mapsto \sup\{\frac{g(\gamma(\mu,x,r,\frac{1}{k},A))}{r} : 0 < r < \frac{1}{l}\}$ je borelovsky měřitelná na prostoru X pro libovolná dostatečně velká čísla $k,l \in \mathbb{N}$, protože funkce $x \mapsto \overline{p_{\mu,(g)}}(A,x)$ je pak spočetnou limitou borelovsky měřitelných funkcí a tudíž je borelovsky měřitelná.

Protože $g \in \mathcal{G}$, existuje takové reálné číslo $h_1 > 0$, že funkce g je rostoucí a spojitá na intervalu $[0, h_1)$. Zvolme libovolné číslo $k \in N$ a číslo $l \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{1}{l} < h_1$. Ukážeme, že funkce $u_{k,l}$ je zdola polospojitá (a tudíž borelovsky měřitelná) na prostoru X. Uvažujme tedy libovolné číslo $c \in \mathbb{R}$ a označme $G_c := \{x \in X : u_{k,l}(x) > c\}$. Dokážeme, že množina G_c je otevřená.

Zvolme libovolný bod $x \in G_c$. Podle definice funkce $u_{k,l}$ najdeme reálné číslo r_x tak, že $c < \frac{g(\gamma(\mu,x,r_x,\frac{1}{k},A))}{r_x}$ a $0 < r_x < \frac{1}{l}$. Z definice symbolu $\gamma(\mu, x, r_x, \frac{1}{k}, A)$ a ze spojitosti funkce g na intervalu $[0, \frac{1}{l})$ potom nalezneme takové reálné číslo $s_x > 0$ a bod $z_x \in X$, že je splněna následující trojice nerovností: $\frac{g(s_x)}{r_x} > c$, $\varrho(x, z_x) + s_x \leq r_x$ a $\mu^*(B(z_x, s_x) \cap A) \leq \frac{1}{k}\mu(B(x, r_x))$. Zvolme reálné číslo $\eta > 0$ takové, aby $\eta + r_x < \frac{1}{l}$ a $\frac{g(s_x)}{\eta+r_x} > c$. Pak pro libovolný bod $y \in B(x, \eta)$ platí $y \in G_c$. Položíme-li $r_y := \eta + r_x$, $s_y := s_x$ a $z_y := z_x$, dostáváme $0 < r_y < \frac{1}{l}$, $\varrho(y, z_y) + s_y \leq \eta + r_x = r_y$ a $\mu^*(B(z_y, s_y) \cap A) \leq \frac{1}{k}\mu(B(x, r_x)) \leq \frac{1}{k}\mu(B(y, r_y))$, kde poslední nerovnost vyplývá z monotonie míry μ, takže $\gamma(\mu, y, r_y, \frac{1}{k}, A) \geq s_y = s_x$ a tedy $\frac{g(\gamma(\mu,y,r_y,\frac{1}{k},A))}{r_y} > c$, neboť funkce g je na intervalu $[0, \frac{1}{l})$ rostoucí. Potom však $u_{k,l}(y) = \sup\{\frac{g(\gamma(\mu,y,r,\frac{1}{k},A))}{r} : 0 < r < \frac{1}{l}\} > c$, tedy opravdu $y \in G_c$. Tím jsme dokázali, že množina G_c je otevřená pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, tudíž funkce $u_{k,l}$ je zdola polospojitá na prostoru X. $\square$

Poznámka 3.7. Podle předchozího tvrzení je pro libovolnou množinu $A \subset X$ a funkci $g \in \mathcal{G}$ funkce $\varphi : x \mapsto \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x)$ borelovsky měřitelná na prostoru X. Je-li množina $B \subset X$ borelovská (resp. μ-měřitelná) a $\alpha \geq 0$ je libovolné reálné číslo, potom jsou množiny $\{x \in B : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq \alpha\}$ a $\{x \in B : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) > \alpha\}$ borelovské (resp. μ-měřitelné), protože se jedná o průniky vzorů intervalů $(-\infty, \alpha]$ a (α, ∞) při borelovsky měřitelné funkci φ a borelovské (resp. μ-měřitelné) množiny B. Speciálně tedy dostáváme, že pro borelovskou (resp. μ-měřitelnou) množinu je její podmnožina sestávající z bodů μ-(g)-pórovitosti borelovská (resp. μ-měřitelná).

Dále budeme potřebovat následující klasickou pokrývací větu:

Věta 3.8. (Basic covering theorem) [9, Theorem 1.2] *Každý systém $\mathcal{F}$ otevřených koulí v metrickém prostoru X se stejně omezenými diametry obsahuje disjunktní podsystém $\mathcal{F}'$ takový, že*

$$\bigcup_{B(x,r)\in\mathcal{F}} B(x, r) \subset \bigcup_{B(x,r)\in\mathcal{F}'} B(x, 5r).$$

Speciálně, každá otevřená koule $B(x, r)$ ze systému $\mathcal{F}$ protíná nějakou otevřenou kouli ze systému $\mathcal{F}'$, která má alespoň poloviční poloměr než koule $B(x, r)$.

Poznámka 3.9.

(i) Předchozí věta platí i v případě, že místo otevřených koulí všude uvažujeme koule uzavřené.

(ii) Systém $\mathcal{F}'$ není nutně spočetný, nicméně v aplikacích takový zpravidla bývá.

(iii) Předpoklad na stejnou omezenost diametrů je nutný.

(iv) Analogická věta platí také pro pokrytí obecnějšími množinami než koulemi (s odlišným důkazem uvedeným například v [8, Theorem 2.8]).

Poznámka 3.10. Uvažujme libovolnou konečnou borelovskou regulární míru ν na prostoru X. Pak pro libovolnou množinu $A \subset X$ existuje ν-měřitelná množina $B \supset A$ taková, že pro libovolnou ν-měřitelnou množinu $N \subset B \setminus A$ je $\nu(N) = 0$, neboli vnitřní míra ν_* množiny $B \setminus A$ je nulová. Tato množina B se nazývá *měřitelný obal* množiny A a dále ji budeme značit symbolem $H(A)$.

Snadný a pro nás podstatný je následující fakt: Pro každou ν-měřitelnou množinu $M \subset X$ platí $\nu^*(M \cap A) \leq \nu(M \cap H(A))$.

Tvrzení 3.11. *Pro každou množinu $A \subset X$, funkci $g \in \mathcal{G}$ a reálné číslo $\varepsilon > 0$ existuje (g)-pórovitá množina $S \subset P := \{x \in A : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) > 0\}$ taková, že $\mu^*(P \setminus S) < \varepsilon$.*

Důkaz. Zvolme pevně libovolnou množinu $A \subset X$, funkci $g \in \mathcal{G}$ a reálné číslo $\varepsilon > 0$. Označme $\widetilde{P} := \{x \in H(A) : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) > 0\}$. Zvolme libovolné reálné číslo $\alpha > 0$. Protože množina $H(A)$ je μ-měřitelná, jsou podle poznámky 3.7 také množiny $\widetilde{P}$ a $\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq \alpha\}$ μ-měřitelné. Předpokládejme, že pro všechna reálná čísla $q > 0$ platí $\mu(\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq q\}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Vzhledem k monotonii míry μ potom nutně platí

$$\mu(\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) = 0\}) = \lim_{q \to 0_+} \mu(\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq q\}) \geq \frac{\varepsilon}{2},$$

což není možné, protože $\mu(\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) = 0\}) = 0$, neboť se jedná o prázdnou množinu. Můžeme proto najít takové reálné číslo $p > 0$, aby platilo $\mu(\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq 2p\}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Přitom $\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq 2p\} \subset H(A)$ a $\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq 2p\} \cap A = \{x \in P : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq 2p\}$, takže podle poznámky 3.10 platí

$$\mu^*(\{x \in P : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq 2p\}) \leq \mu(\{x \in \widetilde{P} : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) \leq 2p\}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Položíme-li tedy $P_0 := \{x \in P : \overline{p_{\mu,(g)}}(A, x) > 2p\}$, pak $\mu^*(P \setminus P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zvolme dále posloupnost kladných reálných čísel $\{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ tak, aby $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j < \frac{\varepsilon}{2}$.

Uvažujme libovolný bod $x \in P_0$. Protože $\overline{p_{\mu,(g)}}(A,x) > 2p$, existuje podle vzorce (3.3) pro libovolná reálná čísla $\eta > 0$ a $\delta > 0$ takové reálné číslo $0 < r < \frac{\delta}{2}$, že platí $\varrho(x,z) + g^{-1}(2pr) \leq r$ a $\mu^*(B(z, g^{-1}(2pr)) \cap A) \leq \eta\mu(B(x,r))$ pro nějaký bod $z \in X$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro metriku ϱ vyplývá, že $B(x,r) \subset B(z,2r)$ a speciálně tedy $x \in B(z,2r)$. Vzhledem k monotonii míry μ dostáváme, že $\mu(B(x,r)) \leq \mu(B(z,2r))$. Položíme-li pro zjednodušení zápisu $s = 2r$, celkově dostáváme, že množina P_0 je pokryta systémem neprázdných otevřených koulí $\{B(z,s) : s < \delta,\ \mu^*(B(z, g^{-1}(ps)) \cap A) \leq \eta\mu(B(z,s))\}$.

