Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Pavel Vališ

Stochastické modely se součty náhodných počtů náhodných veličin

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: *Prof. Lev B. Klebanov, DrSc.*
Studijní program: *Matematika*
Studijní obor: *Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie*
Studijní plán: *Teorie pravděpodobnosti a náhodné procesy*

Děkuji Prof. Lvu B. Klebanovovi, DrSc., za volbu podnětného tématu a za jeho cenné poznámky a připomínky k obsahu. Dále děkuji své rodině a přítelkyni, jejichž podpora po dobu mého studia mi byla nedocenitelnou pomocí.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 4.8.2006 Pavel Vališ

Obsah

Název práce: Stochastické modely se součty náhodných počtů náhodných veličin
Autor: Pavel Vališ
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky
Vedoucí diplomové práce: Prof. Lev B. Klebanov, DrSc.
e-mail vedoucího: Lev.Klebanov@mff.cuni.cz

Abstrakt: Diplomová práce se zabývá stochastickými modely, ve kterých se objevují součty s náhodným počtem náhodných veličin. Ukazuje příklady takových modelů včetně využití v ekonomice. Popisuje stabilní a ν-stabilní rozdělení s podmínkami jejich existence a některými vlastností. Dále jsou zavedeny analogie těchto rozdělení pro diskrétní náhodné veličiny a předloženy jsou opět některé vlastnosti a příklady. Jsou zmíněny možné reprezentace takových rozdělení pomocí řad náhodných veličin. Popsány jsou i analogie zákona velkých čísel a centrální limitní věty pro náhodný počet náhodných veličin.

Klíčová slova: stabilita, ν-stabilita, diskrétní stabilita, diskrétní ν-stabilita

Title: Stochastic Models with Sums of a Random Number of Random Variables
Author: Pavel Vališ
Departement: Department of Probability and Mathematical Statistics
Supervisor: Prof. Lev B. Klebanov, DrSc.
Supervisor's e-mail address: Lev.Klebanov@mff.cuni.cz

Abstract: The thesis studies stochastic models with sums of a random number of random variables. It shows examples of such models including utilization in economics. It describes stable and ν-stable distributions with conditions of their existence and with some their properties. Analogies of these distributions are introduced for discrete random variables and some properties and examples are given. Possible series representations of such distributions are mentioned. Analogies of the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem for a random number of random variables are also described.

Keywords: stability, ν-stability, discrete stability, discrete ν-stability

Úvod

V mé diplomové práci se zabývám stochastickými modely se součty náhodného počtu náhodných veličin. Tyto modely se v praxi vyskytují velmi často, jak ukazuje první kapitola. V ní je uvedeno několik příkladů, včetně využití pro modelování přírůstku kapitálu v ekonomice.

Druhá kapitola je zaměřena na modely, ve kterých se objevují spojité náhodné veličiny. Definuji zde stabilní a ν-stabilní rozdělení a ukazuji některé jejich vlastnosti včetně podmínek existence ν-stabilních rozdělení.

Třetí kapitola má podobnou strukturu, ale věnuje se diskrétním náhodným veličinám. Kromě definice diskrétní striktní stability a vlastností takových rozdělení se v ní objevují i definice a vlastnosti diskrétních samorozložitelných rozdělení.

Poslední kapitola se zabývá především reprezentací výše uvedených rozdělení pomocí řad náhodných veličin. Také jsou zde uvedeny analogie zákona velkých čísel a centrální limitní věty pro modely s náhodným počtem náhodných veličin.

Kapitola 1

Příklady modelů se součty náhodných veličin

1.1 Výnos z kapitálu

Uvažme produkt, do kterého v počátečním čase $t = 0$ investujeme jednotku kapitálu. V čase $t = 1$ získáme množství kapitálu X_1 (přičemž charakter náhodné veličiny $(X_1 - 1)$ závisí na povaze produktu a na podmínkách trhu). Ponecháme-li celý kapitál v produktu, v čase $t = 2$ bude mít hodnotu $X_1 \cdot X_2$, kde náhodná veličina (n.v.) X_2 je s X_1 nezávislá a stejně rozdělená (iid) - uvažujeme neměnné podmínky produktu i trhu. Stejným postupem získáme množství kapitálu v čase $t = n$ jako $\prod_{j=1}^{n} X_j$, přičemž $X_1, \ldots, X_n$ jsou iid n.v.

Předpokládejme nyní, že na trhu může dojít k určité události, která znemožní další investici. Nechť pravděpodobnost této události je stejná pro každý čas $t = k$ a nechť je rovna $p \in (0, 1)$. Potom čas do vzniku události je náhodná veličina ν_p s geometrickým rozdělením

$$\mathbb{P}\left\{\nu_p = k\right\} = p\,(1-p)^{k-1} \quad , \; k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Množství kapitálu v tomto čase je rovno $\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j$. Střední doba do výskytu události je $\mathbb{E}\,\nu_p = \frac{1}{p}$, takže „střední roční výnos" je

$$Z_p = \left(\prod_{j=1}^{\nu_p} X_j \right)^p \quad .$$

Čím menší je hodnota p, tím je výskyt události vzácnější. Odvoďme proto limitní rozdělení veličiny Z_p pro $p \to 0$.

Označme

$$S_p = \log Z_p = p \sum_{j=1}^{\nu_p} \log X_j \quad ,$$

$$Y_j = \log X_j \quad ,$$

tedy

$$S_p = \sum_{j=1}^{\nu_p} Y_j \quad .$$

Charakteristická funkce S_p je

$$\begin{aligned} f_{S_p}(t) &= \mathbb{E}\, e^{itS_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\, e^{ipt \sum_{j=1}^{k} Y_j}\, \mathbb{P}\,\{\nu_p = k\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{Y_1}^k(pt)\, p\,(1-p)^{k-1} = \frac{p\, f_{Y_1}(pt)}{1-(1-p) f_{Y_1}(pt)} \quad . \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $Y_1 = \log X_1$ má konečný nenulový první moment $\mathbb{E}\, Y_1 = \mathbb{E}\,\log X_1 = \gamma \neq 0$. Potom

$$f_{Y_1}(pt) = 1 + \gamma i p t + o(pt) \text{ pro } p \to 0 \quad ,$$

a tedy

$$f_{S_p}(t) = \frac{p f_{Y_1}(pt)}{1-(1-p) f_{Y_1}(pt)} = \frac{1}{1 - i\gamma t + o(1)} \quad ,$$

takže

$$\lim_{p \to 0} f_{S_p}(t) = \frac{1}{1 - i\gamma t} \quad .$$

Pro $\gamma > 0$ je poslední výraz charakteristickou funkcí exponenciálního rozdělení, jehož hustota je

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{\frac{-x}{\gamma}} & \text{pro } x \geq 0 \ , \\ 0 & \text{pro } x < 0 \ . \end{cases}$$

Pro $\gamma < 0$ je hustota limitního rozdělení rovna

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\gamma|} e^{\frac{-x}{\gamma}} & \text{pro } x < 0 \ , \\ 0 & \text{pro } x \geq 0 \ . \end{cases}$$

Nyní si již stačí uvědomit, že pro limitní distribuční funkce platí $\lim_{p\to 0} \mathbb{P}\{Z_p < x\} = F(x) = G(\log x)$, a tedy v případě $\gamma > 0$ je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 1 \ , \\ 1 - x^{-1/\gamma} & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

a pro $\gamma < 0$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \ , \\ x^{-1/\gamma} & \text{pro } 0 < x \leq 1 \ , \\ 1 & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$

Pro kladné γ jde o Paretovo rozdělení a v tomto případě je obchod ziskový, pro $\gamma < 0$ je ztrátový.

Poznámka 1 Jensenova nerovnost implikuje

$$\gamma = \mathbb{E} \log X_1 \leq \log \mathbb{E}\, X_1 \quad ,$$

přičemž rovnost nastává pouze pro degenerovanou X_1. Proto i v případě $\mathbb{E}\, X_1 > 1$ může být obchod ztrátový, neboť může být $\gamma < 0$.

Poznámka 2 Modus tohoto rozdělení je 1. Proto v případě $\gamma > 0$ se budou obchodníci s kapitálem v rozmezí $[x, x + \Delta x]$, $x > 1$ vyskytovat méně často než ti s kapitálem v intervalu $[1, 1 + \Delta x]$. Na druhé straně s rostoucím γ roste i střední hodnota Paretova rozdělení a při $\gamma \geq 1$ je střední hodnota nekonečná. Lze tedy nahlédnout, že většina kapitálu je soustředěna v rukou malého množství investorů.

Poznámka 3 Paretovo rozdělení má těžké chvosty (tzn. nekonečný rozptyl) pro $\gamma > 1/2$. Proto při sčítání velkého množství iid n.v. s Paretovým rozdělením bude limitní rozdělení stabilní. Tedy celkový příjem z velkého množství produktů (s $\gamma \geq 1/2$ a s Paretovým rozdělením) má přibližně stabilní rozdělení.

Tento příklad včetně dalších výsledků s ním spojených lze nalézt v [7].

1.2 Náhodná stabilita

Nejznámější a nejpoužívanější větou v různých oblastech vědy je centrální limitní věta, která dává nutné a postačující podmínky pro konvergenci součtu iid n.v. k normálnímu rozdělení. Bohužel v případě, že sčítané náhodné veličny nemají konečný rozptyl, limitním rozdělením může být jedině stabilní, ale nikoliv gaussovské rozdělení. Dokonce i když všechny n.v. jsou nezávislé a normálně rozdělené, součet *náhodného* počtu těchto veličin nemusí konvergovat k normálnímu rozdělení.

Proto je důležité studovat součty náhodného počtu náhodných veličin. Toto schéma se navíc velmi často objevuje i v reálných situacích ve fyzice, biologii, ekonomii a dalších oborech. Jeden příklad jsem uvedl v předchozí části, nyní uvedu několik dalších.

(i) Odbyt: Při objednávání dodávky do obchodu je v zájmu majitele zjistit, jaké celkové množství M výrobku A se prodá během daného období. Je-li ξ_k (náhodné) množství A prodané k-tému zákazníkovi a ν_p je počet zákazníků v uvažovaném období, potom celkové množství A lze psát jako

$$M = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_p} \quad .$$

(ii) Teorie risku: V teorii risku nás zajímá rozdělení souhrnu pojistných škod vytvořených portfoliem pojistných smluv. Jsou-li jednotlivé škody označeny jako ξ_k a náhodná veličina ν_p je počet škod v určitém období, pak celková škoda S je dána vztahem

$$S = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\nu_p} \quad .$$

(iii) Teorie spolehlivosti: Mnoho systémů v teorii spolehlivosti lze popsat následujícím schématem (nebo jeho zobecněním). Systém se skládá ze dvou operačních jednotek. Doba, po kterou je každá jednotka v provozu před výskytem poruchy, má stejné rozdělení $F(x)$. V čase 0 začne pracovat první jednotka, druhá je v záloze. V případě poruchy pracující jednotky je spuštěna záložní a původní jednotka jde do opravy. Pokud dojde v této době k poruše záložní jednotky, jedná se o chybu systému. Zajímá nás samozřejmě doba τ do výskytu chyby systému. Označme X délku cyklu od spuštění první jednotky do dokončení její opravy a Y délku posledního neúplného cyklu (ukončeného poruchou záložní jednotky). Potom

$$\tau = X_1 + X_2 + \cdots + X_N + Y \quad ,$$

kde N je (náhodný) počet úplných cyklů před chybou, tedy

$$\mathbb{P}\{N = i\} = p\,(1-p)^i, \qquad i \geq 0 \quad ,$$

a p je pravděpodobnost, že se druhá jednotka porouchá před dokončením opravy první. Typicky je p velmi malé vzhledem k faktu, že průměrná doba provozu je větší než doba opravy.

