

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ondřej Honzl

### **Bodové procesy úseček**

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

2006

Rád bych poděkoval RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za cenné rady při psaní této bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

V Praze dne 26.7.2006

Ondřej Honzl

# Obsah

Úvod	5
<b>1 Bodové procesy</b>	<b>6</b>
1.1 Základní definice	6
1.2 Charakteristiky bodových procesů	7
1.3 Poissonův proces	8
1.4 Stacionární procesy na $\mathcal{K}'$	8
<b>2 Stacionární Poissonův proces úseček</b>	<b>10</b>
2.1 Odhady délkové intenzity	10
2.2 Konkrétní volby rozdělení délek a orientací úseček	15
2.2.1 Rovnoměrné rozdělení délky úsečky	19
2.2.2 Exponenciální rozdělení délky úsečky	21
2.3 Porovnání odhadů rozptylů délkové intenzity	22
2.3.1 Obdélníkové okno	22
2.3.2 Čtvercové okno	23
Literatura	25

Název práce: Bodové procesy úseček  
Autor: Ondřej Honzl  
Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky  
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.  
e-mail vedoucího: zbynek.pawlas@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce obsahuje stručný úvod do teorie bodových procesů na úplném separabilním lokálně kompaktním metrickém prostoru. Rámcově je zmíněn speciální případ stacionárního procesu kompaktních množin. Dále se práce více zaměřuje na Poissonův proces úseček se známým rozdělením typického zrna. V rovinném případě pak ukazuje různé odhady délkové intenzity Poissonova procesu úseček, které jsou definovány na základě údajů získaných v okně pozorování. Hlavním zájmem práce se stává porovnávání těchto odhadů dle jejich rozptylů. Cílem tohoto srovnávání má být stanovení meze velikosti okna, která říká, dokud je lepší použít složitější odhad a odkdy je naopak rozumné použít odhad, jehož výpočet je snazší, ale který předpokládá, že máme více informací o pozorovaném procesu.

Klíčová slova: Poissonův proces, bodový proces úseček, odhad délkové intenzity

Title: Segment point processes  
Author: Ondřej Honzl  
Department: Department of Probability and Mathematical Statistics  
Supervisor: RNDr. Zbyněk Pawlas, Ph.D.  
Supervisor's e-mail address: zbynek.pawlas@mff.cuni.cz

Abstract: This work contains short introduction to the theory of point processes on complete separable locally compact metric space. In particular, it mentions stationary process of compact sets. In more detail, it deals with Poisson segment process with known distribution of primary grain. There are described various estimators for the length intensity in the planar case, which are based on information obtained from the sampling window. Major interest of this work is the comparison of the estimators according to their variances. The aim of this comparison is to find the bound for the window size, which establishes, when it is better to use more complex estimator and when we can use simpler estimator, which requires more information about observed process.

Keywords: Poisson process, segment point processes, length intensity estimation

# Úvod

Jednorozměrný bodový proces může být považován za speciální případ náhodného procesu, jenž je rodinou náhodných veličin indexovaných podmnožinou reálné osy. Často se používá zobecnění indexové množiny, která je nahrazena např. podmnožinou vícerozměrného eukleidovského prostoru, nebo podmnožinou vhodného metrického prostoru. Dostáváme pak prostorové nebo složitější bodové procesy. Bodové procesy mohou modelovat populace stromů v krajině, výskyt prachových částic apod.

Pro modelování prasklin a vad materiálů nitkovitého charakteru lze užít právě bodového procesu úseček. Tento proces se omezuje na prostor úseček s konečnou délkou v  $\mathbb{R}^d$ . V této práci se setkáváme s Poissonovým procesem úseček, jehož stacionární verze má velmi pěkné vlastnosti. Počty úseček v disjunktních oblastech jsou nezávislé náhodné veličiny s Poissonovým rozdělením s parametrem, který je roven konstantnímu násobku Lebesgueovy míry této oblasti.

Hlavním zájmem této práce je porovnání různých odhadů délkové intenzity stacionárního Poissonova procesu úseček dle jejich rozptylů. Činíme tak počítáním mezi takových, že pro větší okno pozorování se vyplatí použít odhad, který předpokládá znalost rozdělení typického zrna, na úkor standardního odhadu.

Práce je rozdělena na dvě hlavní části. V první kapitole jsou uvedeny základní definice a charakteristiky, které se týkají bodových procesů, hlavně stacionárního Poissonova procesu.

Druhá kapitola pojednává o Poissonově procesu úseček, délkové intenzitě tohoto procesu a jejich odhadech na základě realizace procesu v okně pozorování. Následně jsou zde počítány rozptyly uvedených odhadů pro konkrétní rozdělení typické úsečky. Na konci práce je uveden přehled nalezených mezí.

Závěrem chci opětovně poděkovat RNDr. Zbyňku Pawlasovi, Ph.D. za zadání práce a trpělivost při jejím vedení. Dále bych chtěl poděkovat svému bratrovi Karlu Honzlovi, za technickou pomoc s programem Mathematica, jehož licenci poskytuje Universita Karlova na svých počítačích, za což jí rovněž patří můj dík.

# Kapitola 1

## Bodové procesy

### 1.1 Základní definice

Nejprve uvedeme základní definice a věty potřebné v této práci. Uvedené věty a definice byly čerpány z [3] a [4].

Definujeme pojmy *náhodná míra* a *bodový proces* obecně na separabilním, lokálně kompaktním úplném metrickém prostoru  $X$ .

**Definice 1.1.1. (separabilní, lokálně kompaktní a úplný prostor)**

Metrický prostor  $(X, \varrho)$  se nazývá *separabilní*, jestliže v něm existuje spočetná hustá podmnožina. *Lokálně kompaktní* nazveme prostor  $(X, \varrho)$ , jestliže ke každému  $x \in X$  existuje okolí, jehož uzávěr je kompaktní množina. A konečně prostor  $(X, \varrho)$  je *úplný*, je-li každá cauchyovská posloupnost prvků z  $X$  konvergentní v tomto prostoru.

Dále budeme mlčky předpokládat, že  $(X, \varrho)$  má právě definované vlastnosti.

**Označení 1.1.2.** Budeme používat běžné značení pro systémy podmnožin na prostoru  $X$ . Borelovské množiny značíme  $\mathcal{B}(X)$ , omezené borelovské množiny  $\mathcal{B}_0(X)$  a kompaktní množiny  $\mathcal{K}(X)$ . Často píšeme stručněji např.  $\mathcal{K}$ , místo  $\mathcal{K}(X)$ .

**Definice 1.1.3. (lokálně konečná míra)** Nechť  $\mu$  je míra na  $(X, \mathcal{B}(X))$ . Potom je tato míra *lokálně konečná*, jestliže je konečná na omezených borelovských množinách. Budeme značit  $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}(X)$  množinu všech lokálně konečných měr na  $(X, \mathcal{B}(X))$ . Dále označme

$$\mathcal{N} \equiv \mathcal{N}(X) = \{\mu \in \mathcal{M} : \mu(B) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \text{ pro každou } B \in \mathcal{B}\},$$

tedy množinu všech lokálně konečných měr, které nabývají pouze celočíselných hodnot a nekonečna.

**Definice 1.1.4.** Na prostorech  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  zavedme následující  $\sigma$ -algebry:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \sigma\{\mu \mapsto \mu(B) \text{ měř.}, B \in \mathcal{B}\}, \\ \mathfrak{N} &= \{M \cap \mathcal{N} : M \in \mathfrak{M}\}. \end{aligned}$$

Symbolem  $\sigma\{\mu \mapsto \mu(B) \text{ m\check{e}ř.}, B \in \mathcal{B}\}$  značíme nejmenší  $\sigma$ -algebru na  $\mathcal{M}$ , vůči níž jsou měřitelná zobrazení  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná předpisem  $\mu \mapsto \mu(B)$  pro všechny borelovské množiny  $B$  na  $X$ .

**Definice 1.1.5. (náhodná míra)** Buď  $(\Omega, \Sigma, \text{Pr})$  pravděpodobnostní prostor. Měřitelné zobrazení  $\Psi : (\Omega, \Sigma, \text{Pr}) \rightarrow (\mathcal{M}, \mathfrak{M})$  se nazývá *náhodná míra* na  $X$ . Pravděpodobnostní míru  $Q = \text{Pr} \Psi^{-1}$  nazveme *rozdělení* náhodné míry bodového procesu a míru  $\Lambda(\cdot) = \mathbb{E} \Psi(\cdot)$  nazveme *mírou intenzity* náhodné míry  $\Psi$ .

