Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Denisa Božoňová

Lineární formy a charakterizace pravděpodobnostních rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. Lev Klebanov, DrSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2014

Na tomto mieste by som chcela poďakovať hlavne vedúcemu mojej bakalárskej práce pánovi profesorovi Levovi Klebanovovi, DrSc. za jeho ochotu, podporu a čas, ktorý mojej práci venoval. Ďalej by som chcela poďakovať mojej rodine za podporu a trpezlivosť, ktorú so mnou počas celého štúdia mali.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 23.05.2014 Denisa Božoňová

Název práce: Lineární formy a charakterizace pravděpodobnostních rozdělení

Autor: Denisa Božoňová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Prof. Lev Klebanov, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tyhle práci se budeme zabývat charakterizací striktně ν-normálního a striktně ν-stabilního rozdělení. Na začátek si uvedeme několik základních pojmů, které budeme následně v této práci používat. Jako například intenzivní monotónní operátor, silně ξ-pozitivní rodina, či lineární forma. Dále popíšeme samotnou charakterizaci striktně ν-normálního a striktně ν-stabilního rozdělení pomocí výše uvedených definic a uvedeme si příklady ν-stabilních rozdělení, které si dokážeme odpovídající výsledky. V poslední kapitole se podíváme na využití zmíněných rozdělení v praxi, konkrétně ν-stabilního rozdělení.

Klíčová slova: intenzivní monotónní operátor, silně ξ-pozitivní rodina, lineární forma, charakterizace rozdělení

Title: Linear forms and characterization of probability distributions

Author: Denisa Božoňová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Prof. Lev Klebanov, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this paper we will discuss the characterization of strictly ν-normal and strictly ν-stable distribution. At the beginning we mentioned some basic concepts, which we then use in this work. Such as, strongly monotone operator, strictly ξ-positive family, or linear form. Further, we describe the characterization of strictly ν-normal and strictly ν-stable distribution using the above definitions. We also lists examples of ν-stable distributions and we prove corresponding results. In the last chapter we look at the use of mentioned distributions in practice, namely ν-stable distribution.

Keywords: intensively monotone operator, strongly ξ-positive family, linear form, characterization of the distribution

Názov práce: Lineárne formy a charakterizácie pravdepodobnostných rozdelení

Autor: Denisa Božoňová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci bakalárskej práce: Prof. Lev Klebanov, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V tejto práci sa budeme zaoberať charakterizáciou striktne ν-normálneho a striktne ν-stabilného rozdelenia. Na začiatok si uvedieme niekoľko základných pojmov, ktoré budeme následne v tejto práci využívať. Ako napríklad intenzívne monotónny operátor, silne ξ-pozitívna rodina, či lineárna forma. Ďalej popíšeme charakterizácie striktne ν-normálneho a striktne ν-stabilného rozdelenia pomocou vyššie uvedených pojmov a uvedieme si príklady ν-stabilných rozdelení, kde si dokážeme odpovedajúce výsledky. V poslednej kapitole sa pozrieme na využitie spomenutých rozdelení v praxi, konkrétne ν-stabilného rozdelenia.

Kľúčové slová: intenzívne monotónny operátor, silne ξ-pozitívna rodina, lineárna forma, charakterizácia rozdelenia

Obsah

Úvod

Charakterizácia pravdepodobnostných rozdelení je jednou z hlavných súčastí teórie pravdepodobnosti a matematickej štastiky. Existuje mnoho titulov, v ktorých sa ich autori venujú tomuto problému. Príkladom takejto knihy, kde je popísaných niekoľko rôznych metód riešenia tohto problému je Kagan A.M., Linnik Yu V., Rao C.R.(1973).

V tejto práci sa ale budeme venovať špecifickému problému a to charakterizácii pravdepodobnostných rozdelení pomocou lineárnych foriem nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín. Svoju pozornosť obrátime hlavne na striktne ν-normálne a striktne ν-stabilné rozdelenie.

Na úvod si zavedieme niekoľko základných pojmov, tvrdení a príkladov. Vybrané teorémy a definície nám pomôžu pochopiť vlastnosti, na základe ktorých budeme charakterizácie striktne ν-normálneho a striktne ν-stabilného rozdelenia skúmať. Pokračovať budeme dôkazom daných charakterizácii a poukážeme aj na všestranné využitie jedného z nich. Následne sa zoznámime s príkladmi charakterizácii, ktorých generujúce funckie nie su racionálne a tieto príklady si aj dokážeme. V závere si popíšeme konkrétnejší príklad aplikácie skúmaného rozdelenia vo fyzike.

Pre ukážku si môžeme uviesť príklad využitia lineárnych foriem pri charakterizácii pravdepodobnostných rozdelení a tento príklad budeme považovať za motiváciu k nasledujúcej práci.

Chceme zistiť rozdelenie rýchlosti molekúl plynov. Budeme predpokladať, že máme zadaný nejaký vektor rýchlosti, ktorý sa nachádza v homogénnom prostredí. Premietneme si jeho súradnice do karteziánskej sústavy. Na ose x budeme mať náhodný koordinát X_1 a na ose y náhodný koordinát X_2.
Budeme predpokladať, že pre oba koordináty X_1, X_2 platí, že sú nezávislé a navyše:

$$X_1 \stackrel{d}{=} X_2.$$

Keď karteziánsku sústavu zarotujeme o uhol $\measuredangle = \frac{\pi}{4}$, tak sa nám zmenia súradnice bodov a dostaneme ich v tvare

$$\widetilde{X_1} = (\cos\frac{\pi}{4})X_1 + (\sin\frac{\pi}{4})X_2$$
$$\widetilde{X_2} = (\sin\frac{\pi}{4})X - (\cos\frac{\pi}{4})X_1$$