Kapitola 2

Spojitá rozdělení

V části (1.2) bylo uvedeno, že limitním rozdělením součtů náhodných veličin bývají velmi často stabilní rozdělení. V této kapitole se budu zabývat spojitými stabilními rozděleními.

2.1 Stabilní rozdělení

Definice 2.1 *Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených nedegenerovaných náhodných veličin. Řekneme, že X_1 má* striktně stabilní rozdělení*, jestliže existuje posloupnost reálných čísel $\{b_n,\ n = 1, 2, \ldots\},\ b_n > 0$ taková, že*

$$X_1 \stackrel{d}{=} b_n \sum_{j=1}^{n} X_j \tag{2.1}$$

pro každé $n = 1, 2, \ldots$

Obecnějším případem je stabilní rozdělení.

Definice 2.2 *Nechť $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených nedegenerovaných náhodných veličin. Řekneme, že X_1 má* stabilní rozdělení, *jestliže existují posloupnosti reálných čísel $\{b_n,\ n = 1, 2, \dots\}$, $b_n > 0$ a $\{a_n,\ n = 1, 2, \dots\}$, $a_n \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$X_1 + a_n \stackrel{d}{=} b_n \sum_{j=1}^{n} X_j \tag{2.2}$$

pro každé $n = 1, 2, \dots$

Ekvivalentní definicí stability je tato:

Definice 2.3 *Buďte X_1 a X_2 nezávislé, stejně rozdělené nedegenerované náhodné veličiny. Řekneme, že X_1 má* stabilní rozdělení, *jestliže pro libovolné $b_1, b_2 > 0$ existuje $b > 0$ a $a \in \mathbb{R}$ takové, že*

$$b\,X_1 + a \stackrel{d}{=} b_1 X_1 + b_2 X_2 \quad . \tag{2.3}$$

Věta 2.4 *Náhodná veličina X má stabilní rozdělení, právě když její charakteristická funkce je ve tvaru*

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp\left\{iat - c|t|^\alpha \left(1 + i\beta\, \mathrm{sign}\, t \cdot \omega(t, \alpha)\right)\right\} \quad , \qquad (2.4) \\ \omega(t, \alpha) &= \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \\ \frac{2}{\pi} \log|t| \end{cases} \end{aligned}$$

Důkaz Předpokládejme, že $f(t)$ je charakteristická funkce (ch.f.) X_1. Potom (2.2) je ekvivalentní

$$e^{ita_n} f(t) = f^n(b_n t) \tag{2.5}$$

pro každé přirozené číslo n.

Z rovnice (2.5) plyne, že f je všude nenulová. Totiž, je-li $t_0 = \inf\{t > 0 : f(t) = 0\}$, pak ze spojitosti f je $f(t_0) = 0$ a tedy i $f(b_n t_0) = f\left(\frac{t_0}{b_n}\right) = 0$, což je spor s definicí t_0.[1]

[1] Je-li $b_n = 1$ pro všechna n, pak z (2.5) lze snadno odvodit $f(t) = \exp\{it\frac{a_n}{n-1}\}\ \forall n \in \mathbb{N}$. A vzhledem k tomu, že f na n nezávisí, je $\frac{a_n}{n-1} =$ konst a tedy X_1 je degenerovaná, což je spor s definicí.

Označíme-li $g(t) = \log f(t)$, (2.5) můžeme přepsat na

$$ita_n + g(t) = n \cdot g(b_n t) \tag{2.6}$$

Zaveďme funkci $h(t)$ tak, že $g(t) = |t|^\alpha h(t) + ita$, kde α a a splňují

$$n\,(b_n)^\alpha = 1\ , \quad a + a_n = nb_n a \quad ,$$

to jest

$$b_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} \quad .$$

Potom

$$h(t) = h(b_n t) \quad \text{a} \quad h(-t) = \overline{h(t)} \quad .$$

Z poslední rovnosti vyplývá, že stačí uvažovat pouze kladné hodnoty t. Položme $t = e^\tau$, $b_n t = e^{\tau + \log b_n}$, $h(t) = h_1(\tau)$. Pak získáváme rovnici

$$h_1(\tau) = h_1(\tau + \log b_n) \quad ,$$

tedy h_1 je $\log b_n$-periodická funkce, a proto omezená na celé reálné přímce. Ovšem funkce g nezávisí na n, takže ani α nezávisí na n, stejně jako funkce h. Zvolme nyní dvě hodnoty $n = 2$ a $n = 3$. Pak poměr $\frac{\log 2}{\log 3}$ je iracionální, tedy h_1 má dvě nesoudělné periody. Z toho plyne, že h_1 je konstantní. Proto $h = konst. = c_2$ pro kladná t. Z komplexní sdruženosti $h(t)$ a $h(-t)$ pak vyplývá, že h je konstantní i pro záporná t. Dostáváme tedy

$$h(t) = -c + (\operatorname{sign} t)\, di \quad \text{a}$$

$$f(t) = \exp\{iat + (-c + (\operatorname{sign} t)\, di)|t|^\alpha\}$$

a po malé úpravě

$$f(t) = exp\{iat - c|t|^\alpha[1 + i\beta \operatorname{sign} t \cdot \omega(t, \alpha)]\} \quad ,$$

kde $\beta \cdot \omega(t, \alpha) = \frac{d}{-c}$.

Odvození tvaru $\omega(t, \alpha)$ lze nalézt v důkazech vět 1.3 a 2.1 v [6].

$\square$

VĚTA 2.5 *Všechna stabilní rozdělení jsou absolutně spojitá a mají spojité hustoty.*

Důkaz Nechť $f(t)$ je ch.f. stabilního rozdělení. Z vyjádření (2.4) plyne

$$|f(t)| = \exp\{-c|t|^\alpha\} \quad , \quad c \geq 0,\ 0 < \alpha \leq 2 \quad .$$

f je zřejmě absolutně integrovatelná na celé reálné přímce, odpovídající distribuční funkce je tudíž absolutně spojitá a její hustota je

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t)\,\mathrm{d}t \quad .$$

To je ovšem spojitá funkce.

□

Charakteristická funkce stabilního rozdělení se někdy uvádí ve tvaru

$$f(t) = \exp\left\{-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign} t \cdot \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right\} \text{ pro } \alpha \neq 1,$$

$$f(t) = \exp\left\{-\sigma|t| \left(1 + i\beta\frac{2}{\pi} \operatorname{sign} t \cdot \log|t|\right) + i\mu t\right\} \text{ pro } \alpha = 1.$$

Parametr α se nazývá *index stability*, σ je *parametr měřítka*, μ *posunutí* a β je *parametr šikmosti*. Stabilní rozdělení s parametry $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma > 0$, $\beta \in [-1, 1]$, $\mu \in \mathbb{R}$ se značí $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$. Symetrické stabilní rozdělení (s $\beta = \mu = 0$) se označuje $S\alpha S$.

2.2 ν-stabilní rozdělení

V této části budu definovat ν-gaussovská, ν-stabilní a ν-nekonečně dělitelná rozdělení, popíšu podmínky jejich existence a uvedu některé příklady takových rozdělení.

2.2.1 Součty náhodného počtu náhodných veličin

Jedním ze způsobů, kterým můžeme převést výsledky z oblasti nenáhodných součtů k součtům náhodným, jsou tzv. *transfer theorems*. Jejich hlavní myšlenkou je následující idea. Předpokládejme, že $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ jsou iid náhodné veličiny a ν_n je rodina celočíselných náhodných veličin, nezávislých s posloupností X_j. Potom

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{j=1}^{\nu_n} X_j = \frac{\nu_n^\alpha}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{\nu_n^\alpha}\sum_{j=1}^{\nu_n} X_j \quad .$$

Na $\frac{1}{\nu_n^\alpha}\sum_{j=1}^{\nu_n} X_j$ nyní můžeme použít klasické limitní věty. Pokud navíc $\frac{\nu_n^\alpha}{n^\alpha}$ má pro $n \to \infty$ limitu v distribuci, potom $\frac{1}{n^\alpha}\sum_{j=1}^{\nu_n} X_j$ se blíží k odpovídající směsi klasického limitního rozdělení a limitního rozdělení pro $\frac{\nu_n^\alpha}{n^\alpha}$. Tuto myšlenku shrnuje následující věta, jejíž důkaz lze nalézt v [6].

VĚTA 2.6 *Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\xi_{n,1}, \ldots, \xi_{n,k}, \ldots$ posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, $\{k_n\}$ buď posloupnost kladných celých čísel a nechť ν_n je posloupnost kladných celočíselných náhodných veličin. Předpokládejme, že pro každé n jsou ν_n a $\{\xi_{n,k}\}$ nezávislé. Jestliže pro $n \to \infty$*

$$\begin{array}{rl} i) & \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{k_n}\xi_{n,k} \le x\right\} \to \Phi(x) \quad , \\ ii) & \mathbb{P}\left\{\frac{\nu_n}{k_n} \le x\right\} \to A(x), \quad A(0+) = 0 \quad , \end{array}$$

kde $\Phi(x)$ a $A(x)$ jsou distribuční funkce, potom

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\nu_n}\xi_{n,k} \le x\right\} \to \Psi(x) \quad ,$$

kde distribuční funkce $\Psi(x)$ *odpovídá charakteristické funkci*

$$\psi(t) = \int_0^\infty \varphi^z(t)\,\mathrm{d}A(z)$$

a $\varphi(t)$ *je charakteristická funkce* $\Phi(x)$.

PŘÍKLAD 2.7 Následující příklady ilustrují důsledky předchozí věty.

(i) Nechť $S_{k_n} = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{n,k}$ a $S_{\nu_n} = \sum_{k=1}^{\nu_n} \xi_{n,k}$. Jestliže $S_{k_n} \xrightarrow{d} 0$ pro $n \to \infty$, pak také $S_{\nu_k} \xrightarrow{d} 0$ pro $n \to \infty$.

