Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Šrámek

Sbírka úloh na obvody a obsahy rovinných útvarů

Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Studijní program: Chemie

Studijní obor: Chemie se zaměřením na vzdělávání –

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2015

Rád bych poděkoval doc. RNDr. Jarmile Robové, CSc. za mnoho cenných rad a především za dostatek trpělivosti při vytváření této práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V …….... dne..... podpis

Název práce: Sbírka úloh na obvody a obsahy rovinných útvarů

Autor: Martin Šrámek

Katedra / Ústav: Katedra didaktiky matematiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Abstrakt: Bakalářská práce Sbírka úloh na obvody a obsahy rovinných útvarů je určena pro vyučující i žáky středních škol. Vyučující v této sbírce může nalézt zajímavé příklady na procvičení řady metrických problémů v oblasti syntetické geometrie. Žáci mohou ocenit řešené příklady a následně své poznatky aplikovat na další úkoly. Ve sbírce jsou obsaženy veškeré rovinné útvary, se kterými se žáci na středních školách setkávají. Obtížnější úkoly jsou zařazeny do čtvrté kapitoly. Sbírka je doplněna ilustračními obrázky vytvořenými v programu Geogebra, které čtenářům umožní snadnější porozumění řešených problémů.

Klíčová slova: obsah, obvod, délka, výuka matematiky

Title: Exercise book - circumferences and areas of plane figures

Author: Martin Šrámek

Department: Department of Mathematics Education

Supervisor: doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

Abstract: This bachelor thesis Exercise book - circumferences and areas of plane figures is designed for teachers and high school students. Teachers might find some interesting tasks including various metric problems from the field of synthetic geometry. Pupils can appreciate solved tasks and their knowledge can be applied to other tasks. This exercise book contains all the plane figures which are taught at high schools. The fourth chapter includes more difficult tasks. There are many drawing exported from Geogebra which can help student to understand the task better.

Keywords: circumference, area, length, teaching of mathematics

Obsah

Úvod 7
1. Obvod a obsah rovinných útvarů 8
2. Mnohoúhelníky 9
2.1 Čtyřúhelníky 9
2.1.1 Čtverec 10
2.1.2 Obdélník 11
2.1.3 Kosočtverec 12
2.1.4 Kosodélník 16
2.1.5 Lichoběžník 17
2.1.6 Deltoid 20
2.1.7 Obecný čtyřúhelník 21
2.2 Trojúhelníky 23
2.3 Pravidelné konvexní mnohoúhelníky 27
3. Kruh a jeho části 30
3.1 Kružnice a kruh 30
3.2 Části kružnice 31
3.3 Části kruhu 32
3.3.1 Kruhová výseč 32
3.3.2 Kruhová úseč 33
4. Složené obrazce 36
Výsledky úloh 47
Závěr 49
Seznam použité literatury 50

Úvod

Bakalářská práce Sbírka úloh na obvody a obsahy rovinných útvarů je určena pro vyučující a především pro žáky středních škol. Pro vyučující může sloužit jako zdroj úloh, pro žáky jako doplňující učební text. Tato práce je pro lepší porozumění doplněna názornými obrázky vytvořenými v programu GeoGebra.

V první kapitole práce je připomenuta definice obsahu a obvodu tak, jak se zavádí na střední škole. V této kapitole jsou zmíněny důležité vlastnosti obsahu, které budou využívány zejména ve čtvrté kapitole.

V druhé kapitole se zabýváme mnohoúhelníky. Tato kapitola je poměrně rozsáhlá a z toho důvodu je rozdělena na tři podkapitoly – čtyřúhelníky, trojúhelníky a pravidelné konvexní mnohoúhelníky. Stejně jako na základní škole začínáme nejdříve čtvercem a postupně všemi čtyřúhelníky. V této části je úvodem připomenuta klasifikace čtyřúhelníků a následně jsou řešeny zajímavé příklady. V podkapitole věnované trojúhelníkům je rovněž připomenuta jejich klasifikace. V rámci jednoho z příkladů je odvozen Hérónův vzorec, v jiném příkladu je ukázán důkaz věty o příčkovém trojúhelníku. V části věnované pravidelným konvexním mnohoúhelníkům je odvozen vztah pro jejich obvod, pro jejich obsah je odvození vztahu jen načrtnuto.

Třetí kapitola zahrnuje kruh a jeho části, kruhovou výseč a kruhovou úseč. Částem kruhu je věnována zvýšená pozornost, neboť tyto rovinné útvary bývají často na středních školách probírány jen okrajově. Na jednom z úkolů je možné žákům přiblížit exhaustivní metodu, pomocí níž byla odvozena hodnota čísla π.

Čtvrtá kapitola obsahuje příklady a úlohy na složené obrazce. Tyto úlohy pomáhají žákům rozvíjet logické myšlení a mnohdy je možné poukázat na několik způsobů řešení jednoho problému. Z tohoto důvodu obsahuje uvedená kapitola nejvíce úloh a příkladů a je jádrem této bakalářské práce.

Jednodušší úkoly z této sbírky mohou být využity i na nižším stupni gymnázia či na druhém stupni základní školy. Výsledky úkolů uvedeny za čtvrtou kapitolou této práce.

1. Obvod a obsah rovinných útvarů

Než se začneme zabývat obsahy a obvody obrazců, musíme si být jisti, že ovládáme termíny ze základní a střední školy. V případě nejasností je možné definice většiny pojmů použitých v této práci dohledat např. v *Přehledu matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií* od O. Odvárka a J. Kadlečka (2004), případně v jiné učebnici pro střední školy. Několik pojmů je pro lepší pochopení připomenuto.

Obvodem *obrazce rozumíme délku čáry, která ho ohraničuje. Obvod značíme obvykle písmenem o.*

ÚKOL 1.1

Pro lepší pochopení pojmu obvod *o* si nyní načrtněte zahradu libovolného tvaru. Představte si, že se chcete projít po hranici své zahrady a naměřit, kolik metrů plotu bude potřeba pro oplocení. Délka, kterou jste naměřili, odpovídá obvodu zahrady.

Obsahem *S geometrického obrazce je kladné číslo, přiřazené obrazci tak, že platí:*

1. *Shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.*
2. *Skládá – li se obrazec z několika obrazců, které se navzájem nepřekrývají, rovná se jeho obsah součtu jejich obsahů.*
3. *Obsah čtverce, jehož strana má délku 1 (mm, cm, …) je 1 (mm^2, cm^2, …).*

V následujících kapitolách si uvedeme vztahy pro výpočet obvodu *o* a obsahu *S* řady rovinných útvarů. Ve druhé kapitole se budeme zabývat mnohoúhelníky, zejména trojúhelníky, čtyřúhelníky a šestiúhelníky. Ve třetí kapitole si procvičíme výpočty obsahu a obvodu kruhu či jeho částí a v závěrečné kapitole jsou uvedeny složitější úlohy. Ve jednotlivých kapitolách je důraz kladen zejména na vzorově řešené příklady a další úkoly k procvičení. Výsledky neřešených úloh jsou uvedeny v závěru této publikace.

ÚMLUVA

Při řešení příkladů a úloh pracujeme s číselnými hodnotami daných veličin. V takovém případě jsou jednotky doplněny až v odpovědi. Při uvádění podmínek vztahu mezi obvody, nebo mezi obsahy se předpokládá, že vztahy jsou uvedeny ve stejných jednotkách. Při řešení úloh předpokládáme znalost Pýthagorovy věty, sinové a kosinové věty.

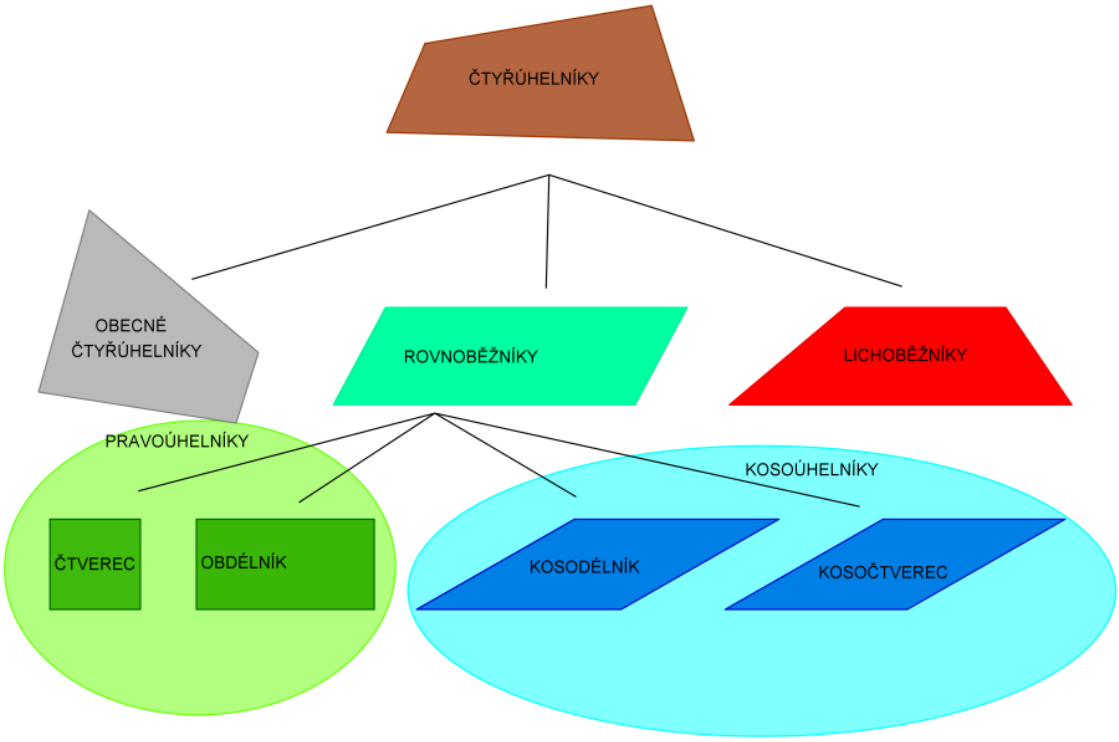
2. Mnohoúhelníky

V této kapitole se budeme zabývat výpočty obvodu a obsahu různých mnohoúhelníků. Začneme stejně jako na základní škole, tedy čtyřúhelníky. V celé této kapitole se budeme zabývat pouze konvexními mnohoúhelníky.

2.1 Čtyřúhelníky

Čtyřúhelníkem rozumíme mnohoúhelník se čtyřmi vrcholy a čtyřmi stranami. Nyní si uvedeme jejich klasifikaci.

Na obr. 2.1 je připomenuta klasifikace konvexních čtyřúhelníků. Prvním kritériem této klasifikace je počet dvojic rovnoběžných stran a v případě klasifikace rovnoběžníků je kritériem velikost jejich vnitřních úhlů. Pomocí druhého kritéria můžeme klasifikovat i lichoběžníky, ale v našich úvahách jejich klasifikaci dále nebudeme potřebovat a z toho důvodu si ji nebudeme ani uvádět.



Obr. 2.1

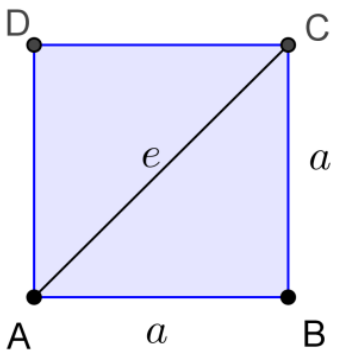
Prvním rovinným útvarem, pro nějž si uvedeme vztahy pro výpočet obvodu a obsahu, je čtverec.

2.1.1 Čtverec

Pro čtverec o straně délky a platí tyto vztahy:

$$o = 4 \cdot a$$

$$S = a \cdot a$$



Obr. 2.2

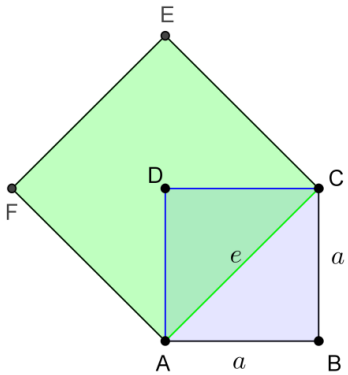
PŘÍKLAD 2.1

Je dán čtverec *ABCD*. V závislosti na délce jeho strany a vypočítejte obvod a obsah čtverce *ACEF*, který je sestrojen nad jeho úhlopříčkou.

Řešení

Abychom mohli vypočítat obsah či obvod čtverce *ACEF*, musíme znát délku jeho strany. Nyní si délku strany *AC* vyjádříme v závislosti na délce strany čtverce *ABCD* pomocí trojúhelníka *ABC*. K výpočtu využijeme větu Pýthagorovu a obr. 2.3.

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$



Obr. 2.3

Nyní dosadíme délky stran dle obr. 2.3. Získáme následující vztah, který upravíme:

$$a^2 + a^2 = e^2$$

$$\sqrt{2}a = e$$

Nyní známe délku strany čtverce sestrojeného nad úhlopříčkou *AC*. Pro výpočet jeho obsahu a obvodu můžeme využít následující vztahy:

$$o = 4 \cdot e$$

$$S = e \cdot e$$

Nyní dosadíme za neznámou e a získáme výsledné vztahy:

$$o = 4\sqrt{2} \cdot a$$

$$S = 2 \cdot a \cdot a$$

Obvod čtverce *ACEF* je $4\sqrt{2}a$, jeho obsah je $2a^2$.

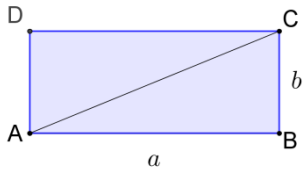
ÚKOL 2.1

Je dán čtverec *ABCD*. Pojmenujte střed strany *AB* jako bod *E* a střed strany *BC* jako *F*. V závislosti na délce strany a čtverce *ABCD* vypočítejte obvod a obsah čtverce sestrojeného nad úsečkou *EF*.

ÚKOL 2.2

Je dán čtverec *KLMN*. Označte střed strany *LM* jako *S*. V závislosti na délce strany k čtverce *KLMN* vypočítejte obvod a obsah čtverce sestrojeného nad úsečkou *KS*.