Upravíme rovnicu a využijeme vlastnosť homogenity, na základe čoho dospejeme k rovnosti:

$$X_2 \stackrel{d}{=} \widetilde{X_1} = \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}$$

Z vyššie uvedeného predpokladu pre koordináty X_1, X_2 vyplýva:

$$X_1 \stackrel{d}{=} \widetilde{X_1},$$

tým pádom

$$X_1 \stackrel{d}{=} \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Budeme pozorovať rovnicu (1), ale pre náhodné veličiny X_3, X_4, pre ktoré platí, že sú symetrické vzhľadom k veličinám X_1, X_2 a zároveň:

$$X_1 \stackrel{d}{=} X_3$$
$$X_2 \stackrel{d}{=} X_4.$$

Na základe týchto vlastností môžeme prepísať rovnicu (1) tak, aby platila pre náhodnú veličinu X_3

$$(-\,X_3) \stackrel{d}{=} \frac{(-\,X_3) + (-\,X_4)}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Z rovníc ((1), (2)) dostávame

$$X_1 - X_3 \stackrel{d}{=} \frac{(X_1\ -\ X_3) + (X_2\ -\ X_4)}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Keďže vieme, že náhodné veličiny X_1, X_3 sú symetrické, tak pre ich charakteristické funkcie platí:

$$f(t)f(-t) = f(t)f(t) = |f(t)|^2$$

Tvrdenie (2), uvedené v nasledujúcej kapitole nám hovorí, že ľavá strana rovnice (3), teda rozdiel $X_1 - X_3$, má normálne rozdelenie s parametrami μ, σ^2.
Použijeme poznatky Cramérovej vety (3) a z nej ľahko vídíme, že

$$X_1 \sim N(\mu_{X_1},\sigma^2_{X_1}), \quad X_3 \sim N(\mu_{X_3},\sigma^2_{X_3}).$$

Keď dosadíme tieto funkcie do rovnice (1) dostávame, že

$$X_1 \sim N(0,\sigma^2_{X_1}), \quad X_3 \sim N(0,\sigma^2_{X_3}).$$

Kapitola 1

Základné pojmy

Na začiatok si zadefinujeme základné pojmy, s ktorými sa budeme v rámci tejto práce stretávať. Definície, tvrdenia a príklady spomenuté v tejto kapitole pochádzajú z Kakosyana et al. [5], Klebanov et al.[6] a tiež z Bicana [1].

1.1 Lineárna forma

Definícia 1. *Homomorfizmus $f : V \to T$ vektorového priestoru V nad telesom T do telesa T nazývame lineárnou formou na vektorovom priestore V.*

1.2 Intenzívne monotónny operátor

Nech $C = C[0,T]$ je priestor funkcii, ktoré sú definované a spojité na intervale $[0,T]$ a nech A je operátor, ktorý zobrazuje nejakú množinu $\xi \subset C$ do C.

Definícia 2. *Operátor A nazveme intenzívne monotónnym operátorom, ak pre každé f_1, f_2 patriace do ξ platí:*
podmienka $f_1(\tau) \geq f_2(\tau)$ pre všetky $\tau \in (0,t)$ implikuje $(Af_1)(\tau) \geq (Af_2)(\tau)$ pre všetky $\tau \in (0,t)$ a podmienka $f_1(\tau) > f_2(\tau)$ pre všetky $\tau \in (0,t)$ implikuje $(Af_1)(t) > (Af_2)(t)$.

Tvrdenie 1. *Nech A je intenzívne monotónny operátor v množine $\xi \subset C$ a $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silne ξ-pozitívna rodina.*
Budeme predpokladať, že $Af_\lambda = f_\lambda$ pre $\lambda \in \Lambda$.
Potom podmienka Af=f, pre $f \subset C$ naznačuje, že existuje $\lambda \in \Lambda$ taká, že $f = f_\lambda$.
Inými slovami povedané, všetky riešenia rovnice Af=f patria do množiny ξ a zhodujú sa s prvkami rodiny $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Dôkaz. Predpokladáme, že vzťah Af=f platí pre nejaké $f \in \xi$.
Keďže vieme, že rodina $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silne ξ-pozitívna, môžeme nájsť $t_0 \in (0,T]$ a $\lambda_0 \in \Lambda$

také, že $f(t_0) = f_{\lambda_0}(t_0)$. Môžu nastať dve možnosti:

I) $f(t_0) = f_{\lambda_0}(t_0)$ pre všetky $t \in (0,T]$, v tomto prípade nemáme čo dokazovať.

II) $f(t_0) \neq f_{\lambda_0}(t_0)$

V prípade druhej možnosti budeme uvažovať bod

$$t^* = inf\{t : 0 \leq t \leq t_0,\, f(t) = f_{\lambda_0}(t)\}.$$

Je jasné, že $t^* \leq t_0$ a platí rovnosť $f(t^*) = f_{\lambda_0}(t^*)$, čo je zrejmé zo spojitostí funkcii f a f_{λ_0}. Z druhej vlastnosti silne ξ-pozitívnej rodiny vidíme, že $t^* > 0$ a teda máme dve varianty:

a) $f(t) > f_{\lambda_0}(t)$ pre $0 < t < t^*$

b) $f(t) < f_{\lambda_0}(t)$ pre $0 < t < t^*$.