(ii) Jestliže $\frac{\nu_n}{k_n} \xrightarrow{d} 1$ (tj $A(x) = 0$ pro $x < 1$ a $A(x) = 1$ pro $x \geq 1$), potom jsou limitní rozdělení S_{k_n} a S_{ν_n} shodná.

(iii) S_{ν_n} konverguje k normálnímu rozdělení pouze tehdy, jestliže S_{k_n} konverguje k normálnímu rozdělení a $\frac{\nu_n}{k_n}$ konverguje k degenerovanému rozdělení (viz [5]). Proto využití normálního rozdělení při sčítání náhodného počtu náhodných veličin je dosti omezené.

$\triangle$

2.2.2 ν-gaussovské náhodné veličiny

Nechť $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ je posloupnost iid náhodných veličin. Předpokládejme, že $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$ je rodina nezáporných celočíselných n.v., nezávislých na $\{X_j,\ j \geq 1\}$. Dále předpokládejme, že ν_p má konečnou střední hodnotu $\mathbb{E}\,\nu_p = \frac{1}{p}$ pro všechna p.

DEFINICE 2.8 *Náhodná veličina* Y *je* ν-nekonečně dělitelná, *jestliže pro libovolné* $p \in \Delta$ *existuje posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin* $\{X_j^{(p)},\ j \geq 1\}$, *nezávislá s* ν_p, *taková, že*

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j^{(p)} \quad . \tag{2.7}$$

DEFINICE 2.9 *Náhodná veličina X je ν-*striktně stabilní *s indexem α, jestliže pro všechna $p \in \Delta$*

$$X \stackrel{d}{=} p^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j^{(p)} \quad , \tag{2.8}$$

kde $\{X_j^{(p)},\ j \geq 1\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených kopií X, nezávislá s $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$.

DEFINICE 2.10 *Náhodná veličina X je ν-*striktně gaussovská*, jestliže $\mathbb{E}\, X = 0$, $\mathbb{E}\, X^2 < \infty$ a pro všechna $p \in \Delta$*

$$X \stackrel{d}{=} p^{\frac{1}{2}} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j^{(p)} \quad , \tag{2.9}$$

kde $\{X_j^{(p)},\ j \geq 1\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených kopií X, nezávislá s $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$.

Nyní popíšu rodiny $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$, pro které existují ν-striktně gaussovské náhodné veličiny. Označme P_p vytvořující funkci (v.f.) náhodné veličiny ν_p a $\mathcal{P}$ pologrupu s operací skládání $\circ$ vytvořenou rodinou $\{P_p,\ p \in \Delta\}$.

VĚTA 2.11 *Pro danou rodinu $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$ existuje ν-striktně gaussovská náhodná veličina X tehdy a jen tehdy, je-li pologrupa $\mathcal{P}$ komutativní.*

Důkaz Nechť $f(t)$ je ch.f. veličiny X. Potom je (2.9) ekvivalentní systému rovnic

$$f(t) = P_p(f(p^{\frac{1}{2}}t)),\ p \in \Delta \quad , \tag{2.10}$$

který musí být splněn pro všechna reálná t.

Definujme $\varphi_1(t) = f(\sqrt{t})$, $\varphi_2(t) = f(-\sqrt{t})$ pro $t \geq 0$. Protože $\mathbb{E}\, X = 0$ a $\mathbb{E}\, X^2 < \infty$, je $f(t)$ dvakrát spojitě diferencovatelná s $f'(0) = 0$ a $f''(0) \neq 0$. Proto i $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ jsou diferencovatelné pro $t \geq 0$ s $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)$. Je zřejmé, že $f(t)$ splňuje (2.10), právě když $\varphi_1(t)$ a $\varphi_2(t)$ splňují systém

$$\varphi(t) = P_p(\varphi(pt)),\ p \in \Delta \quad , \tag{2.11}$$

pro $t \geq 0$. Vzhledem k jednoznačnosti rešení Poincarého rovnice (viz níže) je $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Pokud tedy $f(t)$ existuje, je symetrická.

Zvolme libovolné $p_0 \in \Delta$. Pro zjednodušení pišme vytvořující funkci ν_{p_0} jako $P(z)$ a $\varphi(t) = \varphi_1(t) = f(\sqrt(t))$. Potom

$$\varphi(t) = P(\varphi(p_0 t)) \quad . \tag{2.12}$$

Rovnice (2.12) je Poincarého rovnice (viz [9]), má jednoznačné diferencovatelné řešení s počátečními podmínkami $\varphi(0) = 1$ a $\varphi'(0) = -a$, kde $a > 0$ je libovolná konstanta. Toto řešení φ je Laplaceovou transformací pravděpodobnostního rozdělení $A(x)$ koncentrovaného na nezáporné poloose $\mathbb{R}_+$. Takže

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \exp(-tx)\ \mathrm{d}A(x) \tag{2.13}$$

a $\varphi(t)$ je určeno až na parametr měřítka.

Je zřejmé, že libovolné řešení systému (2.11), pokud existuje, musí splývat s (2.13). Systém (2.11) má řešení, právě když řešení (2.12) nezávisí na výběru $p_0 \in \Delta$, neboli pro $p \in \Delta,\ p \neq p_0$ musí mít rovnice

$$\varphi_p(t) = P_p(\varphi_p(pt)) \quad \text{s pevným } p \tag{2.14}$$

a (2.12) stejné řešení s počátečními podmínkami $\varphi(0) = \varphi_p(0) = 1$ a $\varphi'(0) = \varphi_p'(0) = -a$, kde $a > 0$. Ukažme, že (2.12) a (2.14) mají stejné řešení, právě když P_p a P komutují, to jest

$$P \circ P_p = P_p \circ P \quad . \tag{2.15}$$

Předpokládejme nejprve, že platí (2.15). Nechť $\varphi(t)$ je řešení (2.12) s počátečními podmínkami $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -a$ a uvažme funkci $P_p(\varphi(pt))$. Použitím (2.12) a (2.15) dostaneme $P_p(\varphi(pt)) = P_p(P(\varphi(p_0\, pt))) = P(P_p(\varphi(p\, p_0 t)))$. Takže $P_p(\varphi(pt))$ splňuje (2.12).

Navíc

$$P_p(\varphi(pt))|_{t=0} = P_p(\varphi(0)) = P_p(1) = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} P_p(\varphi(pt))|_{t=0} = P'_p(\varphi(pt))\, \varphi'(pt)\, p|_{t=0} = \frac{1}{p}\varphi'(0)p = -a \quad .$$

Vzhledem k tomu, že $\varphi(t)$ i $P_p(\varphi(pt))$ řeší (2.12) se stejnými počátečními podmínkami, díky jednoznačnosti získáváme $\varphi(t) = P_p(\varphi(pt))$. Využitím symetrie mezi p a p_0 získáváme, že za platnosti (2.15) mají rovnice (2.12) a (2.14) stejné řešení.

Předpokládejme naopak, že obě rovnice mají stejné řešení. Potom

$$P_p(P(\varphi(p_0pt))) = P_p(\varphi(pt)) = \varphi(t) = P(\varphi(p_0t)) = P(P_p(\varphi(pp_0t))) \quad ,$$

tedy

$$P_p(P(\varphi(p_0pt))) = P(P_p(\varphi(pp_0t))) \quad .$$

Ovšem za podmínky $\varphi'(0) = -a \neq 0$ vidíme z (2.13), že $\varphi(t)$ je Laplaceovou transformací distribuční funkce $A(x)$, která není degenerovaná v nule, tedy hodnoty $\varphi(t),\ t > 0$ vyplní celý interval $(0,1]$. Proto $P(P_p(z)) = P_p(P(z))$ pro $z \in (0,1]$. A vzhledem k tomu, že vytvořující funkce je analytická v jednotkovém kruhu, předchozí tvrzení implikuje (2.15).

Vraťme se nyní k (2.10). Protože $\varphi(t) = f(\sqrt{t})$, z (2.13) vyplývá, že $f(t)$ musí mít tvar $f(t) = \varphi(t^2) = \int_0^\infty \exp(-t^2x)\,\mathrm{d}A(x)$. Navíc je systém (2.10) konzistentní, právě když je konzistentní systém (2.11), to jest právě když je (2.15) splněna pro libovolná p, $p_0 \in \Delta$. A to je ekvivalentní komutativitě $\mathcal{P}$.

□

Důsledek 2.12 *$\mathcal{P}$ je komutativní, právě když pro $z > 0$ platí vyjádření*

$$P_p(z) = \varphi\left(\frac{1}{p}\varphi^{-1}(z)\right) \quad , \quad p \in \Delta \quad , \tag{2.16}$$

kde $\varphi(t)$ je diferencovatelné řešení (2.12) s počátečními podmínkami $\varphi(0) = -\varphi'(0) = 1$.

Charakteristická funkce ν-striktně gaussovského rozdělení má pak tvar $f(t) = \varphi(at^2)$, $a > 0$.

Důkaz Z důkazu věty 2.11 vyplývá, že komutativita $\mathcal{P}$ je ekvivalentní (2.11) s počátečními podmínkami $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = -a$ (pokládáme $a = 1$), přičemž řešení musí být nezávislé na volbě p_0. A vzhledem k tomu, že φ je pro $t > 0$ nezáporná a prostá funkce, můžeme (2.11) přepsat na $P_p(z) = \varphi\left(\frac{1}{p}\varphi^{-1}(z)\right)$.

□

2.2.3 Příklady ν-striktně gaussovských veličin

V této části ukážu příklady rodin náhodných veličin $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$, pro které existují ν-striktně gaussovská rozdělení.

Příklad 2.13 (Klasická sumace) Nechť $\nu_p = \frac{1}{p}$ s pravděpodobností 1 a $p \in \Delta = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Potom $P_p(z) = z^{\frac{1}{p}}$ a

$$P_{p_1} \circ P_{p_2}(z) = z^{\frac{1}{p_1 p_2}} = P_{p_2} \circ P_{p_1}(z) \quad .$$

Podle věty 2.11 existuje ν-striktně gaussovské rozdělení. Toto je klasické schéma sčítání náhodných veličin, kde ν-striktně gaussovské rozdělení splývá s obyčejným gaussovským.

△

Příklad 2.14 Nechť ν_p je geometrická n.v. s parametrem p, to jest

$$\mathbb{P}\left\{\nu_p = k\right\} = p\,(1-p)^{\,k-1},\ k \in \mathbb{N} \tag{2.17}$$

a $P_p(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$. Snadno se ověří, že

$$P_{p_1} \circ P_{p_2}(z) = \frac{p_1 p_2 z}{1-(1-p_1 p_2)z} = P_{p_2} \circ P_{p_1}(z) \quad ,$$

ν-striktně gaussovské rozdělení tedy existuje, nazýváme ho *striktně geo-gaussovské* (podobně ν-striktně stabilní rozdělení s geometrickou ν_p se nazývá *striktně geo-stabilní*).

