Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lenka Zavrtálková

Bézierovy křivky

Katedra numerické matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Studijní program: Obecná matematika

2006

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 18.7.2006 Lenka Zavrtálková

Obsah

Název práce: Bézierovy křivky
Autor: Lenka Zavrtálková
Katedra (ústav): Katedra numerické matematiky
Vedoucí bakalářské práce: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
e-mail vedoucího: knajj@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: V předložené práci studujeme vyjádření křivek pomocí Bézierovy reprezentace, a to s využitím jejich parametrizace. Tato Bézierova teorie vznikla z potřeby počítačové grafiky, kde bylo nutno jednoduchým způsobem umožnit konstrukci křivek a ploch. P. Bézier vyvinul způsob, kdy je křivka určena lomenou čarou s krajními body splývajícími s krajními body křivky, úseky lomené čáry těmito body procházející jsou tečnami křivky v těchto bodech a tvar této lomené čáry zhruba napodobuje průběh křivky. Předložená práce popisuje způsob odvození Bézierovy křivky vycházející z použití Bernsteinových polynomů, uvádí několik algoritmů pro generování Bézierových křivek a na závěr aproximaci tří křivek pomocí Bézierovy kubiky, tj. křivky třetího stupně.

Klíčová slova: Bézier, křivky, kubika, polynom

Title: Bézier curves
Author: Lenka Zavrtálková
Department: Department of numerical mathematics
Supervisor: Doc. RNDr. Karel Najzar, CSc.
Supervisor's e-mail address: knajj@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: In the present work we study the Bézier representation of curves using their parametrisation.This Bézier theory originated because of the computer design, where simply way to curve contsruction was needed. P.Bézier developed a method in which the curve is definited by its so-called Bézier polygon. The curve and his Bézier polygon are closely related. They have common end points and end tangents. The present work describes the way the Bézier curve is derived by using the Bernstein polynomials, gives some alghorithms for generating the Bézier curves and at the end shows an aproximation of three curves by the Bézier cubic.

Keywords: Bézier, curves, cubic, polynomial

Kapitola 1

Základní pojmy z geometrie a teorie křivek

1.1 Afinní prostor

Afinní prostor $\mathcal{A}$ je bodový prostor obsahující vlastní vektorový prostor $\mathbf{V}$. Nadále uvažujme konečně rozměrný prostor nad $\mathbf{R}$, což nám implikuje, že jak body, tak vektory mohou být reprezentovány pomocí prvků $\mathbf{R^n}$. Tedy každý prvek $x \in R^n$ reprezentuje bod nebo vektor, v závislosti na kontextu. Navíc, můžeme pracovat pouze s takovouto reprezentací a jednoduše ztotožnit prostory $\mathcal{A}$ a $\mathbf{V}$ s nějakým podprostorem $\mathbf{R^n}$.

Mějme dva body $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, pak vektor směřující z bodu p do bodu q dostaneme jako jejich rozdíl, tedy

$$v = q - p$$

Rozdíl mezi body a vektory lze rovněž vyjádřit pomocí rozšíření souřadnic, a to

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathsf{x} \\ e \end{bmatrix} \quad \text{představuje} \begin{cases} \text{bod} \\ \text{vektor} \end{cases} \quad \text{pokud} \quad e = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Výše uvedená reprezentace bodů a vektorů závisí samozřejmě na volbě soustavy souřadnic. Vezměmě libovolný bod $\mathbf{p}$ z prostoru $\mathcal{A}$ a vektory $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n$ tvořící bázi prostoru $\mathbf{V}$. Pak každý bod $\mathbf{q}$ prostoru $\mathcal{A}$ lze jednoznačně vyjádřit jako

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_1 x_1 + \cdots + \mathbf{v}_n x_n$$

tedy sloupcový vektor $\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^{\mathrm{T} \in \mathbf{R^n}}$ vyjadřuje souřadnice bodu $\mathbf{q}$ vzhledem k afinnímu systému $\mathbf{p}; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Bod $\mathbf{p}$ pak nazveme počátkem soustavy souřadnic a jeho sloupcový souřadnicový vektor je $\mathbf{x} = \mathbf{o} = [\mathbf{0} \ldots \mathbf{0}]^{\mathrm{T}}$

Dimenze afinního prostoru $\mathcal{A}$ je definována jako dimenze jeho vektorového podprostoru $\mathbf{V}$

1.2 Afinní kombinace

Posloupnost bodů $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m$ z prostoru $\mathcal{A}$ nazveme afinně nezávislou, pokud posloupnost vektorů $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_m - \mathbf{p}_0$ je lineárně nezávislá. Tato definice nezávisí na pořadí bodů $\mathbf{p}_i$.

Něchť prostor $\mathcal{A}$ má dimenzi n. Pak každá nezávislá posloupnost $n+1$ prvků $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$ tvoří **kostru** $\mathcal{A}$ a každý bod $\mathbf{q} \in \mathcal{A}$ lze jednoznačně napsat jako

$$\mathbf{q} = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p} - \mathbf{1})\ x_1 + \ldots + (\mathbf{p_n} - \mathbf{p_0})\ \mathbf{x_n} = \mathbf{p_0}\ \mathbf{x_0} + ... + \mathbf{p_n}\ \mathbf{x_n} \tag{1.1}$$

kde

$$1 = x_0 + ... + x_n \tag{1.2}$$

Koeficienty x_i nazýváme **barycentrické souřadnice bodu q** vzhledem ke kostře $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$.
Všimněme si, že $x_0 + ... + x_n$ jsou afinní souřadnice bodu $\mathbf{q}$ vzhledem k počátku $\mathbf{p_j}$ a n-tici vektorů $\mathbf{p_i} - \mathbf{p_j}, i \neq j$.
Speciálně, pokud $n = 1$, pak bod

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{p_0}(\mathbf{1} - \mathbf{x}) + \mathbf{p_1}\mathbf{x} \tag{1.3}$$

leží na úsečce spojující body $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$. Poměr $x : (1-x)$ nazveme **poměrem bodu q vzhledem k bodům** $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$.

Nechť $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ jsou rozšířené nebo barycentrické souřadnicové sloupce nějakých m bodů z $\mathbf{A}$. Pak jejich vážený součet

$$\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i\ \alpha_i \text{představuje} \quad \left\{ \begin{array}{c} \text{bod} \\ \text{vektor} \end{array} \right. \quad \text{pokud} \quad \sum \alpha_i = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right.$$

Pokud je tento vážený součet roven jedné, pak $\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i \alpha_i$ se nazývá **afinní kombinace**. Navíc, v případě, že váhy jsou nezáporná čísla, **a** nazveme **konvexní kombinací** a leží v konvexním obalu tvořeném body $\mathbf{a_i}$.

1.3 Afinní zobrazení

Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou dva afinní prostory , $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ vlastní vektorové podprostory a m, n odpovídající dimenze. Pak zobrazení $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ nazveme **afinní**, jestliže může být reprezentováno $m \times n$ maticí A a bodem **a** z $\mathcal{B}$ tak, že

$$\mathbf{y} = \Phi(x) = \mathbf{a} + A\mathbf{x},$$

kde **a** představuje obraz počátku $\mathcal{A}$.
Lineární zobrazení $\varphi : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ dané předpisem

$$\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

nazveme **vlastní lineární zobrazení** náležící k Φ. Použitím rozšířených souřadnic lze obě zobrazení zapsat pomocí stejné maticové reprezentace

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{o^T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{o^T} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{bmatrix},$$

nebo-li

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}.$$

Následující dvě vlastnosti jsou pak jednoduchými důsledky maticové reprezentace

Afinní zobrazení Φ *komutuje s afinními kombinacemi, tj.*

$$\Phi(\mathbf{a_i}\alpha_i) = \sum \Phi(\mathbf{a_i})\alpha_i.$$

A dále

afinní zobrazení je zcela určeno kostrou $\dim\mathcal{A} + 1$ *nezávislých bodů* $\mathbf{p}_0 ... \mathbf{p}_m$ *a jejich obrazů* $\mathbf{q}_0 ... \mathbf{q}_m$

1.4 Parametrické křivky

V této kapitole uvedeme základní pojmy a vlastnosti z diferenciální teorie křivek, které budeme potřebovat dále.