**Definice 1.1.6. (bodový proces)** Měřitelné zobrazení  $\Phi : (\Omega, \Sigma, \text{Pr}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$  se nazývá *bodový proces* na  $X$ . Řekneme, že bodový proces je *jednoduchý*, jestliže  $\text{Pr}[\Phi \in \mathcal{N}^*] = 1$ , kde

$$\mathcal{N}^* = \{\nu \in \mathcal{N} : \nu(\{x\}) \leq 1, \text{ pro každé } x \in X\}.$$

Lze ukázat, že  $\mathcal{N}^* \in \mathfrak{N}$ .

## 1.2 Charakteristiky bodových procesů

Důležitou charakteristikou bodového procesu je již zmíněná míra intenzity  $\Lambda$ . V této podkapitole definujeme momentové míry  $k$ -tého řádu a uvedeme poměrně důležitou Campbellovu větu.

**Definice 1.2.1.** Nechť  $\Psi$  je náhodná míra na  $X$  s rozdělením  $Q$ . Míru

$$M_k(\cdot) = \mathbb{E} \Psi^k(\cdot) = \int_{\mathcal{M}} \mu^k(\cdot) Q(d\mu)$$

na  $(X^k, \mathcal{B}(X^k))$  nazveme *momentová míra  $k$ -tého řádu*. Speciálně pro  $k = 1$  dostáváme  $M_1 \equiv \Lambda$ , tedy míru intenzity  $\Psi$ .

Je-li  $\Phi$  bodový proces, definujeme tzv. *faktoriální momentovou míru  $k$ -tého řádu* míry  $\Phi$  následovně:

$$M_k^1(\cdot) = \mathbb{E} \Phi^{[k]}(\cdot) = \int_{\mathcal{N}} \mu^{[k]}(\cdot) Q(d\mu),$$

kde  $\mu^{[k]} = \mu^k|_{X^{[k]}}$  a  $X^{[k]} = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k : x_i \neq x_j, \text{ pro } i \neq j\}$  značí množinu všech  $k$ -tic, kde nepřipouštíme stejné hodnoty složek.

**Lemma 1.2.2.** Pro náhodnou míru  $\Psi$  na  $X$  a pro  $B \in \mathcal{B}$  platí:

$$\text{var} \Psi(B) = M_2(B \times B) - \Lambda(B)^2.$$

**Věta 1.2.3. (Campbellova věta)** Buď  $\Psi$  náhodná míra na  $X$  s rozdělením  $Q = \text{Pr} \Psi^{-1}$  a buď  $\Lambda$  její lokálně konečná míra intenzity. Pak platí

$$\mathbb{E} \int_X f(x) \Psi(dx) = \int_{\mathcal{M}} \int_X f(x) \mu(dx) Q(d\mu) = \int_X f(x) \Lambda(dx)$$

pro libovolnou nezápornou měřitelnou funkci  $f$  na  $X$ .

*Důkaz.* Postup důkazu lze nalézt např. v [3]. □

### 1.3 Poissonův proces

Velmi používaným bodovým procesem je Poissonův proces, který zde definujeme a dále se jím budeme zabývat.

**Definice 1.3.1. (Poissonův proces)** Buď  $\Lambda \in \mathcal{M}$  a nechť  $\Phi$  je bodový proces na  $X$  takový, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a  $B_1, \dots, B_n$  disjunktní omezené borelovské množiny jsou náhodné veličiny  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_n)$  nezávislé a pro každé  $i \in \mathbb{N}$  má  $\Phi(B_i)$  Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(B_i)$ . Potom se proces  $\Phi$  nazývá *Poissonův proces* s mírou intenzity  $\Lambda$ .

**Lemma 1.3.2.** *Faktoriální momentová míra Poissonova procesu je  $M_n^! = \Lambda^n$ .*

**Lemma 1.3.3.** *Nechť  $\Phi$  je Poissonův proces s mírou intenzity  $\Lambda$ . Je-li  $\Lambda$  difúzní míra (tj.  $\Lambda(\{x\}) = 0$  pro každé  $x \in X$ ), pak je  $\Phi$  jednoduchý bodový proces.*

### 1.4 Stacionární procesy na $\mathcal{K}'$

Nyní vezmeme v úvahu konkrétní prostor  $X$ , a to prostor  $\mathcal{K}' = \mathcal{K}(\mathbb{R}^d) \setminus \emptyset$  neprázdných kompaktních množin v  $\mathbb{R}^d$ . Na tomto prostoru lze definovat stacionární bodové procesy. Stacionarita procesu znamená, že statistické vlastnosti nezávisí na poloze okna pozorování. To umožňuje vyslovit tzv. faktorizační lemma, které často využijeme k pozdějším výpočtům.

**Definice 1.4.1. (Hausdorffova metrika)** Buď  $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$  prostor všech neprázdných kompaktních podmnožin  $\mathbb{R}^d$ , potom definujeme na tomto prostoru *Hausdorffovu metriku* následovně:

$$d_H(K, L) = \max \left\{ \sup_{x \in K} d(x, L), \sup_{y \in L} d(y, K) \right\}, \text{ pro } K, L \in \mathcal{K}',$$

kde  $d(x, L) = \inf_{z \in L} \|x - z\|$  je vzdálenost bodu  $x$  od množiny  $L$ .

**Věta 1.4.2.** *Metrický prostor  $(\mathcal{K}', d_H)$  je lokálně kompaktní úplný separabilní metrický prostor, ve kterém je každá uzavřená množina kompaktní.*

**Poznámka 1.4.3.** Dále se budeme zabývat pouze bodovými procesy  $\Phi$  na  $\mathcal{K}'$ . Míra intenzity  $\Lambda = \mathbb{E} \Phi$  je borelovská míra na  $\mathcal{K}'$ . Budeme předpokládat, že je omezená ve smyslu:

$$\Lambda(\mathcal{K}_B) < \infty, \text{ pro všechna } B \in \mathcal{K}', \quad (1.1)$$

kde  $\mathcal{K}_B = \{K \in \mathcal{K}' : K \cap B \neq \emptyset\}$ , což je uzavřená množina v  $(\mathcal{K}', d_H)$ .



**Označení 1.4.4.** Pro  $K \in \mathcal{K}'$ , označíme  $c(K) \in K$  význačný bod v  $K$ . Může to být například lexikografické minimum, které budeme dále používat. Pohybujeme-li se na  $\mathbb{R}^d$ , znamená to, že  $c(K) = z = (z^1, \dots, z^d)$ , právě když pro libovolné  $y = (y^1, \dots, y^d) \in K$  platí  $z^1 \leq y^1$  a pro  $i = 1, \dots, d-1$  platí:

$$z^1 = y^1, \dots, z^i = y^i \Rightarrow z^{i+1} \leq y^{i+1}.$$

Dále označíme  $\mathcal{K}'_0 = \{K \in \mathcal{K}' : c(K) = 0\}$  systém všech neprázdných kompaktních množin v  $\mathbb{R}^d$ , jejichž význačný bod  $c(K)$  je roven počátku  $\mathbb{R}^d$ .

**Definice 1.4.5. (stacionární bodový proces)** Pro  $z \in \mathbb{R}^d$  označme  $t_z$  operátor posunutí na  $\mathcal{M}(\mathcal{K}')$ , tedy operátor, pro který platí:

$$t_z \mu(U) = \mu(\{K - z : K \in U\}), \text{ pro všechna } U \in \mathcal{B}(\mathcal{K}'), \mu \in \mathcal{M}(\mathcal{K}').$$

Potom bodový proces  $\Phi$  nazveme *stacionární*, jestliže  $t_z \Phi$  má stejné rozdělení jako  $\Phi$  pro všechna  $z \in \mathbb{R}^d$ , ekvivalentně jestliže jeho rozdělení  $Q$  je tzv. *translačně invariantní*, nebo-li pro všechna  $z \in \mathbb{R}^d$  je  $Q t_z^{-1} = Q$ .

**Věta 1.4.6. (faktorizace)** *Nechť  $\Phi \neq 0$  je stacionární bodový proces na  $\mathcal{K}'$  s mírou intenzity  $\Lambda$  splňující (1.1). Potom existuje  $\alpha > 0$  a pravděpodobnostní míra  $\Lambda_0$  na  $\mathcal{K}'$  tak, že platí:*

$$\int f(K) \Lambda(dK) = \alpha \int \int f(z + K_0) \Lambda_0(dK_0) dz.$$

*Důkaz.* Důkaz je uveden ve skriptech [3]. □

**Definice 1.4.7.** Konstantu  $\alpha > 0$  nazveme *intenzitou* procesu  $\Phi$  a  $\Lambda_0$  nazveme *rozdělení typického zrna*.

