

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Lukáš Mirtes

Sumární statistiky bodových procesů v prostoru

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Radka Lechnerová, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2014

Rád bych zde poděkoval vedoucí práce RNDr. Radce Lechnerové, Ph.D. za její čas strávený konzultacemi. Dále patří velké poděkování mým přátelům a rodině, především mamince a tatínkovi, za jejich trpělivost a ochotu během mého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 22.5.2014

Lukáš Mirtes

Název práce: Sumární statistiky bodových procesů v prostoru

Autor: Lukáš Mirtes

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Radka Lechnerová, Ph.D., Soukromá vysoká škola ekonomických studií

Abstrakt: Bakalářská práce se zabývá základy bodových procesů v prostoru a jejich charakteristikami. Nejprve představíme Poissonův bodový proces, který hraje referenční roli v teorii bodových procesů. Dále zavedeme základní charakteristiky, sumární statistiky a jejich neparametrické odhady. Práci uzavírá aplikace vybraných odhadů zavedených charakteristik na reálných datech, konkrétně na realizaci bodového procesu tvořenou středě globulárních pórů keramického nástřiku.

Klíčová slova: Bodové procesy v prostoru, Poissonův bodový proces, sumární statistiky

Title: Summary statistics of spatial point processes

Author: Lukáš Mirtes

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Radka Lechnerová, Ph.D., Private University College of Studies, Ltd.

Abstract: The paper presents introduction to spatial point processes and their characteristics. The reader is familiar with Poisson point process, which plays fundamental role in the theory of point processes. Basic properties and summary statistics are introduced with nonparametric estimations. The work is concluded by example of the point process including estimations of some characteristics.

Keywords: Spatial point processes, Poisson point process, summary statistics

Obsah

1	Úvod do bodových procesů	3
2	Poissonův bodový proces	5
3	Charakteristiky bodových procesů	9
3.1	Vlastnosti prvního a druhého řádu bodových procesů	9
3.2	Redukovaná momentová míra druhého řádu	10
4	Sumární statistiky	11
4.1	Charakteristiky druhého řádu	11
4.2	Distribuční funkce vzdálenosti	13
5	Neparametrické odhady	15
5.1	Okrajové efekty	15
5.2	Neparametrický odhad funkce intenzity	16
5.3	Neparametrický odhad K a L-funkce	17
5.4	Neparametrický odhad párové korelační funkce g	18
5.5	Neparametrický odhad F, G a J-funkce	19
6	Aplikace odhadů sumárních statistik	20
	Literatura	26
	Seznam obrázků	27
	Přílohy	28

Úvod

Práce se věnuje bodovým procesům v prostoru, jejich charakteristikám a jejich neparametrickým odhadům.

Práce je rozdělena do 6 kapitol. V první kapitole se seznámíme se základními definicemi bodových procesů.

V druhé kapitole si zadefinujeme Poissonův bodový proces, který hraje referenční roli mezi bodovými procesy. Jde o proces, který se využívá jako základní pro studium bodových procesů, protože v něm neexistují žádné interakce mezi jednotlivými body. Dokážeme si jeho existenci a ukážeme některé jeho vlastnosti.

Ve třetí a čtvrté kapitole se věnujeme základním charakteristikám bodových procesů a zavedeme sumární statistiky, kterými lze indikovat vzájemné interakce mezi body zkoumaného bodového procesu. Neparametrické odhady bodových procesů uvedeme v páté kapitole, přičemž se zabýváme jejich korekcí na okrajové efekty a jejich nestranností respektive podílovou nestranností.

V 6. kapitole si ukážeme aplikaci vybraných odhadů sumárních statistik na reálných datech. Ze získaných výsledků se pokusíme odhadnout, zda se jedná o Poissonův bodový proces, regulární bodový proces nebo o shlukový bodový proces.

Kapitola 1

Úvod do bodových procesů

Obecné bodové procesy se definují na úplných separabilních lokálně omezených kompaktních metrických prostorech. V této práci se omezíme na bodové procesy definované na n -rozměrném Eukleidovském prostoru \mathbb{R}^n nebo na jeho podmnožině $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definice 1. *Nechť $X \subseteq S$ a $\text{card}(X)$ značí počet bodů množiny X . Nechť $X_B = X \cap B$ pro $B \subseteq S$. Řekneme, že X je lokálně konečná, pokud $\text{card}(X_B) < \infty$, pro každou omezenou množinu $B \subseteq S$.*

Definice 2. *Nechť \mathcal{B}^n je systém všech borelovských podmnožin \mathbb{R}^n a $\mathcal{B}_0^n \subseteq \mathcal{B}^n$ je systém všech omezených borelovských podmnožin. Prostor lokálně konečných podmnožin \mathbb{R}^n definujeme jako $\mathcal{N} = \{X \subseteq \mathbb{R}^n : \text{card}(X_B) < \infty; \forall B \in \mathcal{B}_0^n\}$ a prvky \mathcal{N} budeme nazývat lokálně konečné bodové konfigurace.*

Předtím, než uvedeme definici bodového procesu, si uvědomíme, že $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je úplný separabilní metrický prostor s metrikou d , definovanou jako klasická Eukleidovská vzdálenost, tedy $d(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in S$. Na prostoru \mathcal{N} zavedeme σ -algebru

$$\mathfrak{N} = \sigma(\{X \in \mathcal{N} : \text{card}(X_B) = m\} : B \in \mathcal{B}_0^n, m \in \mathbb{N}_0).$$

Definice 3. *Bodový proces X je měřitelné zobrazení $X : (\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$, kde $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor s pravděpodobnostní mírou \mathbb{P} . Rozdělení bodového procesu X je dáno mírou $P_X(A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$, kde $A \in \mathfrak{N}$.*

V dalším textu budeme prvky \mathfrak{N} značit písmeny x, y, \dots , zatímco prvky $S \subseteq \mathbb{R}^n$ písmeny ξ, η, \dots . Prázdnou bodovou konfiguraci budeme značit \emptyset .

Definice 4. *Nechť X je bodový proces na \mathcal{N} . Množiny $F_B = \{X \in \mathfrak{N} : \text{card}(X_B) = 0\}$ se nazývají prázdné události a prázdné pravděpodobnosti definujeme jako $v(B) = \mathbb{P}(\text{card}(X_B) = 0)$, $B \in \mathcal{B}_0^n$.*

Věta 1. *Rozdělení bodového procesu X je jednoznačně určeno prázdnými pravděpodobnostmi.*

Důkaz. Viz [1, věta 2]



Definice 5. *Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $p : S \rightarrow [0,1]$ je měřitelná funkce a X je bodový proces. Bodový proces $X_{thin} = \{\xi \in X : R(\xi) \leq p(\xi)\}$, kde $R(\xi)$ jsou vzájemně nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0,1)$ ($R(\xi) \sim R(0,1)$) a nezávislé s X , se nazývá nezávislý ztenčený bodový proces bodového procesu X (zkráceně nezávislé ztenčení X) a $p(\xi)$ se nazývají retenční pravděpodobnosti.*

Kapitola 2

Poissonův bodový proces

Poissonův bodový proces hraje referenční roli v bodových procesech, protože jde o model, ve kterém jsou body úplně nezávislé a neexistují mezi nimi žádné interakce. Je často využíván pro studium sumárních statistik a při konstrukci pokročilých bodových procesů. V této kapitole si ukážeme nejdůležitější vlastnosti Poissonova bodového procesu a zaměříme se na základní definice, zejména pokud jde o existenci procesu.

Definice 6. *Nechť $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Funkce $\rho : S \rightarrow [0, \infty)$, která je lokálně integrovatelná ($\int_B \rho(\xi) d\xi < \infty$ pro každou omezenou $B \subseteq S$), se nazývá funkce intenzity a míra daná vztahem*

$$\mu(B) = \int_B \rho(\xi) d\xi, \quad B \subseteq S$$

se nazývá míra intenzity. Tato míra je navíc lokálně konečná ($\mu(B) < \infty$ pro omezenou $B \subseteq S$) a difuzní ($\mu(\{\xi\}) = 0$ pro $\xi \in S$).

Předtím, než uvedeme definici Poissonova bodového procesu, zdefinujeme pomocný Binomický proces.

Definice 7. *Nechť f je hustota na množině $B \subseteq S$ a $n \in \mathbb{N}$. Bodový proces X obsahující n nezávislých stejně rozdělených bodů s hustotou f se nazývá Binomický bodový proces o n bodech.*

Poznámka. V dalším textu budeme Binomický bodový proces X o n bodech s hustotou f na množině B označovat $X \sim \text{binomial}(B, n, f)$.