Máme

$$(Af)(t) = f(t),$$
$$(Af_{\lambda_0})(t) = f_{\lambda_0}(t), t \in (0,T].$$

Nastavením $t = t^*$ a odčítaním druhej rovnice od prvej dostávame:

$$(Af)(t^*) - (Af_{\lambda_0})(t^*) = 0 \tag{1.1}$$

Ale za a) máme

$$(Af)(t^*) > (Af_{\lambda_0})(t^*)$$

a zároveň za b) máme

$$(Af)(t^*) < (Af_{\lambda_0})(t^*),$$

keďže operátor A je intenzívne monotónny.

Na základe tohto sme prišli k sporu s rovnicou (1.1) a z toho vyplýva, že možnosť II) je nie je možná.

❑

1.3 Silne ξ-pozitívna rodina a jej príklady

Definícia 3. *Nech $\xi \subset C$ a $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je rodina prvkov množiny ξ. Môžeme povedať, že rodina $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ je silne ξ-pozitívna, ak platí:*

1) pre všetky $f \in \xi$ existujú $t_0 \in (0,T]$ a $\lambda_0 \in \Lambda$ také, že $f(t_0) = f_{\lambda_0}(t_0)$

2) pre všetky $f \in \xi$ a všetky $\lambda \in \Lambda$ buď $f(t) = f_\lambda(t)$ pre všetky $t \in (0,T]$ alebo existuje $\delta > 0$ tak, že rozdiel $f(t) - f_\lambda(t)$ nezmizne (zachováva si svoje znamienko) na intervale $(0,\delta]$

Ukážeme si dva príklady silne ξ-pozitívnych rodín. Tieto príklady sú uvedené v literatúre [5] pod číslami 1.3.1. a 1.3.2. V tomto texte bude príkladu 1.3.1 odpovedať príklad 1, príklad 1.3.2. tu bude reprezentovaný ako príklad 2.

Príklad 1. *Uvažujme množinu charakteristických funkcii symetrických nedegenerovaných nahodných veličín a označíme ξ ako množinu ich reštrikcii na interval $[0,T]$. Označíme $\varphi(t)$ ako charakteristickú funkciu symetrického nedegeneratívneho normálneho rozdelenia. Nech platí $f_\lambda(t) = \varphi(t/\lambda)$ pre $t \in [0,T], \lambda > 0$. Potom je rodina f_λ pre $\lambda > 0$ silne ξ-pozitívnou rodinou.*

Dôkaz. Dôkaz tohto príkladu je uvedený v [5] na stranách 17-19. Avšak ešte predtým bol tento príklad dokázaný Yu. Linnikom (viď. Linnik (1960)).

❑

Príklad 2. *Uvažujme množinu Laplaceových transformácii nedegeneratývnych rozdelení, ktoré sa nachádzajú na kladnej polosy. Označíme ξ ako množinu reštrikcii týchto transformácii na interval $[0,T]$. A teda $f \in \xi$ znamená, že*

$$f(t) = \int_0^\infty \exp^{-tx} dF(x) \qquad t \in [0,T]$$

pre nejakú distribučnú funkciu F(x).
Nech

$$\varphi(t) = \int_0^\infty \exp^{-tx} d\Phi(x),$$

kde $\Phi(x)$ je nedegeneratívna distribučná funkcia, ktorá môže byť znovu jednoznačne vybudovaná postupnosťou jej momentov. Potom rodina $(\varphi(t/\lambda))_{\lambda>0}$ pre $t \in [0,T]$ je silne ξ-pozitívna rodina.

Dôkaz. Dôkaz tohto príkladu je uvedený v [5] na stranách 19-21.

❑

1.4 Striktne ν-stabilné a striktne ν-normálne rozdelenie

Pre nasledujúce definície platí: nech X,$X_1, \dots$,X_n je postupnosť nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín a nech $\{\nu_p, p \in \Delta\}$ je rodina diskrétnych náhodných veličín, ktorých hodnoty sú prirodzené čísla. Budeme predpokladať, že táto rodina nezávisí na postupnosti $\{X_j, j \geq 1\}$

Definícia 4. *Hovoríme, že náhodná veličina X má striktne ν-stabilné rozdelenie, ak pre všetky $p \in \Delta$ platí*

$$X \stackrel{D}{=} p^{1/\alpha} \sum_{i=1}^{\nu_p} X_j,$$

kde $\alpha \in (0,2]$ sa nazýva index stability.

Definícia 5. *Hovoríme, že náhodná velčina X je striktne ν-normálnou náhodnou veličinou ak platí, že $EX = 0, EX^2 = \infty$ a tiež platí*

$$X \stackrel{D}{=} p^{1/2} \sum_{i=1}^{\nu_p} X_j,$$

pre všetky $p \in \Delta$.

1.5 Motivačný príklad - teória

Nasledujúce tvrdenie sa zaoberá charakterizáciou normálneho symetrického stabilného rozdelenia s exponentom α na základe vlastností totožných rozdelení (náhodných) lineárnych foriem na konečnej množine nezávislých náhodných veličín. Toto tvrdenie sa nachádza v knihe [5] pod označením teorém 2.2.1..

Tvrdenie 2. *Nech X_0,$X_1, \cdots$,X_n je postupnosť symetrických, nezávislých a rovnako rozdelených náhodných veličín a nech $\bar{a} = (a_1, \cdots ,a_n)$ je náhodná postupnosť, ktorá nezávisí na $(X_0$,$X_1, \cdots)$.*
Predpokladajme, že

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 = 1$$

platí s pravdepodobnosťou rovnou jednej.
Ďalej predpokladáme, že s kladnou pravdepodobnosťou sú najmenej dva koordináty postupnosti $\bar{a}$ nenulové.
Ak je veličina X_0 rovnako rozdelená ako lineárna forma

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 X_j,$$

potom je X_0 normálnou náhodnou veličinou.