# Kapitola 2

## Stacionární Poissonův proces úseček

### 2.1 Odhady délkové intenzity

Označme  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$  množinu všech úseček s konečnou délkou v  $\mathbb{R}^d$ . Pro  $S \in \mathcal{S}$  definujme  $c(S) \in S$  jako minimální bod vůči lexikografickému uspořádání.

Každou úsečku  $S$  jednoznačně určuje její počátek  $c(S)$ , délka  $r \in [0, \infty)$  a směr  $\beta \in \mathcal{U}^d$ , kde  $\mathcal{U}^d$  je prostor všech 1-dimenzionálních lineárních podprostorů v  $\mathbb{R}^d$ , jenž lze ztotožnit s polovinou jednotkové sféry v  $\mathbb{R}^d$ .

Že je množina  $\mathcal{S}$  uzavřená v Hausdorffově metrice ukážeme v následujícím lemmatu. Potom ovšem z věty 1.4.2 vyplývá, že  $(\mathcal{S}, d_H)$  je lokálně kompaktní úplný separabilní metrický prostor.

**Lemma 2.1.1.** *Množina  $\mathcal{S}$  je uzavřená v Hausdorffově metrice  $d_H$ .*

*Důkaz.* Mějme konvergentní posloupnost  $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ ,  $S_n \xrightarrow{d_H} S$ . Úsečku  $S_n$  určují krajní body  $A_n, B_n$ . Buď  $A_n = c(S_n)$ , pak platí pro  $k, l \in \mathbb{N}$ :

$$d_H(S_k, S_l) \leq \max\{\varrho^d(A_k, A_l), \varrho^d(B_k, B_l)\} \leq 2d_H(S_k, S_l),$$

kde  $\varrho^d$  je metrika na  $\mathbb{R}^d$ . Odtud plyne, že existují  $A, B \in \mathbb{R}$  takové, že  $A_n \xrightarrow{\varrho^d} A$  a  $B_n \xrightarrow{\varrho^d} B$ . Úsečka  $S$  určená body  $A, B$  je tudíž limitou posloupnosti  $\{S_n\}$ .  $\square$

**Definice 2.1.2.** *Stacionární Poissonův proces úseček* je stacionární Poissonův proces  $\Phi : (\Omega, \Sigma, \Pr) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$  na  $\mathcal{S}$ . Rozdělení typického zrna  $\Lambda_0$  je pravděpodobnostní míra na prostoru  $\mathcal{S}_0 = \{S \in \mathcal{S} : c(S) = 0\}$ , který je izomorfní s prostorem  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d$ .

**Označení 2.1.3.** Prostor  $\mathcal{S}_0$  ztotožníme se součinným prostorem  $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d$  a úsečku  $S \in \mathcal{S}_0$  délky  $r$  a směru  $\beta$  budeme značit  $S(r, \beta)$ . Dále označme  $\mathcal{D}$  rozdělení délek typické úsečky na  $\mathbb{R}^+$  a  $\rho$  rozdělení směrů typické úsečky na  $\mathcal{U}^d$ , tedy  $\mathcal{D}(\cdot) = \Lambda_0(\cdot \times \mathcal{U}^d)$  a  $\rho(\cdot) = \Lambda_0(\mathbb{R}^+ \times \cdot)$ .

Buď  $\Phi : (\Omega, \Sigma, \text{Pr}) \rightarrow (\mathcal{N}, \mathfrak{N})$  stacionární Poissonův proces úseček na  $\mathcal{K}'$ . Jeho míra intenzity  $\Lambda = \mathbb{E} \Phi$  je borelovská míra na  $\mathcal{K}'$ , která splňuje předpoklad (1.1).

Označme  $\phi \in \mathcal{N}$  realizaci procesu  $\Phi$  s intenzitou  $\alpha$  a rozdělením typického zrna  $\Lambda_0$ .

V praxi máme nějaké okno pozorování  $W \subset \mathbb{R}^d$ , po kterém požadujeme alespoň kompaktnost. Pokud se pohybujeme v rovině bývá okno často obdélníkové, v prostorech vyšší dimenze je to  $d$ -rozměrný kvádr. Odhady délkové intenzity budou záviset na konkrétní realizaci  $\phi \in \mathcal{N}$  procesu v daném okně  $W$ .

V dalším textu nejprve definujeme délkovou intenzitu a poté budeme rozebírat několik jejích odhadů. Prostor všech kompaktních množin, na nichž budou tyto odhady záviset označme  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}'$ .

Lze brát v úvahu například  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1$  množinu všech úseček, jejichž význačný bod leží v pozorovaném okně  $W$ . Další možnou volbou je  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2$  množina všech úseček, které mají s oknem pozorování  $W$  neprázdný průnik.

Napišme zde nyní faktorizaci stacionárního procesu úseček dle věty 1.4.6:

$$\int_{\mathcal{K}'} f(S) \Lambda(dS) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d} f(z, r, \beta) \Lambda_0(d(r, \beta)) dz,$$

kde  $f$  je libovolná nezáporná měřitelná funkce na  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d$ .

Pokud se omezíme jen na prostor  $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}'$ , lze předchozí vztah přepsat na tvar:

$$\int_{\mathcal{W}} f(S) \Lambda(dS) = \alpha \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d} \int_{W(r, \beta)} f(z, r, \beta) dz \Lambda_0(d(r, \beta)), \quad (2.1)$$

kde  $W(r, \beta) = \{z : z + S(r, \beta) \in \mathcal{W}\}$ .

Jinak řečeno  $W(r, \beta) \subseteq \mathbb{R}^d$  je množina všech počátečních bodů segmentů náležících množině  $\mathcal{W}$ .

Střední počet úseček konečného Poissonova procesu  $\Phi|_{\mathcal{W}}$  je:

$$\mathbb{E} \Phi(\mathcal{W}) = \alpha \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d} \lambda^d(W(r, \beta)) \Lambda_0(d(r, \beta)) = \alpha \cdot C, \quad (2.2)$$

kde  $C = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d} \lambda^d(W(r, \beta)) \Lambda_0(d(r, \beta)) > 0$  je konstanta, která závisí pouze na rozdělení typického zrna a okně  $W \subset \mathbb{R}^d$ .

**Definice 2.1.4. (délková intenzita)** Nechť  $H^1$  je Hausdorffova jednorozměrná míra, potom definujeme *délkovou intenzitu*:

$$\lambda = \mathbb{E} \int H^1(S \cap [0, 1]^d) \Phi(dS).$$

Budeme generovat náhodnou míru ze stacionárního procesu  $\Phi$ . Pro  $H^1$  jednorozměrnou Hausdorffovu míru na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  je zobrazení  $S \mapsto H^1(S \cap B)$  měřitelné vzhledem k borelovské  $\sigma$ -algebře na  $\mathcal{K}'$ . Pro  $\phi \in \mathcal{N}$  definujeme zobrazení  $T_{H^1} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  vztahem:

$$T_{H^1}\phi(\cdot) = \int H^1(S \cap \cdot) \phi(dS).$$

Protože zobrazení  $T_{H^1}$  je měřitelné, je  $\Psi = T_{H^1}\Phi$  stacionární náhodná míra na  $\mathbb{R}^d$  s konečnou intenzitou  $\alpha_\Psi$ .

**Lemma 2.1.5.** *Platí:*

$$\alpha_\Psi = \alpha \int H^1(S_0) \Lambda_0(dS_0).$$

*Důkaz.* Budeme upravovat  $\mathbb{E}\Psi(B)$  pro  $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$  a  $S \in \mathcal{S}$ . Připomeňme, že  $\Lambda = \mathbb{E}\Phi$  je míra intenzity procesu  $\Phi$ . Postupně použijeme Campbellovu větu 1.2.3, větu 1.4.6 o faktorizaci a translační invariančnost  $H^1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Psi(B) &= \mathbb{E}T_{H^1}\Phi(B) = \mathbb{E} \int H^1(B \cap S) \Phi(dS) \\ &= \int H^1(B \cap S) \Lambda(dS) \\ &= \alpha \int \int H^1(B \cap (z + S_0)) \Lambda_0(dS_0) \lambda^d(dz) \\ &= \alpha \int \int H^1((B - z) \cap S_0) \lambda^d(dz) \Lambda_0(dS_0) \\ &= \alpha \int \int \int \mathbb{I}_{B-z}(y) \lambda^d(dz) \mathbb{I}_{S_0}(y) H^1(dy) \Lambda_0(dS_0) \\ &= \alpha \lambda^d(B) \int H^1(S_0) \Lambda_0(dS_0). \end{aligned}$$

Symbolem  $\lambda^d$  zde značíme Lebesgueovu  $d$ -rozměrnou míru, nikoli výše definovanou délkovou intenzitu. Z posledního tvaru již plyne dokazované tvrzení.  $\square$

Délková intenzita  $\lambda$  z Definice 2.1.4 je právě  $\alpha_\Psi$  a je možné ji dále upravit na tvar:

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha \int H^1(S_0) \Lambda_0(dS_0) = \alpha \int r \Lambda_0(d(r, \beta)) \\ &= \alpha \int_0^\infty r \mathcal{D}(dr) = \alpha \mathbb{E}r. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mnohdy je známé rozdělení typického zrna, nebo alespoň střední hodnota délky typické úsečky, potom stačí odhadnout intenzitu  $\alpha$  a využít vztahu (2.3). K odhadu  $\alpha$  využijeme (2.2).