Pro $j \in \mathbb{N}$ postupně volíme $\eta = \eta_j$ a $\delta = \frac{1}{j}$. Použijeme pokrývací větu 3.8 a pro každé $j \in \mathbb{N}$ dostaneme disjunktní systém neprázdných otevřených koulí $\{B(z_i,s_i) : i \in I_j\}$ takový, že $P_0 \subset \bigcup\limits_{i \in I_j} B(z_i, 5s_i)$ a pro všechna $i \in I_j$ platí $s_i < \frac{1}{j}$ a $\mu^*(B(z_i, g^{-1}(ps_i)) \cap A) \leq \eta_j\mu(B(z_i,s_i))$.

Uvažujme pevné $j \in \mathbb{N}$. Označíme $G_j := \bigcup\limits_{i \in I_j} (B(z_i, g^{-1}(ps_i)) \cap A)$. Protože $\{B(z_i,s_i) : i \in I_j\}$ je disjunktní systém neprázdných otevřených koulí a prostor X je separabilní, indexová množina I_j je spočetná. Ze σ-subaditivity vnější míry μ^*, disjunktnosti systému $\{B(z_i,s_i) : i \in I_j\}$ a faktu, že míra μ je pravděpodobnostní, dostáváme odhad $\mu^*(G_j) \leq \sum\limits_{i \in I_j} \mu^*(B(z_i, g^{-1}(ps_i)) \cap A) \leq \eta_j \sum\limits_{i \in I_j} \mu(B(z_i,s_i)) \leq \eta_j$.

Položíme-li $G := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} G_j$, pak opětovným použitím σ-subaditivity vnější míry μ^* a předchozích odhadů dostaneme pro vnější míru množiny G odhad $\mu^*(G) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu^*(G_j) \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \eta_j < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ukážeme, že množina $P_0 \setminus G$ je (g)-pórovitá. Podle de Morganových vzorců platí:

$$\begin{aligned} P_0 \setminus G &= P_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} (P_0 \setminus G_j) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Big(P_0 \setminus \bigcup_{i \in I_j} (B(z_i, g^{-1}(ps_i)) \cap A)\Big) \\ &= \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i \in I_j} (P_0 \setminus (B(z_i, g^{-1}(ps_i)) \cap A)) = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i \in I_j} (P_0 \setminus B(z_i, g^{-1}(ps_i))), \end{aligned}$$

kde poslední rovnost platí, neboť $P_0 \subset A$.

Zvolme pevné $x \in P_0 \setminus G$ a $j \in \mathbb{N}$. Protože množina P_0 je pokryta systémem otevřených koulí $\{B(z_i, 5s_i) : i \in I_j\}$, existuje nějaký index $i_j \in I_j$ takový, že $x \in B(z_{i_j}, 5s_{i_j})$. Otevřená koule $B(z_{i_j}, g^{-1}(ps_{i_j}))$ je disjunktní s množinou $P_0 \setminus G$, takže dostáváme $\gamma(x, 5s_{i_j} + g^{-1}(ps_{i_j}), P_0 \setminus G) \geq g^{-1}(ps_{i_j})$, kde $0 < s_{i_j} < \frac{1}{j}$. Tento postup zopakujeme pro každé $j \in \mathbb{N}$ a získáme dokazovaný odhad:

$$\begin{aligned} \overline{p}_{(g)}(P_0 \setminus G, x) &= \limsup_{r \to 0_+} \frac{g(\gamma(x,r,P_0 \setminus G))}{r} \geq \limsup_{j \to \infty} \frac{g(\gamma(x, 5s_{i_j} + g^{-1}(ps_{i_j}), P_0 \setminus G))}{5s_{i_j} + g^{-1}(ps_{i_j})} \\ &\geq \lim_{j \to \infty} \frac{ps_{i_j}}{5s_{i_j} + g^{-1}(ps_{i_j})} = p \lim_{j \to \infty} \frac{1}{5 + p\frac{g^{-1}(ps_{i_j})}{ps_{i_j}}} \geq \frac{p}{5+pK} > 0, \end{aligned}$$

protože $\lim\limits_{j \to \infty} \frac{1}{j} = 0$, tedy také $\lim\limits_{j \to \infty} s_{i_j} = 0$, a navíc $g \in \mathcal{G}$, takže existují reálná čísla $K > 0$ a $h_2 > 0$ tak, že $g^{-1}(x) \leq Kx$ pro $x \in [0, h_2)$.

Stačí tedy položit $S := P_0 \setminus G$, protože množina S je (g)-pórovitá a platí $\mu^*(P \setminus S) \leq \mu^*(P \setminus P_0) + \mu^*(G) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. □

Důsledek 3.12. *Nechť $A \subset X$ je libovolná množina a $g \in \mathcal{G}$. Množina A je σ-μ-(g)-pórovitá, právě když $A = S \cup N$, kde S je σ-(g)-pórovitá množina a N je μ-nulová množina.*

Důkaz. Zvolme pevně nějakou funkci $g \in \mathcal{G}$ a množinu $A \subset X$.

Předpokládejme, že množinu A lze zapsat jako sjednocení σ-(g)-pórovité množiny S a μ-nulové množiny N. Podle poznámky 3.5 je pak množina S σ-μ-(g)-pórovitá, množina N μ-(g)-pórovitá a σ-μ-(g)-pórovité množiny tvoří σ-ideál, takže také množina $A = S \cup N$ je σ-μ-(g)-pórovitá.

Naopak tedy předpokládejme, že množina A je σ-μ-(g)-pórovitá. Potom existují μ-(g)-pórovité množiny A_n, $n \in \mathbb{N}$, tak, že $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Podle tvrzení 3.11 dále existují pro všechna $n \in \mathbb{N}$ (g)-pórovité množiny S_n^m takové, že $S_n^m \subset A_n = \{x \in A_n : \overline{p_\mu}(A_n, x) > 0\}$ a $\mu^*(A_n \setminus S_n^m) < \frac{1}{m}$ pro každé $m \in \mathbb{N}$. Položíme $S_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} S_n^m$. Množina S_n je σ-(g)-pórovitá podmnožina množiny A_n a $\mu^*(A_n \setminus S_n) = 0$. Definujeme množinu $S := \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Množina S je zřejmě σ-(g)-pórovitá podmnožina množiny A a $\mu^*(A \setminus S) = 0$. Protože však platí $A = S \cup (A \setminus S)$, nalezli jsme rozklad množiny A na σ-(g)-pórovitou množinu S a μ-nulovou množinu $A \setminus S$. □

Poznámka 3.13. Pro speciální volbu $g(x) = x$ z předchozích tvrzení dostáváme tuto charakterizaci σ-μ-shora pórovitých množin:

Libovolná množina $A \subset X$ je σ-μ-shora pórovitá, právě když ji lze vyjádřit ve tvaru $A = S \cup N$, kde S je σ-shora pórovitá množina a N je μ-nulová množina.

V tomto speciálním případě však lze tuto charakterizaci dále zesílit pomocí aproximačních vět pro σ-shora pórovité množiny.

Věta 3.14. *Nechť $A \subset X$ je libovolná množina. Množina A je σ-μ-shora pórovitá, právě když $A = S \cup N$, kde S je σ-silně pórovitá množina a N je μ-nulová množina.*

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že množinu A lze zapsat jako sjednocení σ-silně pórovité množiny S a μ-nulové množiny N. Podle poznámek 2.4 a 3.3 je množina S σ-μ-shora pórovitá, množina N μ-shora pórovitá a σ-μ-shora pórovité množiny tvoří σ-ideál, takže také množina $A = S \cup N$ je σ-μ-shora pórovitá.

Naopak tedy předpokládejme, že množina A je σ-μ-shora pórovitá. Podle důsledku 3.12 (kde klademe $g(x) := x$) tedy existují σ-shora pórovitá množina S_1 a μ-nulová množina N_1 tak, že $A = S_1 \cup N_1$. Podle věty 2.18 (iii) existuje σ-silně pórovitá množina $S \subset S_1$ taková, že $\mu(S_1 \setminus S) = 0$. Položíme-li tedy $N := N_1 \cup (S_1 \setminus S)$, dostáváme hledaný rozklad $A = S \cup N$. □

Poznámka 3.15. Aplikujeme-li předchozí větu pro speciální případ, kdy $X \subset \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná množina kladné konečné míry a μ je normalizovaná Lebesgueova míra na množině X (tj. $\mu(X) = 1$), dostáváme charakterizaci všech lebesgueovsky nulových podmnožin množiny X pomocí σ-μ-shora pórovitých množin, protože podle poznámek 2.2 a 2.4 je každá σ-silně pórovitá podmnožina v prostoru $\mathbb{R}^n$ (a tedy také v X) lebesgueovsky nulová a předchozí charakterizace σ-μ-shora pórovitých množin se tedy redukuje pouze na ekvivalenci σ-μ-shora pórovitosti a lebesgueovské nulovosti.