Dôkaz. Uvažujme, že $a_j = a_j(\omega)$ sú funkcie definované na pravdepodobnostnom priestore $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$. Podmienku rovnakého rozdelenia veličiny X_0 a lineárnej formy $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 X_j$ môžeme ekvivalentne zapísať ako

$$f(t) = \int\limits_{\Omega} \prod_{j=1}^{\infty} f(a_j(\omega)t)\ dP(\omega),$$

kde $f(t)$ je charakteristická funkcia náhodnej veličiny X_0.
Budeme uvažovať C a ξ rovnaké ako v príklade (1) a $\varphi(t)$ je charakteristická funkcia normálneho rozdelenia. Potom rodina $(\varphi_\sigma(t))_\sigma > 0 \quad (\varphi_\sigma(t)) = \varphi(t/\sigma)$ je silne ξ-pozitívna rodina.
Operátor A definovaný ako $A : \xi \to C$ je podľa pravidla

$$(Af)(t) = \int\limits_{\Omega} \prod_{j=1}^{\infty} f(a_j(\omega)t)\ dP(\omega)$$

intenzívne monotónny operátor. Je zrejmé, že

$$A\varphi_\sigma = \varphi_\sigma, \quad \sigma > 0.$$

Na základe zisteného vidíme, že tvrdenie (2) plynie z tvrdenia (1).

❑

Nasledujúce tvrdenie sa nachádza v knihe [7]. V podstate nám hovorí, že každé normálne rozdelenie môže byť vyjadrené pomocou súčtu normálnych rozdelení.

Tvrdenie 3 (Cramérova veta)**.** *Charakteristická funkcia $f(t) = \exp[i\mu t - \sigma^2 t^2/2]$ normálneho rozdelenia má len normálne faktory.*
Navyše ak platí $f(t) = f_1(t) f_2(t)$ s tým, že $f_j(t) = \exp[i\mu_j t - \sigma_j^2 t^2/2]$ platí pre $(j = 1{,}2)$, tak potom $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ a $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2$

Dôkaz. Funkcia f(t) je celkovo nenulovou funkciou. Z teorému 8.1.2. knihy [7] plynie, že to isté platí aj pre jej faktory a taktiež platí, že počet týchto faktorov nepresiahne dva.
Preto $f_1(z)$ má tvar

$$f_1(z) = \exp[g_1(z)].$$

Z Hadamardovho faktorizačného teorému vyplýva, že $g_1(z)$ je polynóm stupňa nanajvýš dva.
Nech pre nejaký reálny argument t platí $g_1(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Keďže $f(0) = 0$ vidíme, že $a_0 = 0$.
Z vzťahu $g_1(-t) = \overline{g_1(t)}$ usúdime, že $a_1 = i\mu_1$ je čisto imaginárne a a_2 je reálne. Keďže charakteristická funkcia je ohraničená pre reálne hodnoty jej argumentov môžeme povedať, že z $|f_1(t)| = \exp[a_2 t^2]$ platí $a_2 \leq 0$ a množina $a_2 = -\frac{1}{2}\sigma_1^2$.
Preto

$$f_1(t) = \exp[i\mu_1 t - \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2]$$

je charakteristickou funkciou normálneho rozdelenia.
Rovnaké argumenty ako boli spomenuté vyššie použijeme na funkciu $f_2(t)$, kým vzťah medzi parametrami funkcie f(t) a parametrami jej faktorov nebude zrejmý.

❑

Kapitola 2

Charakterizácie

V tejto kapitole sa budeme zaoberať charakterizáciou rozdelení náhodných veličín. Dokážeme vety z článku Klebanov et al.[6], konkrétne pôjde o teorém 6 a teorém 7. V tomto texte bude teorém 6 označený ako veta 4 a teorém 7 ako veta 5. S pomocou týchto viet budeme potom dokazovať funkcie v nasledujúcej kapitole.

2.1 Striktne ν-stabilné rozdelenie

Věta 4. *Nech $X_1, \ldots, X_n$ je postupnosť nezáporných, nezávislých a rovnako rozdelených náhodných veličín a nech ν_p, kde $p \in \{1/n^2, n = 2, \ldots\}$ je rodina náhodných veličín s generujúcou funkciou*

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{1}{T_{1/\sqrt{p}}(1/z)},$$

ktoré sú nezávislé na postupnosti $\{X_j, j \geq 1\}$.
Ak pre nejaké fixné $p \in \Delta$ platí

$$X_1 \stackrel{D}{=} p \sum_{i=1}^{\nu_p} X_j, \tag{2.1}$$

potom má X_1 rozdelenie s Laplaceovou transformáciou

$$Ee^{-tX} = \frac{1}{\cosh(\sqrt{at})},$$

ktorá platí pre $a > 0$.

Dôkaz. Vidíme, že rovnosť (2.1) môžeme pokiaľ ide Laplaceovu transformáciu $\Psi(t) = Ee^{-tX}$ napísať ako

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(pt)). \tag{2.2}$$

Ukážeme, že funkcia

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{\cosh(\sqrt{at})} \tag{2.3}$$

vyhovuje rovnosti (2.2).
Dosadíme za generujúcu funkciu.