**Definice 2.1.6.** Necht  $\Phi$  je stacionární Poissonův proces úseček se známou střední délkou úseček, definujme odhad délkové intenzity, jenž závisí jen na počtu úseček v množině  $\mathcal{W}$ :

$$\tilde{\lambda} = \frac{\Phi(\mathcal{W})}{C} \mathbb{E} r = \frac{\mathbb{E} r}{C} \int \mathbb{I}_{[S \in \mathcal{W}]} \Phi(dS).$$

Optimalita tohoto odhadu v naší situaci dokládá následující tvrzení, které bylo dokázáno v [1].

**Tvrzení 2.1.7.** *Odhad  $\tilde{\lambda}$  je nejlepší nestranný odhad délkové intenzity  $\lambda$  Poissonova procesu úseček se známým rozdělením typického zrna.*

**Věta 2.1.8.** *Platí:*

$$\text{var } \tilde{\lambda} = \frac{\alpha(\mathbb{E} r)^2}{C}.$$

*Důkaz.* Stačí si uvědomit, že  $\Phi(\mathcal{W})$  má Poissonovo rozdělení s parametrem  $\Lambda(\mathcal{W})$ . Ze vztahu (2.2) víme, že  $\Lambda(\mathcal{W}) = \alpha \cdot C$ . Pak

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{\lambda} &= \left( \frac{\mathbb{E} r}{C} \right)^2 \cdot \text{var } \Phi(\mathcal{W}) = \left( \frac{\mathbb{E} r}{C} \right)^2 \cdot \Lambda(\mathcal{W}) \\ &= \left( \frac{\mathbb{E} r}{C} \right)^2 \cdot \alpha \cdot C = \frac{\alpha(\mathbb{E} r)^2}{C}. \end{aligned}$$

□

**Důsledek 2.1.9.** *Vezmeme-li za  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1$  množinu všech úseček, jejichž lexikografické minimum leží v okně  $W$ , potom  $W_1(r, \beta) = W$  pro každou dvojici  $(r, \beta)$ , konstanta  $C_1 = \lambda^d(W)$  tudíž nezávisí na rozdělení typického zrna. Označme:*

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\Phi(\mathcal{W}_1) \cdot \mathbb{E} r}{\lambda^d(W)}$$

*odhad délkové intenzity  $\lambda$  stacionárního Poissonova procesu úseček se známou střední délkou úsečky. Rozptyl tohoto odhadu je*

$$\text{var } \tilde{\lambda}_1 = \frac{\alpha \cdot (\mathbb{E} r)^2}{\lambda^d(W)}. \quad (2.4)$$

**Důsledek 2.1.10.** *Necht je  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2$  množina všech úseček, které mají s oknem pozorování  $W$  neprázdný průnik. Potom  $W_2(r, \beta)$  je tzv. dilatace okna  $W$  úsečkou  $S(r, \beta)$ , je tedy tvaru:*

$$W_2(r, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^d : x = w + s, w \in W, s \in -S(r, \beta)\}.$$

*Zde je konstanta  $C_2$  složitější:*

$$C_2 = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d} \lambda^d(W_2(r, \beta)) \Lambda_0(d(r, \beta)).$$

Označme

$$\tilde{\lambda}_2 = \frac{\Phi(\mathcal{W}_2) \cdot \mathbb{E} r}{C_2}$$

odhad délkové intenzity  $\lambda$  stacionárního Poissonova procesu úseček se známým rozdělením typického zrna. Jeho rozptyl činí:

$$\text{var } \tilde{\lambda}_2 = \frac{\alpha \cdot (\mathbb{E} r)^2}{C_2}.$$

Jistým zlepšením odhadu  $\tilde{\lambda}_1$  je následující odhad. Buď  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_3$  množina všech úseček, jejichž lexikografické minimum i maximum leží v okně pozorování  $W$ . Potom

$$W_3(r, \beta) = W \cap (W - S(r, \beta)),$$

$$C_3 = \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}^d} \lambda^d(W_3(r, \beta)) \Lambda_0(d(r, \beta)).$$

Sestrojíme odhad délkové intenzity  $\lambda$  Poissonova procesu úseček jako aritmetický průměr odhadů z důsledku 2.1.9

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\tilde{\lambda}_{Min} + \tilde{\lambda}_{Max}}{2},$$

$$\text{kde } \tilde{\lambda}_{Min} = \frac{\mathbb{E} r}{\lambda^d(W)} \int \mathbb{I}_{[c_1(S) \in W]} \Phi(dS) \text{ a } \tilde{\lambda}_{Max} = \frac{\mathbb{E} r}{\lambda^d(W)} \int \mathbb{I}_{[c_2(S) \in W]} \Phi(dS),$$

přičemž  $c_1(S)$  je počáteční bod a  $c_2(S)$  koncový bod úsečky  $S$  vzhledem k lexikografickému uspořádání.

Výpočet rozptylu bude obtížnější než v předchozích případech:

$$\text{var } \tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{4} \left( \text{var } \tilde{\lambda}_{Max} + \text{var } \tilde{\lambda}_{Min} + 2 \text{cov}(\tilde{\lambda}_{Min}, \tilde{\lambda}_{Max}) \right).$$

Stejně jako v důsledku 2.1.9 je:

$$\text{var } \tilde{\lambda}_{Min} = \text{var } \tilde{\lambda}_{Max} = \frac{\alpha \cdot (\mathbb{E} r)^2}{\lambda^d(W)}.$$

Zbývá ještě spočítat kovarianci

$$\begin{aligned} \text{cov}(\tilde{\lambda}_{Min}, \tilde{\lambda}_{Max}) &= \frac{(\mathbb{E} r)^2}{\lambda^d(W)^2} \cdot \mathbb{E} \int \mathbb{I}_{[c_1(S) \in W, c_2(S) \in W]} \Phi(dS) \\ &= \frac{(\mathbb{E} r)^2}{\lambda^d(W)^2} \cdot \mathbb{E} \int \mathbb{I}_{[S \in \mathcal{W}_3]} \Phi(dS) \\ &= \frac{(\mathbb{E} r)^2}{\lambda^d(W)^2} \cdot \Lambda(\mathcal{W}_3) \\ &= \frac{\alpha \cdot (\mathbb{E} r)^2}{\lambda^d(W)^2} \cdot C_3. \end{aligned}$$

Celkem tedy máme

$$\text{var } \tilde{\lambda}_3 = \frac{\alpha \cdot (\mathbb{E} r)^2}{2\lambda^d(W)^2} (\lambda^d(W) + C_3). \quad (2.5)$$

Jako poslední uvedeme nestranný odhad délkové intenzity, u kterého není třeba znát rozdělení typického zrna

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\lambda^d(W)} \int_{\mathcal{W}_2} H^1(S \cap W) \Phi(dS).$$

Odhad je velmi přirozený, což snadno posoudíme pohledem na definici délkové intenzity, neboť  $H^1(S \cap W)$  je délka viditelné části úsečky v okně pozorování. Podívejme se na výpočet rozptylu  $\hat{\lambda}$ , začneme nejprve druhým momentem