2.1.2 Obdélník



Obr. 2.4

Pro obdélník s délkami stran a, b platí následující vztahy:

$$o = 2 \cdot (a + b)$$
$$S = a \cdot b$$

PŘÍKLAD 2.2

Dokažte následující tvrzení: *„Ze všech pravoúhlých rovnoběžníků o shodném obsahu S má čtverec nejmenší číselný poměr mezi svým obvodem a obsahem.“*

Řešení

Mezi pravoúhlé rovnoběžníky řadíme čtverec a obdélník. Poměr mezi obvodem o_1 a obsahem S_1 čtverce s délkou strany a je $\frac{o_1}{S_1} = \frac{4 \cdot a}{a \cdot a}$. U obdélníka s délkami stran b a c platí $\frac{o_2}{S_2} = \frac{2c+2b}{c \cdot b}$. Dále víme, že oba obrazce mají stejný obsah, proto platí rovnost $a \cdot a = c \cdot b$. Pro délky stran obdélníka předpokládejme, že platí nerovnost $b > c$.

Nyní zapíšeme nerovnost, kterou chceme dokázat:

$$\frac{4 \cdot a}{a \cdot a} < \frac{2c + 2b}{c \cdot b}$$

Obsahy obrazců se rovnají, můžeme v nerovnosti nahradit součin $c \cdot b$ součinem $a \cdot a$, kterým nerovnost ihned vynásobíme. Získanou nerovnost upravíme pomocí ekvivalentních úprav:

$$4 \cdot a < 2c + 2b$$
$$2a < b + c$$

Protože délky stran jsou vždy kladné ($a > 0, b > 0, c > 0$), jsou kladné i výrazy na obou stranách nerovnice. Za těchto podmínek je umocnění ekvivalentní úpravou. Po umocnění získáme nerovnost, kterou využitím ekvivalentních úprav dále upravíme:

$$4 \cdot a^2 < b^2 + 2bc + c^2$$

Nyní využijeme rovnosti $a \cdot a = c \cdot b$ a dosadíme za a^2. Upravíme:

$$4bc < b^2 + 2bc + c^2$$
$$0 < b^2 - 2bc + c^2$$
$$0 < (b - c)^2$$

Vzhledem k předpokladu $b > c$ je výraz $b - c$ nenulový, tedy výraz $(b - c)^2$ je kladný, a proto nerovnost $0 < (b - c)^2$ platí. Vzhledem k použitým ekvivalentním úpravám plyne z nerovnosti $0 < (b - c)^2$ platnost nerovnosti $\frac{4 \cdot a}{a \cdot a} < \frac{2c+2b}{c \cdot b}$ a tím je tvrzení dokázáno. □

ÚKOL 2.3

Je dán obdélník, jehož délky stran a, b jsou v poměru 2:1. V závislosti na délce strany a vypočítejte obvod a obsah obdélníka.(*Nápověda: Mezi délkami stran platí vztah* $a = 2b$. *Postup, který lze použít v této úloze, je podobný postupům z úloh 2.1 a 2.2.*)

ÚKOL 2.4

Je dán obdélník s délkami stran a, b. V závislosti na délkách jeho stran vypočítejte obvod a obsah obdélníka sestrojeného nad jeho úhlopříčkou *AC,* je-li poměr délek stran obdélníka zachován. (*Nápověda: Postup, kterým lze vyřešit tento úkol, je analogický k řešení příkladu 2.1. Též Vám může pomoci obr. 2.4.*)

ÚKOL 2.5

Kolikrát se změní obsah S obdélníka, pokud jeho rozměry změníme tak, že:

a) Všechny jeho strany budou poloviční délky.
b) Délka jedné dvojice protějších stran bude dvakrát větší a délka druhé dvojice protějších stran třikrát menší.
c) Délka jedné dvojice protějších stran bude pětkrát větší a délka druhé dvojice protějších stran o třetinu menší.
d) Délka jedné dvojice protějších stran bude o čtvrtinu větší a délka druhé dvojice protějších stran o pětinu menší.

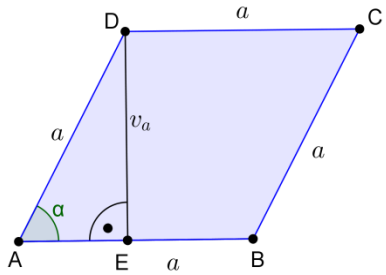
2.1.3 Kosočtverec

Pro kosočtverec o straně délky a platí následující vztahy:

$$o = 4 \cdot a$$

$$S = a \cdot v_a$$

kde v_a je výška kosočtverce, jak je vyznačeno na obr. 2.5. Bod E je patou výšky kosočtverce.



PŘÍKLAD 2.3

Určete délku strany, výšku a velikosti všech vnitřních úhlů kosočtverce, jehož trojnásobek obsahu S je číselně roven pětinásobku jeho obvodu o. Zároveň platí, že výška daného kosočtverce v_a má vůči délce strany a poloviční délku. Vypočítejte velikost všech vnitřních úhlů.

Řešení

Úloha se zdá na první pohled být poměrně složitá, její řešení je však snadné. Stačí podmínky zadání přepsat do soustavy rovnic. Nejprve je zadáno, že číselně je trojnásobek obsahu pětinásobkem jeho obvodu, což lze zapsat následujícím vztahem:

$$3 \cdot S = 5 \cdot o$$

Dosadíme ze známých vztahů pro výpočet obvodu a obsahu kosočtverce:

$$3 \cdot a \cdot v_a = 20 \cdot a$$

Úpravami získáme vztah:

$$3 \cdot v_a = 20$$

Nyní využijeme druhé části zadání, která udává vztah $v_a = \frac{a}{2}$. Dosadíme a získáme:

$$3 \cdot \frac{a}{2} = 20$$
$$a = \frac{40}{3}$$

Nyní lze vypočítat výšku kosočtverce:

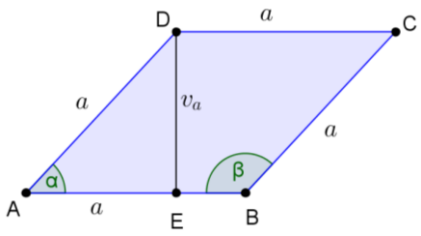
$$v_a = \frac{a}{2}$$
$$v_a = \frac{20}{3}$$

Pro výpočet velikosti vnitřních úhlů α, β vyznačených na obr. 2.6 platí $\alpha < \beta$. Tuto nerovnost je možné předpokládat díky následujícím vlastnostem kosočtverce:

i) V kosočtverci je vždy dvojice protějších vnitřních úhlů stejné velikosti, ale všechny nejsou stejné velikosti.

ii) V případě nutnosti lze vrcholy kosočtverce vhodně přejmenovat tak, aby předpoklad $\alpha < \beta$ byl splněn.

Dále víme, že součet velikostí vnitřních úhlů v libovolném kosočtverci je 360°. Z těchto vlastností plyne vztah $\alpha + \beta = 180°$. Stačí, pokud vypočítáme velikost jednoho z úhlů – např. α.



Obr. 2.6

Pomocí pravoúhlého trojúhelníka AED (obr. 2.6) a funkce sinus lze vypočítat velikost úhlu α.

$$sin\alpha = \frac{v_a}{a}$$

S využitím vztahu $v_a = \frac{a}{2}$ získáme:

$$sin\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 30°$$

Ze vztahu $\alpha + \beta = 180°$ je zřejmé, že velikost úhlu $\beta = 150°$.

Délka strany kosočtverce je $\frac{40}{3}$ j. Výška kosočtverce je $\frac{20}{3}$ j. Velikost úhlu DAB a BCD je 30°, velikost zbývajících vnitřních úhlů kosočtverce je 150°.

ÚKOL 2.6

Nalezněte takový kosočtverec, jehož obsah zvětšený o 4 cm^2 je číselně roven jeho obvodu zvětšenému o jednu třetinu. Zároveň platí, že výška daného kosočtverce je vůči délce jeho strany a ve stejném poměru jako délka strany ku délce úhlopříčky v libovolném čtverci. Vypočítejte velikost vnitřních úhlů.

PŘÍKLAD 2.4

Představte si, že bychom považovali čtverec za speciální případ kosočtverce, protože pro oba platí, že všechny jejich strany jsou shodné délky. Za tohoto předpokladu dokažte tvrzení: *„Ze všech kosočtverců s délkou strany a má čtverec největší číselný poměr mezi svým obsahem a obvodem."*

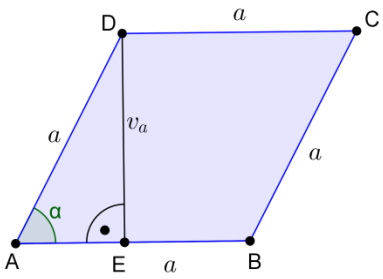
Řešení

Je-li délka strany čtverce i kosočtverce rovna a, pak i jejich obvody jsou si rovny – v obou případech $o = 4 \cdot a$. Pro poměr obvodu o_1 a obsahu čtverce S_1 platí $\frac{S_1}{o_1} = \frac{a \cdot a}{4a}$, pro stejný poměr u kosočtverce platí vztah $\frac{S_2}{o_2} = \frac{v_a \cdot a}{4a}$. Nyní máme zjistit, zda platí:

$$\frac{a \cdot a}{4a} > \frac{v_a \cdot a}{4a}$$

Předchozí vztah lze ekvivalentními úpravami přepsat na:

$$a > v_a$$



Obr. 2.7

Pokud dokážeme poslední nerovnost, dokážeme tím i dané tvrzení. Pro názornější vysvětlení si představme kosočtverec *ABCD*, který je spolu s výškou v_a a její patou E vyznačen na obr. 2.7. Využijeme nyní pravoúhlého trojúhelníka *AED.* Je zřejmé, že platí nerovnost $a > v_a$, protože a je délka přepony trojúhelníka *AED.* Analogicky můžeme postupovat při volbě jiné strany a příslušné výšky.□

PŘÍKLAD 2.5

Je dán kosočtverec *ABCD* s délkami úhlopříček $|AC| = e$ a $|BD| = f$. Ověřte, zda pomocí vztahu $S = \frac{e \cdot f}{2}$ lze vypočítat obsah kosočtverce.

Řešení

Předpokládejme, že vztah $S = \frac{e \cdot f}{2}$ platí pro výpočet obsahu kosočtverce. Tento vztah se nyní pokusíme upravit na tvar $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$.

Díky využití kosinové věty v trojúhelnících ABC a ABD lze s použitím značení z obr. 2.6 dosadit do vztahu $S = \frac{e \cdot f}{2}$ za délky úhlopříček z následujících vztahů:

$$e^2 = 2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\beta$$
$$f^2 = 2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\alpha$$

Získáme:

$$S = \frac{\sqrt{2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\beta} \cdot \sqrt{2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\alpha}}{2}$$

Označme α ostrý vnitřní úhel kosočtverce a β úhel jeho vnitřní tupý úhel. Pro vnitřní úhly kosočtverce α, β platí:

- Velikost protějších úhlů je shodná.
- Součet libovolných dvou sousedních úhlů je 180°.

K další úpravě vztahu nyní využijeme vlastností funkce kosinus. Vyjádříme si $cos\beta$ pomocí $cos\alpha$ následujícím způsobem:

$$cos\beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -cos\alpha$$

Podrobnější vysvětlení předchozí úpravy je možné dohledat v učebnici *Matematika pro gymnázia* od O. Odvárka (1999). Za výraz $cos\beta$ nyní dosadíme do vztahu $S = \frac{\sqrt{2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\beta} \cdot \sqrt{2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\alpha}}{2}$. Získáme:

$$S = \frac{\sqrt{2a^2 + 2a \cdot a \cdot cos\alpha} \cdot \sqrt{2a^2 - 2a \cdot a \cdot cos\alpha}}{2}$$

Postupně upravujeme:

$$S = \frac{2a^2 \cdot \sqrt{1 + cos\alpha} \cdot \sqrt{1 - cos\alpha}}{2}$$
$$S = a^2 \cdot \sqrt{1 - cos^2\alpha}$$
$$S = a^2 \cdot \sqrt{sin^2\alpha}$$

Nyní je nutné si uvědomit, že úhel α je ostrý a tudíž hodnota $sin\alpha$ je kladná. Proto platí $\sqrt{sin^2\alpha} = | sin\alpha | = sin\alpha$.

Rovnici $S = a^2 \cdot \sqrt{sin^2\alpha}$ lze proto upravit na tvar:

$$S = a^2 \cdot sin\alpha$$

Výška v_a kosočtverce je kolmá na jeho stranu a lze ji pomocí vhodně zvoleného pravoúhlého trojúhelníka (obr. 2.7) vyjádřit následujícím vztahem $v_a = a \cdot sin\alpha$. Po dosazení do vztahu $S = a^2 \cdot sin\alpha$ získáme následující známý vztah:

$$S = a \cdot v_a$$

Ekvivalentními úpravami vztahu $S = \frac{e \cdot f}{2}$ jsme získali vztah $S = a \cdot v_a$. Vztah $S = \frac{e \cdot f}{2}$ lze používat jako vztah pro výpočet obsahu kosočtverce.□

ÚKOL 2.7

Je dán čtverec $ABCD$ s délkami úhlopříček $|AC| = e$ a $|BD| = f$. Ověřte, zda pomocí vztahu $S = \frac{e \cdot f}{2}$ lze vypočítat obsah čtverce.

ÚKOL 2.8

V kosočtverci $KLMN$ je dána velikost úhlopříček $|KM| = e, |LN| = f$. Víme, že $e : f = 15 : 8$. Vypočítejte velikost vnitřních úhlů, obsah a obvod kosočtverce v závislosti na délce úhlopříčky e. (*Návod: Využijte podobnost.*)

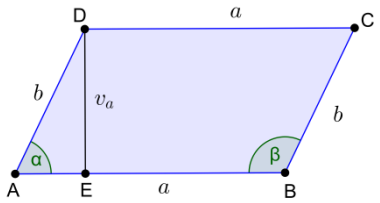
2.1.4 Kosodélník

Pro kosodélník s délkami stran a, b platí následující vztahy:

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$S = a \cdot v_a$$

Symbol v_a značí výšku kosodélníka, jak je vyznačeno na obr. 2.8. Bod E je patou výšky.



Obr. 2.8

PŘÍKLAD 2.6

Vypočítejte obvod a obsah kosodélníka $ABCD$, pokud pro délky stran a, b a výšku v_a platí $a : b : v_a = 4:3:2$.

Řešení

Ze zadání platí následující rovnosti: $a = 4\,k, b = 3\,k$ a $v_a = 2\,k$, $k \in (0; \infty)$. Vzhledem k tomu, že až na k-násobek známe délku všech stran kosodélníka, je možné dopočítat jeho obvod.

$$o = 2(a + b)$$
$$o = 2(4k + 3k)$$
$$o = 14\,k$$

Pro výpočet obsahu S platí:

$$S = a \cdot v_a$$
$$S = 4k \cdot 2k$$
$$S = 8\,k^2$$

V závěru bychom si měli uvědomit, že obdélníků, které splňují zadání této úlohy je nekonečně mnoho – konkrétní řešení vždy závisí na parametru k.