Parametrické vyjádření křivky v $\mathbf{E_3}$:

$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbf{E}_3$, kde funkce $x(t), y(t), z(t)$ jsou dostatečně hladké funkce parametru $t \in < a, b >$. Je-li derivace $\dot{\mathbf{P}}(t_0)$ nenulový vektor, pak bod $\mathbf{P}(t_0)$ se nazývá **regulárním bodem křivky** a tento vektor je tzv. **tečný vektor v bodě** $\mathbf{P}(t_0)$. V opačném případě se jedná o singulární bod. Jsou-li **všechny body křivky regulární**, pak říkáme, že **křivka je regulární.** Je-li křivka regulární a funkce $x(t), y(t), z(t)$ jsou z prostoru $C^r_{<a,b>}$, pak říkáme, že **křivka je třídy** C^r.

Křivka je rektifikovatelná na $< a, b >$, je-li

$$\sup \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{P}(\mathbf{t_k}) - \mathbf{P}(\mathbf{t_{k+1}}| \ < \infty \ ,$$

kde supremum se bere přes všechna dělení $\{t_k\}$ intervalu $< a, b >$. Hodnota tohoto suprema se nazývá **délkou křivky.** Rektifikovatelná, po částech regulární křivka třídy C^1 (křivka složená z konečného počtu úseků, které jsou regulární a třídy C^1) má délku l :

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt \ = \ \int_a^b |\dot{\mathbf{P}}(t)|\, dt,$$

kde $|\bullet|$ znamená Euklidovou normu v E_3. Je-li parametrem délka křivky s, $s(t) = \mathbf{l}(t)$, pak

$$\mathbf{t} \equiv \mathbf{P}'(\mathbf{s}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \frac{\mathbf{P}(\dot{\mathbf{t}})}{\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{t})}.$$

Zřejmě $\dot{s} = \frac{\mathrm{s}(t)}{\mathrm{dt}} = |\mathbf{P}(\dot{\mathbf{t}})|$. Je-li $\dot{\mathbf{P}}(t_0) \neq 0$, pak $|\mathbf{P}'(\mathbf{s_0})| = \mathbf{1}$, kde $s_0 = s(t_0)$. Vektor $\mathbf{t} \equiv \mathbf{P}'(\mathbf{s})$ se nazývá jednotkový tečný (tangenciální) vektor v bodě $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ a $\dot{s}$ je velikost tečného vektoru v tomto bodě ke křivce $\mathbf{P}(\mathbf{s})$.

Parametrická rovnice tečny ke křivce $\mathbf{P}(t)$ v bodě $\mathbf{P}(t_0)$:

$$\mathbf{R}(u) = \mathbf{P}(t_0) + u\mathbf{t}(t_0),$$

kde u je parametr tečny znamenající vzdálenost bodu $\mathbf{R}(u)$ tečny od bodu dotyku $\mathbf{P}(t_0)$ s křivkou $\mathbf{P}(t)$.

Normálová rovina v bodě $\mathbf{P}(t_0)$ je rovina, která je kolmá k tečně

v tomto bodě:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{P}(t_0), \dot{\mathbf{P}}(t_0))\cdot\dot{\mathbf{P}}(t_0) = 0, \ \text{kde } \mathbf{R} = (x, y, z).$$

a $(\cdot,\cdot)$je skalární součin v prostoru $\mathbf{E}_3$.

Oskulační rovina v bodě $\mathbf{P}(t_0)$ generovaná vektory $\mathbf{R}-\mathbf{P}(t_0),\ \dot{\mathbf{P}}(t_0), \ddot{\mathbf{P}}(t_0)$:

$$\det\begin{pmatrix} x-x(t_0) & y-y(t_0) & z-z(t_0) \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{pmatrix} = 0, \text{ kde } \mathbf{R} = (x, y, z)$$

je bod roviny.

Hlavní normála (hlavní normálový vektor) v bodě $\mathbf{P}(t_0)$: jednotkový vektor $\mathbf{n}$, který leží na normále. Normála je přímka procházející bodem $\mathbf{P}(t_0)$, která leží v oskulační rovině a je kolmá na tečný vektor ke křivce $\mathbf{P}(t)$ v bodě $\mathbf{P}(t_0)$. Platí:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{P}''(s_0)}{|\mathbf{P}''(s_0)|}, \quad s_0 = l(t_0).$$

Binormála v bodě $\mathbf{P}(t_0)$: $\mathbf{b}$ je jednotkový vektor ležící na přímce procházející bodem $\mathbf{P}(t_0)$, a která je kolmá k oskulační rovině. Platí $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$, tzn.:

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}}{|\dot{\mathbf{P}}\times\ddot{\mathbf{P}}|,} \quad \mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{P}}}{|\dot{\mathbf{P}}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{P}}|\dot{\mathbf{P}}|^2 - \dot{\mathbf{P}}(\dot{\mathbf{P}}\cdot\ddot{\mathbf{P}})}{|\dot{\mathbf{P}}\times\ddot{\mathbf{P}}|\ |\dot{\mathbf{P}}|}$$

Rektifikační rovina: rovina určená tečnou a binormálou.

Normálová rovina: rovina určená hlavní normálou a binormálou.

Frenetovy formule. Pro derivace tečného vektoru $\mathbf{t}$, hlavní normály $\mathbf{n}$ a binormály $\mathbf{b}$ podle parametru délky křivky s platí:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{t}, \quad \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n},$$

kde κ je křivost křivky a τ je torze, pro které platí

$$\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{P}} \times \ddot{\mathbf{P}}|}{|\dot{\mathbf{P}}|^3,} \quad \tau = \frac{\dot{\mathbf{P}}\ddot{\mathbf{P}}\dddot{\mathbf{P}}}{\dot{\mathbf{P}}^2\ddot{\mathbf{P}}^2 - (\dot{\mathbf{P}}\cdot\ddot{\mathbf{P}})^2}.$$

Křivost a torzi křivky lze spočíst pomocí následujících vzorců:

$$\kappa = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\}^3}, \quad \tau = \frac{\det\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{pmatrix}}{A^2+B^2+C^2},$$

kde

$$A = \det\begin{pmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{pmatrix}, \quad B = \det\begin{pmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{pmatrix}, \quad C = \det\begin{pmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{pmatrix}$$

Vektor křivosti $\mathbf{K}(t) = \kappa(t)\mathbf{n}(t)$:

$$\mathbf{K}(t) = \frac{(\mathbf{P}'(t) \times \mathbf{P}''(t)) \times \mathbf{P}'(t)}{|\mathbf{P}'(t)|^4}.$$

Vektor křivosti $\mathbf{K}(t)$ má velikost rovnou křivosti $\kappa(t)$ a směřuje z daného bodu (který je určen parametrem t) křivky do středu křivosti tzn. ve směru $\mathbf{t}'(t)$. Střed křivosti je střed oskulační kružnice; její poloměr se nazývá poloměrem křivosti. Oskulační kružnice v daném bodě křivky je kružnice, která nejlépe aproximuje křivku v tomto bodě, tzn. její vektory 1. a 2. derivace jsou v tomto bodě totožné s odpovídajícími vektory křivky. Leží v oskulační rovině a to na konkávní straně křivky. Křivost je rovna převrácené hodnotě poloměru křivosti. Poznamenejme, že křivost existuje v každém bodě křivky třídy C^2 a torze v každém regulárním bodě křivky třídy C^3, který není bodem rektifikačním.

Geometrická spojitost a tvarové parametry.

Nechť jsou dány dvě křivky $\mathbf{P_1}(t)$ a $\mathbf{P_2}(t)$, přičemž $t \in < 0, 1 >$. Nechť $\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P_1}(1) = \mathbf{P_2}(0)$.

Spojitost jednotkového tečného vektoru. Jednotkový tečný vektor křivky složené z těchto dvou křivek (napojených v bodě $\mathbf{Q}$) je spojitý v bodě $\mathbf{Q}$, jestliže

$$\frac{\mathbf{P_1'}(1)}{|\mathbf{P_1'}(1)|} = \frac{\mathbf{P_2'}(0)}{|\mathbf{P_2'}(0)|} \ ,$$

tzn. existuje kladné číslo β_1 tak,že $\mathbf{P_1'}(1) = \beta_1\mathbf{P_2'}(0)$.