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{\lambda}^2 &= \frac{1}{(\lambda^d(W))^2} \cdot \mathbb{E} \int_{\mathcal{W}_2} [H^1(S \cap W)]^2 \Phi(dS) \\ &\quad + \frac{1}{(\lambda^d(W))^2} \cdot \mathbb{E} \int_{\mathcal{W}_2 \times \mathcal{W}_2} H^1(S_1 \cap W) \cdot H^1(S_2 \cap W) \Phi^2(d(S_1, S_2)) \\ &= \frac{1}{(\lambda^d(W))^2} \cdot \left[ \int_{\mathcal{W}_2} [H^1(S \cap W)]^2 \Lambda(dS) + \int_{\mathcal{W}_2} [H^1(S \cap W)]^2 M_2^1(d(S_1, S_2)) \right] \\ &= \frac{1}{(\lambda^d(W))^2} \cdot \left[ \int_{\mathcal{W}_2} [H^1(S \cap W)]^2 \Lambda(dS) + \left( \int_{\mathcal{W}_2} [H^1(S \cap W)]^2 \Lambda(dS) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Lemma 1.3.2 říká, že faktoriální momentovou míru druhého řádu stacionárního Poissonova procesu je  $M_2^1 = \Lambda \times \Lambda$ . Druhý sčítanec jsme proto mohli upravit na tvar, který podle Campbellovy věty 1.2.3 je  $(\mathbb{E} \hat{\lambda})^2$ . Hledaný rozptyl činí

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{\lambda} &= \frac{1}{(\lambda^d(W))^2} \int_{\mathcal{W}_2} [H^1(S \cap W)]^2 \Lambda(dS) \\ &= \frac{\alpha}{(\lambda^d(W))^2} \int_{\mathcal{U}^d} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{W_2(r, \beta)} [H^1(S \cap W)]^2 dz \mathcal{D}(dr) \rho(d\beta). \end{aligned}$$

## 2.2 Konkrétní volby rozdělení délek a orientací úseček

Omezme se nyní na Poissonův proces úseček v  $\mathbb{R}^2$  a uvažujme okno  $W$  obdélník o stranách délek  $a$  a  $b$ . Budeme předpokládat, že délka a směr typického segmentu jsou nezávislé veličiny, jinými slovy  $\Lambda_0$  je součinem  $\mathcal{D} \times \rho$ .

Budeme počítat rozptyly výše uvedených odhadů délkové intenzity pro konkrétní rozdělení  $r$  délek a  $\beta$  směrů úseček. Budou nás zajímat rozptyly odhadů  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{\lambda}_3$  a  $\hat{\lambda}$ . Rozebereme případy, kdy délky úseček mají rovnoměrné rozdělení

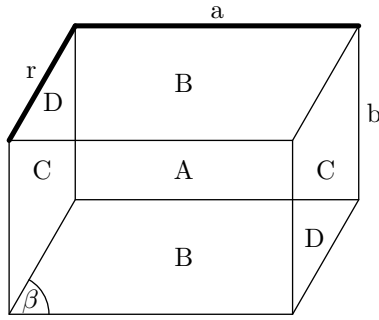
na intervalu  $[0, M]$ , kde  $M > 0$ , nebo exponenciální rozdělení s parametrem  $\mu > 0$ . Pro směr úseček rozebereme rovnoměrné rozdělení úhlu  $\beta$  na intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  a deterministické rozdělení  $\beta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Ve všech případech budeme předpokládat nezávislost rozdělení úhlu a délky typické úsečky.

Rozptyl odhadu  $\tilde{\lambda}_1$  délkové intenzity z důsledku 2.1.9 dostaneme prostým dosazením do (2.4)

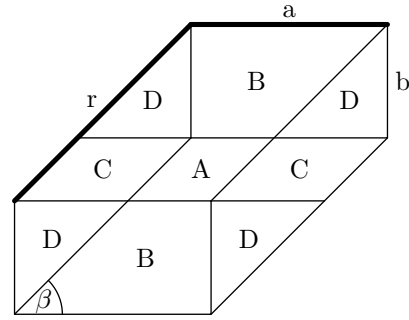
$$\text{var} \tilde{\lambda}_1 = \frac{\alpha \cdot (\mathbb{E}r)^2}{ab}. \quad (2.6)$$

Rozptyl odhadu  $\hat{\lambda}$  spočítáme pomocí vzorce, který byl uveden na konci předchozí podkapitoly. Spočteme tedy  $\int_{W_2(r,\beta)} [H^1(S \cap W)]^2 dz$ , s pevným  $(r, \beta)$ . Chceme spočítat integrál přes dilatované okno z druhé mocniny délky části úsečky, kterou pozorujeme v okně  $W$ . Tento integrál je třeba mít vyjádřen v závislosti na délkách stran  $a, b$  okna  $W$ , délce úsečky  $r \in (0, \infty)$  a úhlu  $\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , který úsečka svírá s kladnou poloosou  $x$ . Vzhledem k symetrii stačí uvažovat  $\beta \geq 0$ . Omezme se nejprve na  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Krajní případy  $\beta = 0$  a  $\beta = \frac{\pi}{2}$  vyšetříme později.

Dilatované okno  $W_2(r, \beta)$  rozdělíme na několik částí, podle toho, jak úsečka zasahuje do okna  $W$ , ale počet částí je závislý na velikosti úhlu  $\beta$  a délkách  $a, b, r$ . Vše shrnuje následující schéma:



Obrázek 2.1: Dilatované okno  $W_2$  (7 oblastí).



Obrázek 2.2: Dilatované okno  $W_2$  (9 oblastí).

1.  $\text{tg} \beta \geq \frac{b}{a}$

(a)  $r \leq \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow$  Řídíme se obr. 2.1.

(b)  $r \geq \frac{b}{\sin \beta} \Rightarrow$  Řídíme se obr. 2.2.

2.  $\text{tg} \beta \leq \frac{b}{a}$

(a)  $r \leq \frac{a}{\cos \beta} \Rightarrow$  Řídíme se obr. 2.1.

(b)  $r \geq \frac{a}{\cos \beta} \Rightarrow$  Řídíme se obr. 2.2, neboť se jedná o zrcadlový případ 1.(b), otočený o  $\frac{\pi}{2}$ . Ve výpočtech pouze zaměníme  $a$  a  $b$ , místo  $\beta$  budeme dosazovat  $\frac{\pi}{2} - \beta$ .



V případě obr. 2.1 se dilatované okno rozpadne na sedm oblastí, které ale dávají jen čtyři různé přínosy:

$$\begin{aligned}
 I_A &= \int_0^{a-r \cos \beta} \int_0^{b-r \sin \beta} r^2 dx dy = (a - r \cos \beta)(b - r \sin \beta) r^2, \\
 I_B &= \int_0^{r \sin \beta} \int_0^{a-y \cot \beta} \left( \frac{y}{\sin \beta} \right)^2 dx dy = \frac{1}{3} ar^3 \sin \beta - \frac{1}{4} r^4 \sin \beta \cos \beta, \\
 I_C &= \int_0^{r \cos \beta} \int_0^{b-y \tan \beta} \left( \frac{y}{\cos \beta} \right)^2 dx dy = \frac{1}{3} br^3 \cos \beta - \frac{1}{4} r^4 \sin \beta \cos \beta, \\
 I_D &= \int_0^{r \sin \beta} \int_0^{y \cot \beta} \left( \frac{x}{\sin \beta} \right)^2 dx dy = \frac{1}{12} r^4 \sin \beta \cos \beta.
 \end{aligned}$$

Celkem:  $V_1 = I_A + 2I_B + 2I_C + 2I_D$ ,

$$V_1 = abr^2 - \frac{1}{3} r^3 (a \sin \beta + b \cos \beta) + \frac{1}{6} r^4 \sin \beta \cos \beta.$$

V případě obr. 2.2 je sice situace o trochu složitější, dilatované okno se nám rozpadá na devět částí, ale opět dostáváme jen čtyři různé integrály:

$$\begin{aligned}
 I_A &= \int_0^{r \sin \beta - b} \int_0^{a-b \cot \beta} \left( \frac{b}{\sin \beta} \right)^2 dx dy = \frac{b^2}{\sin^2 \beta} (a - b \cot \beta)(r \sin \beta - b), \\
 I_B &= \int_0^b \int_0^{a-y \cot \beta} \left( \frac{y}{\sin \beta} \right)^2 dx dy = \frac{ab^3}{3 \sin^2 \beta} - \frac{b^4 \cos \beta}{4 \sin^3 \beta}, \\
 I_C &= \int_0^{r \sin \beta - b} \int_0^{b \cot \beta} \left( \frac{x}{\cos \beta} \right)^2 dx dy = \frac{b^3 r \cos \beta}{3 \sin^2 \beta} - \frac{b^4 \cos \beta}{3 \sin^3 \beta}, \\
 I_D &= \int_0^b \int_0^{y \cot \beta} \left( \frac{x}{\cos \beta} \right)^2 dx dy = \frac{b^4 \cos \beta}{12 \sin^3 \beta}.
 \end{aligned}$$