Poznámka 3.16. V případě $g(x) = x^q$, kde $0 < q < 1$, nelze narozdíl od případu obyčejné shora pórovitosti zesílit důsledek 3.12 pomocí σ-silné (x^q)-pórovitosti, protože ta podle poznámky 2.21 splývá s obyčejnou σ-(x^q)-pórovitostí.

Na závěr této kapitoly ještě uvedeme další ekvivalentní charakterizaci σ-μ-shora pórovitosti množin.

Definice 3.17. Buď $A \subset X$ libovolná množina, $x \in X$, $r > 0$ a $\varepsilon > 0$. Označíme symbolem $\widetilde{\gamma}(\mu, x, r, \varepsilon, A)$ supremum z čísel $s > 0$, pro které existuje bod $z \in X$ tak, že $\varrho(x, z) + s \leq r$ a $\mu^*(B(z, s) \cap A) \leq \varepsilon\mu(B(z, s))$. (Přitom položíme $\sup \emptyset := 0$.) Dále položíme $\overline{\widetilde{p}_\mu}(A, x) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0_+} \limsup\limits_{r \to 0_+} \frac{\widetilde{\gamma}(\mu, x, r, \varepsilon, A)}{r}$.

(i) Množina A se nazývá *$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá v bodě x*, jestliže $\overline{\widetilde{p}_\mu}(A, x) > 0$.

(ii) Množina A se nazývá *$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá*, je-li $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá v každém svém bodě.

(iii) Množina A se nazývá *σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá*, je-li spočetným sjednocením $\widetilde{\mu}$-shora pórovitých množin.

Poznámka 3.18.

(i) Pro libovolnou množinu $A \subset X$, bod $x \in X$ a reálná čísla $r > 0$ a $\varepsilon > 0$ zřejmě platí $\widetilde{\gamma}(\mu, x, r, \varepsilon, A) \leq \gamma(\mu, x, r, \varepsilon, A)$, neboť díky monotonii míry je $\mu(B(z, s)) \leq \mu(B(x, r))$. Každá $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá množina je proto také μ-shora pórovitá a tedy i každá σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá množina je zároveň σ-μ-shora pórovitá.

(ii) Každá μ-nulová množina je $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá.

(iii) Každá shora pórovitá množina je $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá a každá σ-shora pórovitá množina je σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá.

(iv) Systém všech σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitých množin je uzavřený na operaci dělání podmnožin a na spočetná sjednocení, takže tvoří σ-ideál.

Následující příklad ukazuje, že množina $A \subset X$, která je μ-shora pórovitá v nějakém bodě $x \in X$, nemusí být v tomto bodě $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá.

Příklad 3.19. Položme $X = A := \{0\} \cup \{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ a definujme pravděpodobnostní míru μ na prostoru X vztahy $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$ a $\mu(\{\frac{1}{2^n}\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme dále bod $x = 0$. Ukážeme, že množina A je μ-shora pórovitá v bodě x a přitom není $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá v bodě x.

Zvolme libovolnou klesající posloupnost kladných reálných čísel $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Vzorec (3.1) definující horní pórovitost množiny A v bodě x vzhledem k míře μ lze (podobně jako v důkazu tvrzení 3.6) přepsat do tvaru $\overline{p_\mu}(A, 0) = \lim\limits_{k\to\infty} \lim\limits_{l\to\infty} \sup\{\frac{\gamma(\mu,0,r,\varepsilon_k,A)}{r} : 0 < r \leq \frac{1}{2^l}\}$. Zafixujme $k \in \mathbb{N}$ a zvolme $l_k \in \mathbb{N}$ takové, aby $\frac{1}{2^{l_k}} < \varepsilon_k$. Pro všechna $l \geq l_k$ položíme $r_l := \frac{1}{2^l}$, $z_l := \frac{1}{2^{l+1}}$ a $s_l := \frac{1}{2^{l+1}}$. Potom $\varrho(0, z_l) + s_l = r_l$ a $\mu(B(z_l, s_l) \cap A) = \frac{1}{2^{l+1}} < \frac{\varepsilon_k}{2} \leq \varepsilon_k \mu(B(0, r_l))$, takže $\gamma(\mu, 0, r_l, \varepsilon_k, A) \geq s_l$ a tedy $\lim\limits_{l\to\infty} \sup\{\frac{\gamma(\mu,0,r,\varepsilon_k,A)}{r} : 0 < r \leq \frac{1}{2^l}\} \geq \frac{1}{2}$. Protože předchozí odhady můžeme provést pro libovolné číslo $k \in \mathbb{N}$, dostáváme $\overline{p_\mu}(A, 0) \geq \frac{1}{2} > 0$ a množina A je tedy μ-shora pórovitá v 0.

Pro libovolné reálné číslo $0 < \varepsilon < 1$, bod $z \in X$ a číslo $s > 0$ nemůže být splněna nerovnost $\mu(B(z, s) \cap A) = \mu(B(z, s)) \leq \varepsilon\mu(B(z, s))$, protože každý bod prostoru X má kladnou míru, a tedy $\widetilde{\gamma}(\mu, 0, r, \varepsilon, A) = 0$ pro libovolná kladná reálná čísla r a $\varepsilon < 1$. Množina A proto nemůže být $\widetilde{\mu}$-shora pórovitá v 0.

Přestože se pojmy μ-shora pórovitosti a $\widetilde{\mu}$-shora pórovitosti vzájemně liší, generují stejné σ-ideály množin, jak ukazuje následující tvrzení, které podstatně využívá již dokázané charakterizace σ-μ-shora pórovitých množin.

Tvrzení 3.20. *Libovolná množina $A \subset X$ je σ-μ-shora pórovitá, právě když je σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá.*

Důkaz. Každá σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá množina je σ-μ-shora pórovitá podle poznámky 3.18. Dokažme tedy opačnou implikaci. Nechť $A \subset X$ je libovolná σ-μ-shora pórovitá množina. Podle poznámky 3.13 lze množinu A vyjádřit ve tvaru $A = S \cup N$, kde množina S je σ-shora pórovitá a N μ-nulová. Podle poznámky 3.18 jsou však obě tyto množiny σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovité a systém všech takových množin tvoří σ-ideál, takže také množina A je σ-$\widetilde{\mu}$-shora pórovitá. $\square$

4 Aplikace σ-pórovitosti v teorii zobecněných derivací

Hlavním cílem této kapitoly je dokázat, že množina bodů, ve kterých má spojitá reálná funkce konečnou jednostrannou derivaci a kde zároveň neexistuje její derivace, je σ-pórovitá. V článku [21] je sice toto tvrzení dokázáno dokonce pro libovolnou reálnou funkci pomocí Jarníkovy-Blumbergovy metody založené na zkoumání hraničního chování funkcí dvou proměnných, ale my podáme na základě článku [12] jeho nový důkaz. Přitom mimo jiné dokážeme i jedno z nedokazovaných tvrzení tohoto článku a některá úplně nová pomocná tvrzení.

Za tímto účelem nejprve zavedeme několik nestandartních definic. Ty souvisejí se standartním pojetím pórovitosti na reálné ose, které nyní rovněž připomeneme, neboť narozdíl od obecných metrických prostorů máme k dispozici uspořádání, takže můžeme navíc definovat jednostranné pórovitosti.

Poznámka 4.1. Nadále se omezíme pouze na pórovitost definovanou pomocí horní limity, takže budeme místo formálně přesných názvů shora pórovitá množina a horní pórovitost užívat zkrácených názvů pórovitá množina a pórovitost.

Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je množina a I je libovolný otevřený interval. Symbolem $\gamma(A, I)$ označíme délku největšího otevřeného podintervalu I, který neprotíná množinu A. Navíc položíme $\gamma(A, I) := 0$, jestliže žádný takový otevřený podinterval neexistuje.

Definice 4.2. Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina a $x \in \mathbb{R}$ libovolný bod.

(i) *Pórovitost množiny A v bodě x* definujeme vztahem

$$p(A, x) := \limsup_{r \to 0_+} \frac{\gamma(A, (x - r, x + r))}{r}.$$

(ii) *Pravou pórovitost množiny A v bodě x* definujeme vztahem

$$p^+(A, x) := \limsup_{r \to 0_+} \frac{\gamma(A, (x, x + r))}{r}.$$

(iii) *Levou pórovitost množiny A v bodě x* definujeme vztahem

$$p^-(A, x) := \limsup_{r \to 0_+} \frac{\gamma(A, (x - r, x))}{r}.$$

(iv) Řekneme, že množina A je *pórovitá v bodě x* (resp. *silně pórovitá v bodě x*), jestliže $p(A, x) > 0$ (resp. $p(A, x) \geq 1$).

(v) Řekneme, že množina A je *zprava pórovitá v bodě* x (resp. *silně zprava pórovitá v bodě* x), jestliže $p^+(A,x) > 0$ (resp. $p^+(A,x) = 1$).

(vi) Řekneme, že množina A je *zleva pórovitá v bodě* x (resp. *silně zleva pórovitá v bodě* x), jestliže $p^-(A,x) > 0$ (resp. $p^-(A,x) = 1$).

(vii) Řekneme, že množina A je *oboustranně pórovitá v bodě* x (resp. *silně oboustranně pórovitá v bodě* x), jestliže je v bodě x pórovitá (resp. silně pórovitá) zprava i zleva.