Spojitost vektoru křivosti. Lze snadno ověřit, že když existuje nezáporná konstanta β_2 tak, že platí:

$$\mathbf{P_2''}(0) = \beta_1^2\mathbf{P_1''}(1) + \beta_2\mathbf{P_1'}(1),$$

pak vektor křivosti v bodě $\mathbf{Q}$ (výše uvedených křivek) bude spojitý, tzn. bude platit:

$$\frac{(\mathbf{P_2'}(0) \times \mathbf{P_2''}(0)) \times \mathbf{P_2'}(0)}{|\mathbf{P_2'}(0)|^4} = \frac{(\mathbf{P_1'}(1) \times \mathbf{P_1''}(1)) \times \mathbf{P_1'}(t)}{|\mathbf{P_1'}(1)|^4} \ ,$$

přičemž $\mathbf{P_1'}(1) = \beta_1\mathbf{P_2'}(0)$.

Geometrická spojitost. Řekneme, že křivka $\mathbf{P}(t)$ složená z úseků $\mathbf{P_1}(t)$, $\mathbf{P_2}(t)$ napojených v bodě (viz výše) má geometrickou spojitost, jestliže jednotkový tečný vektor a vektor křivosti jsou spojité.

Pro úplnost si připomeňme definici a vlastnosti vektorového a smíšeného součinu, které se vyskytují ve výše uvedených vzorcích.

Vektorový součin dvou vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$: označení $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ -vektor o velikosti $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \alpha$ (α je úhel, který svírají vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$), který je ortogonální k vektorům $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, přičemž vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mají kladnou orientaci. Např. nechť $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os Eukleidova prostoru E_3, pak $\mathbf{e_1} = \mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_2} = \mathbf{e_3} \times \mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_3} = \mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}$. Platí:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$$

Smíšený součin tří vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$: $\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Platí:

$$\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cab} = -\mathbf{bac}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \end{pmatrix}.$$

Kapitola 2

Bézierova reprezentace

Každý polynomiální křivkový segment může být reprezentován pomocí lomené čáry, tzv. Bézierova polygonu. Křivka a její Bézierův polygon jsou velmi úzce svázány. Koncové body Bézierova polygonu splývají s krajními body křivky, úseky lomené čáry těmito body procházející jsou tečnami křivky v těchto bodech a tvar lomené čáry zhruba napodobuje průběh křivky. Křivka leží v konvexní kombinaci bodů polygonu.

2.1 Bernsteinovy polynomy

Bernesteinovy polynomy vychází z binomického rozvoje

$$1 = (u + (1-u))^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

a **Bernsteinův polynom stupně** n definujeme předpisem

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}, \quad i = 0, ..., n.$$

Bernsteinovy polynomy mají následující důležité vlastnosti:

- *Jsou* **lineárně nezávislé**
  Jmenovitě, dělením $\sum_{i=0}^{n} b_i u^i (1-u)^{n-i} = 0$ členem $(1-u)^n$ a dosazením $s = u/(1-u)$ dostaneme $\sum_{i=0}^{n} b_i s^i = 0$ což implikuje $b_0 = ... = b_n = 0$

- *Jsou* **symetrické**

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u).$$

- *Jedinými* **kořeny** *jsou* 0 a 1

$$B_i^n(0) = B_{n-i}^n(1) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{pro} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 0 \\ i > 0 \end{array} \right.$$

- *Tvoří* **rozklad jednotky**

$$\sum_{i=0}^{n} B_i^n(0) = 1 \quad \text{pro všechna} \quad u \in \mathsf{R}.$$

- *Jsou* **kladné** *v intervalu* (0,1)

$$B_i^n(u) > 0 \quad \text{pro} \quad u \in (0,1).$$

- *Splňují* **rekurzivní formuli**

$$B_i^{n+1}(u) = uB_{i-1}^n(u) + (1-u)B_i^n(u), \quad kde \quad B_{-1}^n = B_{n+1}^n = 0 \ a \ B_0^0 = 1.$$

Tato rekurze výplývá přímo z identity

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}.$$

Poznámka : Výpočet hodnot Bernsteinových polynomů až do stupně n může být znázorněno trojúhelníkovým schématem

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & = & B_0^0 & B_0^1 & B_0^2 & \cdots & B_0^n \\ & & & B_1^1 & B_1^2 & \cdots & B_1^n \\ & & & & B_2^2 & \cdots & B_2^n \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & B_n^n \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \text{klíč} & & \\ * & & \\ & \searrow^{u} & \\ * & \xrightarrow{1-u} & * \end{array}$$

2.2 Bézierova reprezentace

Z lineární algebry plyne, že $n+1$ (lineárně nezávislých) Bernsteinových polynomů B_i^n tvoří bázi pro všechny polynomy stupně $\leq n$. Tedy každá polynomiální křivka $\mathbf{b}(u)$ stupně $\leq n$ má jednoznačně určenou **Bézierovu reprezentaci stupně** n

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{c_i} B_i^n(u).$$

Každá afinní parametrická transformace

$$u = a(1-t) + bt, \quad a \neq b \ ,$$

nemění stupeň křivky $\mathbf{b}$. Z tohoto důvodu i $\mathbf{b}(u(t))$ má Bézierovu reprezentaci n-tého stupně,

$$\mathbf{b}(u(t)) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_i} B_i^n(t) \ .$$

Což můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{b}(u(t)) = (t^n, t^{n-1}, ..., 1)\mathbf{M}_n(\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n)^T,$$

kde

$$\mathbf{M}_n = \{m_{ij}\}_{i,j=0}^{n}, m_{ij} = (-1)^{n-i-j}\binom{n}{n-i}\binom{n-i}{j}, \quad 0 \leq i+j \leq n \quad ,$$

jinak

$$m_{ij} = 0.$$

Tedy $\mathbf{M}_n$ převádí bázi $\{1, ..., t^n\}$ v prostoru polynomů stupně n na bázi složenou z Bernsteinových polynomů.
Koeficienty $\mathbf{b}_i$ jsou z prostoru $\mathbf{R}^d$ a nazýváme je **řídící body křivky** nebo **Bézierovy body.** Jsou to vrcholy **Bézierova polygonu** křivky $\mathbf{b_u}$ nad intervalem $[a, b]$. Parametr t nazveme **lokální** a u **globální parametr** křivky $\mathbf{b}$.

Vlastnosti Bernsteinových polynomů uvedené v odstavci 2.1 se přenáší na Bézierovu reprezentaci křivek:

- **Symetrie** *Bernsteinových polynomů implikuje*

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_i} B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_{n-i}} B_i^n(s) \ , kde \ u = a(1-t)+bt = b(1-s)+as.$$

Tyto dvě sumy definují **Bézierovu reprezentaci b** nad intervalem $[a, b]$ a $[b, a]$. Proto, pokud použijeme orientovaných intervalů $[a, b]$ a $[b, a]$, můžeme rozlišit dvě různé parametrické orientace polynomiální křivky.

- *Pro* **koncové body** *segmentu křivky* $\mathbf{b}[a, b]$ *máme*

$$\mathbf{b}(a) = b_0 \quad a \quad \mathbf{b}(b) = \mathbf{b}_n$$

Z vlastnosti, že součet všech Bernsteinových polynomů je jedna, dostaneme důležitou vlastnost Bézierovy křivky $\mathbf{b}$:

- *každý bod* $\mathbf{b}(u)$ *je* **afinní kombinací Bézierových bodů**.

Jako důsledek pak

- *Bézierova reprezentace je* **afinně invariantní,** *tj. mějme dané libovolné afinní zobrazení* Φ*, pak obraz křivky* $\Phi(\mathbf{b})$ *má Bézierovy body* $\Phi(\mathbf{b_i})$ *nad intervalem* $[a, b]$.