Definice 8. *Bodový proces X na množině $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá Poissonův bodový proces s funkcí intenzity ρ a příslušnou mírou intenzity μ , pokud následující podmínky jsou splněny:*

- (i) *pro každou množinu $B \subseteq S$ s vlastností $\mu(B) < \infty$ platí $\text{card}(X_B) \sim \text{Po}(\mu(B))$ (Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $\mu(B)$);*
- (ii) *pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $B \subseteq S$, kde $0 < \mu(B) < \infty$ a $\text{card}(X_B) = n$ platí, že $X_B \sim \text{binomial}(B, n, f)$ s hustotou $f(\xi) = \rho(\xi)/\mu(B)$.*

Poissonův bodový proces X budeme značit $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$.

Pro každou omezenou množinu $B \subseteq S$ nám μ určuje očekávaný počet bodů na množině B ,

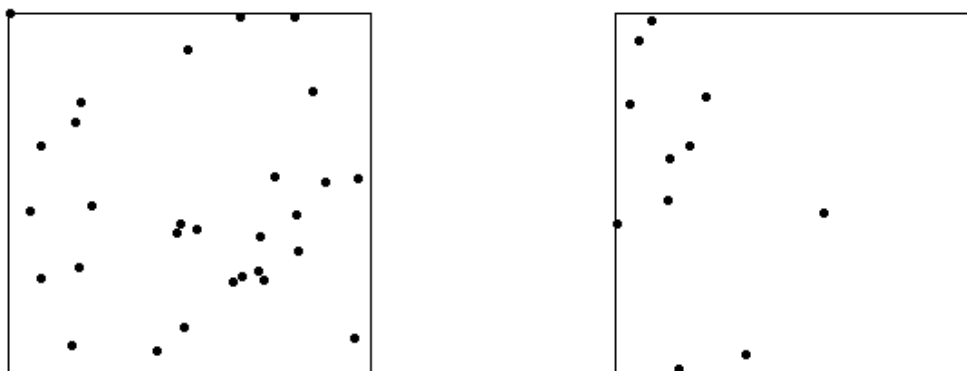
$$\mathbb{E}[\text{card}(X_B)] = \mu(B).$$

Heuristicky $\rho(\xi)d\xi$ je pravděpodobnost výskytu bodu v nekonečně malé kouli o střed ξ a objemu $d\xi$.

Definice 9. Necht $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$. Řekneme, že X je:

- (i) homogenní právě tehdy, když ρ je konstantní;
- (ii) nehomogenní právě tehdy, když ρ není konstantní.

Příklad realizace homogenního a nehomogenního Poissonova bodového procesu můžeme vidět níže na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Simulace homogenního Poissonova bodového procesu (vlevo) s funkcí intenzity $\rho = 30$ a nehomogenního Poissonova bodového procesu (vpravo) s funkcí intenzity $\rho(x, y) = 50 * \exp\{-3 * x\}$ na jednotkovém čtverci.

Definice 10. Řekneme, že bodový proces X na \mathbb{R}^n je

- (i) stacionární, pokud jeho rozdělení je invariantní vůči posunutí;
- (ii) izotropní, pokud jeho rozdělení je invariantní vůči rotacím kolem počátku \mathbb{R}^n .

Věta 2. (i) $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ právě tehdy, když pro každou množinu $B \subseteq S$ s mírou intenzity $\mu(B) = \int_B \rho(\xi)d\xi < \infty$ a každou množinu $F \subseteq \mathfrak{N}$ platí

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_B \in F) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \cdots \int_B \mathbf{1}[\{x_1, \dots, x_n\} \in F] \prod_{i=1}^n \rho(x_i) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

kde integrál vpravo pro $n = 0$ bereme jako $\mathbf{1}[\emptyset \in F]$.

(ii) Jestliže $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$, pak pro funkci $h : \mathfrak{N} \rightarrow [0, \infty)$ a množinu $B \subseteq S$ s mírou intenzity $\mu(B) < \infty$ platí

$$\mathbb{E}[h(X_B)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\mu(B))}{n!} \int_B \cdots \int_B h(\{x_1, \dots, x_n\}) \prod_{i=1}^n \rho(x_i) dx_1 \cdots dx_n.$$

Důkaz. Viz [2, tvrzení 3.1] □

Tvrzení 3. *Poissonův bodový proces X existuje a je jednoznačně určen prázdnými pravděpodobnostmi*

$$v(B) = \exp(-\mu(B)), \quad \text{pro omezenou } B \subseteq S.$$

Důkaz. Necht' $\xi \in S$ je libovolný bod a množiny $B_i = \{\eta \in S : i-1 \leq \|\eta - \xi\| < i\}$ pro $i \in \mathbb{N}$. Tedy S lze napsat jako disjunktí sjednocení omezených množin B_i . Necht' $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, kde $X_i \sim \text{Poisson}(B_i, \rho_i)$, $i = 1, 2, \dots$ jsou nezávislé a ρ_i je restrikce ρ na množinu B_i . Pak pro každou omezenou množinu $B \subseteq S$ platí

$$\mathbb{P}(X \cap B = \emptyset) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp(-\mu(B \cap B_i)) = \exp(-\sum_{i=1}^{\infty} \mu(B \cap B_i)) = \exp(-\mu(B)).$$

To je prázdná pravděpodobnost Poissonova bodového procesu s mírou intenzity μ . Tedy existence Poissonova bodového procesu plyne z věty 1. □

Důsledek. Necht' X_1 a X_2 jsou nezávislé Poissonovy bodové procesy na S s mírou intenzity μ_1 a μ_2 . Pak rozdělení (X_1, X_2) je jednoznačně určeno prázdnými pravděpodobnostmi

$$\mathbb{P}(X_1 \cap A = \emptyset, X_2 \cap B = \emptyset) = \exp(-\mu_1(A) - \mu_2(B)),$$

pro omezené $A, B \subseteq S$.

Věta 4. *Necht' X je Poissonův bodový proces. Pak X_{B_1}, X_{B_2}, \dots jsou nezávislé pro každé disjunktí množiny $B_1 \subseteq S, B_2 \subseteq S, \dots$*

Důkaz. Viz [2, tvrzení 3.2]. □

Následující věta nám říká, že Poissonův bodový proces je uzavřený vůči ztenčení. Tedy že ztenčený bodový proces, který vznikl z Poissonova bodového procesu, je opět Poissonův bodový proces.

Věta 5. *Nechť $X \sim \text{Poisson}(S, \rho)$ a X_{thin} je jeho ztenčení s retenčními pravděpodobnostmi $p(\xi), \xi \in S$ a $\rho_{thin}(\xi) = p(\xi)\rho(\xi), \xi \in S$. Pak X_{thin} a $X \setminus X_{thin}$ jsou nezávislé Poissonovy procesy s funkcí intenzity ρ_{thin} , respektive $\rho - \rho_{thin}$.*

Důkaz. Nechť μ_{thin} je dána vztahem $\mu_{thin}(B) = \int_B \rho_{thin}(\xi) d\xi$. Dle důsledku tvrzení 3 stačí ověřit

$$\mathbb{P}(X_{thin} \cap A = \emptyset, (X \setminus X_{thin}) \cap A = \emptyset) = \exp(-\mu_{thin}(A) - \mu(B) + \mu_{thin}(B)), \quad (2.1)$$

pro omezené množiny $A, B \subseteq S$. Z věty 2 a definice 5 pro každou omezenou množinu $C \subseteq S$ vyplývá, že

$$\mathbb{P}(X_{thin} \cap C = \emptyset) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-\mu(C)} \left(\int_C (1 - p(\xi)) \rho(\xi) d\xi \right)^n = \exp(-\mu_{thin}(C)).$$

Ze symetrie také máme

$$\mathbb{P}((X \setminus X_{thin}) \cap C = \emptyset) = \exp(-(\mu - \mu_{thin})(C)).$$

Díky větě 4 pro omezené $A, B \subseteq S$ platí

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{thin} \cap A = \emptyset, (X \setminus X_{thin}) \cap B = \emptyset) = \\ & = \mathbb{P}(X \cap A \cap B = \emptyset) \mathbb{P}(X_{thin} \cap (A \setminus B) = \emptyset) \mathbb{P}((X \setminus X_{thin}) \cap (B \setminus A) = \emptyset) = \\ & = \exp(-\mu(A \cap B) - \mu_{thin}(A \setminus B) - (\mu - \mu_{thin})(B \setminus A)), \end{aligned}$$

čímž získáváme (2.1). □

Kapitola 3

Charakteristiky bodových procesů

3.1 Vlastnosti prvního a druhého řádu bodových procesů

Vlastnost prvního řádu bodového procesu je dána mírou intenzity, zatímco vlastnost druhého řádu bodového procesu je popsána pomocí faktoriální momentové míry druhého řádu. V této kapitole bude X představovat bodový proces na \mathbb{R}^n , pokud nebude řečeno jinak.