(viii) Množina A se nazývá *pórovitá* (resp. *silně pórovitá*), jestliže je pórovitá (resp. silně pórovitá) v každém svém bodě.

(ix) Množina A se nazývá *zprava pórovitá* (resp. *silně zprava pórovitá*), jestliže je zprava pórovitá (resp. silně zprava pórovitá) v každém svém bodě.

(x) Množina A se nazývá *zleva pórovitá* (resp. *silně zleva pórovitá*), jestliže je zleva pórovitá (resp. silně zleva pórovitá) v každém svém bodě.

(xi) Množina A se nazývá *oboustranně pórovitá* (resp. *silně oboustranně pórovitá*), jestliže je oboustranně pórovitá (resp. silně oboustranně pórovitá) v každém svém bodě.

(xii) Množina A se nazývá *σ-pórovitá* (resp. *σ-silně pórovitá*), jestliže je spočetným sjednocením pórovitých (resp. silně pórovitých) množin.

(xiii) Množina A se nazývá *σ-zprava pórovitá* (resp. *σ-silně zprava pórovitá*), jestliže je spočetným sjednocením zprava pórovitých (resp. silně zprava pórovitých) množin.

(xiv) Množina A se nazývá *σ-zleva pórovitá* (resp. *σ-silně zleva pórovitá*), jestliže je spočetným sjednocením zleva pórovitých (resp. silně zleva pórovitých) množin.

(xv) Množina A se nazývá *σ-oboustranně pórovitá* (resp. *σ-silně oboustranně pórovitá*), jestliže je spočetným sjednocením oboustranně pórovitých (resp. silně oboustranně pórovitých) množin.

Poznámka 4.3.

(i) Přestože uvedená definice pórovitosti množiny nedává tytéž hodnoty pórovitosti jako obecnější definice 2.1, je s touto definicí ekvivalentní (pouze dává dvojnásobné hodnoty).

(ii) Někdy se lze setkat také s pórovitostí množiny v bodě definovanou vztahem

$$p(A,x) = \max(p^+(A,x), p^-(A,x)),$$

která se liší pouze v případě, že $x \notin \overline{A}$.

(iii) Každá množina, která je zprava (resp. zleva) pórovitá, je také pórovitá.

(iv) Jednobodové množiny jsou silně oboustranně pórovité, takže každá spočetná množina je σ-silně oboustranně pórovitá. Speciálně je každá spočetná množina σ-pórovitá.

Definice 4.4. [12] Buď $F \subset \mathbb{R}$ uzavřená množina a $x \in \mathbb{R}$ bod.

(i) Nechť $l \in (0,1)$ je libovolné reálné číslo. Řekneme, že množina F *má v bodě x pravou (k)-vlastnost pro l*, jestliže pro všechna $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existuje napravo od bodu x otevřený interval (α, β) disjunktní s množinou F takový, že $x \leq \alpha < x + \varepsilon_1$ a $\frac{\beta-\alpha}{\beta-x} > l - \varepsilon_2$.

(ii) Nechť $l \in (0,1)$ je libovolné reálné číslo. Řekneme, že množina F *má v bodě x levou (k)-vlastnost pro l*, jestliže pro všechna $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ existuje nalevo od bodu x otevřený interval (α, β) disjunktní s množinou F takový, že $x - \varepsilon_1 < \beta \leq x$ a $\frac{\beta-\alpha}{x-\alpha} > l - \varepsilon_2$.

(iii) Řekneme, že množina F *má v bodě x silnou pravou* (resp. *levou*) *(k)-vlastnost*, jestliže má v bodě x pravou (resp. levou) (k)-vlastnost pro všechna $l \in (0,1)$.

(iv) Řekneme, že množina F *má v bodě x silnou (k)-vlastnost*, jestliže má v bodě x silnou pravou i levou (k)-vlastnost.

(v) Má-li množina F silnou pravou (resp. levou) (k)-vlastnost ve všech bodech $x \in F$, řekneme, že množina F *má silnou pravou* (resp. *levou*) *(k)-vlastnost*.

(vi) Má-li množina F silnou (k)-vlastnost ve všech bodech $x \in F$, řekneme, že množina F *má silnou (k)-vlastnost*.

Poznámka 4.5. Nechť $F \subset \mathbb{R}$ je uzavřená množina a $x \in \mathbb{R}$ je libovolný bod.

(i) Nechť $l \in (0,1)$ je libovolné reálné číslo. Má-li množina F v bodě x pravou (resp. levou) (k)-vlastnost pro l, pak je tato množina zprava (resp. zleva) pórovitá v bodě x.

(ii) Má-li množina F v bodě x silnou pravou (resp. levou) (k)-vlastnost, pak je silně zprava (resp. zleva) pórovitá v bodě x.

(iii) Má-li množina F v bodě x silnou (k)-vlastnost, pak je v bodě x silně oboustranně pórovitá.

(iv) Má-li množina F silnou pravou (resp. levou) (k)-vlastnost, pak je silně zprava (resp. zleva) pórovitá.

(v) Má-li množina F silnou (k)-vlastnost, pak je silně oboustranně pórovitá.

Definice 4.6. [12] Nechť $E \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina.

(i) Řekneme, že množina E *není silně redukovatelná*, jestliže existuje uzavřená množina $F \subset E$ taková, že množina bodů z F, ve kterých nemá množina F silnou (k)-vlastnost, je hustá v F. V opačném případě řekneme, že množina E *je silně redukovatelná*.

(ii) Řekneme, že množina E *není silně zprava* (resp. *zleva*) *redukovatelná*, jestliže existuje uzavřená množina $F \subset E$ taková, že množina bodů z F, ve kterých nemá množina F silnou pravou (resp. levou) (k)-vlastnost, je hustá v F. V opačném případě řekneme, že množina E *je silně zprava* (resp. *zleva*) *redukovatelná*.

(iii) Řekneme, že množina E *není redukovatelná*, jestliže existují uzavřená množina $F \subset E$ a reálné číslo $0 < l < 1$ tak, že množina bodů z F, ve kterých nemá množina F pravou nebo levou (k)-vlastnost pro l, je hustá v F. V opačném případě řekneme, že množina E *je redukovatelná*.

(iv) Řekneme, že množina E *není zprava* (resp. *zleva*) *redukovatelná*, jestliže existují uzavřená množina $F \subset E$ a reálné číslo $0 < l < 1$ tak, že množina bodů z F, ve kterých nemá množina F pravou (resp. levou) (k)-vlastnost pro l, je hustá v F. V opačném případě řekneme, že množina E *je zprava* (resp. *zleva*) *redukovatelná*.

Poznámka 4.7. Původní definice z článku [12] všude pracuje s perfektními množinami namísto množin uzavřených, ale oběma způsoby to vyjde nastejno, neboť případné izolované body nevadí.

Poznámka 4.8. Redukovatelnost množin (ve smyslu definice 4.6) lze tedy popsat také takto:

Množina A je silně redukovatelná, právě když pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I \neq \emptyset$ a množina F má silnou (k)-vlastnost ve všech bodech $x \in F \cap I$. Speciálně tedy platí, že je-li množina A silně redukovatelná, pak pro libovolnou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I$ je neprázdná silně oboustranně pórovitá množina.

Množina A je silně zprava (resp. zleva) redukovatelná, právě když pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I \neq \emptyset$ a množina F má silnou pravou (resp. levou) (k)-vlastnost ve všech bodech $x \in F \cap I$. Speciálně tedy platí, že je-li množina A silně zprava (resp. zleva) redukovatelná, pak pro libovolnou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I$ je neprázdná silně zprava (resp. zleva) pórovitá množina.

Množina A je redukovatelná, právě když pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ a pro každé reálné číslo $l \in (0, 1)$ existuje otevřený interval I

takový, že $F \cap I \neq \emptyset$ a množina F má pravou i levou (k)-vlastnost pro l ve všech bodech $x \in F \cap I$. Speciálně tedy platí, že je-li množina A redukovatelná, pak pro libovolnou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I$ je neprázdná oboustranně pórovitá množina.

Množina A je zprava (resp. zleva) redukovatelná, právě když pro každou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ a pro každé reálné číslo $l \in (0, 1)$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I \neq \emptyset$ a množina F má pravou (resp. levou) (k)-vlastnost pro l ve všech bodech $x \in F \cap I$. Speciálně tedy platí, že je-li množina A zprava (resp. zleva) redukovatelná, pak pro libovolnou neprázdnou uzavřenou množinu $F \subset A$ existuje otevřený interval I takový, že $F \cap I$ je neprázdná zprava (resp. zleva) pórovitá množina.

Poznámka 4.9. Libovolná podmnožina (silně) redukovatelné množiny je zřejmě opět (silně) redukovatelná. Totéž platí i pro (silně) zprava (resp. zleva) redukovatelné množiny.

Dále budeme potřebovat následující známé lemma:

Lemma 4.10. *Nechť κ je libovolný ordinál a F_α, $\alpha \in [0, \kappa)$, jsou uzavřené podmnožiny separabilního metrického prostoru X. Nechť pro $0 \leq \beta < \alpha < \kappa$ je množina F_α vlastní podmnožinou množiny F_β. Pak $\kappa < \omega_1$.*

Důkaz. Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze prostoru X. Sestrojíme-li prosté zobrazení množiny $[0, \kappa)$ do spočetné množiny $\mathcal{B}$, dostaneme, že κ je spočetný ordinál a tedy $\kappa < \omega_1$.