Protože Bernsteinovy polynomy jsou nezáporné na $[0, 1]$,platí

- *pro každé* $u \in [a, b]$ *je* $\mathbf{b}(u)$ **je konvexní kombinace Bézierových bodů** $\mathbf{b}_i$. *Tedy úsek křivky* $\mathbf{b}[a, b]$ *leží v konvexním obalu svých Bézierových bodů.*

2.3 Algoritmus de Casteljau

Křivku

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t), \quad \textit{kde} \quad u = a(1-t) + bt,$$

lze jednoduše vyjádřit pomocí **de Casteljau algoritmu**. Opakovaným užitím rekurentních vztahů z definice Bernsteinových polynomů dostaneme

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1 B_i^{n-1}(t) = ... = \sum_{i=0}^{0} \mathbf{b}_i^n B_i^0(t) = \mathbf{b}_0^n \quad ,$$

kde

$$\mathbf{b}_i^{k+1} = (1-t)\mathbf{b}_i^k + t\mathbf{b}_{i+1}^k.$$

Body $\mathbf{b}_i^k$ de Casteljau algoritmu lze zapsat do trojúhelníkového schématu, kde každý prvek lze spočítat pomocí klíče uvedeného vpravo:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{b}_0^0 & & & & \\ \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b}_0^1 & & & \\ \mathbf{b}_2^0 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{b}_n^0 & \mathbf{b}_{n-1}^1 & \mathbf{b}_{n-2}^2 & \cdots & \mathbf{b}_0^n \end{array}$$

klíč

$$\begin{array}{ccc} * & & \\ & \searrow^{1-t} & \\ * & \xrightarrow{t} & * \end{array}$$

Poznámka: Pokud t leží v intervalu $[0, 1]$, pak algoritmus de Casteljau sestává pouze z konvexních kombinací, což objasňuje numerickou stabilitu tohoto algoritmu.
Poznámka: Hornerovo schéma je velmi efektivní metodou jak spočítat

hodnotu polynomu. Lze jej také užít pro křivku $\mathbf{b}(t) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ v Bézierově formě. Po přepsání $\mathbf{b}(t)$ do tvaru

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)^n \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \binom{n}{i} \left(\frac{t}{1-t} \right)^i \right),$$

nejprve vyčíslíme sumu v závorce pomocí Hornerova schématu pro hodnotu $t/(1-t)$ a poté přenásobíme výsledek výrazem $(1-t)^n$.
Tato metoda ovšem selhává, pokud t je blízko k 1. V tomto případě můžeme užít vztahu

$$\mathbf{b}(t) = t^n \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_{n-i} \binom{n}{i} \left(\frac{1-t}{t} \right)^i \right),$$

2.4 Bézierovy křivky a derivace

Derivaci Bernsteinova polynomu stupně n lze snadno vypočítat.
Z definice Bernsteinova polynomu dostaneme

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad \text{pro} \quad i = 0, ..., n,$$

kde $B_{-1}^{n-1} = B_n^{n-1} = 0$. Tedy, pro danou křivku

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}$$

dostaneme pro její derivaci $\mathbf{b}(u)$

$$\frac{d}{du} \mathbf{b}(u) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \triangle \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde $\triangle \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$.

Pokud se na $\mathbf{b}(u)$ díváme jako na bod, pak $\mathbf{b}(u)$ je vektor. Bod dostaneme, pokud $\mathbf{b}(u)$ umístíme do nějakého jiného bodu. Specielně, $\mathbf{o} + \mathbf{b}'(\mathbf{u})$ nazýváme **(první) hodograf b**.

Opakovaným aplikováním derivační formule dostaneme r-tou derivaci $\mathbf{b}(u)$,

$$\mathbf{b}^r(u) = \frac{n!}{(n-r)!(b-a)^r} \sum_{i=0}^{n-r} \triangle^r \mathbf{b}_i B_i^{n-r}(t),$$

kde $\triangle^r \mathbf{b_i} = \triangle^{r-1} \mathbf{b}_{i+1} - \triangle^{r-1} \mathbf{b}_i$ označuje **r-tou následnou diferenci** $\mathbf{b}_i$. Stejně jako výše obdržíme druhý a také další hodografy.

Použitím derivační formule a koncové interpolační vlastnosti Bézierových křivek dostaneme výsledek, který byl základem pro Bézierův rozvoj.

Derivace $\mathbf{b}$ *v bodě* $t = 0$ *(nebo* $t = 1$*) až do řádu r závisí pouze na prvních(nebo posledních) r+1 Bézierových bodech a naopak.*

Geometricky to znamená, že,obecně, **tečny b** v bodech $t = 0$ a $t = 1$ jsou dány body $\mathbf{b_0}, \mathbf{b_1}$ a $\mathbf{b_{n-1}}, \mathbf{b_n}$ a oskulační roviny jsou dány body $\mathbf{b_0}, \mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}$ a $\mathbf{b_{n-2}}, \mathbf{b_{n-1}}, \mathbf{b_n}$.

Poznámka: Podíváme-li se na Bézierův polygon křivky $\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_i} B_i^n(t)$, kde $u = (1-t)a + tb$, jako na částečnou lineární funkci $\mathbf{p}(u)$ nad intervalem $[a, b]$ dostaneme:

derivace $\mathbf{p}(u)$ *Bézierova polygonu sestává z Bézierových bodů křivky* $\mathbf{b}'(\mathbf{u})$.

2.5 Singulární parametrizace

Uvažujme polynomiální křivku

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)$$

a její derivaci

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \triangle \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t),$$

kde tečka značí derivaci podle parametru t.

Pokud $\triangle \mathbf{b}_0 = o$, pak $\dot{\mathbf{b}}(t)$ je nula v bodě $t = 0$. Avšak se singulární reparametrizací $t = \sqrt{s}$ dostaneme

$$\frac{d}{ds}\mathbf{b}(t(0)) = n \triangle \mathbf{b}_1.$$

Pokud $\triangle \mathbf{b}_0 = \mathbf{o}$ a $\triangle \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{o}$, pak křivka $\mathbf{b}(t)$ má v bodě $t = 0$ tečnu směřující do bodu $\mathbf{b}_2$.

Poznámka: Pokud $\triangle \mathbf{b}_0 = \triangle \mathbf{b}_1 = \mathbf{o}$ a $\triangle \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{o}$, pak křivka $\mathbf{b}(t)$ má v bodě $t = 0$ tečnu směřující do bodu $\mathbf{b}_3$ atd.

2.6 Integrace

Integrál polynomiální křivky v Bézierově reprezentaci

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b_i} B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a}$$

má Bézierovu reprezentaci

$$\mathbf{c}(u) = \int \mathbf{b}(u)du = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{c}_i B_i^{n+1}(t),$$

kde

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_{i-1} + \frac{b-a}{n+1}\mathbf{b}_{i-1} = \mathbf{c}_0 + \frac{b-a}{n+1}(\mathbf{b}_0 + ... + \mathbf{b}_{i-1}), \quad i = n+1, ..., 1,$$

a $\mathbf{c}_0$ je libovolná integrační konstanta.
Jako důsledek integrační formule a koncové interpolační vlastnosti Bézierovy reprezentace dostaneme

$$\int_a^b \mathbf{b}_u du = \frac{b-a}{n+1}(\mathbf{b}_0 + ... + \mathbf{b}_n)$$

a specielně, nezávisle na i,

$$\int_0^1 B_i^n(t) = \frac{1}{n+1}.$$

2.7 Konverze k Bézierově reprezentaci

Některé starší CAD datové formáty reprezentují křivky pomocí jednočlenů. Proto konverze dat mezi odlišnými CAD systémy je aplikací, kdy je třeba nutně přeměnit jednočlenou reprezentaci do Bézierovy a naopak.
Nechť

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{a}_i \binom{n}{i} t^i$$

je křivka v monomické formě s binomickými faktory, stejně jako v Bézierově reprezentaci. Protože

$$\begin{aligned}
\binom{n}{i} t^i (1-t+t)^{n-i} &= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-i+k} t^{i+k} (1-t)^{n-i-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i+k}{i} B_{i+k}^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} B_j^n,
\end{aligned}$$

dostaneme vzorec pro přeměnu

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j B_j^n(t),$$

kde

$$\mathbf{b}_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{i} \mathbf{a}_i$$

a $\binom{j}{i} = 0$ pro $j < i$.

Poznámka: Pokud $\mathbf{a}_2 = \cdots = \mathbf{a}_n = o$ a $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$, pak $\mathbf{b}(t)$ je lineárně reprezentována nad $[0, 1]$ pomocí Bézierových bodů

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_0 + j\mathbf{a}_1$$

Poznámka: Opačně, pokud $n + 1$ Bézierových bodů $\mathbf{b}_i$ leží ekvidistantně na přímce, pak $\mathbf{b}(t)$ je lineární funkce parametru t, lze ji napsat ve tvaru

$$\mathbf{b}(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_n.$$

Tato vlastnost je známa jako **lineární přesnost** Bézierovy reprezentace. Nechť je dána po částech polynomiální křivka v Bézierově reprezentaci

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n \left(\frac{u - a}{b - a} \right),$$

pak můžeme dostat její monomickou formu jednoduše pomocí Taylorova rozvoje

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}^{(i)}(a) \frac{(u - a)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \triangle^i \mathbf{b}_0 \frac{(u - a)^i}{(b - a)^i}.$$

Protože $\triangle^i \mathbf{b}_0 = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \mathbf{b}_k$, můžeme tento výraz přepsat do tvaru

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} \mathbf{b}_k t^i.$$

Kapitola 3

Bézierovy techniky

3.1 Symetrické polynomy

Každá polynomiální křivka $\mathbf{b}(u)$ stupně n může být jednoznačně spojena s n-proměnným symetrickým polynomem $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ majícím následující tři vlastnosti:

- $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ **odpovídá** $\mathbf{b}(u)$ *na své diagonále*,

což znamená, že $\mathbf{b}[u...u] = \mathbf{b}(u)$.