Definice 11. *Míra intenzity μ na \mathbb{R}^n je dána vztahem*

$$\mu(B) = \mathbb{E}[\text{card}(X_B)], \quad B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Faktoriální momentová míra druhého řádu $\alpha^{(2)}$ na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ je definována jako

$$\alpha^{(2)}(C) = \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{\neq \\ \xi, \eta \in X}} \mathbf{1}[(\xi, \eta) \in C] \right], \quad C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

V [2, appendix C] je ukázáno, že platí

$$\mathbb{E}[\text{card}(X_A)\text{card}(X_B)] = \alpha^{(2)}(A \times B) + \mu(A \cap B), \quad A, B \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Tedy $\alpha^{(2)}$ a μ určuje momenty druhého řádu náhodné veličiny $\text{card}(X_A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definice 12. *Jestliže míra intenzity μ může být zapsána ve tvaru*

$$\mu(B) = \int_B \rho(\xi) d\xi, \quad B \subseteq \mathbb{R}^n,$$

kde ρ je nezáporná funkce, pak ρ se nazývá funkce intenzity. Pokud ρ je konstantní, pak říkáme, že X je homogenní. V opačném případě říkáme, že X je nehomogenní.

Poznámka. Definice 12 je v souladu s definicí 9.

Definice 13. Pokud faktoriální momentová míra $\alpha^{(2)}$ lze napsat ve tvaru

$$\alpha^{(2)} = \iint \mathbf{1}_{[(\xi, \eta) \in C]} \rho^{(2)}(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad C \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

kde $\rho^{(2)}$ je nezáporná funkce, pak $\rho^{(2)}$ se nazývá součinnová hustota druhého řádu.

Věta 6. Nechť X má funkci intenzity ρ a součinnovou hustotu druhého řádu $\rho^{(2)}$. Pak pro každé funkce $h_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0; \infty)$ a $h_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0; \infty)$ platí

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\xi \in X} h_1(\xi) \right] = \int h_1(\xi) \rho(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

a

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\substack{\neq \\ \xi, \eta \in X}} h_2(\xi, \eta) \right] = \iint h_2(\xi, \eta) \rho^{(2)}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.2)$$

Důkaz. Viz [2, věta 4.1]

□

3.2 Redukovaná momentová míra druhého řádu

Definice 14. Nechť bodový proces X má funkci intenzity ρ a

$$\mathcal{K}(B) = \frac{1}{|A|} \mathbb{E} \sum_{\substack{\neq \\ \xi, \eta \in X}} \frac{\mathbf{1}[\xi \in A, \eta - \xi \in B]}{\rho(\xi)\rho(\eta)}, \quad B \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

kde $a/0 := 0, a \geq 0$, nezávisí na výběru množiny $A \subseteq \mathbb{R}^n, 0 < |A| < \infty$. Pak říkáme, že bodový proces X je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a \mathcal{K} se nazývá redukovaná momentová míra druhého řádu.

Stacionarita X nám implikuje slabou stacionaritu po převážení funkcí intenzity. V [2, definice 4.5] můžeme nahlédnout, že opačná implikace neplatí. Pokud pro nějaký bodový proces X existuje párová korelační funkce g (Definice 15), která je invariantní vůči posunutí, pak existuje i redukovaná momentová míra druhého řádu a platí

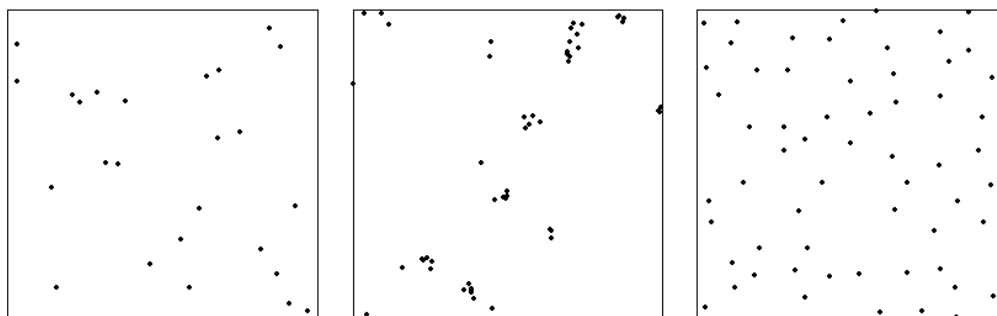
$$\mathcal{K}(B) = \int_B g(\xi) d\xi, \quad B \subseteq \mathbb{R}^n. \quad (3.4)$$

To získáme, pokud použijeme (3.2) na pravou stranu rovnice (3.3). Musíme si ale uvědomit, že \mathcal{K} není obecně invariantní vůči posunutí, i v případě, že X je stacionární.

Kapitola 4

Sumární statistiky

U bodových procesů můžeme pozorovat různé závislosti mezi jednotlivými body. U Poissonova bodového procesu se jedná o úplnou prostorovou nahodilost. To znamená, že body jsou rozmístěné bez vzájemných interakcí. V jiném případě může docházet k regularitě, kdy se body vzájemně odpuzují. Opačný efekt je shlukování, kdy se body vzájemně přitahují. Příklad těchto vlastností můžeme vidět na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Ukázka Poissonova bodového procesu (vlevo), shlukového bodového procesu (uprostřed) a regulárního bodového procesu (vpravo).

4.1 Charakteristiky druhého řádu

Definice 15. *Nechť X je bodový proces s funkcí intenzity ρ a součinnou hustotou druhého řádu $\rho^{(2)}$. Párovou korelační funkci definujeme předpisem*

$$g(\xi, \eta) = \frac{\rho^{(2)}(\xi, \eta)}{\rho(\xi)\rho(\eta)}, \quad \xi, \eta \in X,$$

kde $a/0 := 0$ pro libovolné kladné a .

Snadno se dá ukázat, že pro Poissonův bodový proces platí $\rho^{(2)}(\xi, \eta) = \rho(\xi)\rho(\eta)$, tedy $g(\xi, \eta) = 1$. Důkaz tohoto tvrzení můžeme najít v [1, věta 14]. Tedy

$g(\xi, \eta) > 1$ nám indikuje regularitu a $g(\xi, \eta) < 1$ shlukování bodů bodového procesu.

Věta 7. *Nechť X je bodový proces a g je párová korelační funkce. Pokud X je stacionární, pak g je invariantní vůči posunutí, tedy $g(\xi, \eta) = g(\xi - \eta)$. Jestliže X je navíc izotropní, pak g je izotropní, tedy $g(\xi, \eta) = g(\|\xi - \eta\|)$.*

Důkaz. X je stacionární, tedy $\rho^{(2)}(\xi, \eta) = \rho^{(2)}(\xi - \eta, 0) = \rho^{(2)}(\xi - \eta)$ a $\frac{\rho^{(2)}(\xi - \eta)}{\rho^2} = g(\xi - \eta)$.

X je navíc izotropní, tedy $\rho^{(2)}(\xi, \eta) = \rho^{(2)}(\|\xi - \eta\|)$ a $g(\xi, \eta) = g(\|\xi - \eta\|)$. □

Věta 8. *Předpokládejme, že X má funkci intenzity ρ a součinnou hustotu druhého řádu $\rho^{(2)}$ a X_{thin} je nezávislé ztenčení X s retenčními pravděpodobnostmi $p(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$. Pak funkce intenzity a součinná hustota druhého řádu bodového procesu X_{thin} jsou*

$$\rho_{thin}(\xi) = p(\xi)\rho(\xi)$$

$$\rho_{thin}^{(2)}(\xi, \eta) = p(\xi)p(\eta)\rho^{(2)}(\xi, \eta)$$

a párová korelační funkce je invariantní vůči nezávislému ztenčení, tedy $g = g_{thin}$.