Rovnice (2.12) má tvar

$$\varphi(t) = \frac{p_0 \varphi(p_0 t)}{1-(1-p_0)\varphi(p_0 t)}, \quad p_0 \in (0,1) \quad . \tag{2.18}$$

Řešením této rovnice je Laplaceova transformace exponenciálního rozdělení $\varphi_a(t) = \frac{1}{1+at}$. Tudíž ν-striktně gaussovská rozdělení s geometrickými ν_p jsou shodná s Laplaceovými rozděleními, která mají charakteristickou funkci

$$f(t) = \frac{1}{1+at^2}, \quad a > 0 \quad . \tag{2.19}$$

△

Příklad 2.15 Buď ν kladná celočíselná náhodná veličina s vytvořující funkcí $P(z)$. Nechť $\mathbb{E}\,\nu = \frac{1}{p_0} > 1$. Definujme

$$P_{p_0}(z) = P(z),\ P_{p_0^2}(z) = P(P(z)) = P^{\circ 2}(z), \dots,\ P_{p_0^n} = P^{\circ n}(z) \tag{2.20}$$

a předpokládejme $\Delta = \{p_0^n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Nechť $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$ je rodina n.v. s v.f. danými (2.20). $\mathcal{P}$ je jistě komutativní. Systém (2.10) má tvar

$$\varphi(t) = P(\varphi(p_0 t)) = P^{\circ 2}(\varphi(p_0^2 t)) = \cdots = P^{\circ n}(\varphi(p_0^n t)) = \cdots$$

a splývá s rovnicí (2.12): $\varphi(t) = P(\varphi(p_0 t))$.

$\triangle$

Kapitola 3

Diskrétní rozdělení

V předchozí kapitole bylo uvedeno, že všechna stabilní rozdělení jsou absolutně spojitá. Můžeme se ale dostat do situace, kdy bychom potřebovali sčítat diskrétní náhodné veličiny. V tomto případě však nemůžeme přímo využít předchozí výsledky. Žádné diskrétní rozdělení nemůže splňovat definici (2.1). Tato kapitola se zaměřuje na diskrétní analogii striktně stabilních a ν-striktně stabilních rozdělení.

3.1 Diskrétní striktně stabilní rozdělení

3.1.1 Definice a existence

Definujme nejprve speciální operátor $\otimes$, který nahradí násobení.

DEFINICE 3.1 *Nechť X je nezáporná celočíselná náhodná veličina, $N_1(a), N_2(a), \ldots, N_k(a), \ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené celočíselné nezáporné nedegenerované náhodné veličiny, nezávislé s X a mající střední hodnotu $\mathbb{E}\, N_k(a) = a$, $a \in [0, 1]$. Potom definujeme operátor $\otimes$ takto:*

$$a \otimes X = \sum_{k=1}^{X} N_k(a) \tag{3.1}$$

Výhodou tohoto operátoru je, že zachovává celočíselnost náhodné veličiny Y. Označme $Q_a(z)$ vytvořující funkci n.v. $N_k(a)$ a $P_X(z)$ vytvořující funkci veličiny X. Snadno lze nahlédnout, že vytvořující funkce „součinu" $a \otimes X$ je

$$P_{a\otimes X}(z) = P_X(Q_a(z)) \tag{3.2}$$

a že tento operátor je distributivní vzhledem ke sčítání, tedy $a \otimes (X + Y) = a \otimes X + a \otimes Y$.

Nyní již můžeme definovat diskrétní striktně stabilní rozdělení.

Definice 3.2 *Nechť $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených nedegenerovaných celočíselných nezáporných náhodných veličin. Řekneme, že X_1 má* diskrétní striktně stabilní rozdělení*, jestliže existuje posloupnost reálných čísel $\{b_n, n = 1, 2, \ldots\}$, $b_n > 0$ taková, že*

$$X_1 \stackrel{d}{=} b_n \otimes \sum_{j=1}^{n} X_j \tag{3.3}$$

pro každé $n = 1, 2, \ldots$

Poznámka Rovnici (3.3) je možné přepsat pomocí vytvořujících funkcí ve tvaru

$$P(z) = P^n(Q_{b_n}(z)) \quad , \tag{3.4}$$

kde $P(z)$ je v.f. náhodné veličiny X.

První otázkou, která nás při pohledu na definici 3.2 může napadnout, je, jak vypadají rodiny náhodných veličin $\{N(b_n),\ n = 1, 2, \ldots\}$, pro něž existuje diskrétní striktně stabilní rozdělení. Podobně jako v části (2.2) zaveďme pologrupu $\mathcal{Q}$ s operací skládání $\circ$ vytvořenou rodinou $\{Q_{b_n},\ n \in \mathbb{N}\}$. Nutnou podmínku pro existenci pak dává následující věta.

Věta 3.3 *Existuje-li pro danou rodinu $\{N(b_n),\ n = 1, 2, \ldots\}$ diskrétní striktně stabilní náhodná veličina X, potom je pologrupa $\mathcal{Q}$ komutativní.*

Důkaz Vezměme $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ libovolné. Potom

$$P(z) = P^{n_1}\left(Q_{b_{n_1}}(z)\right) = P^{n_1 n_2}\left(Q_{b_{n_2}}\left(Q_{b_{n_1}}(z)\right)\right)$$
$$P(z) = P^{n_2}\left(Q_{b_{n_2}}(z)\right) = P^{n_1 n_2}\left(Q_{b_{n_1}}\left(Q_{b_{n_2}}(z)\right)\right)$$

pro $z \in (0,1]$, takže

$$P^{n_1 n_2}\left(Q_{b_{n_2}}\left(Q_{b_{n_1}}(z)\right)\right) = P^{n_1 n_2}\left(Q_{b_{n_1}}\left(Q_{b_{n_2}}(z)\right)\right) \quad . \tag{3.5}$$

Vzhledem k nedegenerovanosti X je $P(z)$ rostoucí a tedy

$$Q_{b_{n_1}}\left(Q_{b_{n_2}}(z)\right) = Q_{b_{n_2}}\left(Q_{b_{n_1}}(z)\right) \quad ,$$

$\mathcal{Q}$ je komutativní.

□

Poznámka Podobně jako ve větě 2.11 se domnívám, že komutativita pologrupy $\mathcal{Q}$ bude spolu s předpokladem konečné střední hodnoty n.v. $N_k(a)$ i podmínkou postačující. Pro důkaz tohoto tvrzení by stačilo vědět, že rovnice (3.4) má podobně jako Poincarého rovnice jednoznačné řešení.

3.1.2 Příklady diskrétních striktně stabilních rozdělení

Nyní uvedu několik příkladů rodin náhodných veličin $\{N(b_n),\ n = 1, 2, \dots\}$, které splňují podmínku komutativity a pro které by tedy diskrétní striktně stabilní rozdělení mohlo existovat.

Příklad 3.4 Nechť $N_k(b_n)$ mají alternativní rozdělení s parametrem $b_n \in (0,1)$, to jest

$$\mathbb{P}\left\{N_k(b_n) = 1\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{N_k(b_n) = 1\right\} = b_n \quad ,$$

$$Q_{b_n}(z) = 1 - b_n + b_n z$$

Snadno se ukáže, že

$$Q_{b_{n_1}}\left(Q_{b_{n_2}}(z)\right) = 1 - b_{n_1}b_{n_2} + b_{n_1}b_{n_2}z = Q_{b_{n_2}}\left(Q_{b_{n_1}}(z)\right) \quad ,$$

komutativita je tedy splněna. Rovnice (3.4) má v tomto případě tvar

$$P(z) = P^n(1 - b_n + b_n z) \tag{3.6}$$

a jejím řešením je

$$P(z) = \exp\{-\lambda\,(1-z)^\gamma\}\ , \quad \lambda > 0\ ,\ \gamma \in (0,1] \quad . \tag{3.7}$$

Tímto případem se zabývali i Steutel a van Harn ([12]). Některé jejich výsledky a odvození vytvořující funkce (3.7) budou uvedeny v další části.

△

Příklad 3.5 Stejně jako v příkladu (2.15) můžeme uvažovat rodinu n.v. generovanou jedinou náhodnou veličinou $N(b_0)$ s $\mathbb{E}\,N(b_0) < 1$, tedy pologrupa $\mathcal{Q}$ bude generována množinou $\{Q_{b_0^n}(z),\ n \in \mathbb{N}\}$, kde $Q_{b_0^n}(z) = Q_{b_0}{}^{\circ n}(z)$. Takto vytvořená pologrupa $\mathcal{Q}$ je zřejmě komutativní.

△

Příklad 3.6 Zajímavým případem by mohlo být využití náhodné veličiny, která má geometrické rozdělení[1] s pravděpodobnostmi

$$\mathbb{P}\{N(b_n) = k\} = (1 - b_n)\,b_n^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Jeho vytvořující funkce $Q_{b_n}(z) = \frac{1-b_n}{1-b_n z}$ ale není komutativní, tedy odpovídající diskrétní striktně stabilní rozdělení nemůže existovat. Můžeme zkusit toto rozdělení modifikovat tak, aby v.f. byla komutativní. Vezměme obecnou lineární lomenou funkci $Q(z) = \frac{\alpha-\beta z}{\gamma-\delta z}$ a najděme podmínky, za kterých je $Q(z)$ komutativní vytvořující funkcí.

[1] Na rozdíl od geometrického rozdělení použitého v předchozí kapitole, které nabývá pouze kladných celých čísel s pravděpodobnostmi $\mathbb{P}\{N = k\} = p\,(1-p)^{k-1}$, zde může náhodná veličina nabývat i nulu. Jde o jakési „posunutí" celého rozdělení do nuly.

Nejprve vyšetříme, kdy je $Q(z)$ vytvořující funkcí nějakého pravděpodobnostního rozdělení.

a) Je-li $\gamma = 0$, potom v případě $\alpha = 0$ dostáváme konstantní funkci

$$Q(z) = 1 \quad ,$$

N je pak degenerovaná v nule. Při $\alpha \neq 0$ má $Q(z)$ tvar $Q(z) = a\,\frac{1}{z} + b$, což ale není vytvořující funkce.

b) Pokud $\gamma \neq 0$, můžeme zlomek zkrátit, a tedy bez újmy na obecnosti uvažujme $\gamma = 1$, $Q(z) = \frac{\alpha - \beta z}{1 - \delta z}$. Je-li $\delta = 0$, získáme lineární funkci a vzhledem k podmínce $Q(1) = 1$ ji můžeme přepsat na

$$Q(z) = 1 - p + pz \quad ,$$

což je příklad 3.4. Je-li $\alpha = 0$, opět z podmínky $Q(1) = 1$ dostáváme tvar

$$Q(z) = \frac{pz}{1 - (1-p)z} \quad .$$

To je v.f. geometrického rozdělení, které nenabývá nuly (viz poznámka[1] pod čarou str. 26). Toto rozdělení má střední hodnotu rovnu $\frac{1}{p} > 1$, což je v našem případě nevhodné.