ÚKOL 2.9

Vypočítejte délky stran a, b a velikost úhlu α pro kosodélník z příkladu 2.6, pokud víte, že:

a) Obsah daného kosodélníka je 200 cm^2.

b) Obvod daného kosodélníka je 91 cm.

c) Číselně se obvod daného kosodélníka rovná jeho obsahu.

d) Číselně se pětinásobek obvodu daného kosodélníka rovná trojnásobku jeho obsahu.

e) Číselně se obvod daného kosodélníka rovná jeho obsahu zvětšenému o 3 cm^2.

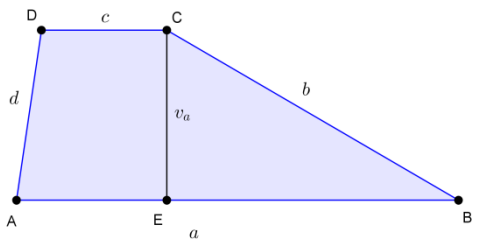
2.1.5 Lichoběžník

Pro lichoběžník s délkami stran a, b, c, d platí následující vztahy:

$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{v_a\,(a+c)}{2}$$

Symbol v_a značí výšku lichoběžníka, jak je uvedeno na obr. 2.9. Bod E je patou výšky.



Obr. 2.9

PŘÍKLAD 2.7

Je dán čtyřúhelník, jehož dvě protilehlé navzájem rovnoběžné strany mají poměr délek 1:3 a jehož obsah je 250 m^2. Nejdelší strana čtyřúhelníka je rovnoběžná s protější stranou a je o 6 metrů delší než jeho nejdelší sousední strana. Vzdálenost rovnoběžných stran čtyřúhelníka je 11 metrů. Určete typ čtyřúhelníka. Vypočítejte obvod daného čtyřúhelníka s přesností na 2 desetinná místa metru.

Řešení

Čtyřúhelník má právě jednu dvojici rovnoběžných stran (druhá dvojice stran nebude rovnoběžná, protože dvě navzájem rovnoběžné strany čtyřúhelníka nejsou stejné velikosti, a tudíž zbylé dvě strany nemohou být navzájem rovnoběžné). Jedná se o lichoběžník a jeho vrcholy nyní označme postupně *A, B, C, D*.

Známe obsah lichoběžníka a nyní si jej načrtneme. Předpokládejme, že strana a je nejdelší. Pokud též předpokládáme, že b je zmíněná, o 6 m kratší, sousední strana, potom je ze zadaných údajů možné určit následující závislosti mezi stranami $b = a - 6, c = \frac{a}{3}$. Dále známe výšku lichoběžníka $v_a = 11$. Můžeme vypočítat délku strany a ze vztahu pro obsah lichoběžníka:

$$S = \frac{(a + c) \cdot v_a}{2}$$

Po dosazení za c , v_a a S získáme:

$$\frac{(a+\frac{a}{3})\cdot 11}{2} = 250$$

$$\frac{4}{3}a = \frac{500}{11}$$

$$a = \frac{375}{11} \doteq 34{,}09$$

Nyní je možné vypočítat i velikosti dalších stran pomocí vztahů $b = a - 6, c = \frac{a}{3}$.

$$b = a - 6 = 34{,}09 - 6 = 28{,}09$$

$$c = \frac{a}{3} = \frac{34{,}09}{3} \doteq 11{,}36$$

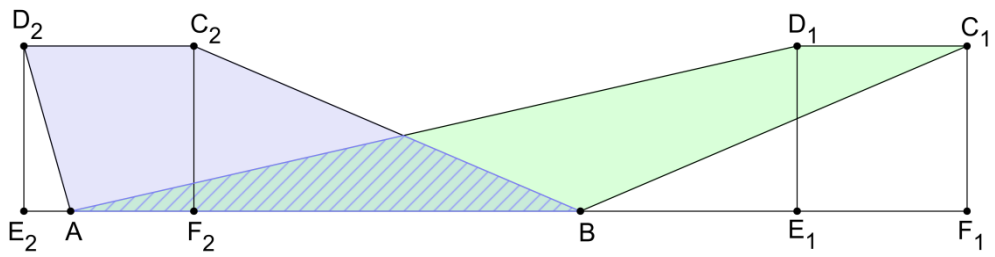
Před výpočtem délky poslední strany lichoběžníka je nutné si uvědomit, že lichoběžník není zadán jednoznačně. Daná úloha má 2 řešení, což je ilustrováno na obr. 2.10. Řešení pro lichoběžník ABC_1D_1 je značeno indexem 1, řešení pro lichoběžník ABC_2D_2 je značeno indexem 2.

Určeme velikost úsečky BF_1 (obr. 2.10) pomocí pravoúhlého trojúhelníka F_1BC_1, kterou následně budeme potřebovat při výpočtu délky strany d_1. V pravoúhlém trojúhelníku F_1BC_1 platí věta Pýthagorova, tedy:

$$|BF_1|^2 = |BC_1|^2 - |FC_1|^2$$

$$|BF_1|^2 = (28{,}09)^2 - 11^2$$

$$|BF_1| \doteq 25{,}85$$



Obr. 2.10

Dále vypočteme délku úsečky AF_1. Z obrázku je patrný následující vztah:

$$|AF_1| = |AB| + |BF_1|$$

$$|AF_1| = 34{,}09 + 25{,}85$$

$$|AF_1| = 59{,}94$$

S pomocí obr. 2.10 je možné zjistit i velikost úsečky AE_1. Víme, že $C_1D_1E_1F_1$ je obdélník, a proto platí $|E_1F_1| = |C_1D_1| = 11{,}36$. Velikost úsečky AE_1 lze vypočítat z následujícího vztahu:

$$|AE_1| = |AF_1| - |E_1F_1|$$

$$|AE_1| = 59{,}94 - 11{,}36$$

$$|AE_1| = 48{,}58$$

Pomocí trojúhelníka AE_1D_1 lze vypočíst délku poslední strany lichoběžníka, tedy:

$$|AD_1|^2 = |AE_1|^2 + |D_1E_1|^2$$
$$|AD_1|^2 = 48{,}58^2 + 121$$
$$|AD_1| \doteq 49{,}81$$

Nyní již můžeme vypočítat obvod ze vztahu:

$$o_1 = a + b + c + d_1$$
$$o_1 = 34{,}09 + 28{,}09 + 11{,}36 + 49{,}81$$
$$o_1 = 123{,}35$$

Nyní vypočítáme obvod lichoběžníka ABC_2D_2. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky F_1BC_1 a F_2BC_2 jsou shodné, je i délka strany F_2B shodná s délkou strany F_1B, tedy přibližně 25,85 m. Dále určíme délku úsečky AF_2, jejíž délku budeme potřebovat pro výpočet délky strany d_2. Z obrázku 2.10 je patrný následující vztah:

$$|AF_2| = |AB| - |BF_2|$$
$$|AF_2| = 34{,}09 - 25{,}85$$
$$|AF_2| = 8{,}24$$

Z obrázku lze dále vyčíst i velikost úsečky AE_2. Víme, že $C_2D_2E_2F_2$ je obdélník, a proto platí $|E_2F_2| = |C_2D_2| = 11{,}36$. Velikost úsečky AE_2 lze vypočítat z následujícího vztahu:

$$|AE_2| = |E_2F_2| - |AF_2|$$
$$|AE_2| = 11{,}36 - 8{,}24$$
$$|AE_2| = 3{,}12$$

Pomocí trojúhelníka AE_2D_2 určíme délku poslední strany lichoběžníka, tedy:

$$|AD_2|^2 = |AE_2|^2 + |D_2E_2|^2$$
$$|AD_2|^2 = 3{,}12^2 + 121$$
$$|AD_2| = 11{,}43$$

Obvod o_2 můžeme vypočítat ze vztahu:

$$o_2 = a + b + c + d_2$$
$$o_2 = 34{,}09 + 28{,}09 + 11{,}36 + 11{,}43$$
$$o_2 = 84{,}97$$

Obvod lichoběžníka je přibližně roven buď 84,97 metrů, nebo 123,35 metrů.

ÚKOL 2.10

V závislosti na délce strany k vyjádřete vztah pro obsah lichoběžníka *KLMN*, pro jehož délky stran platí: $k = 2m$ a $l = 2n$ a dále víme, že $|\sphericalangle LKN| = 60°$.

ÚKOL 2.11

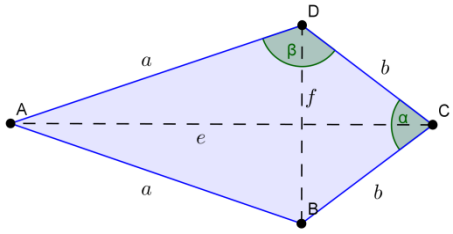
Vypočítejte obvod a obsah lichoběžníka *STUV*, pokud poměr délek stran t, u, v a výšky v_s ke straně s je $t : u : v : v_s = 10 : 26 : 17 : 8$ a požadujeme-li, aby:

a) Jeho obsah byl maximální.

b) Jeho obsah byl minimální.

(Nápověda: V obou případech nejprve lichoběžník sestrojte ve vhodném měřítku. Následně úlohu řešte obecně.)

2.1.6 Deltoid



Obr. 2.11

Deltoid patří mezi obecné čtyřúhelníky. Pro deltoid s délkami stran a, a, b, b platí následující vztahy:

$$o = 2a + 2b$$

$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$

V předešlém vztahu symboly e, f značí délky úhlopříček deltoidu, které je možné z trojúhelníků *ACD* a *BCD* pomocí kosinové věty (obr. 2.11) takto vypočítat:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot cos\beta$$

$$f^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b \cdot cos\alpha$$

Zajímavé je, že vztah pro výpočet obsahu S deltoidu je stejný jako pro obsah libovolného čtverce či kosočtverce, jak bylo ukázáno v příkladu 2.5 a úkolu 2.7.

PŘÍKLAD 2.8

Vypočtěte obsah deltoidu *ABCD* o obvodu 42 m, je- li poměr jeho stran $a : b = 7 : 5$. Velikost úhlopříčky e je shodná s délkou strany a, velikost úhlopříčky f je shodná s délkou strany b.

Řešení

Máme zadaný obvod a poměr dvou stran deltoidu. Nejprve si délku strany a vyjádříme v závislosti na délce strany b pomocí vztahu:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{5}$$

$$a = \frac{7}{5}b$$

Následně si napíšeme vztah pro obvod a dosadíme za délku strany a a obvod.

$$o = 2a + 2b$$

$$42 = \frac{14}{5}b + 2b$$

Získáme $b = \frac{105}{12}$. Ze vztahu $a = \frac{7}{5}b$ vypočítáme délku strany a.

$$a = \frac{7}{5}b$$

$$a = \frac{7}{5} \cdot \frac{105}{12} = \frac{49}{4}$$

Pro výpočet obsahu deltoidu využijeme rovnosti $a = e, b = f$. Nyní určíme obsah pomocí vztahu:

$$S = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$S = \frac{\frac{49}{4} \cdot \frac{105}{12}}{2}$$

$$S \doteq 53{,}59$$

Obsah zadaného deltoidu je přibližně roven 53,59 m^2.

ÚKOL 2.12

Vypočítejte poměr délek stran a: b deltoidu, pokud víte, že dle značení na obr. 2.11 platí pro poměr jeho úhlopříček vztah $e : f = 4 : 7$ a pro poměr délky strany a a délky úhlopříčky e platí $a : e = 5 : 6$. Výpočty provádějte s přesností na 2 desetinná místa.

ÚKOL 2.13

Jak se změní obsah daného deltoidu, pokud:

a) Jednu úhlopříčku prodloužíme na dvojnásobek původní délky.

b) Jednu úhlopříčku zkrátíme na třetinu původní délky a druhou prodloužíme o třetinu.

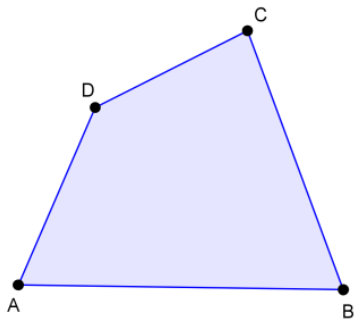
c) Jednu úhlopříčku zkrátíme o pětinu a druhou pětkrát zvětšíme.

2.1.7 Obecný čtyřúhelník

Pro obecný čtyřúhelník s délkami stran a, b, c, d platí pro obvod následující vztah:

$$o = a + b + c + d$$

Obecný vztah pro výpočet obsahu S libovolného čtyřúhelníka závisí na velikostech jeho vnitřních úhlů. Pokud chceme vypočítat jeho obsah a neznáme velikosti vnitřních úhlů, je nutné daný čtyřúhelník rozdělit na části, jejichž obsah již vypočítat umíme či jejichž obsah se naučíme počítat v následující kapitole.



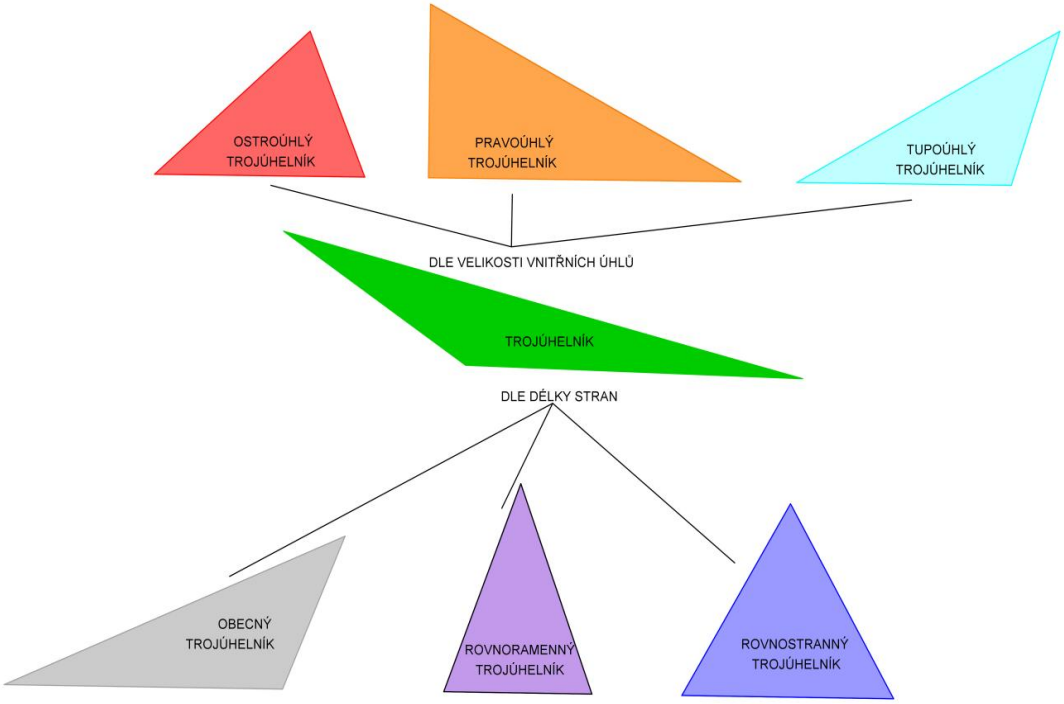
Obr. 2.12

ÚKOL 2.14

Vypočítejte obvod čtyřúhelníka se stranami a, b, c, d, pokud víte, že platí následující rovnosti: $2a + 4b + c = 23, 3a + 4c - 6d = 0, 3a - 4b + 5c - 2d = 23$, $\frac{2a+3c+15}{b+7d} = \frac{5}{3}$. Následně sestrojte libovolné 3 čtyřúhelníky, které splňují zadání této úlohy. Jaký bychom získali čtyřúhelník, pokud víme, že strana a je rovnoběžná se stranou c? Daný čtyřúhelník klasifikujte a vypočtěte jeho obsah. Předpokládejte, že získané délky stran jsou v centimetrech.