Pro každé $\beta \in [0, \kappa)$ vybereme libovolný bod $x_\beta \in F_\beta \setminus F_{\beta+1}$ a označíme $\psi(\beta) = x_\beta$. Dále pro každé $\beta \in [0, \kappa)$ vybereme libovolnou množinu $B_\beta \in \mathcal{B}$ tak, aby $x_\beta \in B_\beta \subset X \setminus F_{\beta+1}$ a označíme $\varphi(\beta) = B_\beta$. Stačí dokázat, že zobrazení φ z množiny $[0, \kappa)$ do množiny $\mathcal{B}$ je prosté. Zvolme tedy libovolné dva ordinály β a β' tak, aby $\beta + 1 < \kappa$, $\beta' + 1 < \kappa$ a $\beta \neq \beta'$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\beta' > \beta$. Z monotonie posloupnosti množin $\{F_\alpha\}_{0 \leq \alpha < \kappa}$ a z definic zobrazení ψ a φ vyplývá, že $B_\beta \subset X \setminus F_{\beta+1}$, $x_{\beta'} \in F_{\beta'} \setminus F_{\beta'+1} \subset F_{\beta+1}$ a zároveň $x_{\beta'} \in B_{\beta'}$, takže $B_{\beta'} \cap F_{\beta+1} \neq \emptyset$ a tedy $B_\beta \neq B_{\beta'}$. $\square$

Pomocí předchozího lemmatu nyní dokážeme nové tvrzení, které částečně dává do souvislosti redukovatelnost a σ-pórovitost. Toto tvrzení budeme formulovat pro uzavřené zprava redukovatelné množiny, pro které jej později také využijeme, ačkoli jeho analogie platí i pro ostatní zavedené typy redukovatelnosti.

Tvrzení 4.11. *Nechť $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdná uzavřená zprava redukovatelná množina. Potom A je σ-zprava pórovitá množina.*

Důkaz. Budeme postupovat transfinitní indukcí. Sestrojíme posloupnost uzavřených množin $\{F_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ a posloupnost otevřených intervalů $\{I_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ tak, aby množiny $F_\alpha \cap I_\alpha$ byly buď zprava pórovité podmnožiny množiny A, nebo prázdné, a $A = \bigcup_{\alpha<\omega_1} (F_\alpha \cap I_\alpha)$.

$\underline{\alpha = 0}$: Položíme $F_0 := A$. Protože množina A je zprava redukovatelná a F_0 je neprázdná uzavřená podmnožina množiny A, existuje podle poznámky 4.8 otevřený interval I_0 takový, že $F_0 \cap I_0 \neq \emptyset$ a množina $F_0 \cap I_0$ je zprava pórovitá.

$\underline{\alpha \text{ nelimitní}}$: Položíme $F_\alpha := F_{\alpha-1} \setminus I_{\alpha-1}$. Je-li množina F_α neprázdná, existuje podle poznámky 4.8 otevřený interval I_α takový, že $F_\alpha \cap I_\alpha \neq \emptyset$ a množina $F_\alpha \cap I_\alpha$ je zprava pórovitá, neboť F_α je neprázdná uzavřená podmnožina zprava redukovatelné množiny A. Je-li množina F_α prázdná, položíme také $I_\alpha := \emptyset$.

$\underline{\alpha \text{ limitní}}$: Položíme $F_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$. Je-li množina F_α neprázdná, existuje podle poznámky 4.8 otevřený interval I_α takový, že $F_\alpha \cap I_\alpha \neq \emptyset$ a množina $F_\alpha \cap I_\alpha$ je zprava pórovitá, neboť F_α je neprázdná uzavřená podmnožina zprava redukovatelné množiny A. Je-li množina F_α prázdná, položíme také $I_\alpha := \emptyset$.

Označíme $\kappa := \sup\{\alpha < \omega_1 : F_\alpha \neq \emptyset\}$. Pro všechny indexy $\alpha \in [0, \kappa)$ platí $F_{\alpha+1} \subsetneqq F_\alpha$, takže množiny F_α, $\alpha \in [0, \kappa)$, tvoří klesající posloupnost uzavřených množin. Podle lemmatu 4.10 je tedy κ spočetný ordinál.

Navíc zřejmě platí, že $A = \bigcup_{\alpha<\kappa} (F_\alpha \cap I_\alpha)$, kde všechny množiny $F_\alpha \cap I_\alpha$ pro $\alpha \in [0, \kappa)$ jsou zprava pórovité. Množina A je proto σ-zprava pórovitá. $\square$

Poznámka 4.12. Zcela analogickým způsobem můžeme také dokázat, že uzavřená silně redukovatelná množina je σ-silně pórovitá. Podobná tvrzení platí i pro ostatní typy redukovatelnosti.

Nyní pro libovolnou reálnou funkci zavedeme její zobecněné derivace:

Definice 4.13. Nechť f je libovolná reálná funkce na intervalu (a, b) a $x \in (a, b)$. *Pravou horní*, *pravou dolní*, *levou horní* a *levou dolní Diniho derivaci funkce f v bodě x* definujeme postupně vztahy

$$D^+f(x) := \limsup_{h\to 0_+} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D_+f(x) := \liminf_{h\to 0_+} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D^-f(x) := \limsup_{h\to 0_-} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h},$$
$$D_-f(x) := \liminf_{h\to 0_-} \tfrac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Poznámka 4.14. Nechť f je libovolná reálná funkce definovaná na intervalu (a, b). *Pravou horní*, *pravou dolní*, *levou horní* a *levou dolní Diniho derivací funkce f* rozumíme postupně numerické funkce $x \mapsto D^+f(x)$, $x \mapsto D_+f(x)$, $x \mapsto D^-f(x)$ a $x \mapsto D_-f(x)$ pro $x \in (a, b)$.

Borelovskou měřitelnost všech čtyř Diniho derivací libovolné spojité funkce nám zajišťuje následující známé tvrzení:

Tvrzení 4.15. [4, Theorem 2.2] *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b]$. Pak každá z jejích čtyř Diniho derivací je funkce 2. Baireovy třídy.*

Poznámka 4.16.

(i) Předchozí tvrzení platí obecněji i pro funkci f libovolné Baireovy třídy: *Je-li funkce f Baireovy třídy $\alpha < \omega_1$ na intervalu $[a, b]$, pak jsou všechny čtyři její Diniho derivace funkce Baireovy třídy $\alpha + 2$.*

(ii) Předchozí tvrzení platí nejen pro uzavřené intervaly, ale také pro libovolné jiné nedegenerované intervaly.

(iii) Protože je každá baireovská funkce i borelovská, jsou podle předchozího tvrzení jsou všechny čtyři Diniho derivace libovolné spojité funkce borelovské.

Jednou z nejvýznamnějších vět o vztazích mezi jednotlivými Diniho derivacemi je Denjoy-Young-Saksova věta podávající úplný výčet vztahů mezi čtveřicí Diniho derivací, které splňuje libovolná reálná funkce skoro všude (vzhledem k Lebesgueově míře). Tuto větu poprvé nezávisle dokázali v roce 1915 A.Denjoy a G.C.Young pro spojité funkce a později v roce 1924 ji S.Saks dokázal pro libovolné reálné funkce.

Věta 4.17. (Denjoy-Young-Saks) [17, §70] *Nechť f je libovolná reálná funkce. Pak skoro každý bod x náleží do jedné z následujících čtyř množin:*

$\{x : f'(x)$ *existuje a je konečná*$\}$,
$\{x : D^+f(x) = D_-f(x)$ *jsou konečné*, $D_+f(x) = -\infty,\ D^-f(x) = +\infty\}$,
$\{x : D_+f(x) = D^-f(x)$ *jsou konečné*, $D^+f(x) = +\infty,\ D_-f(x) = -\infty\}$,
$\{x : D^+f(x) = D^-f(x) = +\infty,\ D_+f(x) = D_-f(x) = -\infty\}$.

Zajímavou variantu této věty dokázali nezávisle L.Zajíček a C.L.Belna, G.T.Cargo, M.J.Evans a P.D.Humke. Jejich cílem bylo získat výčet vztahů, který musí splňovat čtveřice Diniho derivací ve všech bodech až na σ-pórovitou množinu (tj. výjimečnou množinu v silnějším smyslu).

Věta 4.18. [17, §73], [21] *Nechť f je libovolná reálná funkce. Pak v každém bodě x s možnou výjimkou σ-pórovité množiny nastává jeden z následujících případů:*

$D_-f(x) = D_+f(x)$ *a* $D^-f(x) = D^+f(x)$,
$-\infty = D_-f(x) \le D_+f(x) \le D^-f(x) \le D^+f(x) = +\infty$,
$-\infty = D_+f(x) \le D_-f(x) \le D^+f(x) \le D^-f(x) = +\infty$.