- $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ *je* **symetrický** *ve svých proměnných*,

což znamená, že pro každou permutaci $(v_1, ...v_n)$ posloupnosti $(v_1, ...v_n)$

$$\mathbf{b}[v_1...v_n] = \mathbf{b}[u_1...u_n].$$

- $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ *je* **afinní** *v každé proměnné*,

což znamená, že

$$\mathbf{b}[(\alpha u + (1-\alpha)v)u_2...u_n] = \alpha\mathbf{b}[uu_2...u_n] + (1-\alpha)\mathbf{b}[vu_2...u_n].$$

Symetrický polynom $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ je často nazýván také **polární formou** $\mathbf{b}(u)$. Abychom dokázali, že takový symetrický polynom existuje pro všechny polynomy, stačí uvažovat polynomy bázové a odvodit explicitní reprezentaci pro jejich symetrickou formu.
Každá lineární kombinace

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{c}_i C_i(u)$$

polynomů $C_i(u)$ stupně n s polárními formami $C_i[u_1...u_n]$ má polární formu

$$\mathbf{b}[u_1...u_n] = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{c}_i C_i[u_1...u_n],$$

která zřejmě splňuje všechny tři požadované vlastnosti.

Všimněme si, že diagonála $\mathbf{b}[u...u]$ může být stupně menšího než n, ačkoliv $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ závisí na n proměnných.

V případě, že C_i jsou vážené jednočleny $A_i^n = \binom{n}{i} u^i, \quad i = 0, ..., n$, dostaneme **elementární symetrické polynomy**

$$A_i^n[u_1...u_n] = \sum_{1 j_1 < \cdots < j_i n} u_{j_1}...u_{j_n},$$

které zřejmě splňují výše požadované vlastnosti. Tato suma obsahuje $\binom{n}{i}$ součinů i proměnných. V případě, že C_i jsou Bernsteinovy polynomy

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i},$$

dostaneme

$$B_i^n[u_1...u_n] = \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_i \\ k_1 < \cdots < k_{n-i}}} u_{j_1}...u_{j_n},$$

kde $(j_1, ..., j_i, k_1, ..., k_{n-1})$ je permutace $(1, ..., n)$.

Poznámka: Symetrické polynomy $B_i^n[u_1...u_n]$ splňují rekurzi

$$B_i^{n+1}[u_1...u_n] = u_0 B_{i-1}^n[u_1...u_n] + (1-u) B_i^n[u_1...u_n].$$

3.2 Hlavní věta Bézierovy teorie

Jednoznačnost symetrických polynomů a jejich vztahy k Bézierově reprezentaci jsou dány následující **hlavní větou**.

Věta 1: *Pro všechny polynomiální křivky $\mathbf{b}(u)$ stupně n existuje jednoznačně určený symetrický n-proměnný a n-afinní polynom $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ s diagonálou $\mathbf{b}[u...u] = \mathbf{b}(u)$. Navíc, body*

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a \overset{n-i}{\cdots} a\, b \overset{i}{\cdots} b], \quad i = 0, ..., n,$$

jsou Bézierovy body křivky $\mathbf{b}(u)$ nad $[a, b]$.

Důkaz: V odstavci 3.1 jsme ukázali, že polární forma $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ existuje pro $\mathbf{b}(u)$. Tedy můžeme uvažovat body

$$\mathbf{b}_i^{k+1} = \mathbf{b}[a \overset{i}{\ldots} a\, u_1 \overset{i}{\ldots} u_k\, b \overset{i}{\ldots} b], \quad i+j+k=n.$$

Protože $\mathbf{b}_0^n = \mathbf{b}[u_1...u_n]$ je symetrická a multiafinní, může být spočtena z bodů $\mathbf{b}_i^0$ pomocí následující rekurze

$$\mathbf{b}_i^{k+1} = \mathbf{b}_i^k(1-t_{k+1}) + \mathbf{b}_{i+1}^k t_{k+1},$$

kde

$$t_{k+1} = \frac{u_k - a}{b-a}.$$

Navíc, pokud všechna u_k jsou rovna u, pak rekurzivní formule se redukuje na algoritmus de Casteljau pro v7po4et $\mathbf{b}(u)$. Tudíž, protože Bézierova reprezentace je jednoznačná, body $\mathbf{b}_i$ jsou Bézierovy body křivky $\mathbf{b}(u)$ nad $[a,b]$. Proto každé dva symetrické polynomy se stejnou diagonálou $\mathbf{b}(u)$ se shodují pro všechny argumenty $[a \overset{n-i}{\ldots} a\, b \overset{i}{\ldots} b]$ a (vzhledem k uvedené rekurzi) jsou také totožné pro všechny argumenty $[u_1 \cdots u_n]$. Z toho plyne, že $\mathbf{b}(u)$ má jednoznačně určenou n-afinní polární formu. $\diamondsuit$

3.3 Zjemnění

Rekurzivní formule uvedená v předcházející části odhaluje velmi důležitou doplňující vlastnost de Casteljau algoritmu.
V matici tohoto de Casteljau algoritmu jsou použity následující body

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{b_0^0} & & & & \\
 & & & & \\
\mathbf{b_1^0} & \mathbf{b_0^1} & & & \\
\mathbf{b_2^0} & \mathbf{b_1^1} & \mathbf{b_0^2} & & \\
\vdots & & & \ddots & \\
\mathbf{b_n^0} & \mathbf{b_{n-1}^1} & \mathbf{b_{n-2}^2} & \cdots & \mathbf{b_0^n} = \mathbf{b(c)}
\end{array}$$

potřebné k výpočtu bodu $\mathbf{b}(c)$. Bézierovy body

$$\mathbf{b}_0^i = \mathbf{b}[a \overset{n-i}{\ldots} a\, c \overset{i}{\ldots} c] \quad \text{a} \quad \mathbf{b}_j^{n-i} = \mathbf{b}[c \overset{n-i}{\ldots} c\, b \overset{i}{\ldots} b]$$

části křivky nad $[a,c]$, $[c,b]$ nalezneme v horní diagonále a spodním řádku.
Výpočet Bézierových bodů přes dva intervaly $[a,c]$, $[c,b]$ se nazývá **zjemnění**.
Body

$$\mathbf{b}_i^k = \mathbf{b}[a \overset{n-i-k}{\ldots} a \overset{k}{\ldots} cb \overset{i}{\ldots} b]$$

jsou opět charakterizovány svými argumenty. Všimněne si, že vše platí i pokud přehodíme b a c.
Opakovaným zjemňováním $\mathbf{b}(u)$ dostaneme Bézierův polygon $\mathbf{b}(u)$ přes libovolný počet sousedících intervalů $[a_0, a_1], [a_1, a_2], ..., [a_{k-1}, a_k]$.
Společně tyto polynomy tvoří **složený Bézierův polygon křivky b** nad $[a_0, a_1, ...a_k]$. Obecně, tento složený polygon má $kn + 1$ různých vrcholů.

3.4 Konvergence při zjemňování

Bézierův polygon malého kousku křivky je jeho docela dobrou aproximací. Abychom to upřesnili, nechť $\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n$ jsou Bézierovy body nějaké křivky $\mathbf{b}(u)$ nad podintervalem $[c, c + nh]$ nějakého pevně zvoleného intervalu $[a, b]$. Navíc, nechť $c_i = c + ih, i = 0, ..., n$. Pak

existuje konstanta M nezávislá na c taková, že

$$\max_i \|\mathbf{b}(c_i) - \mathbf{b}_i\| \leq Mh^2$$

Důkaz: Rozšiřme symetrický polynom $\mathbf{b}[u_1...u_n]$ na $[c_i...c_i]$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_i &= \mathbf{b}[c \overset{n-i}{\cdots} c\, c + nh \overset{i}{\cdots} c + nh] \\
&= \mathbf{b}[c_i...c_i] - \sum_{j-1}^{n-i} ih \frac{\partial}{\partial u_j}\mathbf{b}[c_i...c_i] + \sum_{j-1}^{n-i}(n-i)h\frac{\partial}{\partial u_j}\mathbf{b}[c_i...c_i] + O(h^2),
\end{aligned}$$

což dokazuje tvrzení, neboť všechny parciální derivace jsou stejné.$\diamondsuit$

Poznámka: Pro maximovou normu $\| \bullet \|_\infty$ byla spočtena nejmenší možná konstanta m, pro kterou výše uvedený výraz platí pro všechny křivky, a to

$$\max_{i=0,...,n-2} \|\triangle^2 \mathbf{b}_i\|_\infty \cdot \lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil / 2n.$$

Poznámka: Kvadratická konvergence je nejlepší, jak jde vidět, pro parabolu $p(u) = u^2$, jejíž prostřední Bézierův bod v intervalu $[0, 2h]$ je nula, zatímco $p(u) = h^2$.