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(pt)) = \frac{1}{T_{1/\sqrt{p}}(1/\Psi(pt))}$$

Využijeme pri tom poznatok, že Čebyševov polynóm je definovaný ako

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \cosh(n \operatorname{arcosh} z).$$

Dosadíme za p, funkciu $\Psi(pt)$ a Čebyševov polynóm, tým pádom dostávame:

$$\frac{1}{T_{1/\sqrt{p}}(1/\Psi(pt))} = \frac{1}{\cosh(n \operatorname{arcosh} \frac{1}{n}(\cosh(\sqrt{at}))} = \frac{1}{\cosh(\sqrt{at})} = \Psi_a(t)$$

Ako sme ukázali, funkcia (2.2) odpovedá funkcii (2.1) pre všetky $a > 0$. Táto funkcia je tiež analytická na páse $|t| < r$, $r > 0$.

V dôkaze budeme vychádzať z príkladu 2. Na základe tohto príkladu vidíme, že funkcia Ψ_a, $a > 0$ vytvára silne ξ-pozitívnu rodinu, na množine C, ktorá je reštrikciou Laplaceovej transformácie rozdelenia pravdepodobností daného v $\mathbb{R}_+$ na interval $[0,T]$ $(0 < T < r)$.

Ďalej potrebujeme ukázať, že operátor A definovaný ako

$$Af = \mathcal{P}_p(f(pt))$$

je intenzívne monotónny. Keďže $\mathcal{P}_p(z)$ je generujúca funkcia, tak o nej vieme, že je rastúca pre reálne $z > 0$. Nech platí $f_1(\tau) \geq f_2(\tau)$ pre $\tau \in (0,t)$. Potom

$$\begin{aligned} (Af_1)(\tau) &\geq (Af_2)(\tau) \\ \mathcal{P}_p(f_1(\tau)) &\geq \mathcal{P}_p(f_2(\tau)) \end{aligned}$$

Nech platí $f_1(\tau) > f_2(\tau)$ pre $\tau \in (0,t)$. Potom

$$\begin{aligned} (Af_1)(pt) &> (Af_2)(pt) \\ \mathcal{P}_p(f_1(pt)) &> \mathcal{P}_p(f_2(pt)), \end{aligned}$$

kde $0 < p < 1$ nám posúva bod t smerom k počiatku. Z definície 2 je zjavné, že operátor A je na množine C intenzívne monotónny.

S týmto zistením môžeme prehlásiť, že veta 4 plynie z tvrdenia 1.

❑

2.2 Striktne ν-normálne rozdelenie

Věta 5. *Nech $X_1, \ldots, X_n$ je postupnosť nezáporných, nezávislých a rovnako rozdelených náhodných veličín, ktoré majú symetrické rozdelenie a nech ν_p, kde $p \in \{1/n^2, n = 2, \ldots\}$ je rodina náhodných veličín s generujúcou funkciou*

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{1}{T_{1/\sqrt{p}}(1/z)},$$

ktoré sú nezávislé na postupnosti $\{X_j, j \geq 1\}$.
Ak pre nejaké fixné $p \in \Delta$ platí

$$X_1 \stackrel{D}{=} p^{1/2} \sum_{i=1}^{\nu_p} X_j, \tag{2.4}$$

potom má X_1 hyperbolické sečnicové rozdelenie s charakteristickou funkciou

$$f(t) = \frac{1}{\cosh(at)}, \tag{2.5}$$

ktorá platí pre $a > 0$.

Dôkaz. Budeme postupovať podobne ako pri dôkaze predchádzajúcej vety. Rozdiel je v tom, že pri tomto dôkaze budeme využívať poznatky z príkladu 1 .
Vidíme, že rovnosť (2.4) môžeme na základe charakteristickej funkcie $\Psi(t) = f(t)$ napísať ako

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(\sqrt{p}t)). \tag{2.6}$$

Ukážeme, že funkcia

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{\cosh(at)} \tag{2.7}$$

vyhovuje rovnosti (2.6). Dosadíme za generujúcu funkciu.

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(\sqrt{p}t))) = \frac{1}{T_{1/\sqrt{p}}(1/\Psi(\sqrt{p}t)))}$$

Využijeme pri tom poznatok, že Čebyševov polynóm je definovaný ako

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \cosh(n \operatorname{arcosh} z).$$

Dosadíme za p, funkciu $\Psi(\sqrt{p}t)$ a Čebyševov polynóm, tým pádom dostávame:

$$\frac{1}{T_{1/\sqrt{p}}(1/\Psi(\sqrt{p}t)))} = \frac{1}{\cosh(n \operatorname{arcosh} \frac{1}{n}(\cosh(at))} = \frac{1}{\cosh(at)} = \Psi_a(t)$$

Ako sme ukázali, funkcia (2.7) prislúcha funkcii (2.6) pre všetky $a > 0$.
Na základe príkladu 1 vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$, $a > 0$ tvorí silne ξ-pozitívnu rodinu na množine C, ktorá je reštrikciou charakteristickej funkcie hyperbolického sečnicového rozdelenia na interval $[0,T]$.

❑

Poznámka. Rozdelenie, ktoré má charakteristickú funkciu rovnú (2.5) je známe ako hyperbolické sečnicové rozdelenie. Toto rozdelenie sa využíva v aplikáciách a jeho modifikácie v ekonometrii. V článku [2] autor uvádza tri príklady využitia hyperbolického sečnicového rozdelenia, a to: Fisherovu analýzu podobnosti medzi dvojčatami, Jeffrey's prior pre kontingenčné tabuľky a neplatné nástroje premenných. V článku [3] je zase uvedené jeho použitie v ekonometrii. Autor sa zaoberá otázkou vhodnosti zovšeobecnených hyperbolických sečnicových rozdelení ako modelov pre údaje o finančnom návrate.

Poznámka. Okrem vyššie dokázaných viet existuje množstvo ďalších výsledkov charakterizácii normálneho a stabilných rozdelení. V knihe [4] autori uvádzajú veľký počet iných záverov pre charakterizácie týchto rozdelení.