Důsledek 4.19. [21] *Pro libovolnou reálnou funkci je množina bodů, ve kterých existuje konečná jednostranná derivace a zároveň neexistuje derivace, σ-pórovitá.*

Pro spojité funkce předchozí důsledek dále dokážeme (tvrzení 4.28). Mimo jiné přitom využijeme také následující snadné, dobře známé tvrzení:

Tvrzení 4.20. [4, Theorem 4.1] *Nechť f je reálná funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Pak jsou množiny $A = \{x : D^+f(x) < D_-f(x)\}$ a $B = \{x : D^-f(x) < D_+f(x)\}$ nejvýše spočetné.*

Důsledek 4.21. *Pro libovolnou reálnou funkci f je množina všech bodů, ve kterých existují obě jednostranné derivace funkce f a jsou různé, nejvýše spočetná.*

Nyní dokážeme jedno technické lemma pro práci se zobecněnými derivacemi, které lze najít v článku [12].

Lemma 4.22. [12] *Nechť f je libovolná reálná funkce na otevřeném intervalu (a, b), která je spojitá v bodě $x_0 \in (a, b)$. Buď D_P jedna z jejích pravých Diniho derivací v bodě x_0, D_L jedna z jejích levých Diniho derivací v tomto bodě, která je navíc konečná, a $k \in (0, 1)$ libovolné reálné číslo. Potom pro libovolná reálná čísla N a $\varepsilon > 0$ existuje reálné číslo $0 < h < \varepsilon$ takové, že pro každý bod x z intervalu $[x_0 + (1 - k)h, x_0 + h]$ existují reálná čísla $0 < h_1, h_2 < \varepsilon$ splňující:*

(a) je-li Diniho derivace D_P konečná, pak
$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq |D_P - D_L|\,(1-k) - \varepsilon,$$

(b) je-li Diniho derivace D_P nekonečná, pak
$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq N.$$

Důkaz. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že

$$D_L = 0,$$

neboť v opačném případě stačí místo funkce f uvažovat funkci $\widetilde{f}(x) = f(x) - D_L\, x$ pro $x \in (a, b)$ a tvrzení lemmatu dokázat pro funkci $\widetilde{f}$. Navíc můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že

$$D_P > 0,$$

protože případnou záměnou funkce f za funkci $-f$ zařídíme, aby $D_P \geq 0$, a případ $D_P = 0$ je zřejmý.

Zvolme libovolná reálná čísla N a $\varepsilon > 0$.

Protože $D_P > 0$, najdeme reálné číslo $\varepsilon' > 0$ takové, aby

$$\varepsilon' < \varepsilon$$

a

$$D_P > \frac{\varepsilon'}{3}.$$

Protože podle předpokladu platí $D_L = 0$, můžeme najít reálné číslo τ_1 tak, aby platilo

$$0 < \tau_1 < \frac{\varepsilon'}{2}$$

a

$$\left|\frac{f(x_0 - \tau_1) - f(x_0)}{\tau_1}\right| < \frac{\varepsilon'}{3}. \tag{4.1}$$

Položme

$$\widetilde{\varepsilon} := \tau_1 \frac{\varepsilon'}{3}.$$

Ze spojitosti funkce f v bodě x_0 nalezneme takové reálné číslo

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon'}{2},$$

aby pro všechna $|t| < \delta$ platilo

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| < \widetilde{\varepsilon}. \tag{4.2}$$

Protože D_P je jednou z pravých Diniho derivací funkce f v bodě x_0, můžeme najít reálné číslo τ_2 tak, aby platilo

$$0 < \tau_2 < \delta(1 - k)$$

a

$$\frac{f(x_0 + \tau_2) - f(x_0)}{\tau_2} = \alpha > 0, \tag{4.3}$$

kde

$$|\alpha - D_P| < \frac{\varepsilon'}{3}, \tag{4.4}$$

je-li $D_P \in (\frac{\varepsilon'}{3}, \infty)$, nebo

$$\alpha > \frac{N + \varepsilon'}{1 - k}, \tag{4.5}$$

je-li $D_P = \infty$.

Položme

$$h := \frac{\tau_2}{1 - k}.$$

Ukážeme, že tato volba h vyhovuje všem požadavkům z lemmatu. Zřejmě platí $0 < h < \varepsilon$, protože $0 < \frac{\tau_2}{1-k} < \delta < \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon$.

Uvažujme libovolný bod

$$x \in [x_0 + (1 - k)h, x_0 + h],$$

tj. $x \in [x_0 + \tau_2, x_0 + h]$.

Označme

$$h' := x - x_0,$$
$$k' := 1 - \frac{\tau_2}{x - x_0},$$
$$s := f(x_0 + \tau_2) - f(x_0)$$

a

$$\gamma := f(x) - f(x_0).$$

Dále ukážeme, že lze zvolit reálná čísla h_1 a h_2 splňující podmínky z lemmatu. Přitom rozlišíme následující tři případy ($\gamma \geq s$, $0 < \gamma < s$ a $\gamma \leq 0$):

1. $\underline{\gamma \geq s}$: Položíme

$$h_1 := h'$$

a

$$h_2 := \tau_1 + h'.$$

Potom zřejmě platí $0 < h_1 < \varepsilon$, protože $h' \leq h < \varepsilon$, a také $0 < h_2 < \varepsilon$, neboť $\tau_1 < \frac{\varepsilon'}{2}$, $h' \leq h < \delta < \frac{\varepsilon'}{2}$ a $\varepsilon' < \varepsilon$.

Pomocí vztahů (4.1), (4.2), (4.3) a nerovnosti $\gamma \geq s$ v tomto případě dostáváme následující odhady:

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \tfrac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| &\geq \left|\tfrac{f(x_0)-f(x)}{h'}\right| - \left|\tfrac{f(x_0-\tau_1)-f(x)}{\tau_1+h'}\right| \\
&\geq \tfrac{|\gamma|}{h'} - \left|\tfrac{f(x_0-\tau_1)-f(x_0)}{\tau_1}\right| - \left|\tfrac{f(x_0)-f(x)}{\tau_1}\right| \\
&\geq \tfrac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)}{h'} - \tfrac{\varepsilon'}{3} - \tfrac{\widetilde{\varepsilon}}{\tau_1} = \alpha\tfrac{\tau_2}{h'} - \tfrac{2}{3}\varepsilon' = \alpha(1-k)\tfrac{h}{h'} - \tfrac{2}{3}\varepsilon' \\
&\geq \alpha(1-k) - \tfrac{2}{3}\varepsilon'.
\end{aligned}$$

Je-li $D_P \in (\frac{\varepsilon'}{3}, \infty)$, pak podle vzorce (4.4) platí $\alpha \in (D_P - \frac{\varepsilon'}{3}, D_P + \frac{\varepsilon'}{3})$, takže celkem dostáváme dokazovaný odhad

$$\left|\tfrac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \tfrac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq (D_P - \tfrac{\varepsilon'}{3})(1-k) - \tfrac{2}{3}\varepsilon' \geq (1-k)D_P - \varepsilon,$$

protože $k \in (0,1)$ a $\varepsilon' < \varepsilon$.

Pokud $D_P = \infty$ dostáváme užitím vzorce (4.5) dokazovaný odhad

$$\left|\tfrac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \tfrac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq N + \tfrac{\varepsilon'}{3} > N.$$

2. $\underline{0 < \gamma < s}$: Položíme

$$h_1 := h'$$

a

$$h_2 := h' - \tau_2 = k'h'.$$

Podobně jako v prvním případě platí $0 < h_1 < \varepsilon$ a také $0 < h_2 < \varepsilon$, protože $k' \in (0,1)$, takže $0 < k'h' < h' < \varepsilon$.

Tentokrát postupně s využitím nerovností $0 < \gamma < s$, $0 < k' < k < 1$ a vzorce (4.3) dostáváme následující odhady:

$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq \left|\frac{f(x_0)-f(x)}{h'} - \frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)+f(x_0)-f(x)}{k'h'}\right| = \left|\frac{s-(1-k')\gamma}{k'h'}\right|$$
$$\geq \frac{s-(1-k')s}{k'h'} = \frac{s}{h'} = \frac{\alpha\tau_2}{h'} \geq \alpha(1-k).$$

Pro $D_P \in (\frac{\varepsilon'}{3}, \infty)$ podle vzorce (4.4) platí $\alpha > D_P - \frac{\varepsilon'}{3}$, takže celkem dostáváme dokazovaný odhad

$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq (D_P - \tfrac{\varepsilon'}{3})(1-k) \geq (1-k)D_P - \varepsilon.$$

Je-li $D_P = \infty$, dostáváme užitím vzorce (4.5) dokazovaný odhad

$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq N + \varepsilon' > N.$$

3. $\underline{\gamma \leq 0}$: Položíme

$$h_1 := h' - \tau_2 = k'h'$$

a

$$h_2 := \tau_1 + h'.$$

Podobně jako v obou předchozích případech platí $0 < h_1 < \varepsilon$ a $0 < h_2 < \varepsilon$.