2.2 Trojúhelníky

Trojúhelník je mnohoúhelník se třemi stranami a třemi vrcholy. Klasifikace trojúhelníků je na obr 2.13. Prvním kritériem klasifikace je velikost vnitřních úhlů, druhým velikost stran.



Obr 2.13

Pro každý trojúhelník s délkami stran a, b, c a výškou v_a platí:

$$o = a + b + c$$

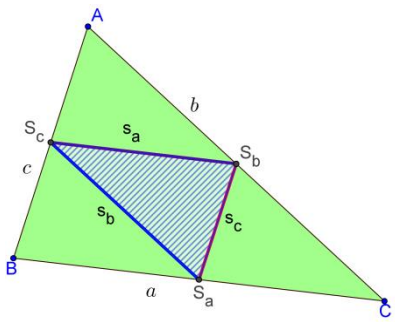
$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{o}{2} \cdot \left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - c\right)}$$

Poslednímu z výše uvedených vztahů se říká Hérónův vzorec. Tento vztah je zajímavý tím, že díky němu lze vypočítat obsah trojúhelníka, když známe pouze délky jeho stran.

PŘÍKLAD 2.9

Dokažte následující tvrzení: *„Je dán trojúhelník ABC se středy stran S_a, S_b, S_c. Trojúhelník $S_aS_bS_c$ má vůči trojúhelníku ABC poloviční obvod a čtvrtinový obsah.“*



Obr. 2.14

Řešení

Nejprve určíme vztah pro obvod. Důkaz vychází z vlastností střední příčky trojúhelníka, která spojuje středy dvou stran a je rovnoběžná se stranou, se kterou

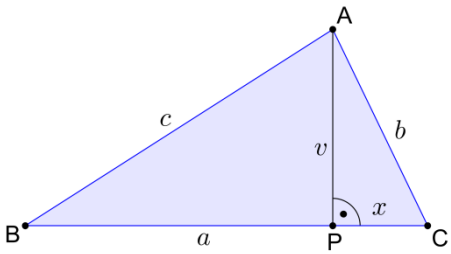
nemá žádný společný bod. Vůči této straně má střední příčka **poloviční délku**. Úsečka s_a (obr. 2.14) je střední příčkou vzhledem ke straně a, úsečka s_b je střední příčkou vzhledem ke straně b, úsečka s_c je střední příčkou vzhledem ke straně c. Z toho plyne, že všechny délky stran příčkového trojúhelníka $S_aS_bS_c$ jsou vůči délkám stran původního trojúhelníka ABC poloviční, a proto je i obvod příčkového trojúhelníka poloviční.

Pomocí středních příček jsme rozdělili trojúhelník ABC na 4 shodné trojúhelníky, neboť každý z nich má právě jednu stranu délky $\frac{a}{2}$, právě jednu stranu délky $\frac{b}{2}$ a právě jednu stranu délky $\frac{c}{2}$. Jelikož obsah celého trojúhelníka je rozdělen mezi 4 shodné trojúhelníky, pak obsah každého z nich je vůči obsahu trojúhelníka ABC čtvrtinový. Tímto je tvrzení dokázáno. □

PŘÍKLAD 2.10

Dokažte, že pro výpočet obsahu trojúhelníka ABC s obvodem o platí Hérónův vzorec:

$$S = \sqrt{\frac{o}{2} \cdot \left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - c\right)}$$



Obr. 2.15

Řešení

Během důkazu budeme pracovat s obr. 2.15 a využívat jeho značení. Označíme velikost úsečky PC jako x. Na obr. 2.15 jsou vyznačeny dva pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých platí Pýthagorova věta a tedy i následující vztahy:

$$(a - x)^2 + v^2 = c^2$$
$$x^2 + v^2 = b^2$$

Výraz $(a - x)^2$ v první rovnici upravíme podle vzorce $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ a následně odečteme druhou rovnici od první. Získáme:

$$a^2 - 2ax = c^2 - b^2$$

Z tohoto vztahu vyjádříme neznámou x:

$$a^2 - c^2 + b^2 = 2ax$$
$$\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a} = x$$

Využijeme nerovnosti $b > x$, která je splněna, neboť odvěsna pravoúhlého trojúhelníka je vždy kratší než jeho přepona (obr 2.15). Následně do rovnice $x^2 + v^2 = b^2$ dosadíme za x a vyjádříme v:

$$\left(\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)^2 + v^2 = b^2$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)^2$$

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)^2}$$

Právě díky nerovnosti $b > x$ víme, že výraz pod odmocninou je kladný a tudíž poslední úprava byla ekvivalentní. Upravíme tento výraz na společný jmenovatel a částečným odmocněním získáme:

$$v = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{2a}$$

Nyní tento výraz dosadíme do vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníka a vhodně upravíme.

$$S = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$S = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{2a}$$

$$S = \frac{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 - c^2 + b^2)^2}}{4}$$

V dalších úpravách opakovaně využijeme vzorce $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ a také vzorce $A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$.

$$S = \frac{\sqrt{[2ab - (a^2 - c^2 + b^2)] \cdot [2ab + (a^2 - c^2 + b^2)]}}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{(-a^2 + 2ab + c^2 - b^2) \cdot (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)}}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{[c^2 - (a - b)^2] \cdot [(a + b)^2 - c^2]}}{4}$$

$$S = \frac{\sqrt{(c + a - b) \cdot (c - a + b) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b - c)}}{4}$$

Upravíme tak, aby v každé závorce byl obsažen součet všech délek stran, tj. $a + b + c$.

$$S = \frac{\sqrt{(c + a + b - 2b) \cdot (c + a + b - 2a) \cdot (a + b + c) \cdot (a + b + c - 2c)}}{4}$$

Nyní využijeme vztahu pro výpočet obvodu trojúhelníka $o = a + b + c$ a upravíme:

$$S = \sqrt{\frac{(o - 2b) \cdot (o - 2a) \cdot o \cdot (o - 2c)}{16}}$$

$$S = \sqrt{\frac{(o - 2b)}{2} \cdot \frac{(o - 2a)}{2} \cdot \frac{o}{2} \cdot \frac{(o - 2c)}{2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{o}{2} \cdot \left(\frac{o}{2} - a\right)\left(\frac{o}{2} - b\right)\left(\frac{o}{2} - c\right)}$$

Dokázali jsme platnost Hérónova vzorce.□

ÚKOL 2.15

Je dán trojúhelník *PQR*. Označme π jeho vnitřní úhel při vrcholu P a ρ jeho vnitřní úhel při vrcholu *R*. S přesností na jedno desetinné místo vypočítejte obsah a obvod trojúhelníka *PQR*, pokud:

a) $p = 8$ cm, $q = 11$ cm, $r = 15$ cm

b) $p = 8$ cm, $t_p = 6$ cm, $v_p = 5{,}3$ cm

c) $p = 7$ cm, $\pi = 25°19'$ a $\rho = 107°6'$

Výsledný trojúhelník klasifikujte podle obr. 2.14.

ÚKOL 2.16

Vypočítejte, jak se změní obsah trojúhelníka *ABC*, pokud:

a) Délku strany a zvětšíme o jednu čtvrtinu, výšku trojúhelníka v_a zvětšíme na její dvojnásobek.

b) Výšku trojúhelníka zmenšíme o třetinu a následně zvětšíme o 20 %.

c) Výšku trojúhelníka zvětšíme na 1,25násobek původní délky a základnu zkrátíme o pětinu.

ÚKOL 2.17

Vypočítejte obvod a obsah trojúhelníka *ABC*, pokud víte, že pro poměr velikostí vnitřních úhlů platí $\alpha : \beta : \gamma = 4 : 9 : 11$ a jeho obvod je 1 m. Výpočty provádějte s přesností na jedno desetinné místo.

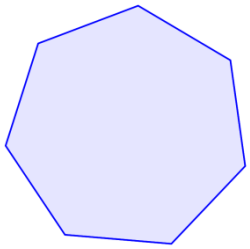
ÚKOL 2.18 *(Pepíkova hádanka)*

Pepíkův soused má zahradu ve tvaru trojúhelníka a dal za úkol Pepíkovi spočítat její výměru. Pepík změřil rozměry zahrady, avšak údaje ztratil. Zapamatoval si jen dva údaje. Za prvé, že délka nejdelší strany je o 85 metrů kratší než součet délek zbylých stran zahrady. Za druhé, že rozdíl délek dvou kratších stran je roven délce nejkratší strany této zahrady. Pomozte Pepíkovi vypočítat rozměry této zahrady.

2.3 Pravidelné konvexní mnohoúhelníky

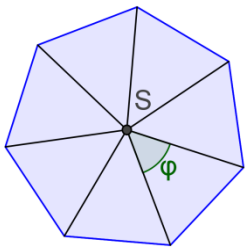
Pro pravidelné konvexní mnohoúhelníky s n stranami délky a platí pro výpočet obvodu vztah:

$$o = n \cdot a$$



Obr. 2.16

Nebudeme uvádět vztah pro výpočet obsahu S kvůli jeho složitosti. Místo toho si ukážeme návod, jak lze určit obsah n-úhelníka s již získanými znalostmi.



Obr. 2.17

Pokud spojíme každý vrchol n-úhelníka s jeho středem, získáme n trojúhelníků. V případě, že je n-úhelník pravidelný, získáme n shodných rovnoramenných trojúhelníků, pro pravidelný šestiúhelník získáme šest rovnostranných trojúhelníků. Obsah každého z těchto trojúhelníků budeme značit S_T. Platí:

$$S = n \cdot S_T$$

Výpočtem obsahu trojúhelníka jsme se již zabývali v kapitole 2.2. S pomocí obr 2.17 zjistíme, jak lze vypočítat velikost úhlu φ. Velikost úhlu u vrcholu S v každém ze shodných trojúhelníků je stejná, proto platí:

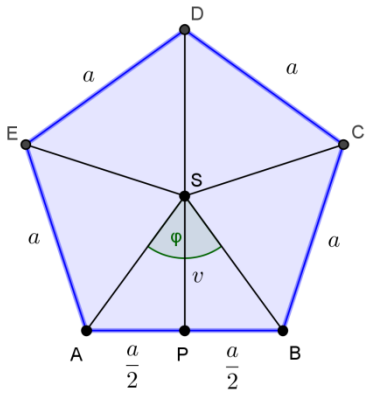
$$n \cdot \varphi = 360^\circ$$

Z toho důvodu pro velikost úhlu φ platí vztah:

$$\varphi = \frac{360^\circ}{n}$$

PŘÍKLAD 2.11

Je dán pravidelný pětiúhelník o délce strany a. Určete vztah pro jeho obvod a obsah.



Obr. 2.18

Řešení

Je-li zadána délka strany pětiúhelníka, pak jeho obvod vypočítat ze vztahu:

$$o = 5a$$

Nyní vypočítáme obsah pětiúhelníka, který lze rozdělit na 5 shodných rovnoramenných trojúhelníků (obr. 2.18). Velikost úhlu φ je proto 72°. Pro určení obsahu trojúhelníka ABS je nejprve nutné najít vztah mezi výškou v trojúhelníka ABS a délkou jeho základny a.

Trojúhelník ABS je možné rozdělit výškou v na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky (obr. 2.18). V obou vzniklých trojúhelnících platí následující vztah:

$$tg\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{v}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme výšku v , přičemž dosadíme velikost úhlu φ.

$$v = \frac{\frac{a}{2}}{tg(36^\circ)}$$

Pro obsah trojúhelníka ABS platí:

$$S_T = \frac{a \cdot v}{2}$$

Dosadíme za výšku v a po úpravě získáme:

$$S_T = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{tg(36^\circ)}$$

Víme, že zadaný pětiúhelník se skládá z pěti shodných trojúhelníků o obsahu S_T. Proto platí vztah:

$$S = 5 \cdot S_T$$

Po úpravě:

$$S = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{tg(36^\circ)}$$

Pro obvod pětiúhelníka s délkou strany a platí vztah $o = 5a$, pro výpočet jeho obsahu platí $S = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{tg(36^\circ)}$.

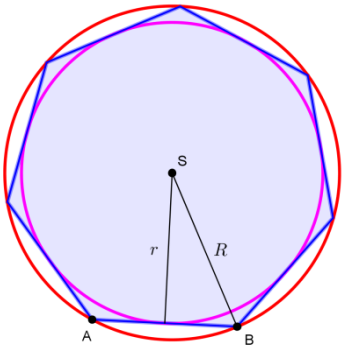
ÚKOL 2.19

Vypočítejte obsah a obvod pravidelného pětiúhelníka, jehož strany mají délku 2 cm.

POZNÁMKA 2.1

V následujícím úkolu budou používány tyto symboly:
a - délka strany n-úhelníka
r- poloměr kružnice vepsané n-úhelníku
R- poloměr kružnice opsané n-úhelníku

S pomocí obr 2.19 si uvědomte, že poloměr r odpovídá výšce trojúhelníka ABS, zatímco poloměr R odpovídá délce strany AS a BS. Pomocí zadaných údajů a věty Pýthagorovy lze vypočítat délku strany mnohoúhelníka. Tím lze úkol 2.20 řešit obdobně jako příklad 2.11.



