

Posudek vedoucího doktorandské disertační práce

Marek Cúth: „*Separable reduction theorems, systems of projections and retractions*“

Předložená disertační práce je tvořena čtyřmi odbornými články, z nichž tři již byly publikovány a jeden byl přijat k publikaci. Jednotlivým tématem jsou věty o separabilní redukci, zejména v teorii Banachových prostorů, s důrazem na indexované systémy projekcí na Banachových prostorech a retrakcí na kompaktních prostorech.

První kapitolu tvoří článek publikovaný ve *Fundamenta Mathematicae*, který ukazuje možnosti využití množinově teoretické metody elementárních submodelů k důkazům vět o separabilní redukci. Tuto metodu využíval například v topologii A. Dow a ve funkcionální analýze P. Koszmider a W. Kubiś ke konstrukci projekcí. V práci je metoda vyložena a zpřesněna a je ukázáno její využití například pro studium diferencovatelnosti funkcí na Banachových prostorech. Článek z větší části vychází z autorovy diplomové práce.

Druhou kapitolu tvoří článek publikovaný v *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, třetí kapitolu článek publikovaný v *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Tyto články se věnují kompaktním prostorům s retrakčním skeletem (tj. „nekomutativním Valdiviovým kompaktním“) a Banachovým prostorům s projekčním skeletem (tj. „nekomutativním Pličkovým prostorům“).

Ve druhé kapitole autor dokazuje nekomutativní verze mnoha dřívějších výsledků školitele, které byly formulovány pro Valdiviovy kompakty a Pličkovy prostory. Například, je-li X Banachův prostor, jehož duální koule není Corsonův kompaktní, školitel ukázal v roce 2000, že existuje ekvivalentní norma, pro kterou duální koule není ani Valdiviův kompaktní. Zde je dokázáno, že pro nějakou ekvivalentní normu duální koule dokonce nemá retrakční skelet. Dále, podle výsledku školitele z roku 1999, každý ne-Corsonův kompaktní má spojitý ne-Valdiviův obraz. Zde se ukazuje, že má dokonce spojitý obraz bez retrakčního skeletu. Podobné zobecnění je dokázáno ještě pro dva další výsledky. Nástrojem pro důkaz je zkoumání vlastností množin generovaných retrakčním skeletem, které jsou velmi podobné vlastnostem „ Σ -podmnožin“ Valdiviových kompaktních. Důkazy zobecněných vět však nejsou přímočaré, bylo třeba použít některých nových metod, včetně metody elementárních submodelů z první kapitoly.

Ve třetí kapitole autor dokazuje nekomutativní verzi Valdiviova výsledku z roku 1991, když konstruuje simultánní projekční skelet pro vhodné podprostory $C(K)$, kde K má retrakční skelet. Aplikacemi jsou jednak nekomutativní verze dalších výsledků školitele, dále řešení několika otázek z druhé kapitoly a rovněž nová charakterizace Asplundových prostorů pomocí projekčního skeletu.

Čtvrtá kapitola obsahuje společný článek uchazeče se školitelem, který byl přijat v *Central European Journal of Mathematics*. Věnuje se porovnání dvou metod důkazů vět o separabilní redukci v teorii Banachových prostorů – metody elementárních submodelů z první kapitoly a metody bohatých familií využívané více autory. Tyto metody dávají podobné výsledky a intuitivně se zdá, že by mohly být ekvivalentní. V práci se jejich vztah zkoumá exaktně. Je ukázáno, že výsledky dokázané pomocí bohatých familií platí i ve formulaci pomocí elementárních submodelů, a opačná implikace platí pro prostory s fundamentálním minimálním systémem a pro prostory s hustotou \aleph_1 . Výsledek je aplikován na zjednodušení definice projekčního skeletu. Uchazečův podíl na tomto článku je alespoň poloviční.

Celkově lze říci, že předložená práce obsahuje řadu netriviálních nových výsledků, a že uchazeč jednoznačně prokázal, že je schopen samostatně tvořivé práce. Dále bych zdůraznil, že čtyři články zařazené do práce jsou pouze výběrem z uchazečových článků. Celkem je autorem či spoluautorem 10 článků, z nichž 4 byly publikovány, 2 přijaty k publikaci a 4 zaslány k publikaci. Například metoda elementárních submodelů z první kapitoly je aplikována v dalších dvou článcích na důkaz separabilní determinovanosti některých typů σ -pórovitosti, další tři články se věnují projekcím a retrakcím.

Předloženou práci jednoznačně doporučuji uznat jako doktorandskou disertační práci.