Důkaz. Z definice 5 víme, že náhodné veličiny $R(\xi) \sim R(0,1), \xi \in \mathbb{R}^n$, jsou vzájemně nezávislé a nezávislé s X . Tak pro $B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{card}(X_{thin} \cap B)] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{\xi \in X} \mathbf{1}[\xi \in B, R(\xi) \leq p(\xi)] \middle| X \right] \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{\xi \in X} p(\xi) \mathbf{1}[\xi \in B] \right] = \int_B p(\xi)\rho(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost plyne z (3.1). Tedy jsme dokázali, že $\rho_{thin} = p(\xi)\rho(\xi)$. Stejným způsobem můžeme dokázat, že $\rho_{thin}^{(2)}(\xi, \eta) = p(\xi)p(\eta)\rho^{(2)}(\xi, \eta)$. Nyní ukážeme, že párová korelační funkce je invariantní vůči nezávislému ztenčení.

$$\begin{aligned} g_{thin}(\xi, \eta) &= \frac{\rho_{thin}^{(2)}(\xi, \eta)}{\rho_{thin}(\xi)\rho_{thin}(\eta)} = \frac{p(\xi)p(\eta)\rho^{(2)}(\xi, \eta)}{p(\xi)\rho(\xi)p(\eta)\rho(\eta)} = \frac{\rho^{(2)}(\xi, \eta)}{\rho(\xi)\rho(\eta)} = \\ &= g(\xi, \eta) \end{aligned}$$

□

Věta 9. *Nechť X_{thin} je nezávislé ztenčení bodového procesu X , který je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární. Pak X_{thin} je také po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a $\mathcal{K}_{thin} = \mathcal{K}$.*

Důkaz. Důkaz této věty se provede podobným postupem jako důkaz věty 8. \square

Definice 16. *Nechť bodový proces X je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární. K a L -funkce definujeme předpis*

$$K(r) = \mathcal{K}(b(0,r)), \quad r > 0,$$

$$L(r) = (K(r)/\omega_n)^{1/n}, \quad r > 0,$$

kde ω_n je objem n -rozměrné jednotkové koule, tedy $\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$.

V případě, že X je stacionární, pak $\rho K(r)$ značí očekávaný počet bodů do vzdálenosti r od počátku za podmínky, že v počátku je bod procesu. L -funkce je transformace K -funkce. Její výhoda je zejména pro Poissonův bodový proces, protože v tomto případě jde o identitu, tedy $L(r) = r$. V obecném případě pro malé hodnoty r , $L(r) - r > 0$ indikuje shlukování a $L(r) - r < 0$ indikuje regularitu.

Pokud \mathcal{K} je invariantní vůči rotacím, pak \mathcal{K} je určena pomocí g . To je v případě, kdy X je izotropní nebo pokud $g(\xi, \eta) = g(\|\xi - \eta\|)$ je izotropní.

Pokud g je izotropní, pak

$$K(r) = \sigma_n \int_0^r t^{n-1} g(t) dt. \quad (4.1)$$

a

$$K'(r) = \sigma_n r^{n-1} g(r), \quad (4.2)$$

kde $\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ je povrch $(n-1)$ -rozměrné sféry v \mathbb{R}^n a $K'(r)$ je derivace K -funkce. Tyto vztahy ukazují blízký vztah K a g . Důkaz vzorců (4.1) a (4.2) najdeme v [1, věta 15].

4.2 Distribuční funkce vzdálenosti

Definice 17. *Nechť X je stacionární bodový proces. Kontaktní distribuční funkce (F -funkce) je definovaná předpisem*

$$F(r) = \mathbb{P}(X \cap b(0,r) \neq \emptyset), \quad r > 0.$$

Distribuční funkci nejbližšího souseda (G -funkci) definujeme jako

$$G(r) = \frac{1}{\rho|A|} \mathbb{E} \left[\sum_{\xi \in X \cap A} \mathbf{1}[(X \setminus \xi) \cap b(\xi, r) \neq \emptyset] \right], \quad r > 0,$$

kde A , $0 < |A| < \infty$, je libovolná množina.

J -funkce je definovaná předpisem

$$J(r) = \frac{1 - G(r)}{1 - F(r)}, \quad F(r) < 1.$$

G -funkce je distribuční funkce vzdálenosti nejbližšího bodu procesu k jinému bodu procesu,
zatímco F -funkce je distribuční funkce vzdálenosti libovolného bodu v prostoru k bodu procesu.

Věta 10. *Nechť X je stacionární Poissonův bodový proces na \mathbb{R}^n s funkcí intenzity $\rho < \infty$. Pak*

$$F(r) = G(r) = 1 - \exp(-\rho\omega_n r^n),$$

$$J(r) = 1.$$

Důkaz. Viz [3, věta 19]



V [2, část 4.2.3] říkají, že pro malé hodnoty $r > 0$ platí, pokud pro nějaký bodový proces je $F(r) < G(r)$ ($J(r) < 1$), pak jde o shlukový bodový proces. V opačném případě, pokud $F(r) > G(r)$ ($J(r) > 1$), platí, že jde o regulární bodový proces.

Kapitola 5

Neparametrické odhady

V teorii se většinou zabýváme bodovými procesy definovanými na \mathbb{R}^n . V praxi jsme vždy omezeni provádět pozorování realizace procesu na nějaké omezené množině $W \in \mathbb{R}^n$, tzv. pozorovacím okně. Přesto se pokusíme udělat neparametrické odhady ρ , g , \mathcal{K} , K -funkce, L -funkce, F -funkce, G -funkce a J -funkce bodového procesu na základě dané realizace. V této sekci budeme předpokládat, že X je bodový proces na \mathbb{R}^n s funkcí intenzity ρ . Pokud X je stacionární, pak ρ je konstanta, pro kterou platí $0 < \rho < \infty$.

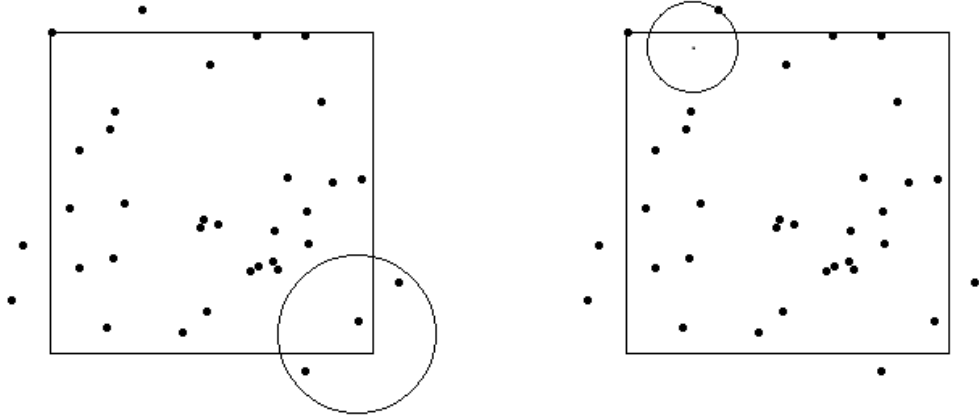
5.1 Okrajové efekty

Protože odhady charakteristik bodových procesů se provádějí ze vzorku získaném v omezeném pozorovacím okně, může dojít k takzvaným okrajovým efektům. Jde o situaci, kdy se nacházíme blízko hranice pozorovacího okna.

Například při odhadu F -funkce hledáme nejbližšího souseda k libovolnému bodu v prostoru. Jak je vidět na obrázku 5.1 vpravo, nejbližší bod leží mimo pozorovací okno.

Při odhadu K -funkce zjišťujeme počet bodů procesu do vzdálenosti $r > 0$ od určitého bodu procesu. Na obrázku 5.1 vlevo vidíme, že reálně jsou tyto body 3, ale v našem pozorovacím okně je pouze jeden bod.

Pokud bychom tedy zanedbávali okrajové efekty, může se velmi často stát, že získáme zkreslené výsledky odhadů. Různé možnosti korekce okrajových efektů si ukážeme během odhadů jednotlivých charakteristik.



Obrázek 5.1: Okrajové efekty pro K -funkci (vlevo) a F -funkci (vpravo).

5.2 Neparametrický odhad funkce intenzity

Pro homogenní bodový proces máme nestranný odhad funkce intenzity

$$\hat{\rho} = \frac{\text{card}(X_W)}{|W|}. \quad (5.1)$$

Pro homogenní Poissonův bodový proces to je dokonce maximálně věrohodný odhad, jak je dokázáno v [1, strana 25].