Obr. 2.19

ÚKOL 2.20

S přesností na desetiny centimetru určete obvod a obsah pravidelného *n*-úhelníka, víme- li, že:

a) $n = 7, a = 6$ cm

b) $n = 6, R = 10$ cm

c) $n = 8, r = 6$ cm

d) $n = 5$, obsah a délka strany mnohoúhelníka jsou si číselně rovny

e) $n = 10, R = 2r$

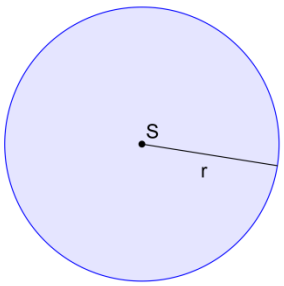
f) $n = 18, a = 4$ cm

g) $n = 360, R = 5$ cm

h) $n = 360, r = 5$ cm

3. Kruh a jeho části

Úvodem si připomeňme, že kružnicí rozumíme množinu všech bodů v rovině, které mají od daného bodu stejnou vzdálenost r, $r \in (0; \infty)$. Kruhem rozumíme množinu všech bodů v rovině, které mají od daného bodu vzdálenost r či menší, $r \in (0; \infty)$.



Obr. 3.1

3.1 Kružnice a kruh

Pro výpočet obvodu a obsahu kruhu (obr. 3.1) o poloměru r platí vztahy:

$$o = 2\pi r$$

$$S = \pi r^2$$

PŘÍKLAD 3.1

S přesností na dvě desetinná místa vypočítejte poloměr kruhu, pro který platí, že:

a) Číselně se obsah kruhu rovná jeho obvodu.

b) Číselně je trojnásobek obsahu kruhu zmenšený o 1 m^2 roven dvojnásobku jeho obvodu zvětšeného o 5 m.

Řešení

a) Ze zadání plyne následující rovnost:

$$S = o$$

Využijme vztahů pro výpočet obvodu a obsahu kruhu a vyjádříme jeho poloměr r:

$$\pi \cdot r^2 = 2\pi \cdot r$$

$$r = 2$$

Poloměr kruhu je 2 *j*, kde *j* je příslušná jednotka délky.

b) Ze zadání plyne následující rovnost:

$$3S - 1 = 2o + 5$$

Dosadíme ze vztahů pro výpočet obvodu a obsahu kruhu a upravíme.

$$3\pi \cdot r^2 - 1 = 4\pi \cdot r + 5$$

$$3\pi \cdot r^2 - 4\pi \cdot r - 6 = 0$$

Kořeny této rovnice určíme pomocí diskriminantu s tím, že pro jejich výpočet použijeme aproximaci $\pi \doteq 3{,}14$. Kořeny kvadratické rovnice jsou $r_1 \doteq 1{,}71$ m a $r_2 \doteq -0{,}37$ m. Poloměr kruhu nemůže být záporný a tudíž jediným řešením je poloměr kruhu $r_1 \doteq 1{,}71$ m.

Poloměr kruhu je přibližně 1,71 m.

ÚKOL 3.1

S přesností na dvě desetinná místa proveďte výpočet obvodu a obsahu kruhu, pokud:

a) Poloměr kruhu je 2,8 cm.

b) Průměr kruhu je 9 cm.

c) Poloměr kruhu je π cm.

ÚKOL 3.2

Sestrojte kružnici k o libovolném poloměru. Tato kružnice vymezuje kruh K. Následně sestrojte takovou kružnici l, která má s kružnicí k právě jeden společný bod a zároveň platí, že průměr kružnice k je poloměrem kružnice l, která vymezuje kruh L. Následně sestrojte takovou kružnici m, která má s kružnicí l právě jeden společný bod a zároveň platí, že průměr kružnice l je poloměrem kružnice m. Tímto získáme kruh M. Určete, kolikrát je větší obvod a obsah kruhu M než obvod a obsah kruhu K.

ÚKOL 3.3

Jsou dány tři kruhy označené A, B, C. Vypočítejte obvod a obsah všech uvedených kruhů, pokud jsou zadány tyto podmínky:

i) Poloměr kruhu A zmenšený o jeden centimetr je trojnásobkem poloměru kruhu B zvětšeného o centimetr.

ii) Obsah kruhu C je 0,64násobkem obsahu kruhu A.

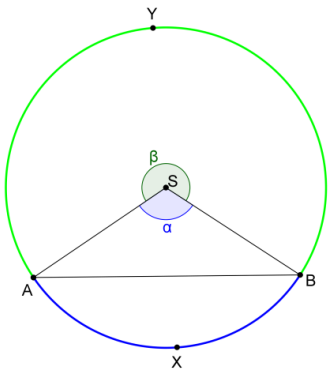
iii) Obvod kruhu A zmenšený o 70 % je roven obvodu kruhu B zvětšeného o pětinu.

ÚKOL 3.4

S přesností na desetiny centimetru vypočítejte obsah a obvod kruhu o poloměru 5 cm. Vypočtené hodnoty porovnejte s obsahem a obvodem mnohoúhelníků v úkolu 2.20, části g) a h).

3.2 Části kružnice

Na obr. 3.2 je vyznačena kružnice k o poloměru r a různé body A, B, X, Y. Dva různé body A a B rozdělují kružnici na dvě části, které se nazývají **kružnicové oblouky** – dle obr. 3.2 je označíme AXB a AYB. Úhel α přísluší oblouku AXB, zatímco úhel β přísluší oblouku AYB. Úhel sevřený úsečkami AS, BS budeme nazývat středovým úhlem. Kružnicový oblouk je jednoznačně zadán poloměrem r kružnice, jejíž je součástí a příslušným středovým úhlem.



Obr. 3.2

Pro délku l kružnicového oblouku s poloměrem r a středovým úhlem α (jehož velikost dosazujeme ve stupních) platí:

$$l = 2\pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

ÚKOL 3.5

Jaká je vzájemná poloha kružnice k a přímky AB na obr. 3.2? Své tvrzení zdůvodněte.

ÚKOL 3.6

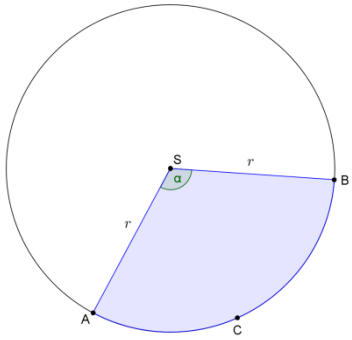
Za použití aproximace $\pi \doteq \frac{22}{7}$ určete délku kružnicového oblouku vymezeného kružnicí o poloměru r a velikostí příslušného středového úhlu α, je – li dáno:

a) $r = 5\text{ cm}, \alpha = 120^\circ$

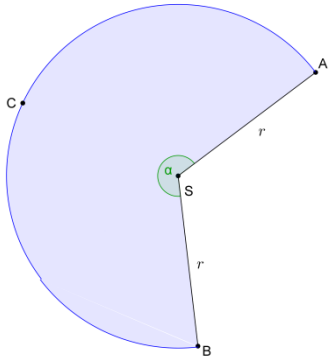
b) $r = 4{,}2\text{ cm}, \alpha = 72^\circ$

3.3 Části kruhu

Úvodem si připomeňme dva rovinné útvary, které jsou částí kruhu s hraniční kružnicí k. Jedná se o kruhovou výseč a kruhovou úseč. Jsou-li dány 2 různé body A, B na kružnici k se středem S, pak úsečky AS, BS dělí kruh na dvě **kruhové výseče** (obr.3.3 a 3.4). **Kruhová úseč** je část kruhu omezená kružnicovým obloukem a úsečkou, která spojuje krajní body daného kružnicového oblouku (obr. 3.7 a 3.8).



Obr. 3.3



Obr. 3.4

3.3.1 Kruhová výseč

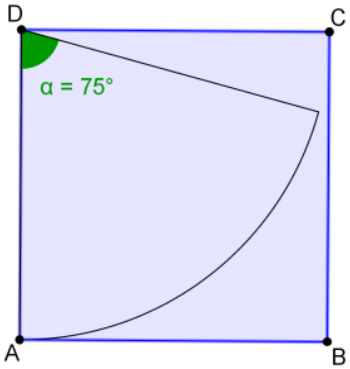
Pro kruhovou výseč (obr. 3.3, obr. 3.4) určenou kruhem o poloměru r s velikostí středového úhlu α, $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$[1], platí následující vztahy:

$$o = 2r + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

$$S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

PŘÍKLAD 3.2

Určete poměr mezi obsahem kruhové výseče se středovým úhlem velikosti 75° a obsahem čtverce $ABCD$ délky strany a podle obr. 3.5.



Obr. 3.5

Řešení

Nejprve označíme obsah kruhové výseče jako S_V a obsah čtverce jako S. Napíšeme vztahy pro jejich obsahy:

$$S_V = \pi \cdot a^2 \cdot \frac{75^\circ}{360^\circ}$$

$$S = a^2$$

Odtud získáme:

[1] Pokud platí $\alpha = 360^\circ$, pak se jedná o kruh.

$$\frac{S_V}{S} = \frac{\pi \cdot a^2 \cdot \frac{15}{72}}{a^2}$$
$$\frac{S_V}{S} = \frac{15\pi}{72}$$

Poměr obsahu kruhové výseče a čtverce je $\frac{15\pi}{72}$.

ÚKOL 3.7

S přesností na setiny centimetru vypočítejte obvod a obsah kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru r, jejíž středový úhel je α, je–li dáno:

a) $r = 11\text{cm}, \alpha = 53°13'$

b) $r = 8{,}3\text{ cm}, \alpha = 259°27'$

c) $r = e\text{ cm}, \alpha = 78°$

(*Poznámka: Při řešení tohoto příkladu počítejte s přibližnou hodnotou e ≐ 2,72cm.*)

ÚKOL 3.8

Jak se změní obsah kruhové výseče, která je částí kruhu o poloměru r, jejíž středový úhel je α, pokud:

a) Zvětšíme středový úhel α o polovinu.

b) Zvětšíme poloměr r na dvojnásobek.

c) Zmenšíme poloměr r na třetinu.

d) Zmenšíme poloměr r o třetinu.

e) Zvětšíme středový úhel α o 20 % a zároveň zmenšíme poloměr r o 20 %.

3.3.2 Kruhová úseč

Pro kruhovou úseč (obr. 3.7 a obr. 3.8) určenou kružnicovým obloukem o poloměru r a s příslušným středovým úhlem α, $\alpha \in (0°, 360°)$, platí následující vztahy:

Pro $\alpha \in (0; 180°)$

$$o = 2 \cdot r \cdot \left(\pi \cdot \frac{\alpha}{360°} + sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$
$$S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} + \frac{a \cdot v_a}{2}$$

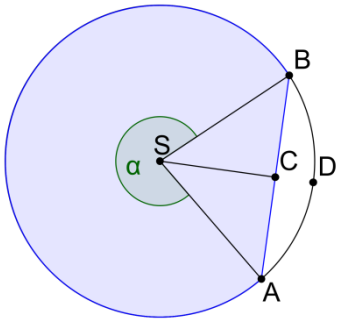
Pro $\alpha = 180°$

$$o = \pi \cdot r$$
$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

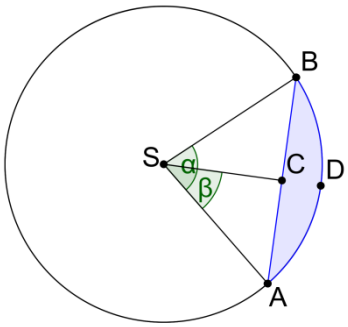
Pro $\alpha \in (180°; 360°)$

$$o = 2 \cdot r \cdot \left(\pi \cdot \frac{\alpha}{360°} + sin\left(\frac{360° - \alpha}{2}\right)\right)$$
$$S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} + \frac{a \cdot v_a}{2}$$

V předchozích vztazích je v souladu s obr. 3.7 a 3.8 použit symbol a pro délku úsečky AB a symbol v_a pro délku úsečky SC. V daném obrázku odpovídá velikost úhlu β velikosti úhlu $\frac{\alpha}{2}$.



Obr. 3.7



Obr. 3.8

PŘÍKLAD 3.3

Kolikrát se zvětší obsah kruhové úseče, která je vymezena kružnicovým obloukem o poloměru r, pokud:

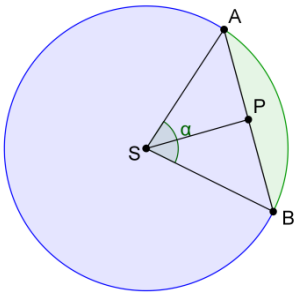
a) Zvětšíme poloměr r na dvojnásobek.

b) Zmenšíme poloměr r o třetinu.

c) Zvětšíme poloměr r o 35 % a následně zmenšíme o čtvrtinu.

d) Zmenšíme poloměr r o sedminu a následně zvětšíme o polovinu.

Velikost příslušného středového úhlu α je konstantní (neměnná).



Obr. 3.9

Řešení

Všechny části tohoto příkladu se řeší podobně a z toho důvodu zde bude ukázkově vyřešena pouze část c).

Označme si původní poloměr kruhu vymezující kruhovou úseč jako r, poloměr po zvětšení jako r' a poloměr po zmenšení rozměrů jako r''. Ze zadání plynou následující vztahy:

$$r' = 1{,}35r$$
$$r'' = 0{,}75r'$$

Do první rovnice dosadíme za r' ze druhé rovnice. Získáme:

$$r'' = 1{,}35 \cdot 0{,}75r$$
$$r'' = 1{,}012\,5r'$$

S pomocí obr. 3.9 a s využitím zavedeného značení odvodíme následující vztahy:

$$a = 2r \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$v_a = r \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Dosadíme do vztahu pro výpočet obsahu kruhové úseče[2] a upravíme.

$$S = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} - r^2 \cdot sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$S = r^2 \cdot \left\{\pi \frac{\alpha}{360^\circ} - sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

Takto jsme odvodili vztah pro obsah kruhové úseče určené kruhem o poloměru r a příslušným středovým úhlem α. Pro obsah S'' výsledné kruhové úseče určené kružnicí o poloměru r'' platí tento vztah:

$$S'' = (r'')^2 \cdot \left\{\pi \frac{\alpha}{360^\circ} - sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

Díky získaným vztahům lze nyní dát do poměru S''a S.

$$\frac{S''}{S} = \frac{(r'')^2 \cdot \left\{\pi \frac{\alpha}{360^\circ} - sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}}{r^2 \cdot \left\{\pi \frac{\alpha}{360^\circ} - sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right\}}$$

Upravíme a ze vztahu $r'' = 1{,}012\ 5r$ dosadíme za r''. Získáme:

$$\frac{S''}{S} = 1{,}025\ 156\ 25$$

Obsah výsledné kruhové úseče je 1,025 156 25násobkem obsahu původní kruhové úseče, tedy lze říci, že obsah kruhové úseče byl zvětšen přibližně o 2,52 %.