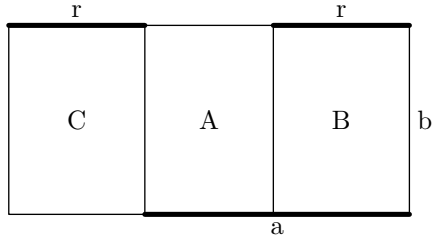
Celkem:  $V_2 = I_A + 2I_B + 2I_C + 4I_D$ ,

$$V_2 = \frac{b^2 r}{\sin^2 \beta} \left( a \sin \beta - \frac{1}{3} b \cos \beta \right) + \frac{b^3}{\sin^3 \beta} \left( \frac{1}{6} b \cos \beta - \frac{1}{3} a \sin \beta \right).$$

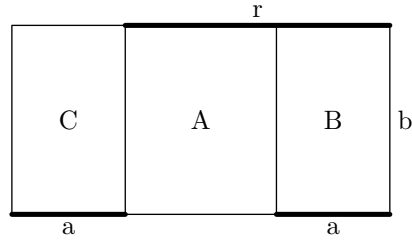
Po záměně proměnných ve vzorci  $V_2$  dle výše uvedeného schématu dostaneme:

$$V_3 = \frac{a^2 r}{\cos^2 \beta} \left( b \cos \beta - \frac{1}{3} a \sin \beta \right) + \frac{a^3}{\cos^3 \beta} \left( \frac{1}{6} a \sin \beta - \frac{1}{3} b \cos \beta \right).$$

Zbývá vyřešit krajní případy. Pro  $\beta = 0$  mohou nastat dva případy:



Obrázek 2.3: Dilatované okno  $W_2$  pro  $\beta = 0$  a  $r \leq a$ .



Obrázek 2.4: Dilatované okno  $W_2$  pro  $\beta = 0$  a  $r \geq a$ .

1.  $r \leq a$  (obr. 2.3)

$$I_A = \int_0^b \int_0^{a-r} r^2 dx dy = b(a-r)r^2,$$

$$I_B = \int_0^b \int_0^r (r-x)^2 dx dy = \frac{1}{3}rb^3,$$

$$I_C = \int_0^b \int_0^r x^2 dx dy = \frac{1}{3}rb^3.$$

Celkem:  $I = abr^2 - \frac{1}{3}br^3$ , což odpovídá dosazení  $\beta = 0$  do vzorce  $V_1$ .

2.  $r \geq a$  (obr. 2.4)

$$I_A = \int_0^b \int_0^{r-a} a^2 dx dy = (r-a)a^2b,$$

$$I_B = \int_0^b \int_0^a (a-x)^2 dx dy = \frac{1}{3}a^3b,$$

$$I_C = \int_0^b \int_0^a x^2 dx dy = \frac{1}{3}a^3b.$$

Celkem  $I = ra^2b - \frac{1}{3}a^3b$ , což odpovídá dosazení  $\beta = 0$  do vzorce  $V_3$ .

Případ  $\beta = \frac{\pi}{2}$  je obdobný, jen ve vzorcích zaměníme  $a$  za  $b$ . Dostaneme výsledek stejný, jako kdybychom dosadili  $\beta = \frac{\pi}{2}$  do  $V_1$ , resp.  $V_2$ .

**Označení 2.2.1.** Pro snadné odkazování označme

$$V(r, \beta, a, b) = \int_{W_2(r, \beta)} [H^1(S \cap W)]^2 dz$$

$$= \mathbb{I}\left(\operatorname{tg} \beta \leq \frac{b}{a}\right) \cdot \left[ \mathbb{I}\left(r \leq \frac{a}{\cos \beta}\right) V_1 + \mathbb{I}\left(r > \frac{a}{\cos \beta}\right) V_3 \right]$$

$$+ \mathbb{I}\left(\operatorname{tg} \beta > \frac{b}{a}\right) \cdot \left[ \mathbb{I}\left(r \leq \frac{b}{\sin \beta}\right) V_1 + \mathbb{I}\left(r > \frac{b}{\sin \beta}\right) V_2 \right].$$

Rozptyl odhadu  $\tilde{\lambda}_3$  činí podle (2.5)

$$\text{var } \tilde{\lambda}_3 = \frac{\alpha(\mathbb{E} r)^2}{2a^2b^2} (ab + C_3), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{přičemž } C_3 &= \mathbb{E} \lambda^2(W_3(r, \beta)) \cdot \mathbb{I} \left( r \leq \min \left( \frac{a}{\cos \beta}, \frac{b}{\sin \beta} \right) \right) \\ \text{a } \lambda^2(W_3(r, \beta)) &= (a - r \cos \beta)(b - r \sin \beta). \end{aligned}$$

Čímž jsme uvedli vše potřebné k tomu, abychom mohli přejít k výpočtům rozptylů odhadů délkové intenzity pro konkrétní rozdělení úhlu a délky typické úsečky.

## 2.2.1 Rovnoměrné rozdělení délky úsečky

### Rovnoměrné rozdělení úhlu

Nechť je  $r \sim \text{Uniform}[0, M]$ ,  $M > 0$ ,  $\beta \sim \text{Uniform}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , rozptyly odhadů jsou

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{\lambda}_1 &= \frac{\alpha M^2}{4ab}, \\ \text{var } \hat{\lambda} &= \frac{2\alpha}{\pi M(ab)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^M V(r, \beta, a, b) dr d\beta, \\ \text{var } \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\alpha M^2}{8a^2b^2} \left[ ab + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^M \frac{2}{\pi M} (a - r \cos \beta)(b - r \sin \beta) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathbb{I} \left( r \leq \min \left( \frac{a}{\cos \beta}, \frac{b}{\sin \beta} \right) \right) dr d\beta \right]. \end{aligned}$$

Je patrné, že druhý a třetí vzorec jsou velmi složité a jejich uvedení by si žádalo příliš místa, nicméně pokud  $a \geq M$  a  $b \geq M$  dostávají poměrně solidní tvar

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{\lambda} &= \frac{\alpha M^2}{(ab)^2} \left[ \frac{ab}{3} - \frac{M}{6\pi}(a+b) + \frac{M^2}{30\pi} \right], \\ \text{var } \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\alpha M^2}{(ab)^2} \left[ \frac{ab}{4} - \frac{M}{8\pi}(a+b) + \frac{M^2}{24\pi} \right]. \end{aligned}$$

### Deterministické rozdělení úhlu

Buďte  $r \sim \text{Uniform}[0, M]$ ,  $M > 0$ ,  $\beta \sim \text{Deterministic}(\beta_0)$ ,  $\beta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , potom obdobně jako v předchozím případě je

$$\text{var } \tilde{\lambda}_1 = \frac{\alpha M^2}{4ab}.$$

Ač mohou následující vzorce budit svou délkou pohoršení, je vhodné je uvést, jednak pro úplnost textu a jednak, aby byla ilustrována jejich symetrie a vzájemná podobnost mezi  $\text{var } \hat{\lambda}$  a  $\text{var } \tilde{\lambda}_3$

$$\begin{aligned}
\text{var } \hat{\lambda} &= \frac{\alpha}{(ab)^2} \cdot \int_0^M \frac{V(r, \beta_0, a, b)}{M} dr, \text{ přičemž } \int_0^M \frac{V(r, \beta_0, a, b)}{M} dr = \\
&= \mathbb{I}(\text{tg } \beta_0 \leq \frac{b}{a}) \left[ \mathbb{I}\left(M \leq \frac{a}{\cos \beta_0}\right) \left( \frac{abM^2}{3} - \frac{M^3}{12}(a \sin \beta_0 + b \cos \beta_0) + \frac{M^4}{30} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{M} \mathbb{I}\left(M > \frac{a}{\cos \beta_0}\right) \left( \frac{a^4b}{12 \cos^3 \beta_0} - \frac{a^5 \sin \beta_0}{20 \cos^4 \beta_0} + \frac{a^2bM^2}{2 \cos \beta_0} - \frac{a^3M^2 \sin \beta_0}{6 \cos^2 \beta_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a^4M \sin \beta_0}{6 \cos^3 \beta_0} - \frac{a^3bM}{3 \cos^2 \beta_0} \right) \right] \\
&+ \mathbb{I}(\text{tg } \beta_0 > \frac{b}{a}) \left[ \mathbb{I}\left(M \leq \frac{b}{\sin \beta_0}\right) \left( \frac{abM^2}{3} - \frac{M^3}{12}(a \sin \beta_0 + b \cos \beta_0) + \frac{M^4}{30} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{M} \mathbb{I}\left(M > \frac{b}{\sin \beta_0}\right) \left( \frac{ab^4}{12 \sin^3 \beta_0} - \frac{b^5 \cos \beta_0}{20 \sin^4 \beta_0} + \frac{ab^2M^2}{2 \sin \beta_0} - \frac{b^3M^2 \cos \beta_0}{6 \sin^2 \beta_0} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{b^4M \cos \beta_0}{6 \sin^3 \beta_0} - \frac{ab^3M}{3 \sin^2 \beta_0} \right) \right].
\end{aligned}$$