Kapitola 3

Príklady striktne ν-stabilných rozdelení s neracionálnymi generujúcimi funkciami

Existujú príklady dvojíc komutatívnych funkci, ktoré nie su racionálne. V tejto kapitole sa budeme zaoberať dvoma skupinami takýchto funkcii. Tvrdenia a dôkazy spísané v tejto kapitole súvisia s príkladmi uvedenými v článku [6].

3.1 1. skupina

Lemma 6. *Budeme uvažovať rodinu generujúcich funkcii*

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{p^{1/m}z}{(1-(1-p)z^m)^{1/m}}, \tag{3.1}$$

kde p a m sú pevne zadané a navyše $p \in (0,1)$.
Budeme uvažovať $m \geq 2$. Funkcia φ splňuje rovnicu

$$\varphi(t) = \mathcal{P}_p(\varphi(pt)) \tag{3.2}$$

pre fixné p vtedy a len vtedy, ak má tvar

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1+mt)^{1/m}}. \tag{3.3}$$

Dôkaz. Pomocou transformácie $\Psi(t) = \varphi(t)$ dokážeme prepísať definíciu striktne ν-stabilného rozdelenia(4) ako

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(pt)) \tag{3.4}$$

Ukážeme, že funkcia

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{(1+mt)^{1/m}}$$

vyhovuje rovnosti (3.4). Dosadíme generujúcu funkciu.

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(pt)) = \frac{p^{1/m}\Psi(pt)}{(1-(1-p)(\Psi(pt))^m)^{1/m}}$$

Dosadíme za funkciu $\Psi(pt)$.

$$\frac{p^{1/m}\Psi(pt)}{(1-(1-p)(\Psi(pt))^m)^{1/m}} = \frac{p^{1/m}\frac{1}{(1+pmt)^{1/m}}}{(1-(1-p)(\frac{1}{(1+pmt)^{1/m}})^m)^{1/m}}$$

Zlomok upravíme a vo finálnej úprave stačí už len vytknúť parameter p a dostávame

$$\frac{p^{1/m}\frac{1}{(1+pmt)^{1/m}}}{(1-(1-(1/n^2))(\frac{1}{(1+pmt)^{1/m}})^m)^{1/m}} = \frac{p^{1/m}}{(p+pmt)^{1/m}} = \frac{1}{(1+mt)^{1/m}}.$$

Na základe tejto rovnosti vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$ zodpovedá funkcii (3.4) pre všetky $a > 0$.
Z príkladu (2) následne vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$ tvorí silne ξ-pozitívnu rodinu.
Operátor A definovaný ako

$$(Af)(t) = \frac{p^{1/m}f(pt)}{(1-(1-p)(f(pt))^m)^{1/m}}$$

je intenzívne monotónny na množine C pre $(0 < p < 1)$ a dôkaz tejto časti následne plynie z tvrdenia (1).

❑

Lemma 7. *Budeme uvažovať rodinu generujúcich funkcii*

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{p^{1/m}z}{(1-(1-p)z^m)^{1/m}}, \tag{3.5}$$

kde p a m sú pevne zadané a navyše $p \in (0{,}1)$.
Budeme uvažovať $m \geq 2$. *Charakteristická funkcia striktne* ν*-normálneho rozdelenia f splňuje rovnicu*

$$f(t) = \mathcal{P}_p(f(\sqrt{p}t) \tag{3.6}$$

pre fixné p vtedy a len vtedy, keď má tvar

$$f(t) = \frac{1}{(1+mat^2)^{1/m}}, \tag{3.7}$$

pre parameter $a > 0$.

Dôkaz. Na základe charakteristickej funkcie $\Psi(t) = f(t)$ dokážeme prepísať definíciu striktne ν-normálneho rozdelenia(5) ako

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(\sqrt{p}t)) \tag{3.8}$$

pričom vieme, že $0 < \sqrt{p} < 1$. Ukážeme, ako funkcia

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{(1+ma^2t^2)^{1/m}}$$

odpovedá rovnosti (3.8). Postupujeme obdobne ako pri predchádzajúcom dôkaze. Dosadíme generujúcu funkciu.

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(\sqrt{p}t)) = \frac{p^{1/m}\Psi(\sqrt{p}t)}{(1-(1-p)(\Psi(\sqrt{p}t))^m)^{1/m}}$$

Dosadíme za funkciu $\Psi(\sqrt{p}t)$.

$$\frac{p^{1/m}\Psi(\sqrt{p}t)}{(1-(1-p)(\Psi(\sqrt{p}t))^m)^{1/m}} = \frac{p^{1/m}\frac{1}{(1+pma^2t^2)^{1/m}}}{(1-(1-p)(\frac{1}{(1+pma^2t^2)^{1/m}})^m)^{1/m}}$$

Zlomok upravíme a opäť už stačí len vytknúť p.

$$\frac{p^{1/m}\frac{1}{(1+pma^2t^2)^{1/m}}}{(1-(1-p)(\frac{1}{(1+pma^2t^2)^{1/m}})^m)^{1/m}} = \frac{p^{1/m}}{(p+pma^2t^2)^{1/m}} = \frac{1}{(1+ma^2t^2)^{1/m}}$$

Na základe rovnosti vyššie vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$ zodpovedá funkcii (3.8) pre všetky $a > 0$. Z príkladu (1) následne vidíme, ze funkcia $\Psi_a(t)$ tvorí silne ξ-pozitívnu rodinu. Vidíme, že operátor A definovaný ako

$$(Af)(t) = \frac{p^{1/m}f(\sqrt{p}t)}{(1-(1-p)(f(\sqrt{p}t))^m)^{1/m}}$$

je intenzívne monotónny na množine C pre $(0 < \sqrt{p} < 1)$ a stačí už len uplatniť tvrdenie. ❑