Při $\beta = 0$ dostáváme po úpravě tvar

$$Q(z) = \frac{1-p}{1-pz} \quad ,$$

tedy „posunuté" geometrické rozdělení, kterým tento příklad začínal a o kterém víme, že není komutativní.

Zbývá tedy možnost $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$. Podmínkou $1 = Q(1) = \frac{\alpha - \beta}{1 - \delta}$ vyloučíme parametr β a dostáváme

$$Q(z) = \frac{\alpha - (\alpha + \delta - 1)z}{1 - \delta z} \quad . \tag{3.8}$$

$Q(z)$ je zřejmě diferencovatelná,

$$Q'(z) = \frac{(1-\alpha)(1-\delta)}{(1-\delta z)^2} \tag{3.9}$$

a indukcí se snadno ukáže

$$Q^{(n)}(0) = (1-\alpha)(1-\delta)\,\delta^{\,n-1} \cdot n! \quad . \tag{3.10}$$

Protože platí $n! \cdot \mathbb{P}\{N = k\} = Q^{(n)}(0)$, získali jsme vyjádření pravděpodobností tohoto rozdělení:

$$q_0 = \mathbb{P}\{N = 0\} = \alpha \tag{3.11a}$$

$$q_n = \mathbb{P}\{N = n\} = (1-\alpha)(1-\delta)\,\delta^{\,n-1} \ , \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.11b}$$

Z vyjádření (3.11) plyne, že $\alpha \in (0,1)$ a $\delta \in (0,1)$ a funkce $Q(z)$ ve tvaru (3.8) je vytvořující funkcí pravděpodobnostního rozdělení.

Nyní se zaměřme na podmínky, kdy je toto rozdělení vhodné pro operátor $\otimes$. První podmínkou je střední hodnota menší než jedna. Protože

$$\mathbb{E}\,N = Q'(1) = \frac{1-\alpha}{1-\delta} \quad ,$$

nutně $\delta < \alpha$. Druhou podmínkou je komutativita vzhledem ke skládání. Zvolme dvě vytvořující funkce $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ ve tvaru (3.8). Potom

$$Q_1(Q_2(z)) = \frac{\alpha_1 - (\alpha_1 + \delta_1 - 1)\frac{\alpha_2 - (\alpha_2 + \delta_2 - 1)z}{1 - \delta_2 z}}{1 - \delta_1 \frac{\alpha_2 - (\alpha_2 + \delta_2 - 1)z}{1 - \delta_2 z}} =$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 - \delta_1\alpha_2) - z\,(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1\alpha_2 + \delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2 - 1 - \delta_1\alpha_2)}{(1 - \delta_1\delta_2) - z\,(\delta_1 + \delta_2 - \delta_1\delta_2 - \delta_1\alpha_2)}$$

a záměnou indexů a porovnáním koeficientů zlomků dostáváme podmínku

$$\delta_1\alpha_2 = \delta_2\alpha_1 \quad ,$$

kterou lze díky nenulovosti α_i přepsat jako

$$\frac{\delta_1}{\alpha_1} = \frac{\delta_2}{\alpha_2} = k \quad , \tag{3.12}$$

kde k je konstanta. Protože $0 < \delta < \alpha < 1$, musí být $0 < k < 1$. Komutativita $Q_1(z)$ a $Q_2(z)$ je tedy ekvivalentní rovnosti (3.12). Podmínka komutativity celé pologrupy $\mathcal{Q}$ je potom ekvivalentní s podmínkou

$$\delta = k \cdot \alpha \ , \quad 0 < k < 1 \tag{3.13}$$

pro všechny $Q \in \mathcal{Q}$, přitom k je pro všechny $Q \in \mathcal{Q}$ stejné. Dostali jsme tedy

$$Q(z) = \frac{\alpha - (\alpha + k\alpha - 1)z}{1 - k\alpha z} \quad .$$

V definici operátoru $\otimes$ jsme označovali parametrem a střední hodnotu veličin $N(a)$. V tomto případě je

$$a = \mathbb{E}\, N = \frac{1-\alpha}{1-k\alpha} \quad ,$$

tedy výsledný tvar vytvořující funkce $Q(z)$ je po úpravě

$$Q_{k;a}(z) = \frac{(1-a) - (k-a)z}{(1-ka) - k\,(1-a)z} \ , \quad a \in (0,1) \quad . \tag{3.14}$$

Z vyjádření (3.14) je patrné, že pro $k = 0$ dostáváme vytvořující funkci z příkladu 3.4. Rozdělení (3.11) s vytvořující funkcí (3.14) je tedy zobecněním tohoto příkladu.

Zkusme najít i explicitní vyjádření vytvořující funkce jako zobecnění (3.7) tak, že nahradíme výraz $(1-z)$ lineární lomenou funkcí. Hledejme tedy $P(z)$ ve tvaru

$$P(z) = \exp\left\{-\lambda\left(\frac{a - bz}{c - dz}\right)^{\gamma}\right\} \quad .$$

Opět tento tvar nejprve zjednodušíme pomocí podmínek na vytvořující funkci. Vzhledem k $P(1) = 1$ je nutně $a = b$, bez újmy na obecnosti položme $a = 1$ (zkrátíme zlomek). Podobně položme i $c = 1$ (vytkneme a změníme λ). Máme tedy výchozí tvar

$$P(z) = \exp\left\{-\lambda\left(\frac{1 - z}{1 - dz}\right)^{\gamma}\right\} \quad .$$

Nyní úpravami rovnice $P(z) = P^n(Q_{k;b_n}(z)$ dostaneme postupně

$$\exp\left\{-\lambda\left(\frac{1-z}{1-dz}\right)^{\gamma}\right\} = \exp\left\{-n\lambda\left(\frac{1 - \frac{(1-b_n)-(k-b_n)z}{(1-kb_n)-k\,(1-b_n)z}}{1 - d\frac{(1-b_n)-(k-b_n)z}{(1-kb_n)-k\,(1-b_n)z}}\right)^{\gamma}\right\}$$

$$\left(\frac{1-z}{1-dz}\right)^{\gamma} = n \cdot \left(\frac{b_n\,(1-k) - b_n\,(1-k)\,z}{(1 - d + db_n - kb_n) - (k - dk + db_n - kb_n)\,z}\right)^{\gamma}$$

Volbou $d = k$ získáme

$$\left(\frac{1-z}{1-dz}\right)^{\gamma} = n \cdot b_n^{\gamma} \left(\frac{1-z}{1-kz}\right)^{\gamma}$$

a při $b_n = n^{-\frac{1}{\gamma}}$ dostáváme rovnost platnou pro všechna $|z| \leq 1$.

Vytvořující funkce diskrétního striktně stabilního rozdělení s operátorem $\otimes$ definovaným pomocí (3.14) má tedy tvar

$$P(z) = \exp\left\{-\lambda \left(\frac{1-z}{1-kz}\right)^{\gamma}\right\} \quad , \tag{3.15}$$

kde $\lambda > 0$, $\gamma \in (0, 1]$ a $k \in [0, 1)$ je konstanta daná volbou rodiny $\{Q_{k;b_n},\ n = 1, 2, \dots\}$. Opět vidíme, že volbou $k = 0$ dostáváme vytvořující funkci z příkladu (3.4).

$\triangle$

3.1.3 Vlastnosti diskrétních striktně stabilních rozdělení

V této části se zaměřím na případ, kdy základem pro operátor $\otimes$ budou veličiny s alternativním rozdělením (viz příklad 3.4). Operátor $\otimes$ s tímto rozdělením označme pro zjednodušení $\odot$. Nejprve bez důkazů uvedu definici a několik vlastností diskrétních samorozložitelných (self-decomposable) rozdělení. Důkazy tvrzení a vět lze nalézt v [12].

Definice 3.7 *Pravděpodobnostní rozdělení na* $\mathbb{R}$ *se nazývá* samorozložitelné, *jestliže jeho charakteristická funkce splňuje*

$$f(t) = f(at)f_a(t) \quad t \in \mathbb{R};\ a \in (0,1) \quad ,$$

kde $f_a(t)$ *je nějaká charakteristická funkce.*

Pro odpovídající náhodnou veličinu to znamená, že

$$X \stackrel{d}{=} a\,X' + X_a \quad a \in (0,1) \tag{3.16}$$

kde X' a X_a jsou nezávislé s X a X' je stejně rozdělená jako X.

Pokud nahradíme násobení operátorem $\odot$, dostaneme analogii pro diskrétní rozdělení:

Definice 3.8 *Nechť* X *a* X' *jsou nezávislé, stejně rozdělené nedegenerované nezáporné celočíselné náhodné veličiny. Řekneme, že* X *má* diskrétní samorozložitelné rozdělení, *jestliže pro každé* $a \in (0,1)$ *existuje nezáporná celočíselná náhodná veličina* X_a*, nezávislá s* X *a* X'*, taková, že*

$$X \stackrel{d}{=} a \odot X' + X_a \tag{3.17}$$

Poznámka Tuto definici lze přepsat pomocí vytvořujících funkcí jako

$$P(z) = P(1 - a + az)P_a(z) \quad ,$$

kde $P(z)$ je v.f. X a $P_a(z)$ je vytvořující funkce X_a.

Dále budeme potřebovat následující lemma.

Lemma 3.9 *Vytvořující funkce $P(z)$ s $0 < p_0 < 1$ je nekonečně dělitelná, právě když má tvar*

$$P(z) = \exp\{\lambda(G(z) - 1)\} \quad , \tag{3.18}$$

kde $\lambda > 0$ a $G(z)$ je (jednoznačně určená) vytvořující funkce s $G(0) = 0$. Ekvivalentně, $P(z)$ je nekonečně dělitelná, právě když

$$P(z) = \exp\{-\int_z^1 R(u)\,\mathrm{d}u\} \quad , \tag{3.19}$$

kde $R(u) = \sum_0^\infty r_n u^n$ s $r_n \geq 0$ a $\sum_0^\infty r_n (n+1)^{-1} < \infty$, to jest právě když p_n splňují

$$(n+1)\, p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_k r_{n-k} \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.20}$$

s $r_n \geq 0$.

Věta 3.10 *Vytvořující funkce $P(z)$ je diskrétní samorozložitelná, právě když má tvar*

$$P(z) = \exp\left\{-\lambda \int_z^1 \frac{1 - G(u)}{1 - u}\,\mathrm{d}u\right\} \quad , \tag{3.21}$$

kde $\lambda > 0$ a $G(u)$ je (jednoznačně určená) vytvořující funkce s $G(0) = 0$. Ekvivalentně, $P(z)$ je diskrétně samorozložitelná, právě když je nekonečně dělitelná a má kanonickou míru r_n (viz lemma 3.9), která je nerostoucí.

Důsledkem následující věty je unimodalita diskrétních samorozložitelných rozdělení.