3.5 Generování křivek pomocí zjemňování

Zjemňování umožňuje velmi rychlou metodu pro generování aproximací Bézierových křivek. Z odstavce 3.4 vyplývá, že Bézierův polygon nad

$$[0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, ..., 1]$$

nějaké křivky

$$\mathbf{b}(t) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$$

konverguje k segmentu křivky se stupněm $1/4^k$. Toto vybízí k následujícímu algoritmu

Plot Bézier $(\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n; k)$
pokud $k = 0$
pak plot polygon $\mathbf{b}_0, ...\mathbf{b}_n$
jinak spočítej složený Bézierův polygon $\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_{2n}$
$\sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ nad $[0, 0.5, 1]$
Plot Bézier $(\mathbf{a}_0, ..., \mathbf{a}_n; k-1)$
Plot Bézier $(\mathbf{a}_n, ..., \mathbf{a}_{2n}; k-1)$

Co se týče počtu iterací, můžeme použít následující kritérium pro ukončení. Například chceme skončit, pokud vstupní Bézierův polygon je blízký přímce. Jednoduché měření přímosti křivky, tj. jak je tato křivka blízká přímce, je založeno na druhé následné diferenci. Tedy, můžeme změnit první řádek algoritmu do tvaru

$$\textbf{pokud } k = 0 \quad \textbf{nebo} \quad \max\left\{\|\triangle^2 \mathbf{b}_i\| \; | i - 0, ..., n-2\right\} < \varepsilon.$$

Namísto vykreslování Bézierova polygonu můžeme jednoduše nakreslit úsečku $\mathbf{b}_0\mathbf{n}$ pokud je kritérium splněno. Hranice této odchylky je dána následující větou:

Buď $\mathbf{l}(t) = \mathbf{n}_0(1-t) + \mathbf{b}_n t$ *lineární interpolace* $\mathbf{b}(t)$ *Pak*

$$\sup_{0 \le t \le 1} \|\mathbf{b}(t) - \mathbf{l}(t)\| \le \frac{1}{8} \sup_{0 \le t \le 1} \|\ddot{\mathbf{b}}(t)\| \le \frac{1}{8} n(n-1) \max_{i=0,...,n-2} \|\triangle^2 \mathbf{b}_i\|,$$

kde $\| \bullet \|$ *značí supremovou nebo Eukleidovu normu.*

Poznámka: Pokud $\mathbf{b}(u)$ má Bézierovy body $\mathbf{b}_i$ nad $[a, b]$ a Bézierovy body $\mathbf{c}_i$ nad podintervalem $[c, c+h]$, pak rozdíly $\|\triangle^2 \mathbf{c}_i\|$ jsou ohraničeny $h^2 \max \|\triangle^2 \mathbf{c}_i\|$. Tedy stupeň aproximace lineární interpolace je kvadratický. Navíc, stupeň aproximace je obecně pouze kvadratický. Proto, vzhledem k předcházející poznámce, složený Bézierův polygon nad $[0, \frac{1}{2^m}, ..., 1]$ je, asymptoticky, tak dobrou aproximací jako sečnový polygon s vrcholy

$$\mathbf{b}\left(\frac{i}{n2^m}\right), i = 0, 1, ..., n2^m.$$

3.6 Generování křivek pomocí následných diferencí

Jiný rychlý kreslící algoritmus pro křivku $\mathbf{b}(u)$ je založen na dopředných difernecích. Nechť

$$\mathbf{p} = \mathbf{b}(a + ih), i = 0, ..., m,$$

jsou body křivky $\mathbf{b}(u)$ s ekvidistantními parametrickými hodnotami. Pokud $\mathbf{b}(u)$ je stupně n, pak $\triangle^{n+1}\mathbf{p}_i = 0$ a $\triangle^n \mathbf{p}_i =$ konst. pro všechna i.

Toho lze využít pro výpočet bodů $\mathbf{p}_i, i = 1, ..., m$ z bodů $\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_n$. Nejprve spočteme konstantu $\triangle^n \mathbf{p}_i$ opakovanými rozdíly a poté body $\mathbf{p}_i, i > n$ pozpátku, opakovaným přičítáním. Výpočet lze znázornit následujícím schematem:

$$\begin{array}{cccc}
\mathbf{p_0} & & & \\
\mathbf{p_1} & \triangle^1\mathbf{p_0} & & \\
\vdots & & \ddots & \\
\mathbf{p_n} & \triangle^1\mathbf{p_{n-1}} & \cdots & \triangle^n\mathbf{p_0} \\
\mathbf{p_{n+1}} & \triangle^1\mathbf{p_n} & \cdots & \triangle^n\mathbf{p_1} \\
\vdots & & & \vdots \\
\mathbf{p_m} & \triangle^1\mathbf{p_{m-1}} & \cdots & \triangle^n\mathbf{p_{m-n}}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{l}{klíč1} \\
* & & \\
 & & \searrow^{-} \\
* & \overrightarrow{+} & *
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\multicolumn{3}{l}{klíč2} \\
* & & \\
+ & \downarrow & \\
* & \overrightarrow{+} & *
\end{array}$$

Poznámka 5: Výpočet ukazuje, že kromě počítání bodů $\mathbf{p}_0, ..., \mathbf{p}_n$ v trojúhel- níkovém schematu je potřeba vyjádřit n vektorů navíc pro každý bod křivky. Z toho plyne, že generování křivek pomocí zjemňování je skoro dvakrát rychlejší než dopředná diference a také více numericky stabilní.

3.7 Průniky

Zjemňování je užitečné také pro výpočet průniku dvou rovinných Bézierových křivek.Uvažujme

$$\mathbf{b}(s) = \sum \mathbf{b}_i B_i^m(s), s \in [0, 1],$$

a

$$\mathbf{c}(t) = \sum \mathbf{c}_i B_i^m(s), t \in [0, 1].$$

Idea spočívá v tom, že porovnáme konvexní obaly obou Bézierových polygonů. Pokud jsou disjunktní, pak křivky nemají společný průnik. Pokud se překrývají, křivky mohou, ale nemusí, mít průnik. V dalším kroku uděláme zjemnění pro $t = 1/2$ a porovnáme konvexní obaly $\mathbf{b}[0, 1/2]$ a $\mathbf{b}[1/2, 1]$ s $\mathbf{c}[0, 1/2]$ a $\mathbf{b}[1/2, 1]$. Tento proces opakujeme pro každý pár segmentů křivky kde se konvexní obaly Béízierových polygonů překrývají. Pokud eventuelně jsou konvexní obaly malé a plytké, křivky lze aproximovat rovnými přímkovými úseky, jejichž průnik lze jednoduše zjistit.