Poznámka. V prípade, že v generujúcej funkcii (3.1) zvolím $m = 1$, tak sa mi táto funkcia zmení na generujúcu funkciu geometrického rozdelenia

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{p^{1/m} z}{(1-(1-p)z^m)^{1/m}} = \frac{pz}{1-(1-p)z}.$$

3.2 2. skupina

Lemma 8. *Nech ν_p , kde $p \in \{1/n^2, n = 2, \dots\}$ je rodina nejakých náhodných veličín s generujúcou funkciou*

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/z^m))^{1/m}}, \tag{3.9}$$

kde budeme uvažovať p a $m \geq 1$ ako nejaké pevné čísla, pričom platí, že $p \in (0,1)$.
Budeme voliť $m \geq 2$.
Funkcia φ splňuje rovnicu

$$\varphi(t) = \mathcal{P}_p(\varphi(pt), \tag{3.10}$$

pre fixné p vtedy a len vtedy, ak má tvar

$$\varphi(t) = \frac{1}{(\cosh\sqrt{2mt})^{1/m}}. \tag{3.11}$$

Dôkaz. Pomocou transformácie $\Psi(t) = \varphi(t)$ dokážeme prepísať definíciu striktne ν-stabilného rozdelenia(4) ako

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(pt)) \tag{3.12}$$

Ukážeme, že funkcia

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{(\cosh(\sqrt{2mt}))^{1/m}}$$

odpovedá rovnosti (3.12). Dôkaz je opäť podobný tým predchádzajúcim. Dosadíme generujúcu funkciu.

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(pt)) = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\Psi(pt))^m))^{1/m}}$$

Dosadíme za funkciu $\Psi(pt)$.

$$\frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\Psi(pt))^m))^{1/m}} = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\frac{1}{(\cosh(\sqrt{2pmt}))^{1/m}})^m))^{1/m}}$$

Zlomok upravíme, dosadíme za parameter p a Čebyševov polynóm, definovaný ako

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \cosh(n \operatorname{arcosh} z),$$

a teda dostávame:

$$\frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\frac{1}{(\cosh(\sqrt{2pmt}))^{1/m}})^m))^{1/m}} = \frac{1}{(\cosh(n \operatorname{arcosh} 1/n(\cosh \sqrt{2mt})))^{1/m}}$$

Po finálnej úprave máme

$$\frac{1}{(\cosh(n \operatorname{arcosh} 1/n(\cosh \sqrt{2mt})))^{1/m}} = \frac{1}{(\cosh \sqrt{2mt})^{1/m}}$$

Na základe tejto rovnosti vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$ odpovedá funkcii (3.12) pre všetky $a > 0$. Z príkladu (2) následne vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$ tvorí silne ξ-pozitívnu rodinu.
Je zrejmé, že operátor A definovaný ako

$$(Af)(t) = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(f(pt))^m))^{1/m}}$$

je intenzívne monotónny operátor na množine C pre $(0 < p < 1)$ a dôkaz tejto časti plynie z tvrdenia (1).

❑

Lemma 9. *Nech ν_p , kde $p \in \{1/n^2, n = 2, \dots\}$ je rodina nejakých náhodných veličín s generujúcou funkciou*

$$\mathcal{P}_p(z) = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/z^m))^{1/m}}, \tag{3.13}$$

kde budeme uvažovať p a $m \geq 1$ ako nejaké pevné čísla, pričom platí, že $p \in (0,1)$.
Budeme voliť $m \geq 2$.
Charakteristická funkcia odpovedajúca striktne ν-normálnemu rozdeleniu f splňuje rovnicu

$$f(t) = \mathcal{P}_p(f(\sqrt{p}t), \tag{3.14}$$

pre fixné p vtedy a len vtedy, ak má tvar

$$f(t) = \frac{1}{(\cosh at)^{1/m}}, \tag{3.15}$$

kde $a > 0$

Dôkaz. Pomocou charakteristickej funkcie $\Psi(t) = f(t)$ dokážeme prepísať definíciu striktne ν-normálneho rozdelenia(5) ako

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(\sqrt{p}t)) \tag{3.16}$$

Ukážeme, že funkcia

$$\Psi_a(t) = \frac{1}{(\cosh at)^{1/m}}$$

odpovedá rovnosti (3.16). Základný postup dôkazu bude opäť rovnaký ako u predošlých prípadov. Dosadíme generujúcu funkciu.

$$\Psi(t) = \mathcal{P}_p(\Psi(\sqrt{p}t)) = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\Psi(\sqrt{p}t))^m))^{1/m}}$$

Dosadíme za funkciu $\Psi(\sqrt{p}t)$.

$$\frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\Psi(\sqrt{p}t))^m))^{1/m}} = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\frac{1}{(\cosh at\sqrt{p})^{1/m}})^m))^{1/m}}$$

Zlomok upravíme, dosadíme za parameter p a Čebyševov polynóm, definovaný ako

$$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = \cosh(n \operatorname{arcosh} z),$$

vďaka čomu dostávame:

$$\frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(\frac{1}{(\cosh at\sqrt{p})^{1/m}})^m))^{1/m}} = \frac{1}{(\cosh(n \operatorname{arcosh} 1/n(\cosh at)))^{1/m}}$$

Po poslednej úprave máme

$$\frac{1}{(\cosh(n \operatorname{arcosh} 1/n(\cosh at)))^{1/m}} = \frac{1}{(\cosh at)^{1/m}}.$$

Na základe tejto rovnosti vidíme, že funkcia $\Psi_a(t)$ odpovedá funkcii (3.16) pre všetky $a > 0$. Z príkladu (1) následne vidíme, ze funkcia $\Psi_a(t)$ tvorí silne ξ-pozitívnu rodinu. Opäť vidíme, že operátor A definovaný ako

$$(Af)(t) = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/(f(\sqrt{p}t))^m))^{1/m}}$$

je intenzívne monotónny na množine C pre $(0 < \sqrt{p} < 1)$ a k úplnému ukončeniu dôkazu nám stačí už len prehlásiť, že toto lemma plynie z tvrdenia (1).