S využitím vztahů (4.1), (4.2), (4.3) a nerovností $\gamma \leq 0$ a $0 < k' < k < 1$ nyní dostáváme následující odhady:

$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq \left|\frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)+f(x_0)-f(x)}{k'h'}\right| - \left|\frac{f(x_0-\tau_1)-f(x_0)+f(x_0)-f(x)}{\tau_1+h'}\right|$$
$$\geq \left|\frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)}{k'h'} + \frac{f(x_0)-f(x)}{k'h'}\right| - \frac{\varepsilon'}{3} - \frac{\widetilde{\varepsilon}}{\tau_1}$$
$$\geq \frac{\alpha\tau_2}{k'h'} - \frac{2}{3}\varepsilon' = \alpha\frac{1-k'}{k'} - \frac{2}{3}\varepsilon' \geq \alpha(1-k) - \frac{2}{3}\varepsilon',$$

což obdobně jako v prvním dokazovaném případě dává odhady

$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geq (1-k)D_P - \varepsilon \text{ pro } D_P \in (\tfrac{\varepsilon'}{3}, \infty),$$

nebo

$$\left|\frac{f(x-h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x-h_2)-f(x)}{h_2}\right| > N, \text{ jestliže } D_P = \infty.$$ □

Definice 4.23. [12] Nechť f je reálná funkce na otevřeném intervalu (a, b) a $x \in (a, b)$. *Pravým* (resp. *levým*) *rozdílem Diniho derivací funkce f v bodě x* nazveme číslo $O^+f(x)$ (resp. $O^-f(x)$), které je rovno rozdílu $D^+f(x) - D_+f(x)$ (resp. $D^-f(x) - D_-f(x)$), jsou-li obě tato čísla konečná, nebo $+\infty$, není-li některé z těchto čísel konečné. *Pravým* (resp. *levým*) *rozdílem Diniho derivací funkce f* pak nazýváme numerickou funkci $x \mapsto O^+f(x)$ (resp. $x \mapsto O^-f(x)$) pro $x \in (a, b)$.

Poznámka 4.24. Jednostranné rozdíly Diniho derivací můžeme pomocí limit vyjádřit také takto (f je libovolná funkce na intervalu (a,b), $x \in (a,b)$):

$$O^+ f(x) = \limsup_{h_1,h_2\to 0_+} \left| \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} - \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} \right|,$$

$$O^- f(x) = \limsup_{h_1,h_2\to 0_-} \left| \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} - \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} \right|.$$

Výhoda tohoto vyjádření spočívá v tom, že příslušné vzorečky v sobě již zahrnují případy konečných i nekonečných Diniho derivací.

Následující tvrzení lze nalézt v článku [12], kde je však uvedeno bez důkazu:

Tvrzení 4.25. [12] *Nechť $m > 0$ je libovolné reálné číslo a f je spojitá funkce na otevřeném intervalu (a,b). Množina bodů, v nichž má funkce f konečnou levou derivaci a pravý rozdíl Diniho derivací větší než m, je zprava redukovatelná.*

Důkaz. Označme

$$M := \{x \in (a,b) : O^- f(x) = 0,\ O^+ f(x) > m\}.$$

Pro spor předpokládejme, že tato množina není zprava redukovatelná. To podle definice 4.6 znamená, že existují neprázdná uzavřená množina $F \subset M$ a reálné číslo $0 < l < 1$ tak, že množina bodů z F, ve kterých nemá množina F pravou (k)-vlastnost pro l, je hustá v F. Takovou množinu F a reálné číslo $0 < l < 1$ zafixujeme. Dále zvolíme libovolné reálné číslo $\overline{l}$ takové, že $l < \overline{l} < 1$.

Indukcí sestrojíme posloupnost bodů $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, kladných reálných čísel $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}$ a neprázdných, do sebe zařazených uzavřených intervalů $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $\varepsilon_{n+1} < \frac{\varepsilon_n}{2}$, $\operatorname{diam} K_n < \varepsilon_n$, $x_{n+1} \in \operatorname{int} K_n \cap F$ a pro každý bod $x \in K_n$ existují reálná čísla $0 < h_1^n, h_2^n < \varepsilon_n$ s vlastností $\left| \frac{f(x-h_1^n)-f(x)}{h_1^n} - \frac{f(x-h_2^n)-f(x)}{h_2^n} \right| \geq \frac{m}{2}(1-\overline{l}) - \varepsilon_n$.

Zvolme bod $x_0 \in F$, ve kterém nemá množina F pravou (k)-vlastnost pro l. Podle definice 4.4 tedy najdeme takové reálné číslo $\varepsilon_0 > 0$, aby pro libovolný otevřený interval $(\alpha,\beta) \subset (x_0, x_0+\varepsilon_0)$, který je disjunktní s množinou F, platilo $\beta - \alpha < \overline{l}(\beta - x_0)$.

Označme D_L^0 jednu z levých Diniho derivací funkce f v bodě x_0. Protože $x_0 \in F \subset M$, je D_L^0 konečná a navíc $O^+ f(x_0) > m$, takže aspoň jedna z pravých Diniho derivací funkce f v bodě x_0 se liší od hodnoty D_L^0 nejméně o $\frac{m}{2}$. Označme tuto Diniho derivaci D_P^0, tj. $|D_P^0 - D_L^0| > \frac{m}{2}$.

Podle lemmatu 4.22 existuje reálné číslo $0 < h_0 < \varepsilon_0$ tak, že pro každý bod $x \in K_0 := [x_0 + (1-\overline{l})h_0, x_0 + h_0]$ existují reálná čísla $0 < h_1^0, h_2^0 < \varepsilon_0$ s vlastností

$$\left| \frac{f(x-h_1^0)-f(x)}{h_1^0} - \frac{f(x-h_2^0)-f(x)}{h_2^0} \right| \geq \left| D_P^0 - D_L^0 \right| (1-\overline{l}) - \varepsilon_0,$$

je-li D_P^0 konečná, resp.

$$\left|\frac{f(x-h_1^0)-f(x)}{h_1^0}-\frac{f(x-h_2^0)-f(x)}{h_2^0}\right|\geq\frac{m}{2}(1-\bar{l}),$$

je-li D_P^0 nekonečná (v lemmatu 4.22 klademe $N:=\frac{m}{2}(1-\bar{l})$).

Protože je však $|D_P^0-D_L^0|>\frac{m}{2}$, nezávisle na konečnosti Diniho derivace D_P^0 dostáváme požadovaný odhad

$$\left|\frac{f(x-h_1^0)-f(x)}{h_1^0}-\frac{f(x-h_2^0)-f(x)}{h_2^0}\right|\geq\frac{m}{2}(1-\bar{l})-\varepsilon_0.$$

Předpokládejme, že již máme pro nějaké přirozené číslo $p\in\mathbb{N}$ zkonstruován bod x_{p-1}, kladné reálné číslo ε_{p-1} a uzavřený interval K_{p-1} s požadovanými vlastnostmi. Dle volby bodu x_{p-1}, čísla ε_{p-1}, intervalu K_{p-1} a množiny F nemůže být vnitřek intervalu K_{p-1} disjunktní s množinou F, takže existuje nějaký bod $x_p\in\operatorname{int}K_{p-1}\cap F$, ve kterém nemá množina F pravou (k)-vlastnost pro l. Najdeme tedy takové reálné číslo $0<\varepsilon_p<\frac{\varepsilon_{p-1}}{2}$, aby $(x_p,x_p+\varepsilon_p)\subset\operatorname{int}K_{p-1}$ a aby pro libovolný otevřený interval $(\alpha,\beta)\subset(x_p,x_p+\varepsilon_p)$ disjunktní s množinou F platilo $\beta-\alpha<\bar{l}(\beta-x_p)$.

Označme D_L^p jednu z levých Diniho derivací funkce f v bodě x_p. Protože $x_p\in F\subset M$, je D_L^p konečná a navíc $O^+f(x_p)>m$, takže aspoň jedna z pravých Diniho derivací funkce f v bodě x_p se liší od hodnoty D_L^p nejméně o $\frac{m}{2}$. Označme tuto Diniho derivaci D_P^p, tj. $|D_P^p-D_L^p|>\frac{m}{2}$.

Podle lemmatu 4.22 existuje reálné číslo $0<h_p<\varepsilon_p$ tak, že pro každý bod $x\in K_p:=[x_p+(1-\bar{l})h_p,x_p+h_p]$ existují reálná čísla $0<h_1^p,h_2^p<\varepsilon_p$ s vlastností

$$\left|\frac{f(x-h_1^p)-f(x)}{h_1^p}-\frac{f(x-h_2^p)-f(x)}{h_2^p}\right|\geq|D_P^p-D_L^p|\,(1-\bar{l})-\varepsilon_p,$$

je-li D_P^p konečná, resp.

$$\left|\frac{f(x-h_1^p)-f(x)}{h_1^p}-\frac{f(x-h_2^p)-f(x)}{h_2^p}\right|\geq\frac{m}{2}(1-\bar{l}),$$

je-li D_P^p nekonečná (v lemmatu 4.22 opět klademe $N:=\frac{m}{2}(1-\bar{l})$).