3.8 Variation diminishing property

Zjemňování není jen praktickým, nýbrž i teoretickým nástrojem. V následujícím pomocí ní odvodíme vlastnost variation diminishing property, která spočívá na důležité vlastnosti, že křivka se nemůže více vlnit než její Bézierův polygon. Přesněji:

Věta 2: *Křivka* $\mathbf{b}(t), t \in [0, 1]$ *je proťata libovolnou nadrovinou* $\mathcal{H}$ *nejvýše tolikrát jako její Bézierův polygon.*

K důkazu se nejprve podívejme na algoritmus de Casteljau jako na opakovaný proces usekávání rohů pro všechna $t \in [0, 1]$.
Pokud přímkový úsek **ac** protne $\mathcal{H}$, pak i polygon **abc** protne $\mathcal{H}$. Naopak to ovšem obecně neplatí. Z toho plyne, že Bézierův polygon nad zjemněním $[0, t_1, ..., t_k, 1]$ intervalu $[0, 1]$ má nejvýše tolik průniků s $\mathcal{H}$ jako Bézierův polygon.
Specielně, pokud t_i jsou vybrána tak, že $\mathbf{b}(t)_1, ..., \mathbf{b}(t_k)$ jsou průniky $\mathbf{b}$ s $\mathcal{H}$, pak Bézierův polygon nad $[0, 1]$ má alespoň k průniků s $\mathcal{H}$.$\diamondsuit$

Poznámka: Pokud křivka nebo polygon z R^d protne (nebo se dotkne) každou nadrovinu nejméně dvěma body nebo leží v této rovině, pak tuto křivku nazveme **konvexní**. Jako důsledek variation diminishing property dostaneme, že každá křivka s konvexním Bézierovým polygonem je sama konvexní.
Poznámka: Graf polynomu

$$b(t) = \sum b_i B_i^n(t), t \in [0, 1],$$

je konvexní právě když $\ddot{b}(t) \geq 0$ nebo $\ddot{b}(t) \leq 0$. Jeho Bézierův polygon je konvexní právě když všechny $\triangle^2 b_i \geq 0$ nebo $\triangle^2 b_i \leq 0$.

3.9 Symetrický polynom derivace

Derivaci polynomiální křivky $\mathbf{b}(u)$ lze zapsat pomocí její polární formy $\mathbf{b}[u_1, ..., u_n]$. Z odstavce 2.6 jednoduchým diferencováním polární formy plyne rovnost

$$\mathbf{b}'(u) = \frac{n}{b-a}(\mathbf{b}[b\,u\ldots u] - \mathbf{b}[a\,u\ldots u]),$$

a také

$$\mathbf{b}'(u) = n(\mathbf{b}[1\,u\ldots u] - \mathbf{b}[0\,u\ldots u]).$$

Podíváme-li se na tři charakteristické vlastnosti polární formy, zjistíme, že multiafinní symetrický polynom $\mathbf{b}'(u)$ je dán pomocí

$$\mathbf{b}'[u_2\ldots u_n] = n(\mathbf{b}[1\,u_2\ldots u] - \mathbf{b}[0\,u\ldots u_n]).$$

Symetrický polynom $\mathbf{b}[u_1,...,u_n]$ počáteční křivky $\mathbf{b}(u)$ reprezentuje afinní zobrazení, pokud $u_2,...,u_n$ jsou pevné. Z čehož vyplývá že,

$$\mathbf{b}[\delta u_2\ldots u_n] = \mathbf{b}[\delta\,u_2\ldots u] - \mathbf{b}[a\,u\ldots u_n]).$$

reprezentuje vlastní lineární zobrazení, kde $\delta = b-a$. Při použití $\varepsilon = 1-0$ lze derivaci přepsat do tvaru

$$\mathbf{b}'(u) = n\mathbf{b}[\varepsilon\,u_2\ldots u].$$

Dalším diferencováním dostaneme polární formu r-té derivace $\mathbf{b}(u)$

$$\mathbf{b}^{(r)}[u_{r+1},...,u_n] = \frac{n!}{(n-r)!}\mathbf{b}[\varepsilon \overset{r}{\ldots} \varepsilon\,u_{r+1}\ldots u_n],$$

kde

$$\mathbf{b}[\varepsilon \overset{r}{\ldots} \varepsilon\,u_{r+1}\ldots u_n] = \mathbf{b}[\varepsilon \overset{r-1}{\ldots} \varepsilon\,u_{r+1}\ldots u_n] - \mathbf{b}[\varepsilon \overset{r-1}{\ldots} \varepsilon 0\,u_{r+1}\ldots u_n].$$

Poznámka: Protože $\mathbf{b}[u_1,...,u_n]$ je afinní v každé proměnné, první parciální derivace, např., je dána

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u_1}\mathbf{b}[u_1,...,u_n] &= \mathbf{b}[1\,u_2,...,u_n] - \mathbf{b}[0\,u_2,...,u_n]\\ &= \mathbf{b}[\varepsilon 1\,u_2,...,u_n]\\ &= \frac{1}{n}\mathbf{b}'[u_2,...,u_n].\end{aligned}$$

Tedy z toho dále dostaneme

$$\frac{\partial^r}{\partial u_1\ldots\partial u_r}\mathbf{b}[u_1,...,u_n] = \frac{(n-r)!}{n!}\mathbf{b}^{(r)}[u_{r+1},...,u_n].$$

3.10 C^r napojení křivek

Podrozdělování také poskytuje vhodný nástroj pro popsání jistých diferencovatelných podmínek dvou polynomiálních křivek $\mathbf{b}(u)$ a $\mathbf{c}(u)$ daných jejich Bézierovými polygony $\mathbf{b}_0, ..., \mathbf{b}_n$ nad $[a, b]$ a $\mathbf{c}_0, ..., \mathbf{c}_n$ nad $[b, c]$.

Z odstavce 2.4 plyne, že derivace až do stupně r v $u = b$ ovlivňují a jsou ovlivňovány Bézierovými body $\mathbf{b}_{n-r}, ..., \mathbf{b}_n$ a $\mathbf{c}_0, ..., \mathbf{c}_r$. Toto vede k **Starkově větě:**

Věta 3: *Derivace* $\mathbf{b}$ *a* $\mathbf{c}$ *až do řádu r se shodují v* $u = b$, *právě když* $\mathbf{c}_0, ..., \mathbf{c}_r$ *je prvních* $r + 1$ *Bézierových bodů křivky* $\mathbf{b}$ *nad* $[b, c]$, *což znamená*

$$\mathbf{b}[b \overset{n-i}{\cdots} b\, c \overset{i}{\cdots} c] = \mathbf{c}_i, \quad pro \quad i = 0...., r.$$

Použitím Věty 1. v oddělení 3.2 lze Starkovu větu přepsat následujícím způsobem:

Derivace $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ až do řádu r se shodují v $u = b$ právě když oba polynomy $\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdots} b\, u \overset{r}{\cdots} u]$ a $\mathbf{c}[b \overset{n-r}{\cdots} b\, u \overset{r}{\cdots} u]$ jsou si rovny.

Nad intervalem $[a, b, c]$ má polynom $\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdots} b\, u \overset{r}{\cdots}]$ složený Bézierův polygon $\mathbf{b}_{n-r}, ..., \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_r$. Body $\mathbf{c}_i, i \leq r$ lze spočítat z bodů $\mathbf{b}_{n-i}$ pomocí algoritmu de Casteljau.
Poznámka: Jelikož dva polynomy jsou si rovny, právě když jejich polární formy jsou si rovny, vidíme, že $\mathbf{b}(u)$ a $\mathbf{c}(u)$ mají identické derivace až do řádu r v $u = t$, právě když jejich polární formy splňují

$$\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdots} b\, u_1 \dots u_r] = \mathbf{c}[b \overset{n-r}{\cdots} b\, u_1 \dots u_r]$$

pro libovolné hodnoty proměnných $u_1, ..., u_n$.

3.11 Zvyšování stupně křivek

Pro každou křivku stupně n a každé $m \leq n$ máme Bézierovu reprezentaci stupně m. Adaptace na vyšší stupeň reprezentace se používá při jistém konstruování ploch a je občas nezbytná pro výměnu dat mezi jednotlivými CAD systémy. Této přeměně říkáme **zvyšování stupně**.