Rozptyl odhadu  $\tilde{\lambda}_3$  je jen o málo jednodušší

$$\begin{aligned}
\text{var } \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\alpha M^2}{8a^2b^2}(ab + C_3), \\
\text{kde } C_3 &= \mathbb{I}(\text{tg } \beta_0 \leq \frac{b}{a}) \left[ \mathbb{I}\left(M \leq \frac{a}{\cos \beta_0}\right) \left( ab - \frac{M}{2}(a \sin \beta_0 + b \cos \beta_0) + \frac{M^2}{3} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{M} \mathbb{I}\left(M > \frac{a}{\cos \beta_0}\right) \left( \frac{a^2b}{2 \cos \beta_0} - \frac{a^3}{6 \cos^2 \beta_0} \right) \right] \\
&+ \mathbb{I}(\text{tg } \beta_0 > \frac{b}{a}) \left[ \mathbb{I}\left(M \leq \frac{b}{\sin \beta_0}\right) \left( ab - \frac{M}{2}(a \sin \beta_0 + b \cos \beta_0) + \frac{M^2}{3} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{M} \mathbb{I}\left(M > \frac{b}{\sin \beta_0}\right) \left( \frac{ab^2}{2 \sin \beta_0} - \frac{b^3}{6 \sin^2 \beta_0} \right) \right].
\end{aligned}$$

Kupříkladu pro  $\beta_0 = 0$  se vzorce zjednoduší na tvar

$$\begin{aligned}
\text{var } \hat{\lambda} &= \frac{\alpha}{(ab)^2} \left( \frac{abM^2}{3} - \frac{bM^3}{12} \right), \text{ pro } a \geq M, \\
&= \frac{\alpha}{(ab)^2} \left( \frac{a^4b}{12M} - \frac{a^3b}{3} + \frac{a^2bM}{2} \right), \text{ pro } a < M. \\
\text{var } \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\alpha}{(ab)^2} \left( \frac{abM^2}{4} - \frac{bM^3}{16} \right), \text{ pro } a \geq M, \\
&= \frac{\alpha}{(ab)^2} \left( \frac{abM^2}{8} + \frac{a^2bM}{8} \right), \text{ pro } a < M.
\end{aligned}$$

## 2.2.2 Exponenciální rozdělení délky úsečky

### Rovnoměrné rozdělení úhlu

Nechť platí  $r \sim \text{Exp}(\mu)$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta \sim \text{Uniform}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Uvažujeme hustotu exponenciálního rozdělení  $f(r) = \mu e^{-\mu r} \cdot \mathbb{I}_{[0, \infty)}$ , tedy  $\mathbb{E}r = \frac{1}{\mu}$ . Výpočet rozptylu odhadu  $\tilde{\lambda}_1$  není složitý

$$\text{var } \tilde{\lambda}_1 = \frac{\alpha}{ab\mu^2},$$

zatímco pro zbylé dva rozptyly uvedeme jen náznak jejich výpočtu:

$$\begin{aligned} \text{var } \hat{\lambda} &= \frac{\alpha}{(ab)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} V(r, \beta, a, b) f(r) dr d\beta, \\ \text{var } \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\alpha}{2\mu^2(ab)^2} \left( ab + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\min(\frac{a}{\cos\beta}, \frac{b}{\sin\beta})} \frac{2}{\pi} \lambda^2(W_3(r, \beta)) f(r) dr d\beta \right). \end{aligned}$$

### Deterministické rozdělení úhlu

Nechť platí  $r \sim \text{Exp}(\mu)$ ,  $\mu > 0$ ,  $\beta \sim \text{Deterministic}(\beta_0)$ ,  $\beta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , potom jsou jednotlivé rozptyly tvaru

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{\lambda}_1 &= \frac{\alpha}{ab\mu^2}, \\ \text{var } \hat{\lambda} &= \frac{\alpha}{(ab)^2} \int_0^{\infty} V(r, \beta_0, a, b) f(r) dr, \end{aligned}$$

uvedený integrál je roven

$$\begin{aligned} &\mathbb{I}(\text{tg } \beta_0 \leq \frac{b}{a}) \left[ e^{\frac{-a\mu}{\cos\beta_0}} \cdot \frac{2}{\mu^4} (b\mu \cos\beta_0 - a\mu \sin\beta_0 - 2 \sin\beta_0 \cos\beta_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\mu^4} (ab\mu^2 - a\mu \sin\beta_0 - b\mu \cos\beta_0 + 2 \sin\beta_0 \cos\beta_0) \right] \\ &+ \mathbb{I}(\text{tg } \beta_0 > \frac{b}{a}) \left[ e^{\frac{-b\mu}{\sin\beta_0}} \cdot \frac{2}{\mu^4} (a\mu \sin\beta_0 - b\mu \cos\beta_0 - 2 \sin\beta_0 \cos\beta_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\mu^4} (ab\mu^2 - a\mu \sin\beta_0 - b\mu \cos\beta_0 + 2 \sin\beta_0 \cos\beta_0) \right]. \end{aligned}$$

Vzorec pro  $\text{var } \tilde{\lambda}_3$  je podobný, lze ho spočítat dosazením do vzorce (2.7), nicméně pro  $\beta_0 = 0$  dostáváme jistě použitelnější formule

$$\begin{aligned} \text{var } \tilde{\lambda}_1 &= \frac{\alpha}{ab\mu^2}, \\ \text{var } \hat{\lambda} &= \frac{\alpha}{a^2b} \cdot \frac{2}{\mu^3} (e^{-a\mu} - 1 + a\mu), \\ \text{var } \tilde{\lambda}_3 &= \frac{\alpha}{a^2b} \cdot \frac{1}{2\mu^3} (2a\mu + e^{-a\mu} - 1). \end{aligned}$$

## 2.3 Porovnání odhadů rozptylů délkové intenzity

V této podkapitole srovnáme vypočtené rozptyly odhadů délkové intenzity. Nejprve se zaměříme na obdélníkové okno  $W$  se stranami  $a, b$ , potom zúžíme předpoklady na čtvercové okno o straně délky  $a$ , což nám umožní jednodušší porovnávání.

Rozptyly odhadů  $\tilde{\lambda}_1$  a  $\tilde{\lambda}_3$  můžeme porovnat na základě odvozených obecných vzorců.

**Lemma 2.3.1.** *V Poissonově procesu úseček na  $\mathbb{R}^2$  platí nerovnost*

$$\text{var } \tilde{\lambda}_1 \geq \text{var } \tilde{\lambda}_3.$$

*Důkaz.* Porovnáním a úpravou vzorců (2.6) a (2.7) se dobereme až k nerovnosti  $ab - C_3 \geq 0$ , která je zřejmá ihned po rozepsání  $C_3$ .  $\square$

### 2.3.1 Obdélníkové okno

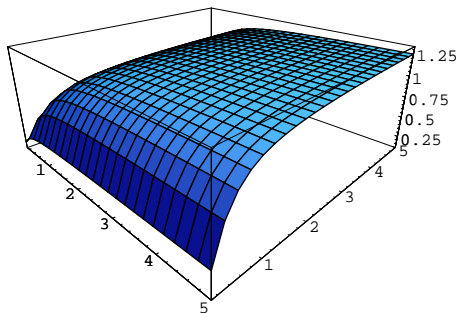
Poměry

$$P := \frac{\text{var } \hat{\lambda}}{\text{var } \tilde{\lambda}_1}, \quad P' := \frac{\text{var } \hat{\lambda}}{\text{var } \tilde{\lambda}_3},$$

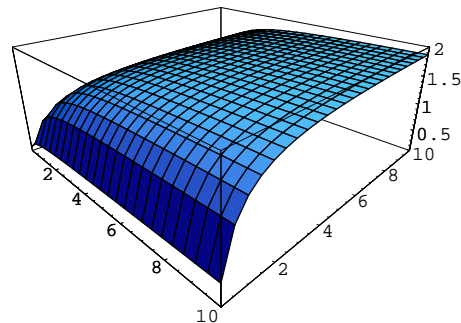
jsou funkce stran  $a, b$ , intenzity  $\mu$  v případě exponenciálního rozdělení délky, případně  $M$  u rovnoměrného rozdělení. Pokud se jedná ještě o deterministické rozdělení úhlu, pak k těmto argumentům přibývá ještě  $\beta_0$ .