Věta 3.11 *Nechť $(p_n)_0^\infty$ a $(r_n)_0^\infty$ jsou posloupnosti reálných čísel, $p_n \geq 0$, $p_0 > 0$ a r_n nerostoucí. Nechť dále p_n a r_n splňují*

$$(n+1)\, p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} p_k r_{n-k} \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad .$$

Potom je $(p_n)_0^\infty$ unimodální, to jest $p_n - p_{n-1}$ mění znaménko nejvýše jednou ($p_{-1} = 0$); p_n je nerostoucí, právě když $r_0 \leq 1$.

Důsledek 3.12 *Diskrétní samorozložitelné rozdělení* $(p_n)_0^\infty$ *je unimodální; je nerostoucí, právě když* $r_0 = \frac{p_1}{p_0} \leq 1$.

Nyní se vrátím zpět příkladu 3.4. Řešení rovnice (3.6), tedy tvar vytvořující funkce disktrétních striktně stabilních rozdělení s operátorem $\odot$ popisuje následující věta.

Věta 3.13 *Vytvořující funkce diskrétního striktně stabilního rozdělení s operátorem* $\odot$ *má tvar*

$$P(z) = \exp\left\{-\lambda(1-z)^\gamma\right\} \quad , \tag{3.22}$$

kde $\lambda > 0$ *a* $\gamma \in (0, 1]$.

Poznámka Toto rozdělení se často nazývá také *diskrétní stabilní rozdělení s exponentem* γ, kde $\gamma \in (0, 1]$ je exponent z (3.22).

Důkaz věty 3.13 Vyjděme z rovnice (3.6), tj. $P(z) = P^n(1 - b_n(1 - z))$. Protože $P(z) > 0$ pro $z \in (0, 1)$, můžeme zavést $p(z) = \ln P(z)$. Potom

$$p(z) = n \cdot p(1 - b_n(1 - z)) \quad .$$

Proveďme substituci $u = 1 - z$, dostáváme

$$p(1 - u) = n \cdot p(1 - b_n u) \quad .$$

Označíme-li $r(u) = p(1 - u)$, pak předchozí rovnost můžeme přepsat na

$$r(u) = n \cdot r(b_n u) \quad . \tag{3.23}$$

Pišme nyní funkci $r(u)$ ve tvaru

$$r(u) = u^\gamma \cdot \varphi(u) \quad . \tag{3.24}$$

Konstanta γ a funkce $\varphi(u)$ možná závisí na n. Dosazením (3.24) do (3.23) dostaneme

$$\varphi(u) = n \cdot b_n^\gamma \, \varphi(b_n u) \quad .$$

Zvolme γ tak, že $n\,b_n^\gamma = 1$, pak

$$\varphi(u) = \varphi(b_n u) \quad .$$

Další substitucí $u = e^\tau$ a označením $\psi(\tau) = \varphi(e^\tau)$ získáme rovnici

$$\psi(\tau) = \psi(\tau + \ln b_n) \quad . \tag{3.25}$$

Z rovnice (3.25) plyne, že $\psi(\tau)$ je periodická s periodou $\ln b_n$, tudíž je omezená, a proto i $\varphi(u)$ je omezená. Protože $r(u)$ nezávisí na n a $\varphi(u)$ je omezená, γ nezávisí na n, a tedy ani $\varphi(u)$ nezávisí na n. Navíc $b_n = n^{-\gamma}$. Z toho ale vyplývá, že $\psi(\tau)$ má nesoudělné periody $(-\gamma\ \ln 2)$ a $(-\gamma\ \ln 3)$, tedy je konstantní. Vzhledem k definici $\psi(\tau)$ je také $\varphi(u)$ konstantní a můžeme psát $\varphi(u) = -\lambda$. Zpětně potom dostáváme

$$\begin{aligned} r(u) &= -\lambda\, u^\gamma \\ p(z) &= -\lambda\,(1-z)^\gamma \quad \text{a} \\ P(z) &= \exp\left\{-\lambda\,(1-z)^\gamma\right\} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Zbývá určit podmínky pro λ a γ. Nejprve $P(0) = p_0 \in [0,1)$, takže $\lambda > 0$. Dále

$$1 = P(1-) = \lim_{z\to 1-} \exp\left\{-\lambda\,(1-z)^\gamma\right\} = \begin{cases} 0 & \gamma < 0 \\ e^{-\lambda} & \gamma = 0 \\ 1 & \gamma > 0 \end{cases}$$

Nutně tedy $\gamma > 0$. Nakonec

$$\mathbb{E}\,X = P'(1-) = \lim_{z\to 1-} \lambda\gamma(1-z)^{\gamma-1} = \begin{cases} 0 & \gamma > 1 \\ \lambda & \gamma = 1 \\ \infty & \gamma < 1 \end{cases} \tag{3.27}$$

Vzhledem k požadavku na nedegenerovanost X jsou možné pouze poslední dva případy, tedy $\gamma \le 1$, čímž je věta dokázána.

$\square$

Poznámka Z vyjádření pro střední hodnotu (3.27) vyplývá, že pouze při $\gamma = 1$ má diskrétní striktně stabilní rozdělení konečnou střední hodnotu.

Podobně jako ve spojitém případě, i zde hraniční hodnota $\gamma = 1$ určuje speciální rozdělení.

Důsledek 3.14 *Poissonovo rozdělení je diskrétně striktně stabilní s exponentem 1.*

Diskrétní striktně stabilní rozdělení je možné ekvivalentně popsat následujícím tvrzením.

Tvrzení 3.15 *X je náhodná veličina s diskrétním stabilním rozdělením s exponentem γ, právě když pro každé* $0 < a < 1$

$$X = a \odot X_1 + (1 - a^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}} \odot X_2 \tag{3.28}$$

Důkaz Steutel a van Harn použili v [12] vyjádření (3.28) jako definici diskrétního striktně stabilního rozdělení a došli ke stejnému vyjádření vytvořující funkce (3.22). Proto je (3.28) ekvivalentní s definicí 3.2.

□

Důsledek 3.16 *Diskrétní striktně stabilní rozdělení jsou diskrétní samorozložitelná, a tudíž unimodální.*

Důkaz Plyne přímo z předchozího tvrzení a důsledku 3.12.

□

3.2 Diskrétní ν-stabilní rozdělení

Podobně jako ve spojitém případě můžeme nahradit pevný počet sčítanců n náhodným počtem. Opět využijeme operátor $\otimes$.

DEFINICE 3.17 *Nechť X je nedegenerovaná nezáporná celočíselná náhodná veličina. Předpokládejme, že $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$ je rodina nezáporných celočíselných náhodných veličin, nezávislých s X. Dále předpokládejme, že ν_p má konečnou střední hodnotu $\mathbb{E}\,\nu_p = \frac{1}{p}$ pro všechna $p \in \Delta$. Řekneme, že náhodná veličina X je* diskrétní ν-striktně stabilní*, jestliže pro všechna $p \in \Delta$*

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\nu_p} p \otimes X_j \quad , \tag{3.29}$$

kde $\{X_j,\ j \geq 1\}$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených kopií X, nezávislá s $\{\nu_p,\ p \in \Delta\}$.

Označíme-li $P(z)$ vytvořující funkci veličiny X, $H_p(z)$ vytvořující funkci veličiny ν_p a $Q_p(z)$ v.f. veličiny $N_k(p)$ z definice operátoru $\otimes$, můžeme rovnici (3.29) přepsat na

$$P(z) = H_p(P(Q_p(z))) \ , \quad p \in \Delta \tag{3.30}$$

V předchozí části 3.1 jsem odvodil, že pologrupa $\mathcal{Q}$ odpovídající operátoru $\otimes$ musí být komutativní. Proto budu dále předpokládat komutativitu $\mathcal{Q}$.

Nutnou podmínku existence diskrétního ν-striktně stabilního rozdělení dává následující věta.

VĚTA 3.18 *Jestliže X má diskrétní ν-striktně stabilní rozdělení, potom pologrupa $\mathcal{H}$ generovaná množinou $\{H_p,\ p \in \Delta\}$ s operací skládání musí být komutativní.*

Důkaz Nechť $\mathcal{Q}$ je komutativní a $P(z)$ je řešení (3.30). Vezměme libovolná dvě $p_1, p_2 \in \Delta$. Potom

$$\begin{aligned} P(z) &= H_{p_1}\left(P(Q_{p_1}(z))\right) = H_{p_1}\left(H_{p_2}\left(P(Q_{p_2}(Q_{p_1}(z)))\right)\right) \\ &= H_{p_2}\left(P(Q_{p_2}(z))\right) = H_{p_2}\left(H_{p_1}\left(P(Q_{p_1}(Q_{p_2}(z)))\right)\right) \end{aligned}$$

Protože $Q_{p_1}(z)$ a $Q_{p_2}(z)$ spolu komutují, dostáváme

$$H_{p_1}\left(H_{p_2}\left(P(Q_{p_1}(Q_{p_2}(z)))\right)\right) = H_{p_2}\left(H_{p_1}\left(P(Q_{p_1}(Q_{p_2}(z)))\right)\right) \tag{3.31}$$

Náhodné veličiny X, $N(p_1)$ a $N(p_2)$ jsou nedegenerované, tudíž $P(Q_{p_1}(Q_{p_2}(z)))$ vyplňuje celý interval $(0,1)$ a proto platí

$$H_{p_1}(H_{p_2}(z)) = H_{p_2}(H_{p_1}(z)) \quad z \in (0,1)$$

$H_p(z)$ je analytická v jednotkovém kruhu, proto vzhledem k tomu, že volba p_1 a p_2 byla libovolná, je předchozí rovnost ekvivalentní komutativitě $\mathcal{H}$.

□

Poznámka Pokud bychom věděli, že rovnice $P(z) = H_p(P(Q_p(z)))$ má jednoznačné řešení $P(z)$, byla by podobně jako v předchozí části komutativita $\mathcal{H}$ i podmínkou postačující. Zvolme pevné $p_0 \in \Delta$ a označme $P_{p_0}(z)$ řešení rovnice $P(z) = H_{p_0}(P(Q_{p_0}(z)))$. Zvolme jiné $p \in \Delta$ a definujme $P_p(z) = H_p(P_{p_0}(Q_p(z)))$.

Příklad 3.19 Nechť ν_p má geometrické rozdělení, to jest $\mathbb{P}\{\nu_p = k\} = p\,(1-p)^{k-1}$ a $H_p(z) = \frac{pz}{1-(1-p)z}$.