V případě, že X není homogenní, pak jádrový neparametrický odhad funkce intenzity je

$$\hat{\rho}_b(\xi) = \sum_{\eta \in X_W} \frac{k_b(\xi - \eta)}{c_{W,b}(\eta)}, \quad \xi \in W, \quad (5.2)$$

kde $k_b(\xi) = k(\xi)/b^n$ je jádro s šířkou pásma $b > 0$, k je nějaká pravděpodobnostní hustota a

$$c_{W,b}(\eta) = \int_W k_b(\xi - \eta) d\xi \quad (5.3)$$

je korekce na okrajové efekty. Tento odhad je velice citlivý na volbu šířky pásma b , zatímco výběr k není tolik důležitý. Většinou se za k volí hustota rovnoměrného rozdělení na jednotkové kouli. Je možné také vzít součin jednorozměrných hustot $k(\xi) = e(\xi_1) \cdots e(\xi_n)$, kde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Často se za $e(\xi_i)$ volí Epanečnikovo jádro

$$e(u) = (3/4)(1 - |u|)\mathbf{1}[|u| \leq 1], \quad u \in \mathbb{R}.$$

Lemma 11. $\int_W \hat{\rho}_b(\xi) d\xi$ je nestranný odhad $\mu(W)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_W \sum_{\eta \in X_W} k_b(\xi - \eta) / c_{W,b}(\eta) d\xi \right] &= \int_W \mathbb{E} \left[\sum_{\eta \in X_W} k_b(\xi - \eta) / c_{W,b}(\eta) \right] d\xi = \\ &= \int_W \int_W (k_b(\xi - \eta) / c_{W,b}(\eta)) \rho(\eta) d\eta d\xi = \int_W \rho(\eta) d\eta = \mu(W) \end{aligned}$$

V druhé rovnosti jsme využili vzorec (3.1) a ve třetí rovnosti (5.3). □

5.3 Neparametrický odhad K a L -funkce

Protože K a L -funkce jsou založeny na redukované momentové míře druhého řádu \mathcal{K} , budeme provádět odhad \mathcal{K} . Zavedeme označení $W_\xi = \{\eta + \xi : \eta \in W\}$ pro posunutí W o $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 12. *Nechť X je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární a předpokládejme, že $|W \cap W_\xi| > 0$ pro každé $\xi \in B$. Pak*

$$\widehat{\mathcal{K}}(B) = \sum_{\xi, \eta \in X_W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[\eta - \xi \in B]}{\rho(\xi)\rho(\eta)|W \cap W_{\eta-\xi}|} \quad (5.4)$$

je nestranný odhad $\mathcal{K}(B)$.

Důkaz. Protože X je po převážení funkcí intenzity slabě stacionární, tak párová korelační funkce g je invariantní vůči posunutí, tedy platí $\rho^{(2)} = \rho(\eta)\rho(\xi)g(\eta - \xi)$. Pak pro $h(\xi, \eta) = \frac{\mathbf{1}[\eta - \xi \in B]}{\rho(\xi)\rho(\eta)|W \cap W_{\eta-\xi}|}$ ve vzorci (3.2) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{\xi, \eta \in X_W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[\eta - \xi \in B]}{\rho(\xi)\rho(\eta)|W \cap W_{\eta-\xi}|} \right] &= \iint \frac{\mathbf{1}[\xi \in W, \eta \in W, \eta - \xi \in B]}{|W \cap W_{\eta-\xi}|} g(\eta - \xi) d\eta d\xi = \\ &= \iint \frac{\mathbf{1}[\xi \in W \cap W_{-\tilde{\eta}}, \tilde{\eta} \in B]}{|W \cap W_{\tilde{\eta}}|} g(\tilde{\eta}) d\xi d\tilde{\eta} = \mathcal{K}(B). \end{aligned}$$

□

Pro $B = b(0, r)$, $r > 0$ a pozorovací okno W , které je obdélník, je potřeba volit r menší, než čtvrtina kratší strany obdélníku W .

Lemma 12 nám dává nestranný odhad $\mathcal{K}(B)$ za předpokladu, kdy ρ je známé. Ve většině případů je ρ neznámé. Musíme tedy v (5.4) nahradit $\rho(\xi)\rho(\eta)$ odhadem $\widehat{\rho(\xi)\rho(\eta)}$. Pak ale

$$\widehat{\mathcal{K}}(B) = \sum_{\xi, \eta \in X_W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[\eta - \xi \in B]}{\widehat{\rho(\xi)\rho(\eta)}|W \cap W_{\eta-\xi}|} \quad (5.5)$$

není nestranný odhad $\mathcal{K}(B)$. Zároveň také odhad $L(r)$, získaný transformací $K(r)$, není nestranný.

V prostorové statistice není často možné získat nestranné odhady, přesto některé z nich jsou podílově nestranné ($\hat{\theta} = \frac{X}{Y}$, pak $\theta = \frac{\mathbb{E}X}{\mathbb{E}Y}$). V homogenním případě platí, pokud $\widehat{\rho(\xi)\rho(\eta)} = \hat{\rho}^2$ je nestranný, pak (5.5) je podílově nestranný. Máme několik

možností, jak tento odhad udělat. V [4] je napsáno, že stačí transformovat (5.1) a tím získáme odhad $\widehat{\rho^2} = \text{card}(X_W)^2/|W|^2$. Alternativně pro Poissonův bodový proces máme nestranný odhad

$$\widehat{\rho^2} = \frac{\text{card}(X_W)(\text{card}(X_W) - 1)}{|W|^2}.$$

V nehomogenním případě v [5] navrhují použít $\widehat{\rho(\xi)\rho(\eta)} = \bar{\rho}_b(\xi)\bar{\rho}_b(\eta)$, kde

$$\bar{\rho}_b(\xi) = \sum_{\eta \in X_W \setminus \xi} k_b(\xi - \eta)/c_{W,b}(\eta), \quad \xi \in W,$$

je nepatrná modifikace (5.2).

Ve vzorcích (5.4) a (5.5) jsme použili korekci na okrajové efekty ve tvaru $1/|W \cap W_{\eta-\xi}|$. Jde o takzvaný translačně korigovaný odhad. Jako alternativu můžeme použít minusový odhad. Ten je založen na minusovém výběru

$$W_{\ominus r} = \{\xi \in W : b(\xi, r) \subseteq W\}, \quad r > 0.$$

Jde o podmnožinu bodů okna pozorování W , které jsou od hranice vzdálené alespoň r . Pak

$$\widehat{\mathcal{K}}(B) = \sum_{\xi \in X_W, \eta \in X_W \cap W_{\ominus r}}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[\eta - \xi \in B]}{\rho(\xi)\rho(\eta)} \quad (5.6)$$

je nestranný odhad. V případě, že opět nahradíme $\rho(\xi)\rho(\eta)$ odhadem $\widehat{\rho(\xi)\rho(\eta)}$, pak odhad $\widehat{\mathcal{K}}(B)$ v (5.6) opět nebude nestranný. Tato metoda je vhodná v případě, kdy máme velké množství bodů procesu, protože zmenšením okna pozorování přijdeme o některé dvojice bodů, které nebudou započítány v odhadu (5.6).

Další alternativou odhadu redukované momentové míry druhého řádu je izotropicky korigovaný odhad

$$\widehat{\mathcal{K}}(B) = \sum_{\xi, \eta \in X_W}^{\neq} \frac{\mathbf{1}[\xi - \eta \in B] |\partial b(\xi, \|\xi - \eta\|)|}{\rho(\xi)\rho(\eta) |W| |\partial b(0, \|\xi - \eta\|) \cap W|}, \quad (5.7)$$

kde ∂A značí hranici množiny A .

5.4 Neparametrický odhad párové korelační funkce g

V případě, kdy $g(\xi, \eta) = g(\|\xi - \eta\|)$ je izotropní, můžeme g vyjádřit pomocí derivace K' funkce K . Protože \widehat{K} je většinou po částech spojitá funkce, nelze jednoduše vyjádřit K' z \widehat{K} .