Budeme uvažovat rovnoměrné rozdělení úhlu  $\beta$  na intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Abychom dostali funkci pouze dvou proměnných, budeme dosazovat za  $M$ , případně  $\mu$  jedničku, což neškodí, neboť se nám jedná jen o představu průběhu zmíněných poměrů.

Zhotovení grafů bylo provedeno v programu Mathematica [5].



Obrázek 2.5:  $P$  jako funkce  $a$  a  $b$  pro  $r \sim \text{Uniform}[0, 1]$ .



Obrázek 2.6:  $P'$  jako funkce  $a$  a  $b$  pro  $r \sim \text{Exp}(1)$ .

Obr. 2.5 ukazuje poměr  $P$  pro rovnoměrné rozdělení délky úsečky. Na obr. 2.6 je vykreslen poměr  $P'$  s exponenciálním rozdělení délky úsečky, přičemž na  $x$ -ových a  $y$ -ových osách jsou délky stran okna. Je patrné, že se tyto grafy se zvětšujícím oknem blíží k rovině  $z = \frac{4}{3}$ , (resp.  $z = 2$ ). Proč se jedná zrovna o tyto hodnoty bude vidět za chvíli.

### 2.3.2 Čtvercové okno

Pokud uvažujeme čtvercové okno o straně délky  $a$ , budou poměry  $P$  a  $P'$ , kromě případu deterministického rozdělení úhlu, funkce dvou proměnných ( $a$  a  $M$  nebo  $\mu$ ).

Užitečné by bylo stanovit mez, kdy hodnoty těchto poměrů překročí hodnotu jedna, tj. najít hranici, do níž je lepší odhad v čitateli, zatímco nad ní je lepší užít odhad ve jmenovateli. Existence takových mezí je uvedena v následující větě, viz [1] pro její zformulování a [2] pro její důkaz (dokonce v obecnějším znění).

Není divu, že takové meze závisejí na  $\frac{M}{2}$  (resp. na  $\frac{1}{\mu}$ ), tedy na středních hodnotách délek úseček, ale ukazuje se, že se jedná dokonce o závislost lineární.

**Věta 2.3.2.** *Bud'  $\Phi$  Poissonův proces úseček na  $\mathbb{R}^2$  s délkou typické úsečky mající kladný konečný rozptyl. Jestliže je  $W$  okno pozorování čtverec o straně délky  $a$ , pak existuje  $a_0$  a  $a'_0$  takové, že  $\text{var } \tilde{\lambda}_1 < \text{var } \tilde{\lambda}$  pro všechna  $a > a_0$  a  $\text{var } \tilde{\lambda}_3 < \text{var } \tilde{\lambda}$  pro všechna  $a > a'_0$ . Dále platí*

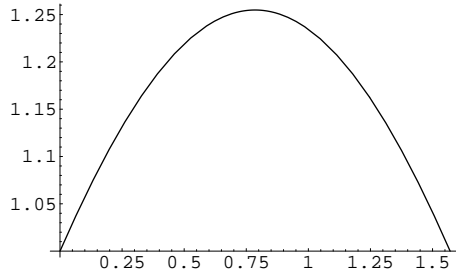
$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{var } \tilde{\lambda}_1}{\text{var } \tilde{\lambda}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\text{var } \tilde{\lambda}_3}{\text{var } \tilde{\lambda}} = \frac{(\mathbb{E} r)^2}{\mathbb{E} r^2} = b < 1.$$

V závěru již citovaného článku [1] uvádí autor následující tabulku 2.1, ve které jsou spočteny zmíněné meze, tabulku přepisujeme konzistentně se zde užívaným značením. Výpočty mezí  $a_0$  a  $a'_0$  byly ovšem založeny na mylném předpokladu.

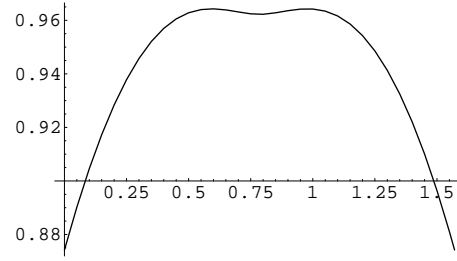
Tabulka 2.1: Hodnoty mezí spočtené v [1]

$\mathcal{D}$	$\rho$	$a_0$	$a'_0$	$b$
Uniform(0,M)	Uniform $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$2.33 \cdot \mathbb{E} r$	–	$\frac{3}{4}$
Uniform(0,M)	Deterministic(0)	$M = 2 \mathbb{E} r$	$\frac{1}{4}M = \frac{1}{2} \mathbb{E} r$	$\frac{3}{4}$
Exponential( $\mu$ )	Uniform $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$1.86 \cdot \mathbb{E} r$	–	$\frac{1}{2}$
Exponential( $\mu$ )	Deterministic(0)	$2\mu = 2 \mathbb{E} r$	$1.27 \cdot \mathbb{E} r$	$\frac{1}{2}$

Místo plného  $V(r, \beta, a, b)$  bylo při počítání užito jen  $V_1$ , tudíž jsou stanovené hodnoty, kromě limitních hodnot  $b$ , převážně nepravdivé. Navíc u deterministického rozdělení úhlu tyto meze závisejí na jeho hodnotě  $\beta_0$ , což demonstrují obr. 2.7 a obr. 2.8 opět generované programem Mathematica.



Obrázek 2.7:  $a_0$  jako funkce  $\beta_0$  pro  $r \sim \text{Uniform}[0, 1]$ .



Obrázek 2.8:  $a'_0$  jako funkce  $\beta_0$  pro  $r \sim \text{Exp}(1)$ .

Obr. 2.7 ukazuje závislost  $a_0$  na velikosti úhlu  $\beta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  při rovnoměrném rozdělení délky úsečky. Maximum je v  $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$ , pro  $a'_0$  dostáváme podobný graf, jen s jiným rozmezím hodnot na y-ové ose. Na obr. 2.8 je zachycena situace závislosti  $a'_0$  opět na velikosti úhlu  $\beta_0$  při exponenciálním rozdělení délky úsečky, ale zde kupodivu není dosahováno maxima hodnotou  $\beta_0 = \frac{\pi}{4}$ , ale symetricky kolem této hodnoty. Podobně je to s průběhem této závislosti pro  $a_0$ .

Spočtené meze  $a_0, a'_0$  jsou sestaveny do tabulky 2.2, v případech  $\rho$  deterministického je uveden interval. Je dobré si uvědomit, že spodní mez je dosažena při úhlu  $\beta = 0$  a  $\beta = \frac{\pi}{2}$  a horní mez je nabýváno u  $\mathcal{D}$  rovnoměrného rozdělení v hodnotě  $\beta = \frac{\pi}{4}$ .

Tabulka 2.2: Skutečné hodnoty mezí

$\mathcal{D}$	$\rho$	$a_0$	$a'_0$
Uniform(0,M)	Uniform( $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ]	$2.3277 \cdot \mathbb{E} r$	$0.8516 \cdot \mathbb{E} r$
Uniform(0,M)	Deterministic	$[2, 2.5097] \cdot \mathbb{E} r$	$[0.7812, 0.8801] \cdot \mathbb{E} r$
Exponential( $\mu$ )	Uniform( $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ ]	$1.7465 \cdot \mathbb{E} r$	$0.9422 \cdot \mathbb{E} r$
Exponential( $\mu$ )	Deterministic	$[1.5936, 1.808] \cdot \mathbb{E} r$	$[0.8745, 0.9643] \cdot \mathbb{E} r$



# Literatura

- [1] Mrkvička T.: *Estimation variances for Poisson proceses of compact sets*, Adv. Appl. Prob. (SGSA) **33** (2001) 765–772.
- [2] Pawlas Z.: *Asymptotics in stochastic geometry*, Doctoral thesis, Charles University, Faculty of Mathematics and Physics, Prague, 2004.
- [3] Rataj J.: *Bodové procesy*, druhé vydání, Karolinum, Praha, 2006.
- [4] Stoyan D., Kendall W. S. and Mecke J.: *Stochastic Geometry and Its Applications*, 2nd edition, John Wiley & Sons, Chichester, 1995.
- [5] Wolfram Research, Inc.: *Mathematica, version 5.2*, 2005.