ÚKOL 3.9

Vypočítejte obvod a obsah kruhové úseče, která je vymezena kružnicovým obloukem o poloměru r se středovým úhlem velikosti α, je–li dáno:

a) $r = 6{,}9$ cm, $\alpha = 79^\circ\ 5'$

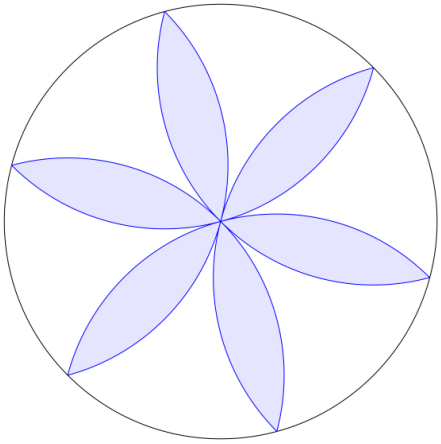
b) $r = 1{,}5$ dm, $\alpha = 211^\circ 49'$

(*Poznámka: Při řešení tohoto příkladu počítejte s přibližnou hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$ a s přesností na milimetry.)*

[2] Příklad je dále řešen pouze pro případ $\alpha < 180^\circ$, obdobně bychom mohli provést výpočet pro $\alpha \geq 180^\circ$, přičemž bychom dospěli ke stejnému výsledku.

4. Složené obrazce

V této kapitole se budeme zabývat obsahy a obvody složených obrazců. Na základě vlastností obsahu uvedených v první kapitole budeme nyní řešit úlohy, ve kterých budou využívány i další vztahy z předchozích kapitol.



Obr. 4.1

PŘÍKLAD 4.1

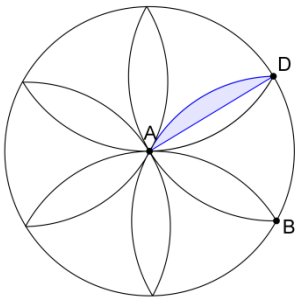
Vyjádřete obsah tmavě vybarvené části obrazce na obr. 4.1 v závislosti na poloměru zobrazené kružnice. Kružnice a kružnicové oblouky na tomto obrázku mají shodný poloměr r.

Řešení

K výpočtu obsahu budeme využívat vztah pro výpočet obsahu kruhu $S = \pi \cdot r^2$.

Obrazec nám může připomínat květinu se šesti okvětními lístky. Nejdříve vyjádříme obsah jednoho "okvětního lístku". Z obr. 4.1 plyne, že všechny okvětní lístky jsou shodné a zároveň každý okvětní lístek se skládá ze dvou shodných kruhových úsečí. Celý obrazec je tedy složen z 12 shodných kruhových úsečí.

Na obr. 4.2 vidíme modře vyznačenu jednu kruhovou úseč, která tvoří jednu dvanáctinu obsahu daného obrazce. Z definice kružnice je patrné, že délka úsečky AD je r stejně jako poloměr kružnice se středem B, která vymezuje danou kruhovou úseč.



Obr. 4.2

O kruhové úseči víme, že poloměr kružnice, která ji ohraničuje, je r. Velikost úsečky AD je též r. Z obr. 4.2 vyplývá, že velikost příslušného středového úhlu $\alpha < 180°$. Nyní dosadíme tyto údaje do vztahu pro výpočet jejího obsahu $S_Ú$, získáme:

$$S_Ú = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{r \cdot v_a}{2} \qquad (4.1)$$

Trojúhelník ABD je rovnostranný (obr. 4.3). Shodnou délku všech jeho stran si nyní odůvodníme. Body B a D leží na kružnici, která má střed v bodě A, proto platí $|AD| = |AB|$. Body A a B leží na kružnici se středem D a tedy $|AD| = |BD|$. Z posledních dvou rovností plyne: $|AD| = |AB| = |BD|$. Trojúhelník ABD je rovnostranný se stranami délky r. V rovnostranném trojúhelníku platí, že velikost jeho všech vnitřních úhlů je rovna 60°, a proto $\alpha = 60°$.

Nyní označme střed strany AD jako bod E (obr. 4.3). Délka úsečky AE je tedy $\frac{r}{2}$. Pomocí pravoúhlého trojúhelníka ABE je možné vypočítat výšku v trojúhelníku ABD, kterou označíme v_a, $v_a = |BE|$. Využijeme Pýthagorovy věty v trojúhelníku ABE:

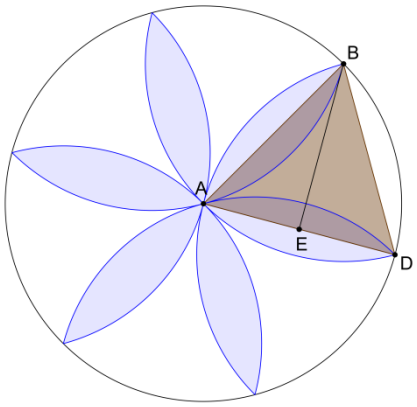
$$|AE|^2 + |BE|^2 = |AB|^2$$

Známe velikost stran AE a AB a za jejich velikosti dosadíme, následně vyjádříme výšku v_a.

$$\left(\frac{r}{2}\right)^2 + {v_a}^2 = r^2$$

$${v_a}^2 = \frac{3}{4}r^2$$

$$v_a = \frac{\sqrt{3}}{2}r$$



Obr 4.3

Nyní můžeme do vztahu (4.1) dosadit za výšku v_a výraz $\frac{\sqrt{3}}{2}r$ a získáme tím vztah pro výpočet obsahu jedné kruhové úseče vyznačené na obr. 4.2:

$$S_{Ú} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{60°}{360°} - \frac{r^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

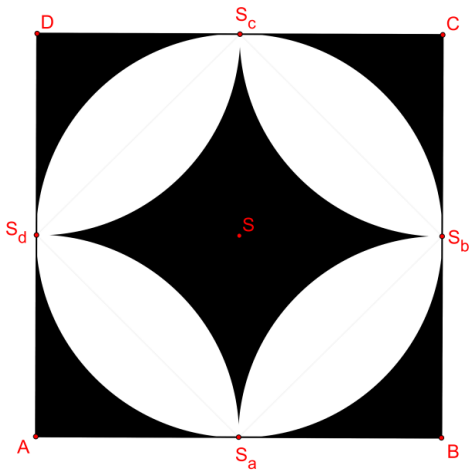
Celý obrazec se skládá z dvanácti takových kruhových úsečí, tedy jeho obsah S je dvanáctinásobný. Výsledný vztah pro obsah obrazce na obr. 4.1 je:

$$S = 2 \cdot \pi \cdot r^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot r^2$$

ÚKOL 4.1

Paní Malá navrhuje vzory dlaždiček a jeden ze svých návrhů si černobíle vytiskla (obr. 4.4). Vyjádřete obsah tmavě vybarvené části v závislosti na délce strany a čtvercové dlaždičky.

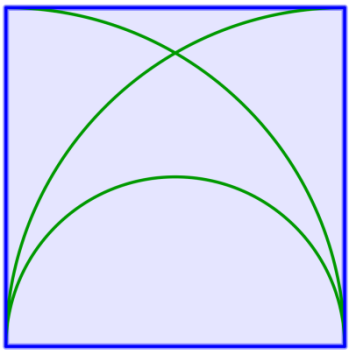
(Návod: Pro lepší orientaci byly některé důležité body červeně zvýrazněny. Z obrázku je jasné, že kružnice, jejichž středy jsou ve vrcholech čtverce, mají poloměr $\frac{a}{2}$. Stejně tak je tomu u kružnice vepsané čtverci se středem v bodě S. Místo obsahu tmavě vybarvené části vypočítáme obsah bílé části a tento obsah odečteme od celkového obsahu čtverce. Tím získáme obsah tmavě vybarvené části obrazce, tedy jde o analogickou úlohu k příkladu 4.1.)



Obr. 4.4

ÚKOL 4.2

V závislosti na délce strany čtverce určete vztah pro obsah uzavřeného rovinného útvaru vymezeného pouze zelenými křivkami dle obr. 4.5.



Obr. 4.5

ÚKOL 4.3

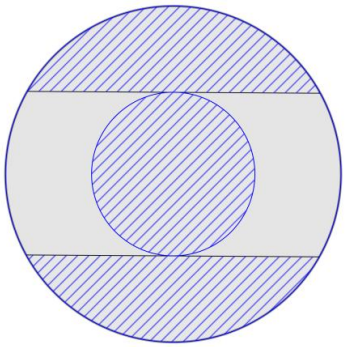
Určete vztah pro obsah nevyšrafované části obrazce na obr. 4.6 v závislosti na poloměru r jedné z kružnic, pokud platí, že:

a) poměr poloměrů kružnic $r: R = 1: 2$

b) poměr poloměrů kružnic $r: R = 3: 5$

c) poměr průměrů kružnic $D: d = 2: 1$

Ve všech částech úlohy vypočtěte, kolik procent z celkového obsahu zabírá nevyšrafovaná část. Počítejte s přesností na desetiny procenta.



Obr. 4.6

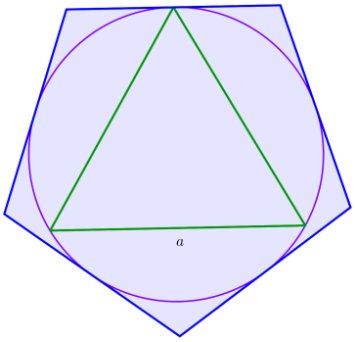
PŘÍKLAD 4.2

Na obr. 4.7 je znázorněn pravidelný pětiúhelník, kružnice a rovnostranný trojúhelník. V závislosti na délce strany a trojúhelníka určete vztah pro obvod a obsah pětiúhelníka.

Řešení

Nejprve určíme poloměr dané kružnice k (obr 4.7), neboť tento údaj bude potřebný při výpočtu obsahu pětiúhelníka. Abychom určili poloměr dané kružnice, je nejprve nutné určit velikost výšky CK trojúhelníka ABC. Tento trojúhelník je rovnostranný a pata výšky K leží ve středu úsečky AB. K výpočtu využijeme Pýthagorovu větu v pravoúhlém trojúhelníku AKC (obr. 4.8):

$$|AC|^2 - |AK|^2 = |KC|^2$$

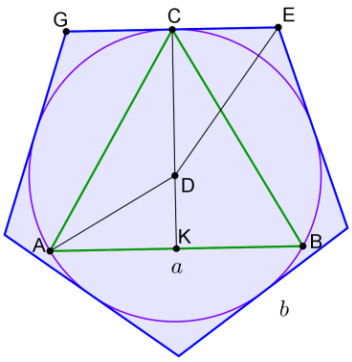


Obr. 4.7

Dosadíme a upravíme:

$$a^2 - \frac{a^2}{4} = |KC|^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = |KC|$$



Obr. 4.8

Dále využijeme vlastností těžiště trojúhelníka. Jelikož v rovnostranném trojúhelníku splývají výšky a těžnice, je úsečka CK výškou a zároveň těžnicí. Těžiště D dělí tuto

úsečku tak, že platí $|CD| = 2 \cdot |KD|$. Z toho plyne, že $|CD| = \frac{2}{3}|KC|$. Dopočteme velikost úsečky CD:

$$|CD| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

Poloměr kružnice k odpovídá délce úsečky CD, jak je ilustrováno na obr. 4.8.

Z definice kružnice je patrná rovnost $|AD| = |CD|$. Nyní využijeme toho, že pravidelný pětiúhelník je možné rozdělit na 5 shodných rovnoramenných trojúhelníků. Jedním z nich je trojúhelník DEG. Tento trojúhelník lze rozdělit výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky, z nichž k výpočtům budeme využívat trojúhelník CDE. Je snadné vypočíst, že velikost úhlu CDE je 36°. Neznámou délku strany pětiúhelníka označíme jako b, tedy $|CE| = \frac{b}{2}$. V trojúhelníku je možné využít funkci tangens:

$$tg(36°) = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{3}}$$

Využijeme aproximace $tg(36°) \doteq 0{,}727$. Vyjádříme b:

$$b \doteq 1{,}454 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

Pro obvod pravidelného pětiúhelníka se stranami délky b platí vztah:

$$o = 5b$$

Naším cílem bylo určit vztah pro obvod pětiúhelníka v závislosti na délce strany trojúhelníka, a proto nyní dosadíme ze vztahu $b \doteq 1{,}454 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3}$. Výsledný vztah je:

$$o \doteq 7{,}27 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

Chceme-li určit vztah pro obsah pětiúhelníka, využijeme návodu z úvodu kapitoly 2.3. Rozdělíme pravidelný pětiúhelník na 5 shodných rovnoramenných trojúhelníků o obsahu S_T, tedy pro obsah S pětiúhelníka platí $S = 5 \cdot S_T$. Jedním z takových shodných trojúhelníků je na obr. 4.8 trojúhelník DEG. Délka jeho základny je b, výška k základně je rovna $\frac{\sqrt{3}}{3}a$. Vypočteme obsah S_T trojúhelníka DEG.

$$S_T = \frac{b \cdot \sqrt{3}a}{6}$$

S využitím vztahu $b \doteq 1{,}454 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3}$ upravíme:

$$S_T \doteq 1{,}454 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6}$$

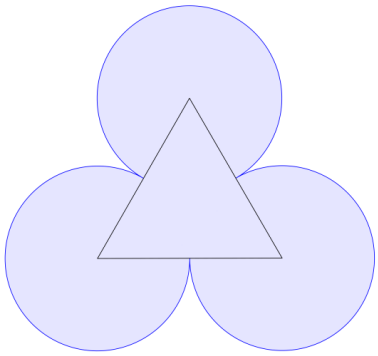
$$S_T \doteq 1{,}454 \cdot \frac{a^2}{6}$$

Vypočítali jsme obsah trojúhelníka *DEG*, obsah pravidelného pětiúhelníka je pětkrát větší.

$$S = 5 \cdot S_T$$

$$S \doteq \frac{7{,}27a^2}{6}$$

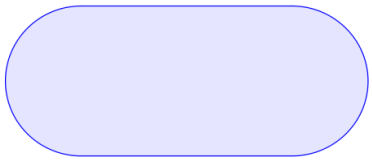
Obvod zadaného pětiúhelníka je přibližně $7{,}27 \cdot \frac{\sqrt{3}a}{3}$ jeho obsah je přibližně roven $\frac{7{,}27}{6}a^2$.