Alternativně můžeme použít jádrový odhad s translačním korekčním faktorem

$$\widehat{g}(r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1} |W|} \sum_{\xi, \eta \in X_W}^{\neq} \frac{k_b(r - \|\eta - \xi\|)}{\widehat{\rho(\xi)\rho(\eta)} |W \cap W_{\xi-\eta}|}, \quad (5.8)$$

kde $k_b(u) = k(u/b)/b$, $u \in \mathbb{R}$, pro hustotu $k(\cdot)$ a šířku pásma $b > 0$. Nejmenší rozptyl odhadu \hat{g} pak získáme, pokud použijeme hustotu rovnoměrného rozdělení. Stejně, jako u odhadu \mathcal{K} , je odhad \hat{g} velmi citlivý na volbu šířky pásma b a není nestranný i v případě volby malého r . Pro získání lepšího odhadu, v ohledu na nestrannost, [6] doporučuje použít adaptivní šířku pásma nahrazením $k_b(r - \|\eta - \xi\|)$ v (5.8) pomocí

$$k_b^*(r, \|\eta - \xi\|) = k_{\min(b,r)}(r - \|\eta - \xi\|).$$

5.5 Neparаметrický odhad F, G a J-funkce

Nejkratší vzdálenost bodu $\xi \in \mathbb{R}^n$ od množiny $B \subseteq \mathbb{R}^n$ definujeme jako

$$d(\xi, B) = \inf\{\|\xi - \eta\| : \eta \in B\}.$$

Nechť $I \subseteq W$ je konečná síť bodů a $I_r = I \cap W_{\ominus r}$, $r > 0$. Potom minusový odhad F -funkce

$$\hat{F}_{MO}(r) = \sum_{\xi \in I_r} \frac{\mathbf{1}[d(\xi, X_W) \leq r]}{\text{card}(I_r)},$$

pro $\text{card}(I_r) > 0$, je nestranný a minusový odhad G -funkce

$$\hat{G}_{MO} = \sum_{\xi \in X_W \cap W_{\ominus r}} \frac{\mathbf{1}[d(\xi, X_W \setminus \xi) \leq r]}{\hat{\rho}|W_{\ominus r}|},$$

pro $|W_{\ominus r}| > 0$, je podílově nestranný.

Více eficientní jsou Kaplan-Maierovy odhady

$$\hat{F}_{KM}(r) = 1 - \prod_{s \leq r} \left(1 - \frac{\text{card}(\xi \in I : d(\xi, X_W) = s, d(\xi, X_W) \leq d(\xi, \partial W))}{\text{card}(\xi \in I : d(\xi, X_W) \geq s, d(\xi, \partial W) \geq s)} \right) \quad (5.9)$$

a

$$\hat{G}_{KM}(r) = 1 - \prod_{s \leq r} \left(1 - \frac{\text{card}(\xi \in X_W : d(\xi, X_W \setminus \xi) = s, d(\xi, X_W \setminus \xi) \leq d(\xi, \partial W))}{\text{card}(\xi \in X_W : d(\xi, X_W \setminus \xi) \geq s, d(\xi, \partial W) \geq s)} \right), \quad (5.10)$$

kde ∂W je hranice množiny W a $0/0 := 0$.

Pomocí odhadů $\hat{F}(r)$ a $\hat{G}(r)$ dostaneme odhad J -funkce

$$\hat{J}(r) = \frac{1 - \hat{G}(r)}{1 - \hat{F}(r)}$$

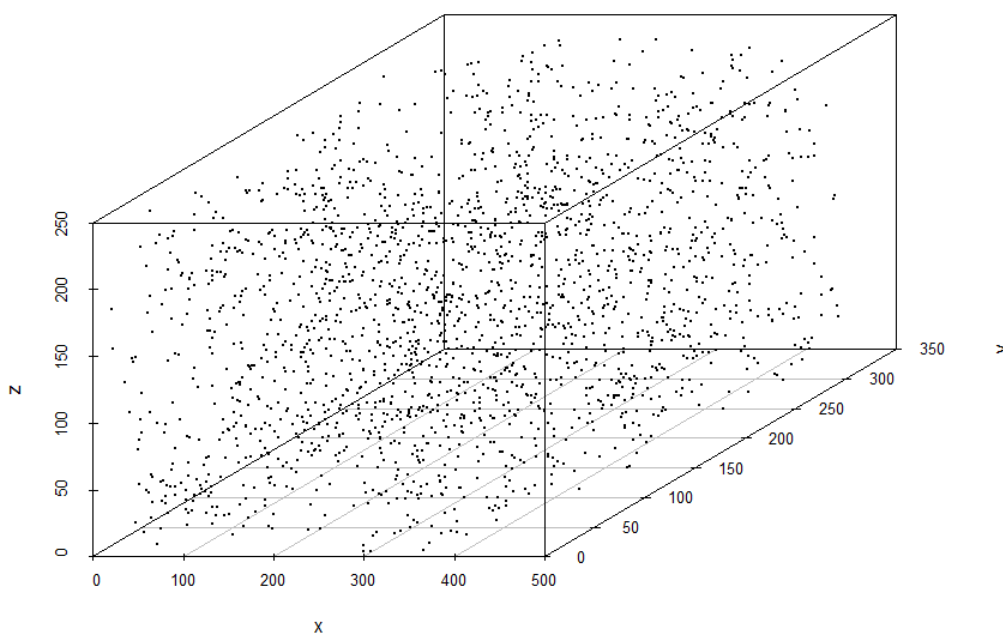
pro $\hat{F}(r) < 1$. V [2, příklad 4.9] je ukázáno, že s rostoucím r výrazně roste také jeho rozptyl.

Kapitola 6

Aplikace odhadů sumárních statistik

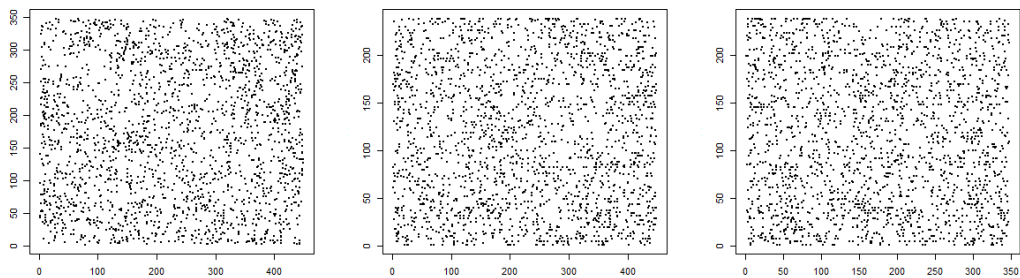
V této kapitole provedeme odhady sumárních statistik na reálných datech, které představují středy globulárních pórů v keramickém nástřiku (viz obrázek 6.1). Způsob získání těchto dat můžeme najít v [7].

Celkem máme 2116 bodů v pozorovacím okně ve tvaru kvádru o velikosti $450 \times 350 \times 240 \mu\text{m}$.



Obrázek 6.1: Středy globulárních pórů v pozorovacím okně.

Pro lepší představu rozmístění bodů v prostoru můžeme udělat projekce do rovin XY, XZ a YZ. Výsledek vidíme na obrázku 6.2.



Obrázek 6.2: Projekce bodů do roviny XY (vlevo), XZ (uprostřed) a YZ (vpravo).

Ukážeme si odhady několika vybraných charakteristik bodového procesu. Každý budeme porovnávat s teoretickou charakteristikou Poissonova bodového procesu a vypočítáme simultánní obálky pomocí metody Monte Carlo. Jejich výpočet je popsán v [8]. Vytvoříme 19 nezávislých realizací Poissonova procesu s konstantní funkcí intenzity rovnou odhadu intenzity našich dat. Použitím vzorce (5.1) dostaneme

$$\hat{\rho} = \frac{2116}{450 \times 350 \times 240}.$$

Poznámka. Pro vytváření odhadů a obálek použijeme knihovnu `spatstat` [9] v R [10]. Celý zdrojový kód můžeme najít v příloze na konci práce.

Jako první provedeme odhad K -funkce (v R funkce `K3est`) pomocí izometricky korigovaného odhadu (5.7). Výsledek je zobrazen na v grafu obrázku 6.3.