❑

Poznámka. V prípade, že v generujúcej funkcii (3.9) zvolím $m = 1$, tak sa mi táto funkcia zmení na generujúcu funkciu, s ktorou sme sa stretli v kapitole 2

$$\frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/z^m))^{1/m}} = \frac{1}{(T_{1/\sqrt{p}}(1/z))}.$$

Kapitola 4

Použitie v praxi

V úvode tejto práce sme už nejaký ten príklad aplikácie spomenuli. V tejto kapitole sa však budeme venovať konkrétnejším príkladom.

4.1 Aplikácie striktne ν-stabilného rozdelenia

Tieto rozdelenia boli objavené ako empirické aproximácie pre zodpovedajúce procesy relaxácie. Striktne ν- stabilné rozdelenia sa dosť často používajú v modelovaní dielektrických relaxačných polynómov.

V článku Klebanov et. al. [6] je uvedený konkrétny príklad, kde uvažujeme tzv. Cole-Cole-ov relaxačný model. Tento model je daný rovnicou

$$f(\omega) = \frac{1}{1 + (\tau i \omega)^{\alpha}},$$

kde f je komplexná dielektrická konštanta, ω udáva uhlovú frekvenciu a τ je časovou konštantou. Samotný exponent α, pričom $\alpha \in (0,1)$ nám dovoľuje popísať rôzne spektrálne javy.

Ak zvolíme $\alpha = 0$, tak sa Cole-Cole-ho model zmení na Debye-ho model.

Ak je $\alpha > 0$, tak sa relaxácia roztiahne, to znamená, že sa rozkladá na širšie spektrum na logaritmickom ω meradle než Debye-ho relaxácia.

Je zrejmé, že $f(\omega)$ je charakteristickou funkciou geometricky-stabilného rozdelenia náhodnej veličiny. Tento fakt je podporený aj predpokladom, že ne-Debye-ho relaxácia by mala byť prepojená s náhodnou štruktúrou dielektriky.

Špeciálnym prípadom Cole-Cole-vej relaxácie je Havriliak-Negami-ho model. Model je daný rovnicou

$$f(\omega) = \frac{1}{(1 + (\tau i \omega)^{\alpha})^{\beta}}.$$

Ak zvolíme $\beta = 1/m$, kde m je pevne dané kladné číslo, tak sa funkcia f stáva charakteristickou funkciou, ktorá už bola spomenutá v tomto texte, konkrétne v lemma (6) a v článku Klebanov et. al. [6], príklad 4 .
Táto skutočnosť ukazuje, že v Havriliak-Negami-ho modely sa charakter náhodnosti v dielektrike mierne líši od Cole-Cole-vho prípadu.

Záver

V práci sme sa zaoberali charakterizáciou pravdepodobnostných rozdelení za pomoci lineárnych foriem nezávislých, rovnako rozdelených náhodných veličín. V minulosti sa tomuto problému venoval Polya a aj autori knihy [4]. Metóda, ktorú Polya použil na vyriešenie tohto problému sa od tej našej líši.

Polya pri svojom skúmaní vychádzal z predpokladu pevného počtu pozorovaných náhodných veličín a s nenáhodnej lineárnej formy. V našom prípade sme jeho predpoklad trochu pozmenili. Vychádzame z toho, že všetko platí ako u Polya, ale my máme náhodnú lineárnu formu. V porovnaní týchto dvoch postupov to značí, že náš postup je vhodnejší.

Taktiež sme v práci uviedli nové poznatky o príkladoch ν-stabilného rozdelenia s neracionálnymi generujúcimi funkciami, ktoré sme podporili dôkazmi.

Literatúra

[1] Bican L.: *Lineární algebra a geometrie.* Praha: Academia, 2002. ISBN: 80-200-08430-8, str. 78.

[2] Ding P.: *Three Occurences of the Hyperbolic-Secant Distribution.* arXiv:1401.1267v1 [math.ST], 2014, str. 3-7

[3] Fischer M.: *Skew Generalized Secant Hyperbolic Distributions: Unconditional and Conditional Fit to Asset Returns.* 2004, str. 293–304, http://www.stat.tugraz.at/AJS/ausg043/043Fischer.pdf

[4] Kagan A. M., Linnik U. V., Rao C. R.: *Characterization Problems in Mathematical Statistics.* New York: Wiley, 1973, ISBN 0471454214

[5] Kakosyan A. V., Klebanov L. B., Melamed J. A.: *Characterization of Distribution by the Method of Intensively Monotone Operators.* In: Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1984, ISBN: 0-387-13857-9, str. 1 - 70

[6] Klebanov L. B., Kakosyan A. V., Rachev S. T., Temnov G. : *On a Class of Distributions Stable Under Random Summation.* In: J. Appl. Prob.49, 2012, str. 303-318

[7] Lukacs E.: *Characteristic functions.* London: Charles Griffin and Co., 1960, str. 173-174