Obr. 4.9

ÚKOL 4.4

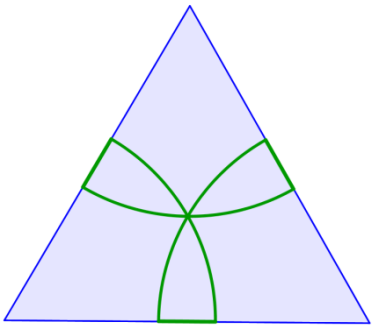
V závislosti na poloměru r shodných kruhů na obr. 4.9 vyjádřete vztah pro obvod a obsah celého rovinného útvaru.



Obr. 4.10

ÚKOL 4.5

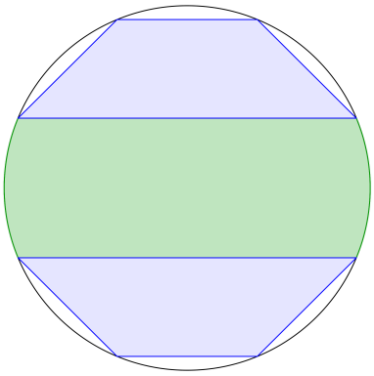
Na obr. 4.10 je nakreslen půdorys zimního stadionu. Délka stadionu je čtyřikrát větší než jeho šířka. Plocha stadionu je 3 000 m^2. Spočítejte jeho šířku a délku s přesností na 2 desetinná místa metru.



Obr. 4.11

ÚKOL 4.6

Vypočítejte obvod uzavřeného nekonvexního rovinného útvaru, který je na obr. 4.11 zeleně ohraničen. Určete v procentech (s přesností na promile), jakou část obsahu daného rovnostranného trojúhelníka tvoří obsah zeleně vyznačeného rovinného útvaru.



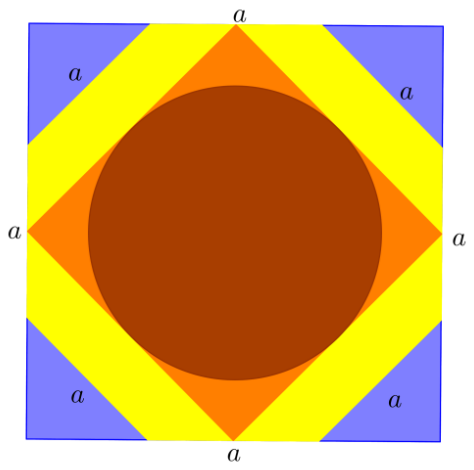
Obr. 4.12

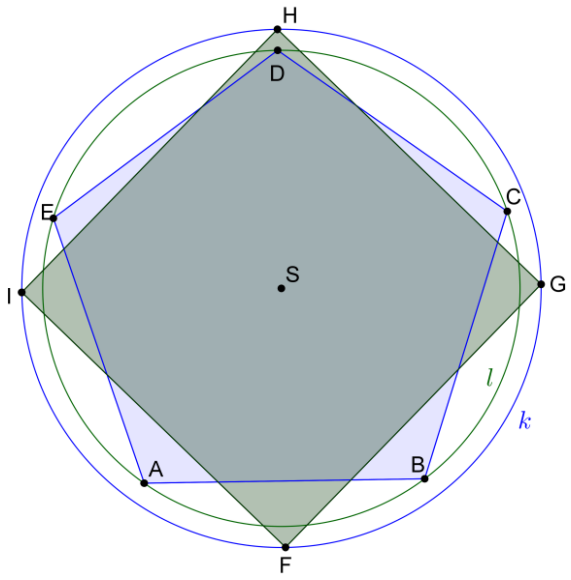
ÚKOL 4.7

Do kruhu na obr. 4.12 byl vepsán pravidelný osmiúhelník, který byl částečně překryt zeleně vyznačeným rovinným útvarem. V závislosti na poloměru kruhu r určete vztah pro přibližný výpočet obsahu a obvodu zeleně vyznačeného obrazce.

ÚKOL 4.8

Na modrý koberec čtvercového tvaru byl položen stůl s deskou ve tvaru pravidelného osmiúhelníka. Na stůl byl položen oranžový čtvercový ubrus a na tento ubrus byl položen ještě jeden hnědý kulatý ubrus. Způsob umístění jednotlivých předmětů je ilustrován na obr. 4.13. Kolik procent obsahu čtvercové desky stolu zabírá hnědý ubrus? Určete s přesností na desetiny procenta.





Obr. 4.13 (vlevo)

Obr. 4. 14 (vpravo)

PŘÍKLAD 4.3

Na obrázku 4.14 je znázorněn čtverec *FGHI* se svou kružnicí opsanou k a pravidelný pětiúhelník *ABCDE* se svou opsanou kružnicí l. Kružnice k určuje kruh K a kružnice l určuje kruh L. Určete poměr obsahu kruhu K ku obsahu kruhu L, víme-li, že obsah obou zadaných mnohoúhelníků je shodný.

Řešení

Označme délku strany pětiúhelníka a a délku strany čtverce b. Pro obsah čtverce platí vztah $S = b^2$. Pro obsah pravidelného pětiúhelníka byl v příkladě 2.11 odvozen vztah $S = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{tg(36^\circ)}$. Z obr. 4.14 plyne následující rovnost, kterou upravíme:

$$b^2 = 5 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{5}{tg(36^\circ)}$$

$$b = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{tg(36^\circ)}}$$

Označíme poloměr kružnice k jako R. Ten je roven polovině délky úhlopříčky daného čtverce:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

$$R = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{\frac{10}{tg(36^\circ)}}$$

Obsah S kruhu K lze nyní vypočítat:

$$S = \pi R^2$$

$$S = \pi \frac{a^2}{8} \cdot \frac{5}{tg(36^\circ)}$$

Určíme druhou mocninu poloměru r kružnice l (neurčujeme přímo poloměr, neboť to není nutné pro další výpočty). Využijeme kosinovou větu v rovnoramenném trojúhelníku ASB na obr. 4.14 a dále upravíme:

$$a^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(72^\circ)$$
$$a^2 = 2r^2 - 2 \cdot r^2 \cdot \cos(72^\circ)$$
$$a^2 = 2r^2(1 - \cos(72^\circ))$$
$$r^2 = \frac{a^2}{2 - 2\cos(72^\circ)}$$

Obsah S' kruhu L lze nyní vypočítat.

$$S' = \pi r^2$$
$$S' = \pi \frac{a^2}{2 - 2\cos(72^\circ)}$$

Určíme $\frac{S}{S'}$:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\pi \frac{a^2}{8} \cdot \frac{5}{tg(36^\circ)}}{\pi \frac{a^2}{2 - 2\cos(72^\circ)}}$$
$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{5}{4tg(36^\circ)}}{\frac{1}{1 - \cos(72^\circ)}}$$
$$\frac{S}{S'} = \frac{5}{4tg(36^\circ)} \cdot (1 - \cos(72^\circ))$$

Po dosazení přibližných hodnot $tg(36^\circ) \doteq 0{,}727$ a $\cos(72^\circ) \doteq 0{,}309$, získáme:
$\frac{S}{S'} \doteq 1{,}188\ 1$.

Poměr obsahů kruhů K a L je přibližně 1,188 1.

PŘÍKLAD 4.4

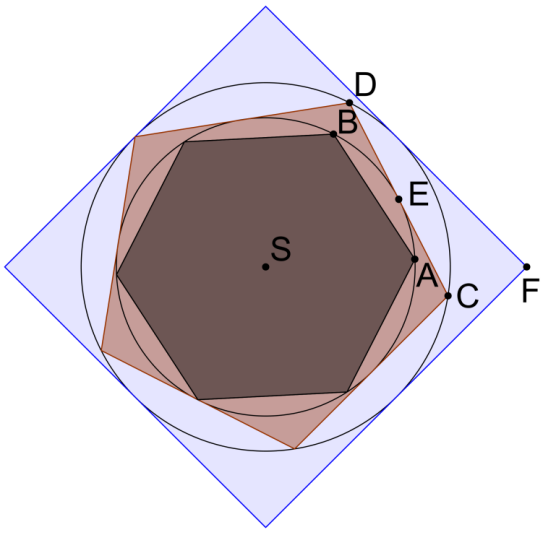
Na obr. 4.15 je dán pravidelný čtyřúhelník, kterému je vepsána kružnice. Do této kružnice je vepsán pravidelný pětiúhelník se svou kružnicí vepsanou, které je vepsán pravidelný šestiúhelník. S přesností na setiny určete:

a) Kolikrát je větší obvod daného pětiúhelníka než obvod daného šestiúhelníka?

b) Kolikrát je menší obvod pravidelného šestiúhelníka než obvod daného čtyřúhelníka?

Řešení

Vzhledem k analogickému postupu bude řešena pouze část a). Označme délku strany šestiúhelníka a. Jelikož lze pravidelný šestiúhelník rozdělit na šest shodných rovnostranných trojúhelníků (např. ABS na obr. 4.15), je poloměr kružnice opsané roven délce jeho strany, tedy a.



Obr. 4.15

V následujících několika krocích budeme směřovat k vyjádření délky strany pětiúhelníka b v závislosti na délce strany šestiúhelníka a. Je možné i vyjádřit závislost délky strany šestiúhelníka a v závislosti na délce strany pětiúhelníka b, nicméně postup by byl analogický a z toho důvodu nebude ani uveden.

Nejprve využijeme definice kružnice, ze které plyne $|SE| = |AS|$. V pětiúhelníku vypočítáme velikost úhlu CSD, který dále budeme značit jako φ.

$$\varphi = \frac{360^\circ}{5}$$
$$\varphi = 72^\circ$$

Dále využijeme rovnoramenného trojúhelníka CSD, ve kterém je úsečka SE výškou a zároveň těžnicí ke straně CD. Z těchto vlastností a také z vlastností pravidelného pětiúhelníka plyne, že velikost úhlu CSE je rovna 36°. V pravoúhlém trojúhelníku CSE platí věta Pýthagorova:

$$|CS|^2 = |SE|^2 + |CE|^2$$

Za délku úsečky CE dosadíme $\frac{b}{2}$, za délku úsečky CS dosadíme výraz $\frac{a}{\cos(36^\circ)}$, který je možný získat aplikací goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku CSE. Použijeme $cos^2(36^\circ) \doteq 0{,}654\,5$. Získáme:

$$\frac{a^2}{0{,}654\,5} = a^2 + \frac{b^2}{4}$$

Vyjádříme neznámou b. Úpravami dané rovnice získáme výsledek $b \doteq 1{,}45a$. Záporný kořen rovnice neuvažujeme, neboť velikost strany mnohoúhelníka nemůže nabývat záporných hodnot. Nyní lze vypočítat požadované obvody. Obvod o_6 šestiúhelníka:

$$o_6 = 6 \cdot a$$

Obvod o_5 pětiúhelníka:

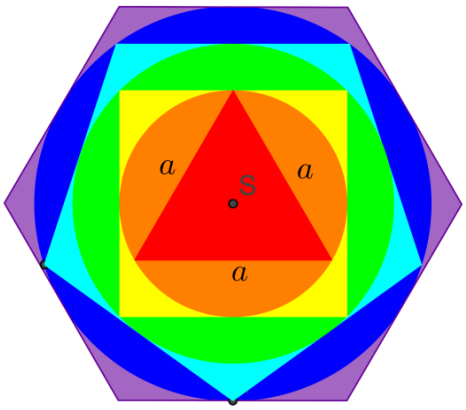
$$o_5 = 5 \cdot b$$
$$o_5 \doteq 5 \cdot 1{,}45a$$
$$o_5 \doteq 7{,}25a$$

Závěrem vypočteme poměr $\frac{o_5}{o_6} \doteq \frac{7{,}25a}{6 \cdot a} \doteq 1{,}21$.

Obvod pětiúhelníka je přibližně 1,21krát větší než obvod šestiúhelníka.

ÚKOL 4.9 (ZÁKEŘNÁ DUHA)

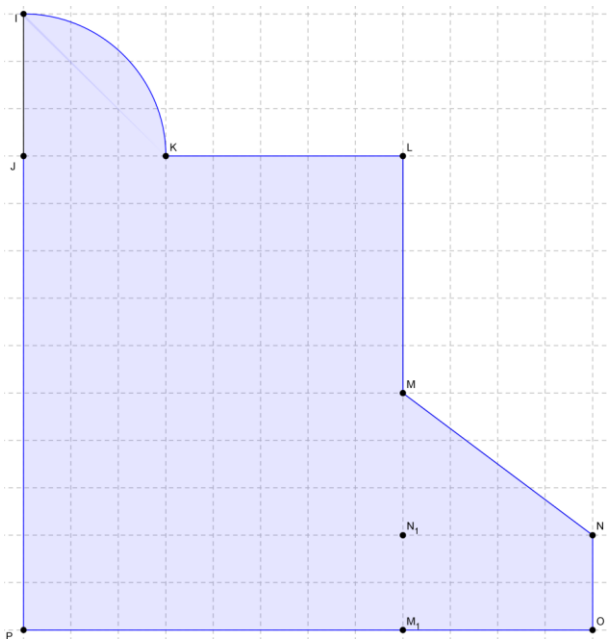
Na obr. 4.16 jsou barevně zakresleny pravidelné mnohoúhelníky a několik jim opsaných či vepsaných kružnic. Vyjádřete obsah daného pětiúhelníka a šestiúhelníka v závislosti na délce strany a rovnostranného trojúhelníka se středem S. Následně řešte danou úlohu pro délku strany trojúhelníka $a = 7$ cm. Nakonec určete s přesností na 2 desetinná místa délku strany trojúhelníka tak, aby obsah trojúhelníka byl třikrát menší než obsah šestiúhelníka.



Obr. 4.16

PŘÍKLAD 4.5

Vypočítejte obvod a obsah rovinného útvaru vyznačeného v jednotkové síti na obr. 4.17. Každý jednotkový čtverec této sítě má délku strany 1cm. Při výpočtu počítejte s přibližnou hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$.



Obr. 4.17

Řešení

Nejdříve určíme obvod daného obrazce. Začneme s výpočtem délky kruhového oblouku spojující body I a K a dále velikost úsečky MN. Z obrázku plyne, že poloměr tohoto oblouku odpovídá délce úsečky IJ.