Mějme Bézierovu reprezentaci stupně n

$$\mathbf{b}(u) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$$

nějaké křivky $\mathbf{b}(u)$. Ukážeme jak zvýšit stupeň o jedničku, tedy napíšeme křivku $\mathbf{b}(u)$ pro hodnoty Bernsteinových polynomů $B_i^{n+1}(t)$. Opět použijeme symetrický polynom $\mathbf{b}[u_1, ..., u_n]$.
Označíme chybějící výraz v posloupnosti hvězdičkou a definujeme

$$\mathbf{c}[u_0 \dots u_n] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}[u_1 \dots u_i^* \dots u_n].$$

Snadno zjistíme, že tento polynom $(n+1)$ proměnných je symetrický a multiafinní s "diagonálou" $\mathbf{b}(u)$. Z čehož plyne, že $\mathbf{c}[u_0 \dots u_n]$ je $(n+1)$-proměnná polární forma $\mathbf{b}(u)$. Tedy, použitím Věty 1 v odstavci 3.2 a postupným počítáním dostaneme, že

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \mathbf{c}[a \overset{n+1-i}{\cdots} a\, bi \cdots b] \\ &= \frac{i}{n+1}\mathbf{b}[a \overset{n+1-i}{\cdots} a\, bi-1 \cdots b] + \frac{n+1-i}{n+1}\mathbf{b}[a \overset{n-i}{\cdots} a\, bi \cdots b] \\ &= \frac{i}{n+1}\mathbf{b}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1}\mathbf{b}_i \end{aligned}$$

jsou Bézierovy body křivky $\mathbf{b}(u)$ nad $[a, b]$ v její reprezentaci stupně $n+1$.
Poznámka: Aproximace polynomu jistého stupně m polynomem stupně $n < m$ se nazývá **snižování stupně**. Nevýhodou Bézierových křivek je jejich globální povaha. Změní-li se nějaký vrchol Bézierova polygonu, který určuje Bézierovu křivku, změní se průběh celé křivky. Tato vlastnost vedla k vyvinutí dalších křivek, např. B - spline křivek

3.12 Konvergence při zvyšování stupně

Opakováním procesu zvyšování stupně křivky obdržíme reprezentaci vyššího stupně

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{d}_k B_k^m(t), m > n,$$

se Zhouovým jednoduchým vyjádřením koeficientů d_k

$$\mathrm{d}_k = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \beta_{ik},$$

kde

$$\beta_{ik,} = \binom{n}{i}\binom{m-n}{k-i} / \binom{m}{k}$$

je tzv. **polyhypergeometrická distribuce** známá z teorie pravděpodobnosti. Odvození plyne snadno:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t)(1-t+t)^{m-n} && (3.1)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-n} \mathbf{b}_i \binom{n}{i}\binom{m-n}{j} t^{i+j}(1-t)^{m-i-j} && (3.2)\\
&= \sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i \beta_{ik,}\right) B_k^m(t), \quad kde \quad k=i+j && (3.3)
\end{aligned}
$$

Podobně jako konvergence vyplývající z opakoveného zjemňování, Bézierův polygon stupně n reprezentující $\mathbf{b}(t)$ konverguje k $\mathbf{b}[0,1]$ pro m rostucí do nekonečna. Přepsáním $\beta_{ik,}$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
\beta_{ik} &= \binom{n}{i}\prod_{a=0}^{i-1}\frac{k-\alpha}{m-\alpha}\prod_{\alpha=1}^{n-1}\frac{m-k+i-\alpha}{m-\alpha} && (3.4)\\
&= \binom{n}{i}(k/m)^i(1-k/m)^{n-i} + O(1/m) && (3.5)\\
&= B_i^n(k/m) + O(1/m). && (3.6)
\end{aligned}
$$

Substituce 3.6 do rovnice pro $\mathbf{d}_k$ dává

$$\max_{k=0,\dots,m} \|\mathbf{d}_k - \mathbf{b}(k/m)\| = O(1/m).$$

Kapitola 4

Aproximace křivek - Bézierova kubika

Nejčastěji se v počítačové geometrii využívá pro konstruování křivek a ploch parametrických kubik. Vektorové polynomy vyššího než třetího stupně mohou sice popisovat ještě složitější křivky, tyto funkce mají ale nevýhody, pro které se používají jen výjimečně. Mají velký počet koeficientů, jejichž geometrický význam je obtížné charakterizovat, mohou mít nevítané vlnění a výpočtový čas se prodlužuje.

V této kapitolce popíšeme aproximaci kružnice, elipsy a sinusoidy pomocí Bézierovy kubiky

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t),$$

funkce B_i^3 jsou kubické funkce (Bernsteinovy polynomu stupně 3)

$$B_0^3(t) = (1-t)^3, B_1^3(t) = 3t(1-t)^2, B_2^3(t) = 3t^2(1-t), B_3^3(t) = t^3.$$

4.1 Aproximace kružnice

Čtvrtkružnici mezi body A, C nahradíme obloukem kubiky. Požadujeme, aby pro hodnoty parametru 0,1/2,1 procházela body $\mathbf{b}_0 = A, B, \mathbf{b}_3 = C$ a aby v bodech $\mathbf{b}_0$ a $\mathbf{b}_3$ měla tečny rovnoběžné se souřadnicovými osami. Je tedy

$$\mathbf{b}_0 = [1,0], \quad \mathbf{b}_1 = [1,d_1], \quad \mathbf{b}_2 = [d_2,1], \quad \mathbf{b}_3 = [0,1],$$

kde d_1, d_2 jsou neznámé, které určíme z podmínky na bod B. Dosazením výše dostaneme parametrické rovnice náhradní kubiky

$$x(t) = (1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t)d_1$$

$$y(t) = 3t(1-t)^2 d_2 + 3t^2(1-t) + t^3.$$

Z podmínky, že pro $t = 0,5$ kubika prochází bodem $B = (\cos 45°, \sin 45°)$, dostaneme

$$d_1 = d_2 \doteq 0,5522848.$$

Vzdálenost mezi kružnicí a bodem náhradní kubiky, měřená na přímce procházející počátkem, není větší než 3.10^{-4}.

4.2 Aproximace elipsy

Čtvrtelipsu mezi vrcholy A, C s délkami poloos a, b nahradíme parametrickou kubikou. Budeme požadovat , aby parametru $t = 0,5$ byl přiřazen bod E elipsy, určený trojúhelníkovou konstrukcí, ostatní podmínky jsou analogické předchozím. Je tedy

$$\mathbf{b}_0 = A = [a, 0], \quad \mathbf{b}_1 = [a, d_1], \quad \mathbf{b}_2 = [d_2, b], \quad \mathbf{b}_3 = [0, b],$$

kde d_1, d_2 jsou neznámé, které určíme z podmínky na bod E. Dosazením výše dostaneme parametrické rovnice náhradní kubiky

$$\begin{aligned} x(t) &= a\,(1-t)^3 + a\,3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t)d_1 \\ y(t) &= 3t(1-t)^2 d_2 + b\,3t^2(1-t) + b\,t^3. \end{aligned}$$

Z podmínky, že pro $t = 0,5$ kubika prochází bodem $E = (a\cos 45°, b\sin 45°)$, dostaneme

$$d_1 \doteq 0,5522848\,a$$

$$d_2 \doteq 0,5522848\,b.$$

4.3 Aproximace sinusoidy

Parametrická kubika je algebraická křivka nejnižšího stupně mající inflexní bod. Tuto vlastnost využijeme při konstruování kubiky aproximující oblouk sinusoidy mezi inflexním bodem A a vrcholem B. Interpolační kubika bude určena inflexním bodem $\mathbf{b}_0 = A$, tečnou $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$ mající směrnici 1, bodem $\mathbf{3} = B$ a tečnou $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3$ s tečnou rovnoběžnou s osou x.Je tedy

$$\mathbf{b}_0 = [0, 0], \quad \mathbf{b}_1 = [d_1, d_1], \quad \mathbf{b}_2 = [d_2, 1], \quad \mathbf{b}_3 = [\frac{\pi}{2}, 1],$$

kde d_1, d_2 jsou neznámé, které určíme z podmínky inflexe. Dosazením do výše uvedeného tvaru Bézierovy kubiky dostaneme parametrické rovnice náhradní kubiky

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\pi}{2} 3t(1-t)^2 + d_0 3t^2(1-t) + d_1\, t^3 \\ y(t) &= 3t(1-t)^2 + d_1\, 3t^2(1-t). \end{aligned}$$

Z podmínky inflexe v bodě A:

$$\mathbf{b}"(0) = \mathbf{b}_0 B_1"(0) + \mathbf{b}_1 B_2(0) + \mathbf{b}_2 B_2"(0) + \mathbf{b}_3 B_3"(0) = \mathbf{o}.$$

Protože

$$B_0"(0) = 6, \quad B_1"(0) = 12, \quad B_2"(0) = 6, \quad B_3"(0) = 0,$$

obdržíme dvě rovnice pro neznámé d_1, d_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= -12 d_1 + 6 d_2 \\ 0 &= -12 d_1 + 6 \end{aligned}$$

s řešením

$$d_1 = \frac{1}{2}, \quad d_2 = 1.$$

Literatura

[1] Boehm W.,Paluszny M., Prautzsch H.: *Bézier and B-Spline Techniques*, Springer, Reading, 2002.

[2] Drs L.: *Plochy ve výpočetní technice*, SNTL, Praha, 1984.

[3] Najzar K.: *Spline funkce a křivky*, Praha, 2006.