Protože je však $|D_P^p-D_L^p|>\frac{m}{2}$, nezávisle na konečnosti Diniho derivace D_P^p dostáváme požadovaný odhad

$$\left|\frac{f(x-h_1^p)-f(x)}{h_1^p}-\frac{f(x-h_2^p)-f(x)}{h_2^p}\right|\geq\frac{m}{2}(1-\bar{l})-\varepsilon_p.$$

Protože pro všechna $n\in\mathbb{N}_0$ platí $0<\varepsilon_{n+1}<\frac{\varepsilon_n}{2}$, je zřejmě $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$. Navíc $\operatorname{diam}K_n<\varepsilon_n$ pro všechna $n\in\mathbb{N}_0$, takže $\{K_n\}_{n=0}^\infty$ je posloupnost neprázdných, do sebe zařazených uzavřených intervalů, pro kterou je $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}K_n=0$.

Prostor $\mathbb{R}$ (opatřený eukleidovskou metrikou) je úplný prostor, takže existuje bod $y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n$. Protože bod y leží ve všech intervalech K_n, můžeme pro tento bod na základě provedené konstrukce najít takové posloupnosti kladných reálných čísel $\{h_1^n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{h_2^n\}_{n=0}^{\infty}$, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$\left| \frac{f(y-h_1^n)-f(y)}{h_1^n} - \frac{f(y-h_2^n)-f(y)}{h_2^n} \right| \geq \frac{m}{2}(1-\bar{l}) - \varepsilon_n$$

$$\text{a } 0 < h_1^n, h_2^n < \varepsilon_n.$$

Speciálně tedy platí, že $\lim_{n\to\infty} h_1^n = \lim_{n\to\infty} h_2^n = 0$.

Odhadněme nyní levý rozdíl Diniho derivací v bodě y:

$$\begin{aligned} O^- f(y) &= \limsup_{h_1,h_2\to 0_-} \left| \tfrac{f(y+h_2)-f(y)}{h_2} - \tfrac{f(y+h_1)-f(y)}{h_1} \right| \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \left| \tfrac{f(y-h_2^n)-f(y)}{h_2^n} - \tfrac{f(y+h_1^n)-f(y)}{h_1^n} \right| \\ &> \tfrac{m}{2}(1-\overline{k}) > 0. \end{aligned}$$

Dostali jsme, že $O^- f(y) > 0$, což je spor, neboť $y \in F \subset M$ a tedy $O^- f(y) = 0$. Tím jsme ukázali, že množina M je zprava redukovatelná. □

Posledním pomocným tvrzením, které ještě budeme při důkazu důsledku 4.19 pro speciální případ spojitých funkcí potřebovat, je následující, poměrně hluboká vepisovací věta:

Věta 4.26. [22, Corollary 5.3] *Nechť X je lokálně kompaktní metrický prostor a $A \subset X$ je analytická množina, která není σ-pórovitá. Pak existuje kompaktní množina $K \subset A$, která není σ-pórovitá.*

Poznámka 4.27. Protože množina $\mathbb{R}$ (opatřená eukleidovskou metrikou) je lokálně kompaktním metrickým prostorem a každá borelovská množina je analytická, je přímým důsledkem předchozí věty toto tvrzení:

Nechť $B \subset \mathbb{R}$ je borelovská množina, která není σ-pórovitá. Pak existuje uzavřená množina $F \subset B$, která není σ-pórovitá.

Nyní již máme připraveno vše k tomu, abychom dokázali následující speciální případ důsledku 4.19:

Tvrzení 4.28. *Nechť f je spojitá reálná funkce na otevřeném intervalu (a,b). Množina těch bodů z intervalu (a,b), ve kterých existuje konečná jednostranná derivace funkce f a zároveň neexistuje její derivace, je σ-pórovitá.*

Důkaz. Zvolme libovolnou spojitou reálnou funkci f na intervalu (a,b). Množinu bodů z intervalu (a,b), ve kterých existuje konečná jednostranná derivace funkce f a zároveň neexistuje její derivace, označíme M.

Zřejmě $M \subset M_1 \cup M_2 \cup M_3$, kde M_1 je množina bodů, ve kterých existují obě jednostranné derivace funkce f a jsou různé, M_2 je množina bodů, ve kterých existuje konečná levá derivace funkce f a zároveň neexistuje její konečná pravá derivace a M_3 je množina bodů, ve kterých neexistuje konečná levá derivace funkce f a zároveň existuje její konečná pravá derivace.

Množina M_1 je podle důsledku 4.21 nejvýše spočetná, takže je podle poznámky 4.3 (iv) σ-pórovitá. Bez újmy na obecnosti stačí dále dokazovat, že množina M_2 je σ-pórovitá, neboť σ-pórovitost množiny M_3 lze ze symetrie dokázat zcela analogicky.

Předpokládejme pro spor, že množina M_2 není σ-pórovitá. Protože v bodech množiny M_2 existuje konečná levá derivace funkce f a přitom neexistuje konečná pravá derivace funkce f, je pravý rozdíl Diniho derivací v těchto bodech kladný, takže $M_2 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, kde

$$P_n = \{x \in (a,b) : -\infty < D_- f(x) = D^- f(x) < \infty\} \cap \{x : O^+ f(x) > \frac{1}{n}\}.$$

Podle poznámky 4.16 (iii) jsou všechny čtyři Diniho derivace funkce f borelovsky měřitelné, takže pro všechna $n \in \mathbb{N}$ jsou množiny P_n borelovské.

Díky předpokladu, že množina M_2 není σ-pórovitá, existuje index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že borelovská množina P_{n_0} není σ-pórovitá. Podle poznámky 4.27 tedy existuje uzavřená množina $F \subset P_{n_0} \subset M_2$, která není σ-pórovitá. Podle tvrzení 4.25 je množina P_{n_0} zprava redukovatelná, takže podle poznámky 4.9 je i uzavřená množina $F \subset P_{n_0}$ zprava redukovatelná a podle tvrzení 4.11 tedy také σ-zprava pórovitá. Protože je však podle poznámky 4.3 (iii) každá σ-zprava pórovitá množina zároveň σ-pórovitá, dostáváme spor, dokazující, že množina M_2 je σ-pórovitá. $\square$

Literatura

[1] D. B. Beliaev a S. K. Smirnov, *On dimension of porous measures*, Math. Ann. **323** (2002), 123 - 141.

[2] C. L. Belna, M. J. Evans a P. D. Humke, *Symmetric and ordinary differentiation*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 261 - 267.

[3] A. Berlinkov a E. Järvenpää, *Porosities in Mandelbrot percolation*, 2003 (`http://www.math.jyu.fi/research/papers.html`, preprint číslo 280).

[4] A. Bruckner, *Differentiation of Real Functions (CRM Monograph Series, Volume 5)*, American Mathematical Society, 1994.

[5] A. Denjoy, *Sur une propriété des séries trigonométriques*, Verlag v.d.G.V. der Wis-en Natuur. Afd., 1920.

[6] E. P. Dolženko, *Boundary properties of arbitrary functions (v ruštině)*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 3 - 14.

[7] J.- P. Eckmann, E. Järvenpää a M. Järvenpää, *Porosities and dimensions of measures*, Nonlinearity **13** (2000), 1 - 18.

[8] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York 1969.

[9] J. Heinonen, *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer-Verlag, New York 2001.

[10] E. Järvenpää a M. Järvenpää, *Porous measures on $\mathbb{R}^n$: local structure and dimensional properties*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2001), 419 - 426.

[11] E. Järvenpää a M. Järvenpää, *Extended erratum to "Porous measures on $\mathbb{R}^n$: local structure and dimensional properties"*, 2002 (`http://www.math.jyu.fi/research/papers.html`, preprint číslo 263).

[12] L. Kantorovitch, *Sur les nombres dérivés des fonctions continues (v ruštině)*, Matematičeskij sbornik **39** (1932), 153 - 170.

[13] P. Koskela a S. Rohde, *Hausdorff dimension and mean porosity*, Math. Ann. **309** (1997), 593 - 609.

[14] M. E. Mera a M. Morán, *Attainable values for upper porosities of measures*, Real Anal. Exchange **26** (2000/01), 101 - 115.

[15] M. E. Mera, M. Morán, D. Preiss a L. Zajíček, *Porosity, σ-porosity and measures*, Nonlinearity **16** (2003), 247 - 255.

[16] D. Preiss a L. Zajíček, *Fréchet differentiation of convex functions in a Banach space with a separable dual*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), 202 - 204.

[17] B. S. Thomson, *Real Functions, Lecture Notes in Mathematics 1170*, Springer-Verlag, 1985.

[18] L. Zajíček , *Porosity and σ-porosity* , Real Anal. Exchange **13** (1987/88), 314 - 350.

[19] L. Zajíček, *On σ-porous sets in abstract spaces (a partial survey)*, Abstract and Applied Analysis **5** (2005), 509 - 534.

[20] L. Zajíček, *Sets of σ-porosity and sets of σ-porosity* (q), Časopis Pěst. Mat. **101** (1976), 350 - 359.

[21] L. Zajíček, *On the symmetry of Dini derivatives of arbitrary functions*, Comment. Math. Univ. Carolin. **22** (1981), 195 - 209.

[22] L. Zajíček a M. Zelený, *Inscribing compact non-σ-porous sets into analytic non-σ-porous sets*, Fund. Math. **185** (2005), 19 - 39.