Výpočet délky kruhového oblouku (jedná se o čtvrtinu kružnice):

$$o_k = \frac{\pi r}{2}$$
$$o_k = \frac{3\pi}{2}$$
$$o_k \doteq 4{,}71$$

Nyní určíme délku úsečky *MN*. Aplikací věty Pýthagorovy v pravoúhlém trojúhelníku MNN_1 zjistíme, že velikost této úsečky je 5. Nyní je možné obvod vypočíst:

$$o \doteq 4{,}71 + 5 + 5 + 5 + 2 + 12 + 13$$
$$o \doteq 46{,}71$$

Nyní vypočteme obsah zadaného obrazce. Daný rovinný útvar je možné rozdělit na kruhovou výseč, obdélníky PM_1LJ a M_1ONN_1 a trojúhelník MN_1N. Do známých vzorců pro obsah jednotlivých útvarů dosadíme a sečteme jejich obsahy:

$$S = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} + 10 \cdot 8 + 4 \cdot 2 + \frac{4 \cdot 3}{2}$$
$$S \doteq 108{,}13$$

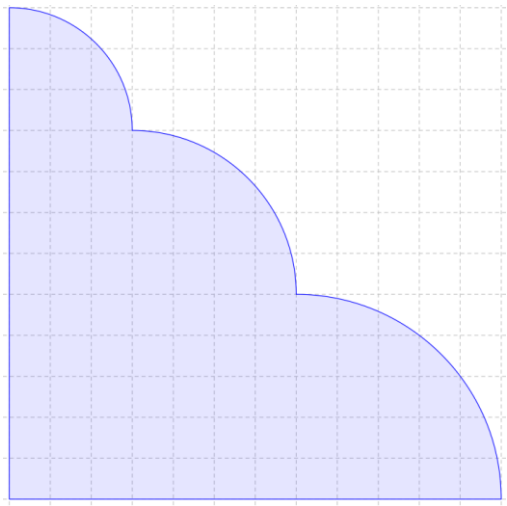
Obvod daného rovinného útvaru je přibližně 46,71 cm,obsah je přibližně 108,13 cm^2.

ÚKOL 4.10

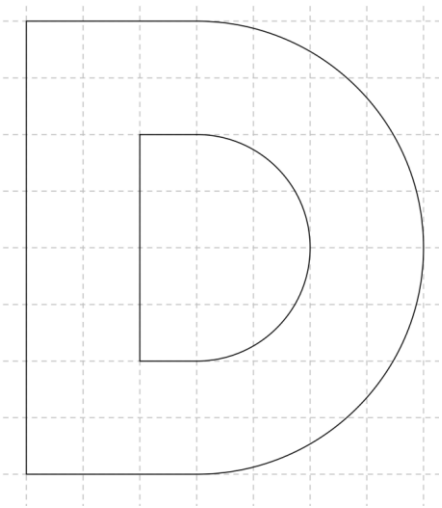
Vypočítejte obsah a obvod rovinného útvaru vyznačeného na obr. 4.18. Počítejte s přibližnou hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$. Délka strany jednotkového čtverce v síti je 1 cm.

ÚKOL 4.11

Vypočítejte obsah a obvod rovinného útvaru ve tvaru písmene D vyznačeného na obr. 4.19. Počítejte s přibližnou hodnotou $\pi \doteq 3{,}14$. Délka strany jednotkového čtverce v síti je 1 cm.



Obr. 4.18



Obr. 4.19

ÚKOL 4.12

Na obr. 4.20 nekonvexní mnohoúhelník. Představte si kružnici, která je do daného mnohoúhelníka vepsána a označme její poloměr r. Dále si představte kružnici, která je danému mnohoúhelníku opsána a její poloměr označte R. Pro poloměr kružnice opsané R a vepsané r tomuto mnohoúhelníku platí $R: r = 3: 2$. Vypočítejte obvod a obsah daného mnohoúhelníka s přesností na setiny.

ÚKOL 4.13

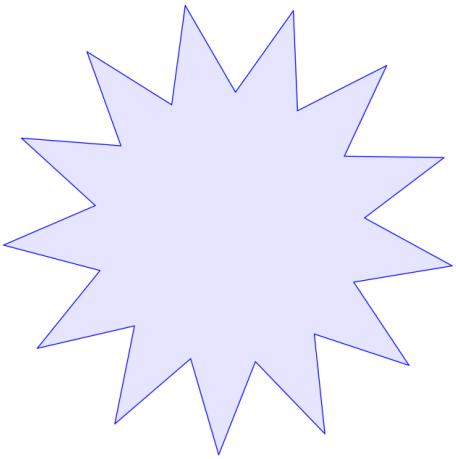
Vypočítejte obsah nekonvexního mnohoúhelníka z předchozí úlohy, pokud by pro poměr poloměrů opsané a vepsané kružnice mnohoúhelníku platilo $R: r = 7: 5$. Ostatní parametry z úkolu 4.12 jsou zachovány. Úlohu řešte nejdříve obecně a následně pro konkrétní příklady, je- li dáno:

a) $R = 21$ cm

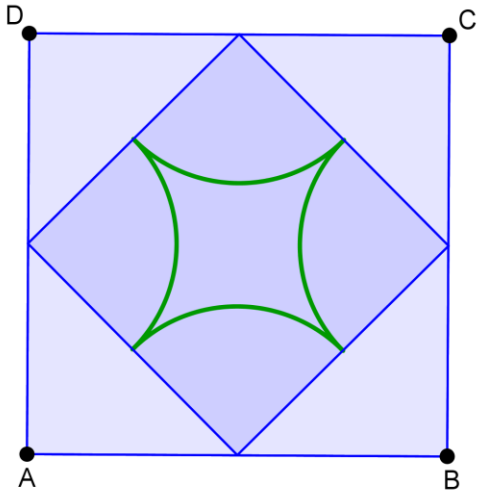
b) $r = 12{,}5$ cm

ÚKOL 4.14

S pomocí obr. 4.21 určete poměr obsahu rovinného útvaru omezeného pouze zelenou křivkou a obsahu čtverce $ABCD$. Dále určete délku strany čtverce $ABCD$ tak, aby obsah rovinného útvaru omezeného pouze zelenou křivkou byl 129 cm^2. Počítejte s přesností na dvě desetinná místa.



Obr. 4.20



Obr. 4.21

Výsledky úloh

1. Obsah a obvod rovinných útvarů

1.1 Výsledek závisí na zvoleném půdorysu zahrady.

2. Mnohoúhelníky

2.1 $S = \frac{1}{2}a^2$

2.2 $S = \frac{5}{4}a^2$

2.3 $o = 6a; S = \frac{1}{2}a^2$

2.4 $o = 2\sqrt{a^2 + b^2}\left(1 + \frac{b}{a}\right);\ S = \frac{b}{a}(a^2 + b^2)$

2.5 a) Obsah je čtvrtinový. b) Obsah je o třetinu menší.
c) Obsah je $\frac{10}{3}$násobný. d) Obsah se nezmění.

2.6 $a = \frac{8\sqrt{2} \pm 2\sqrt{32 - 3\sqrt{2}}}{3}$

2.7 Ano, lze.

2.8 $o = \frac{34}{15}e; S = \frac{4}{15}e^2)$

2.9 a) $a = 20$ cm; $b = 15$ cm; $\alpha = 41{,}81°$ b) $a = 26$ cm; $b = 19{,}5$ cm; $\alpha = 41{,}81°$
c) $a = 7$ cm; $b = 5{,}25$ cm; $\alpha = 41{,}81°$ d) $a = \frac{35}{3}$ cm; $b = \frac{35}{4}$ cm; $\alpha = 41{,}81°$
e) $a_1 = 6$ cm; $b_1 = 4{,}5$ cm; $\alpha = 41{,}81°$ nebo $a_2 = 1$ cm; $b_2 = 0{,}75$ cm; $\alpha = 41{,}81°$

2.10 $S = \frac{3\sqrt{3}}{32}k^2$

2.11 a) $o = 100k; S = 292k^2$ b) $o = 58k; S = 124k^2$

2.12 $a : b = 100 : 143$

2.13 a) Obsah je dvojnásobný.
b) Obsah po změně rozměrů je roven $\frac{4}{9}$ původního obsahu.
c) Obsah je čtyřnásobný.

2.14 $a = 2$ cm; $b = 3$ cm; $c = 7$cm; $d = 3$ cm

2.15 a) $o = 34$ cm; $S \doteq 58{,}5$ cm^2, obecný, tupoúhlý
b) $o \doteq 20{,}8$ cm; $S \doteq 21{,}2$ cm^2, obecný, ostroúhlý
c) $o \doteq 34{,}7$ cm; $S \doteq 40{,}6$ cm^2, obecný, tupoúhlý

2.16 a) Obsah je 2,5násobný. b) Obsah je 0,8násobný.
c) Obsah se nezmění.

2.17 $a \doteq 20{,}7$ cm; $b \doteq 38{,}3$ cm; $c \doteq 41{,}0$ cm

2.18 $o = 6a - 85; S = \frac{\sqrt{85 \cdot (6a - 85)(4a - 85)(2a - 85)}}{4}; a > 42{,}5$m

2.19 a) $o = 42$ cm; $S \doteq 130{,}8$ cm^2 b) $o = 60$ cm; $S \doteq 259{,}8$ cm^2
c) $o \doteq 39{,}8$ cm; $S \doteq 119{,}3$ cm^2 d) $o \doteq 6{,}3$ cm; $S \doteq 3{,}58$ cm^2
e) $o = 14{,}5$ cm; $S \doteq 2{,}9$ cm^2 f) $o \doteq 72$ cm; $S \doteq 408{,}3$ cm^2
g) $o \doteq 31{,}4$ cm; $S \doteq 78{,}5$ cm^2 h) $o \doteq 31{,}4$ cm; $S \doteq 78{,}5$ cm^2

3. Kruh a jeho části

3.1 a) $o \doteq 17{,}58$ cm; $S \doteq 24{,}62$ cm^2 b) $o \doteq 56{,}52$ cm; $S \doteq 254{,}34$ cm^2
c) $o = 2\pi^2$ cm; $S = \pi^3$ cm^2

3.2 Obvod bude čtyřnásobný, obsah šestnáctinásobný.

3.3 $r_a = 16$ cm; $r_b = 4$ cm; $r_c = 12{,}8$ cm

3.4 $o \doteq 31{,}4$ cm; $S \doteq 78{,}5$ cm^2

3.5 Jedná se o sečnu, neboť má s danou kružnicí společné 2 **různé** body.

3.6 a) $l \doteq \frac{220}{21}$ cm b) $l \doteq 5{,}28$ cm

3.7 a) $o \doteq 32{,}21$ cm; $S \doteq 56{,}16$ cm^2 b) $o \doteq 54{,}17$ cm; $S \doteq 155{,}79$ cm^2
c) $o \doteq 9{,}14$ cm; $S \doteq 5{,}03$ cm^2

3.8 a) Obsah bude 1,5násobkem. b) Obsah bude čtyřnásobný.
c) Obsah bude devětkrát menší. d) Obsah bude $\frac{6}{5}$násobkem.
e) Obsah bude $\frac{96}{125}$násobkem.

3.9 a) $o \doteq 18{,}3$ cm; $S \doteq 9{,}5$ cm^2 b) $o \doteq 84{,}3$ cm; $S \doteq 534{,}3$ cm^2

4. Složené obrazce

4.1 $S = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

4.2 $S = a^2 \cdot \frac{3\pi - 8}{8}$

4.3 a) $S \doteq \frac{\pi r^2}{3} + 2\sqrt{3}r^2$; 35,9 % b) $S \doteq (24 + 1{,}24\pi)r^2$; 35,5 %
c) $S \doteq \frac{\pi r^2}{3} + 2\sqrt{3}r^2$; 35,9 %

4.4 $S = r^2\left(\frac{5\pi}{2} + \sqrt{3}\right)$

4.5 Šířka stadionu je přibližně 28,15m, délka přibližně 112,6m.

4.6 $o = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + 2\sqrt{3} - 3\right)a$; 20,9 %

4.7 $o \doteq \frac{\pi r}{2} + 1{,}85r$; $S \doteq \frac{\pi r^2}{4} + 0{,}354r^2$

4.8 39,25 %

4.9 Obsah pětiúhelníka je přibližně 2,42 a^2. Obsah šestiúhelníka je přibližně 3,53 a^2. Poměr obsahů daného šestiúhelníka a trojúhelníka je vždy přibližně 4,076 – úloha nemá řešení.

4.10 $o = 6\pi + 24$ cm; $S = 12{,}5\pi$ cm^2

4.11 $o = 6\pi + 20$ cm; $S = 6\pi + 20$ cm^2

4.12 $o = 15{,}12r$; $S = 4{,}67r^2$

4.13 $o = 63{,}87r$; $S = 92{,}2r^2$
a) $o = 958{,}05$ cm ; $S = 20\,745$ cm^2 b) $o = 798{,}38$ cm ; $S = 14\,406{,}25$ cm^2

4.14 $S = \frac{a^2\,(4 - \pi)}{8}$; $a \doteq 34{,}67$ cm

Závěr

V bakalářské práci byly zahrnuty veškeré rovinné útvary, se kterými se žáci běžně setkávají na základních a středních školách, což je přínosem této sbírky. Ve sbírce je možné nalézt základní vztahy pro výpočet obvodu a obsahu daných rovinných útvarů. Dalším jejím přínosem je řada úloh, na kterých si žáci mohou procvičit vlastnosti obsahu. Příklady a úkoly jsou většinou doplněny o obrázky, které pomáhají porozumění zadání. Výsledky jsou uvedeny v poslední kapitole.

Během psaní této bakalářské práce jsem si uvědomil, že formulace přesného zadání je mnohem obtížnější než se může zdát na první pohled. Obdobně je tomu i při sestavování klasifikace rovinných útvarů, kdy je nutné každý pojem pečlivě definovat. Úkoly a příklady v této sbírce jsem vytvořil na základě inspirace z různých učebnic matematiky pro základní a střední školy.

Seznam použité literatury

Bečvář a kol. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Praha: Prometheus, 2003.

Kadleček, J. *Geometrie v rovině a prostoru pro střední školy.* Praha: Prometheus, 1996.

Molnár, J. *Matematika pro střední odborné školy - Planimetrie.* Praha: Prometheus, 2011.

Müllerová, J., Čižmár, J. D., & Macháček, V. *Matematika 7.* Praha: Prometheus, 1994.

Odvárko, O. *Matematika pro gymnázia - Goniometrie.* Praha: Prometheus, 1999.

Odvárko, O., & Kadleček, J. *Přehled matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií.* Praha: Prometheus, 2004.

Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia - Planimetrie.* Praha: Prometheus, 1997.

Vyšín J. a kol. *Geometrie pro 9. až 11. postupný ročník.* Praha: SPN, 1954.