Nechť $N_k(p)$ mají alternativní rozdělení s $Q_p(1-p+pz)$. Rovnice (3.30) má pak tvar

$$P(z) = \frac{p \cdot P(1-p+pz)}{1-(1-p)P(1-p+pz)} \quad . \tag{3.32}$$

Provedeme substituci $u = 1-z$, dostaneme

$$P(1-u) = \frac{p \cdot P(1-pu)}{1-(1-p)P(1-pu)}$$

Nyní označme $r(u) = P(1-u)$, pak

$$r(u) = \frac{p \cdot r(pu)}{1-(1-p)r(pu)} \tag{3.33}$$

Rovnice (3.33) se objevila už v příkladu 2.14. Jejím řešením je

$$r(u) = \frac{1}{1+au} \ , \quad a > 0$$

Tím dostáváme vyjádření

$$P(z) = \frac{1}{1+a(1-z)} \quad .$$

Pokud označíme $p = \frac{a}{1+a}$, získáme tvar

$$P(z) = \frac{1-p}{1-pz} \quad . \tag{3.34}$$

To je vytvořující funkce „posunutého" geometrického rozdělení s pravděpodobnostmi

$$\mathbb{P}\{X = k\} = (1-p)\,p^k \ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$\triangle$

Kapitola 4

Limitní věty a reprezentace

Tato kapitola se zabývá limitními větami spojenými se stabilními rozděleními a přináší i některé možné reprezentace těchto rozdělení pomocí řad.

4.1 Některé reprezentace stabilních náhodných veličin

4.1.1 Stabilní náhodné veličiny

Nejprve se zabývejme reprezentací klasických (tj. spojitých) stabilních rozdělení. Bez důkazu uvedu dvě věty, které je možné nalézt v [6].

Nechť $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$, $\{W_1, W_2, \dots\}$ a $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ jsou tři nezávislé posloupnosti náhodných veličin. Přitom $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ je iid posloupnost Rademacherových náhodných veličin, tj.

$$\varepsilon_j = \begin{cases} +1 & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{s pravděpodobností } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$W_1, W_2, \dots$ je posloupnost iid náhodných veličin s konečným absolutním momentem řádu $\alpha+\delta$, $(\delta > 0)$[1] a $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ buď posloupnost časů příchodu Poissonova procesu s jednotkovou intenzitou, tj.

$$\Gamma_j = \sum_{k=1}^{j} e_k \quad ,$$

kde e_k jsou iid exponenciální náhodné veličiny s $\mathbb{E}\, e_k = 1$. Náhodné veličiny $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$ jsou tedy *závislé* a *nejsou stejně rozdělené*. Náhodná veličina Γ_j má gamma rozdělení s $\mathbb{E}\,\Gamma_j = j$.

VĚTA 4.1 *Předpokládejme* $0 < \alpha < 2$. *Potom řada*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_j W_j}{\Gamma_j^{\frac{1}{\alpha}}}$$

konverguje skoro jistě k náhodné veličině X *s rozdělením* $S_\alpha(\sigma, 0, 0)$, *kde*

$$\sigma = \left(c_\alpha^{-1} \mathbb{E}\, |W_1|^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ,$$

$$c_\alpha = \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\, \mathrm{d}x} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \textit{pro } \alpha \neq 1 \quad , \\ \frac{2}{\pi} & \textit{pro } \alpha = 1 \quad . \end{cases}$$

Pro reprezentaci obecného (nikoliv symetrického) α-stabilního rozdělení uvažme opět dvě nezávislé posloupnosti $\{W_1, W_2, \dots\}$ a $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$. Přitom $W_1, W_2, \dots$ je posloupnost iid n.v. s $\mathbb{E}\,|W_1|^{\alpha+\delta} < \infty$ (viz poznámka[1] pod čarou str.40), $0 < \alpha < 2$ a posloupnost $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ je definována jako výše.

VĚTA 4.2 *Řada*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{W_j}{\Gamma_j^{\frac{1}{\alpha}}} - k_j^{(\alpha)} \right) \quad ,$$

kde

$$k_j^{(\alpha)} = \begin{cases} 0 & \textit{pro } 0 < \alpha < 1 \quad , \\ \mathbb{E}\left(W_1 \int_{\frac{|W_1|}{j}}^{\frac{|W_1|}{j-1}} \frac{\sin x}{x^2}\, \mathrm{d}x \right) & \textit{pro } \alpha = 1 \quad , \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} \left(j^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - (j-1)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right) \mathbb{E}\, W_1 & \textit{pro } \alpha > 1 \quad , \end{cases}$$

[1] Ve skutečnosti stačí předpokládat existenci konečného momentu řádu α. Naše omezení poněkud zjednoduší důkaz.

$(j = 1, 2, \dots)$, konverguje skoro jistě k náhodné veličině s $S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$, kde

$$\sigma^\alpha = \frac{\mathbb{E}\,|W_1|^\alpha}{c_\alpha}\ , \quad c_\alpha^{-1} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \quad ,$$

$$\beta = \frac{\mathbb{E}\ (|W_1|^\alpha \operatorname{sign} W_1)}{E|W_1|^\alpha} \quad .$$

Navíc v případě $\alpha = 1$ řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{W_j}{\Gamma_j} - \mathbb{E}\,W_1 \int_{\frac{1}{j}}^{\frac{1}{j-1}} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x \right)$$

konverguje skoro jistě k náhodné veličině s $S_1(\sigma, \beta, \mu)$, kde σ a β jsou jako výše a $\mu = -\mathbb{E}\ (W_1 \ln |W_1|)$.

Poznamenejme, že předchozí dvě věty by v principu mohly být použity ke generování striktně stabilních náhodných veličin. Přestože veličiny Γ_j nejsou nezávislé, je možné je snadno generovat jako postupné součty nezávislých exponenciálních náhodných veličin. Navíc veličiny W_j mohou mít libovolné rozdělení, jedinou podmínkou je $\mathbb{E}\,|W_1|^{\alpha+\delta} < \infty$. Bohužel konvergence výše uvedených řad je příliš pomalá, a tak nejsou pro generování α-stabilních náhodných veličin vhodné. Pro simulaci $S\alpha S$ veličin se často používá následující postup.

Tvrzení 4.3 *Nechť γ má rovnoměrné rozdělení na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a nechť W je exponenciálně rozdělené s jednotkovou střední hodnotou. Předpokládejme, že γ a W jsou nezávislé, a definujme*

$$X = \frac{\sin(\alpha\gamma)}{(\cos\gamma)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\gamma)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad .$$

Pak X má rozdělení $S_\alpha(1, 0, 0)$.

Důkaz tohoto tvrzení je možné nalézt v [11]. V článku [4] byla uvedena metoda pro generování α-stabilních náhodných veličin pro libovolné $0 < \alpha < 2$ a $-1 \leq \beta \leq 1$.

4.1.2 Striktně geo-stabilní náhodné veličiny

Zde se zaměříme na reprezentaci striktně geo-stabilních rozdělení (viz příklad 2.14).

VĚTA 4.4 *Nechť $e_0, e_1, e_2, \dots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin se standardním exponenciálním rozdělením. Předpokládejme, že $R_1, \dots, R_n, \dots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny, nezávislé na posloupnosti $\{e_j\}$. Jestliže řada*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e_0}{e_1 + \cdots + e_k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} R_k \tag{4.1}$$

konverguje skoro jistě, potom konverguje ke striktně geo-stabilní náhodné veličině.

Důkaz Nechť $\{N_0(t),\ t \geq 0\}$ je Poissonův proces s jednotkovou intenzitou. Uvažme proces $N(t) = N_0(e_0 t)$. Označme $\{\tau_k\}$ časy příchodů procesu $N(t)$. Snadno se ukáže, že posloupnosti $\{\tau_k\}$ a $\{\frac{e_1+e_2+\cdots+e_k}{e_0}\}$ jsou stejně rozdělené. Předpokládejme, že řada (4.1) konverguje skoro jistě k n.v. $X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k^{-\frac{1}{\alpha}} R_k$, a položme $X^{(j)} = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau_k^{(j)})^{-\frac{1}{\alpha}} R_k^{(j)}$, kde $\{\tau_k^{(j)}\}$ a $\{R_k^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou nezávislé kopie $\{\tau_k\}$ a $\{R_k\}$.

Nechť ν_p je geometrická n.v., $\mathbb{P}\{\nu_p = k\} = p\,(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$. Uvažujme sumu

$$S_p = p^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{j=1}^{\nu_p} X^{(j)} \quad .$$

Naším cílem je ukázat, že $S_p \stackrel{d}{=} X$ pro všechna $p \in (0,1)$. Potom má X geo-stabilní rozdělení.

Spojme dohromady náhodný počet odpovídajících procesů $N^{(j)}(t)$, $j = 1, \dots, \nu_p$. Abychom toho docílili, vyznačme na časové ose časy příchodů všech těchto procesů a pohlížejme na tyto časy jako by byly vytvořeny jediným procesem $M(t)$. Vzhledem k tomu, že (viz [2])

$$e_0 = p \sum_{j=1}^{\nu_p} e^{(j)} \quad ,$$

a využitím vlastností Poissonova procesu vidíme, že výsledný proces $M(t)$ má stejné rozdělení jako $N(t)$. Tudíž $S_p \stackrel{d}{=} X$.

□

4.1.3 Diskrétní striktně stabilní náhodné veličiny

Nejprve definujme poněkud obecnější případ disktrétní striktní stability. Připomeňme, že vytvořující funkce diskrétního striktně stabilního rozdělení splňuje systém rovnic (3.4), tj.

$$P(z) = P^n(Q_{b_n}(z)) \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

tedy

$$\ln P(z) = n \cdot \ln P(Q_{b_n}(z)) \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ .$$

V případě operátoru $\odot$ vypadá předchozí rovnice takto:

$$\ln P(z) = n \cdot \ln P(1 - b_n + b_n z) \ , \quad n = 1, 2, \ldots \ . \tag{4.2}$$

Dá se dokázat, že (4.2), a tedy i definice disktrétního striktně stabilního rozdělení s operátorem $\odot$, je ekvivalentní systému rovnic

$$\ln P(1 - \alpha + \alpha z) = \alpha^\gamma \cdot \ln P(z) \quad \text{pro všechna } \alpha \in (0, 1). \tag{4.3}$$

Pokud budeme uvažovat rozdělení, jehož v.f. splňuje (4.3) pro jediné pevné α, dostaneme tzv. semi-stabilní rozdělení.

DEFINICE 4.5 *Nedegenerované rozdělení na $\mathbb{Z}_+$ nazýváme* diskrétní striktně semi-stabilní *s exponentem $\gamma > 0$ a řádu $\alpha \in (0, 1)$, jestliže pro všechna $|z| \leq 1$ je jeho vytvořující funkce $P(z)$ nenulová a splňuje*

$$\ln P(1 - \alpha + \alpha z) = \alpha^\gamma \cdot \ln P(z) \quad . \tag{4.4}$$

Z definice zřejmě vyplývá, že rozdělení na $\mathbb{Z}_+$ je diskrétní stabilní s exponentem γ, právě když je diskrétní semi-stabilní s exponentem γ a všech řádů $\alpha \in (0, 1)$.

Následující lemma plyne přímo z (4.4).