L -funkce je pouze transformace K -funkce. Jde o její normovanou verzi. V našem případě máme

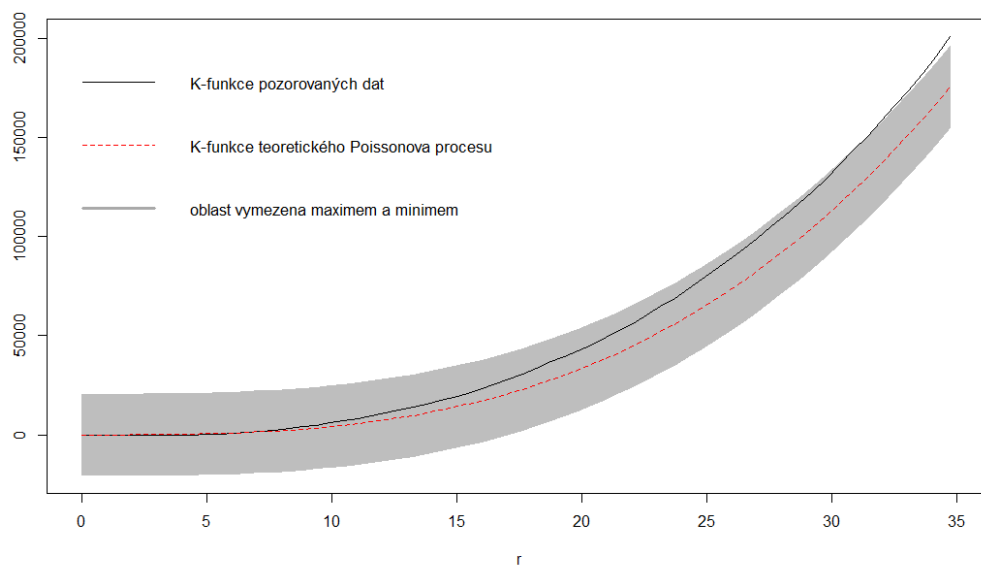
$$\hat{L}(r) = \left(\frac{3\hat{K}(r)}{4\pi} \right)^{1/3},$$

kde $\hat{K}(r)$ je izometricky korigovaný odhad K -funkce. Odhad L -funkce je znázorněn v grafu na obrázku 6.4. Můžeme si všimnout, že pro $r > 7$ platí $\hat{L}(r) > r$. Jak jsme již dříve podotkli, tento výsledek nám indikuje shlukování. To znamená, že body procesu mají tendenci se shlukovat do skupin.

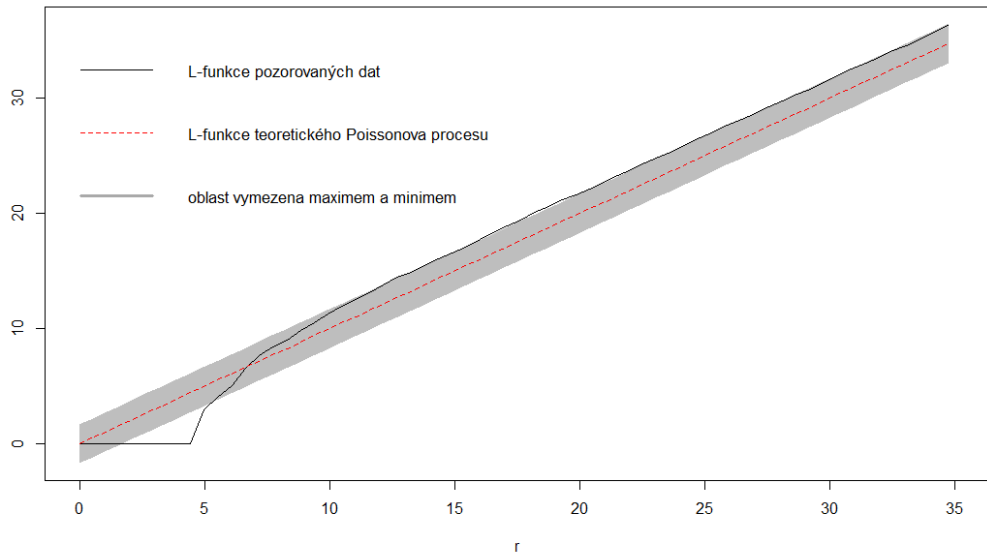
Pro odhady G -funkce (v R funkce `G3est`) a F -funkce (v R funkce `F3est`) jsme využili Kaplan-Maierovy odhady (5.10) a (5.9). $\hat{G}(r)$ je znázorněn v grafu na obrázku 6.5 a $\hat{F}(r)$ v grafu na obrázku 6.6. Protože $\hat{G}(r)$ se dostává nad obálku a $\hat{F}(r)$ pod obálku, můžeme v obou případech opět předpokládat, že se jedná o shlukový bodový proces.

Nakonec jsme spočítali odhad J -funkce podle vzorce (5.5), kde jsme za odhady G a F -funkce použili Kaplan-Maierovy odhady, které jsme získali v předchozím výpočtu. Tento odhad je znázorněn v grafu na obrázku 6.7. Jak můžeme vidět, pro $r > 7$ platí $\hat{J}(r) < 1$. Díky tomu můžeme opět předpokládat tendenci

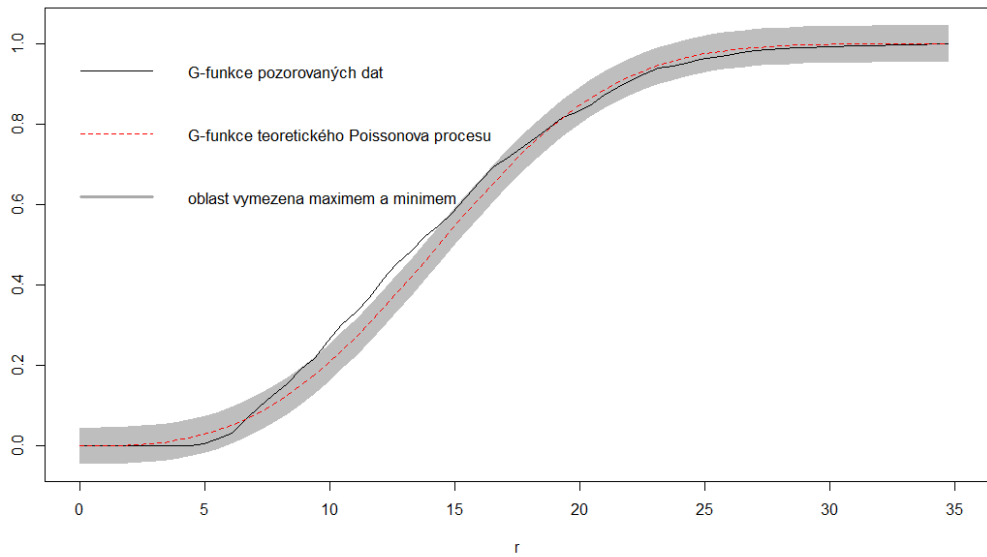
ke shlukování.



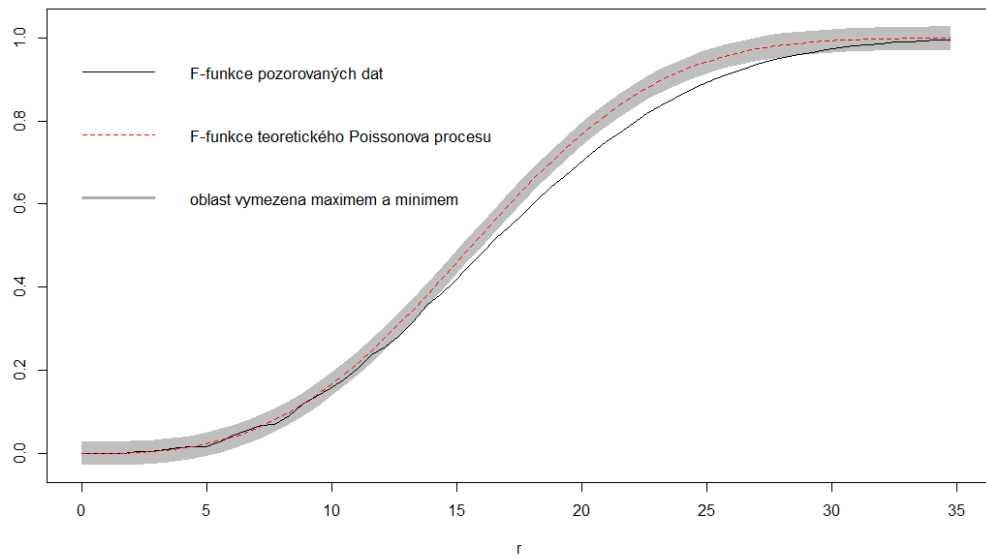
Obrázek 6.3: Odhad K-funkce.



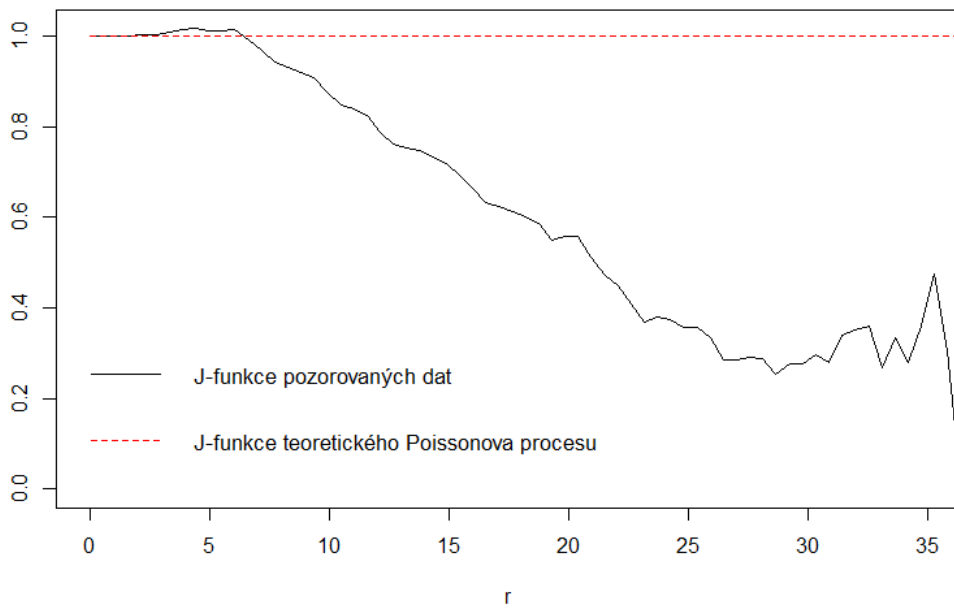
Obrázek 6.4: Odhad L-funkce.



Obrázek 6.5: Odhad G-funkce.



Obrázek 6.6: Odhad F-funkce.



Obrázek 6.7: Odhad J-funkce.

Závěr

Na příkladu jsme si ukázali, jak je možné pomocí aplikace R získat odhady některých sumárních statistik.

Na grafech odhadů funkcí sumárních statistik můžeme vidět, že bodový proces představující středy globulárních póru v keramickém nástřiku se chová podobně jako Poissonův bodový proces. Přesto z odhadů L -funkce a J -funkce můžeme předpokládat, že póry v keramickém nástřiku mají tendenci se shlukovat do skupin. Nejsou tedy nezávisle rozmístěné v prostoru.

Literatura

- [1] Pawlas Z. Prostorové modelování, prostorová statistika 1. [online] <http://www.karlin.mff.cuni.cz/pawlas/2012/STP005/prostor.pdf>, citace 17. 3. 2014.
- [2] Møller J. and Waagepetersen R. P. *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. CRC Press LLC, 2004.
- [3] Pawlas Z. Spatial modelling and spatial statistics. [online] <http://www.math.ku.dk/pawlas/runlig.pdf>, citace 3. 3. 2014.
- [4] Stoyan D. and Stoyan H. Improving ratio estimators of second order point process characteristics. *Scandinavian Journal of Statistics*, 2000.
- [5] Baddeley A., Møller J. and Waagepetersen R. Non- and semiparametric estimation of interaction in inhomogeneous point patterns. *Statistica Neerlandica*, 2000.
- [6] Snethlage M. *Über die statistische Analyse von Clusterpunktprozessen durch die Paarkorrelationsfunktion*. PhD thesis, Technische Universität Freiberg, 2000.
- [7] Ctibor P. Jůzková R. and Beneš V. Analysis of porous structure in plasma-sprayed coating. [online] <http://www.ias-iss.org/ojs/IAS/article/viewFile/752/655>, citace 7. 4. 2014.
- [8] Seijo H. Myllymäki M., Mrkvička T. and Grabarnik P. Global envelope tests for spatial processes. [online] <http://arxiv.org/pdf/1307.0239.pdf>, citace 11. 4. 2014.
- [9] Baddeley A. and Turner R. An R package for analyzing spatial point patterns. *Journal of Statistical Software*, 12(6):1–42, 2005.
- [10] R Development Core Team (2010). R: A language and environment for statistical computing, r foundation for statistical computing, vienna, austria.

Seznam obrázků

2.1	Simulace homogenního Poissonova bodového procesu (vlevo) s funkcí intenzity $\rho = 30$ a nehomogenního Poissonova bodového procesu (vpravo) s funkcí intenzity $\rho(x,y) = 50 * \exp\{-3 * x\}$ na jednotkovém čtverci.	6
4.1	Ukázka Poissonova bodového procesu (vlevo), shlukového bodového procesu (uprostřed) a regulárního bodového procesu (vpravo). . .	11
5.1	Okrajové efekty pro K -funkci (vlevo) a F -funkci (vpravo).	16
6.1	Středy globulárních pórů v pozorovacím okně.	20
6.2	Projekce bodů do roviny XY (vlevo), XZ (uprostřed) a YZ (vpravo). . .	21
6.3	Odhad K -funkce.	22
6.4	Odhad L -funkce.	23
6.5	Odhad G -funkce.	23
6.6	Odhad F -funkce.	24
6.7	Odhad J -funkce.	24

Přílohy

```
# načtení potřebných knihoven
library(spatstat)
library(scatterplot3d)

# načtení tabulky středů pórů
data = read.table("StredyPoru.txt")
# příprava dat bodů procesu
data = data[,-1]
dataxy = data[,-3]
dataxz = data[,-2]
datayz = data[,-1]
# vytvoření objektů procesu
proces <- pp3(data[,-c(2,3)], data[,-c(1,3)], data[,-c(1,2)],
             box3(c(0,450), c(0,350), c(0,240)))
procesxy <- ppp(dataxy[,-2], dataxy[,-1], c(0,450), c(0,350))
procesxz <- ppp(dataxz[,-2], dataxz[,-1], c(0,450), c(0,240))
procesyz <- ppp(datayz[,-2], datayz[,-1], c(0,350), c(0,240))
unitname(proces) <- "um"
summary(proces)

# vykreslení 3D pohledu procesu
plot(proces, main="", xlab="", ylab="", zlab="", pch=20,
      cex.symbols=0.1)

# projekce bodů procesu do roviny
par(mfrow=c(1,3))
plot(dataxy, main="", pch=20, cex=0.1, xlab="")
plot(dataxz, main="", pch=20, cex=0.1, xlab="")
plot(datayz, main="", pch=20, cex=0.1, xlab="")

# odhad K-funkce
plot(envelope(proces, fun=K3est, nsim=19, rmax=70, correction="iso",
             global=TRUE), main="", legend=FALSE, ylab="")
legend("topleft", c("K-funkce pozorovaných dat", "K-funkce teoretického
Poissonova procesu", "oblast vymezena maximem a minimem"),
      lty=c(1,2,1), lwd=c(1,1,3), col=c("black", "red", "darkgray"),
      bty="n", cex=1.05, box.col="black")

# odhad L-funkce
plot(envelope(proces, fun=K3est, nsim=19, rmax=70, correction="iso",
```



```

        global=TRUE, transform=expression(((3*.)/(4*pi))^(1/3))),
        main="", legend=FALSE, ylab="")
legend("topleft", c("L-funkce pozorovaných dat", "L-funkce teoretického
Poissonova procesu", "oblast vymezena maximem a minimem"),
      lty=c(1,2,1), lwd=c(1,1,3), col=c("black", "red", "darkgray"),
      bty="n", cex=1.05, box.col="black")

# odhad F-funkce
plot(envelope(proces, fun=F3est, nsim=19, rmax=70, correction="km",
      global=TRUE), main="", legend=FALSE, ylab="")
legend("topleft", c("F-funkce pozorovaných dat", "F-funkce teoretického
Poissonova procesu", "oblast vymezena maximem a minimem"),
      lty=c(1,2,1), lwd=c(1,1,3), col=c("black", "red", "darkgray"),
      bty="n", cex=1.05, box.col="black")

# odhad G-funkce
plot(envelope(proces, fun=G3est, nsim=19, rmax=70, correction="km",
      global=TRUE), main="", legend=FALSE, ylab="")
legend("topleft", c("G-funkce pozorovaných dat", "G-funkce teoretického
Poissonova procesu", "oblast vymezena maximem a minimem"),
      lty=c(1,2,1), lwd=c(1,1,3), col=c("black", "red", "darkgray"),
      bty="n", cex=1.05, box.col="black")

# odhad J-funkce
f <- F3est(proces, rmax=70, correction="km")
g <- G3est(proces, rmax=70, correction="km")
plot(f$r, {(1-g$km)/(1-f$km)}, xlab="r", ylab="", xlim=c(0,35),
      type="l")
lines(x=c(0,45),y=c(1,1), type="l", col="red", lty=2)
legend("bottomleft", c("J-funkce pozorovaných dat", "J-funkce
teoretického Poissonova procesu"), lty=c(1,2), lwd=c(1,1),
      col=c("black", "red"), bty="n", cex=1.05, box.col="black")

```