LEMMA 4.6 *Je-li $P(z)$ vytvořující funkce diskrétního semi-stabilního rozdělení s exponentem γ a řádu α, potom pro libovolné $n \geq 0$ a $|z| \leq 1$ platí*

$$\ln P(1 - \alpha^n + \alpha^n z) = \alpha^{n\gamma} \cdot \ln P(z) \quad . \tag{4.5}$$

Narozdíl od diskrétních stabilních rozdělení nemusí být diskrétní semi-stabilní rozdělení samorozložitelná, ale jsou nekonečně dělitelná. Příklad diskrétního semi-stabilního rozložení, které není samorozložitelné, lze najít v [3]. Tamtéž lze nalézt důkaz tvrzení, že diskrétní semi-stabilní rozdělení jsou nekonečně dělitelná.

Nyní již můžeme uvést dvě věty, které ukazují možné reprezentace diskrétních semi-stabilních rozdělení pomocí řad náhodných veličin.

VĚTA 4.7 *Buď $(X_n,\ n \leq 1)$ posloupnost nezávislých, stejně rozdělených nezáporných celočíselných náhodných veličin s diskrétním semi-stabilním rozdělením s exponentem $\gamma \in (0, 1]$ a řádu $\alpha \in (0, 1)$. Pro $n \geq 1$ položme $k_n = [\alpha^{-n\gamma}]$ (kde $[x]$ značí celou část x) a*

$$\zeta_n = \alpha^n \odot \sum_{j=1}^{k_n} X_i \quad . \tag{4.6}$$

Potom ζ_n konverguje slabě k diskrétnímu semi-stabilnímu rozdělení s exponentem γ a řádu α.

Důkaz Označme $P(z)$ v.f. veličin X_i a $P_n(z)$ v.f. veličin ζ_n. Podle (4.6)

$$P_n(z) = [P(1 - \alpha^n + \alpha^n z)]^{k_n} \quad .$$

Podle předpokladu a dle (4.5) je $P(z) = [P(1 - \alpha^n + \alpha^n z)]^{\alpha^{-n\gamma}}$. Pro každé $n \geq 1$ je $\alpha^{-n\gamma} = k_n + \theta_n$ pro nějaké $0 \leq \theta_n < 1$. Proto

$$|P_n(z) - P(z)| = |P(1 - \alpha^n + \alpha^n z)|^{k_n} \cdot |1 - P^{\theta_n}(1 - \alpha^n + \alpha^n z)| \leq$$
$$\leq |1 - P^{\theta_n}(1 - \alpha^n + \alpha^n z)| \ .$$

Protože $0 < \alpha < 1$ a $0 \leq \theta_n < 1$, dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} |1 - P^{\theta_n}(1 - \alpha^n + \alpha^n z)| = 0 \quad ,$$

což následně implikuje $\lim_{n\to\infty} P_n(z) = P(z)$.

$\square$

VĚTA 4.8 *Buď $(X_n,\ n \leq 1)$ posloupnost nezávislých, stejně rozdělených nezáporných celočíselných náhodných veličin. Předpokládejme, že pro nějaké $\gamma \in (0,1]$ a $\alpha \in (0,1)$ posloupnost $(\zeta_n,\ n \geq 1)$ definovaná v (4.6) konverguje slabě k nezáporné celočíselné náhodné veličině. Potom limitní rozdělení je diskrétní semi-stabilní s exponentem γ a řádu α.*

Důkaz lze nalézt v [3].

4.2 Limitní věty

Velmi často využívanými větami z teorie pravděpodobnosti jsou zákony velkých čísel (ZVČ) a centrální limitní věty (CLV). Připomeňme jejich znění v nejjednodušší podobě pro iid centrované náhodné veličiny.

VĚTA 4.9 (ZÁKON VELKÝCH ČÍSEL) *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny, které mají konečnou střední hodnotu μ. Jestliže $n \to \infty$, potom*

$$S_n^* = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j \to \mu \quad \textit{skoro jistě.}$$

VĚTA 4.10 (CENTRÁLNÍ LIMITNÍ VĚTA) *Nechť $X_1, X_2, \ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny, které mají nulovou střední hodnotu a konečný rozptyl σ^2. Jestliže $n \to \infty$, potom*

$$S_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{d} Y \quad ,$$

kde náhodná veličina Y má standardní normální rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.

Důkaz první věty je možné nalézt např. v [10], druhá se objevuje např. v knize [1].

Zjistěme, jak se změní znění těchto vět, pokud nahradíme pevný počet sčítanců v sumách S_n a S_n^* počtem náhodným, tedy náhodnou veličinou ν_p. Zopakujme nejprve některé předpoklady a tvrzení uvedená v kapitole 2. Nechť ν_p je nezáporná celočíselná náhodná veličina s $\mathbb{E}\,\nu_p = \frac{1}{p}$ a označme $P_p(z)$ její vytvořující funkci. Předpokládejme, že

$$\lim_{p \to 0} \mathbb{P}\left\{p\nu_p < x\right\} = A(x) \quad , \tag{4.7}$$

kde $A(x)$ je nějaká distribuční funkce, pro kterou platí

$$0 < \int_0^\infty x \,\mathrm{d}A(x) < \infty \quad . \tag{4.8}$$

Nutnou a postačující podmínku pro existenci ν-striktně gaussovské náhodné veličiny dává věta 2.11, resp. její důsledek. Tedy vytvořující funkce ν_p musí splňovat pro každé $z > 0$

$$P_p(z) = \varphi\left(\frac{1}{p}\varphi^{-1}(z)\right) \quad , \quad p \in \Delta \quad , \tag{4.9}$$

kde

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \exp(-tx)\ \mathrm{d}A(x) \quad . \tag{4.10}$$

Charakteristická funkce ν-striktně gaussovského rozdělení pak má tvar $f(t) = \varphi(at^2)$, $a > 0$.

Definujme analogii degenerovaného rozdělení pro náhodnou veličinu ν_p, jejíž vytvořující funkce splňuje (4.9).

Definice 4.11 *Řekneme, že rozdělení je* ν-degenerované, *jestliže jeho charakteristická funkce má tvar* $\varphi(ibt)$, $b \in \mathbb{R}$, *kde* $\varphi(t)$ *je definováno pomocí (4.10).*

Pro zjednodušení budu značit ν-striktně gaussovské rozdělení s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem, jehož ch.f. splňuje $f(t) = \varphi\left(-\frac{1}{\varphi'(0)}t^2\right)$, jako $\mathcal{G}(0,1)$.

Dále ν-degenerované rozdělení se střední hodnotou μ s ch.f. $f^*(t) = \varphi\left(\frac{i\mu t}{\varphi'(0)}\right)$ budu značit $\mathcal{D}(\mu)$.

V případě geometrické ν_p je tedy rozdělení $\mathcal{G}(0,1)$ Laplaceovo s hustotou

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-\sqrt{2}|x|}$$

a rozdělení $\mathcal{D}(\mu)$ rozdělení exponenciální s hustotou

$$d(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\mu}\exp\{-\frac{x}{\mu}\} & x > 0 \end{cases} \quad .$$

Zaveďme ještě následující značení:

$$S_p = \frac{1}{\sigma\sqrt{\mathbb{E}\,\nu_p}} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j = p^{\frac{1}{2}}\sigma^{-1} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j \quad ,$$

kde $X_1, X_2, \ldots$ jsou iid n.v., nezávislé s ν_p, s $\mathbb{E}\,X_1 = 0$ a $\operatorname{var} X_1 = \sigma^2$, a

$$S_p^* = \frac{1}{\mathbb{E}\,\nu_p} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j = p \sum_{j=1}^{\nu_p} X_j \quad ,$$

kde $X_1, X_2, \ldots$ jsou iid n.v., nezávislé s ν_p, s $\mathbb{E}\,X_1 = \mu > 0$.

Následující dvě věty, jejichž důkaz lze nalézt v [8], jsou obdobou ZVČ a CLV pro náhodné počty sčítanců.

VĚTA 4.12 *Nechť ν_p je nezáporná celočíselná náhodná veličina, jejíž charakteristická funkce splňuje (4.9), kde $\varphi(t)$ je dáno (4.10). Nechť ν_p splňuje (4.7) a (4.8). Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s $\mathbb{E}\,X_1 = 0$ a $0 < \operatorname{var} X_1 = \sigma^2 < \infty$, které jsou nezávislé s ν_p. Předpokládejme také, že*

$$0 < \int_0^\infty x^2 \,\mathrm{d}A(x) < \infty \quad .$$

Potom limitním rozdělením součtů S_p pro $p \to 0$ je rozdělení $\mathcal{G}(0,1)$.

VĚTA 4.13 *Nechť ν_p je nezáporná celočíselná náhodná veličina, jejíž charakteristická funkce splňuje (4.9), kde $\varphi(t)$ je dáno (4.10). Nechť ν_p splňuje (4.7) a (4.8). Nechť $X_1, X_2, \ldots$ je posloupnost nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin s $\mathbb{E}\,X_1 = \mu > 0$, které jsou nezávislé s ν_p.*

Potom limitním rozdělením součtů S_p^* pro $p \to 0$ je rozdělení $\mathcal{D}(\mu)$.

V případě geometrické ν_p tedy Laplaceovo rozdělení hraje roli normálního rozdělení a exponenciální rozdělení má význam degenerovaného rozdělení.

Literatura

[1] Anděl J. (1985): Matematická statistika (2. vyd.). SNTL/ALFA, Praha

[2] Arnold B. C. (1983): Pareto Distributions. I. C. Publ. House, Fairland, MD

[3] Bouzar N. (2004): Discrete Semi-stable Distributions. *Ann. Inst. Stat. Math.* 56, No.3, str. 497–510

[4] Chambers J. M., Mallows C., Stuck B. W. (1976). *Journal of the American Statistical Association* 71, str. 340–344, sekce Theory and Methods

[5] Gnedenko B. V. (1982): On Limit Theorems for a Random Number of Random Variables. *Lecture Notes in Math.* 1021, str. 167–176

[6] Klebanov L. B. (2003): Heavy tailed distributions. Matfyzpress, Praha

[7] Klebanov L. B., Melamed I. A., Rachev S. T. (1989): On the Product of a Random Number of Random Variables in Connection with a Problem from Mathematical Economics. *Lecture Notes in Math.* 1412, str. 103–109

[8] Melamed I. A. (1989): Limit Theorems in the Set up of Summation of a Random Number of Independent Identically Distributed Random Variables. *Lecture Notes in Math.* 1412, str. 194–228

[9] Poincaré H. (1890): Sur classe nouvelle de transcendantes uniformes. *J. Math. Pures Appl.* 4^e Ser.6, str. 313–365

[10] Rényi A. (1972): Teorie pravděpodobnosti. Academia, Praha

[11] Samorodnitsky G. a Taqqu M. (1994): Stable Non-Gaussian Random Processes. Chapman & Hall, New York, London

[12] Steutel F.W. a van Harn K. (1979): Discrete analogues of self-decomposability and stability. *Annals of Probability* 7, str. 893–899