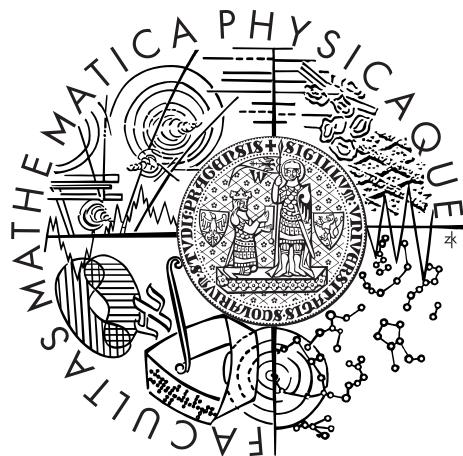


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Sonja Kešelj

Extremální míry v pravděpodobnosti

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Obecná matematika

Praha 2014

Na tomto místě bych ráda poděkovala Mgr. Petru Dostálovi, Ph.D. za trpělivost, vstřícnost a velice přínosné rady a připomínky při zpracování mé bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V dne

Podpis autora

Název práce: Extremální míry v pravděpodobnosti

Autor: Sonja Kešelj

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Pólyovo urnové schéma je známý parametrický model v pravděpodobnosti, se zajímavými vlastnostmi, na které se v této práci podíváme. Bayesovým přístupem navíc ukážeme, že za určitých podmínek tento model je ekvivalentní s Bernoullichí schématem nezávislých alternativních pokusů s náhodným parametrem, které má beta rozdělení. Tématem práce je též ergodická teorie stacionárních posloupností, spolu s extremální analýzou pravděpodobnostních měr invariantních vůči měřitelné transformaci, ilustrovanou na příkladu homogenních Markovových řetězců s stacionárním rozdělením. Finální segment práce je věnován základům teorie oceňování finančních derivátů, konkrétně hledání bezarbitrážní ceny využitím martingalových měr, což je doplněno příklady aplikace na binomickém oceňovacím stromu.

Klíčová slova: extremální míra, Pólyovo urnové schéma, ergodické a stacionární posloupnosti, oceňování finančních derivátů

Title: Extremal measures in probability

Author: Sonja Kešelj

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Petr Dostál, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: Pólya urn scheme is a know parametric probability model with interesting characteristics, which we shall look into within the scope of this thesis. Furthermore, using Bayesian approach we will show that, under certain conditions, the aforementioned model is equivalent to the Bernoulli scheme of independent alternative trials with random parameter that has beta distribution. Another subject of the thesis is ergodic theory of stationary sequences, as well as extremal analysis of probability measures that are invariant under some measurable transformation. This is illustrated on an example of homogeneous Markov chain with stationary distribution. The final segment of the thesis focuses on the theory of financial derivatives pricing - more specifically, finding arbitrage-free price using martingale measures. To this we add examples of application on binomial pricing trees.

Keywords: extremal measure, Pólya urn scheme, ergodic and stationary sequences, financial derivatives pricing

Obsah

Úvod	2
1 Pólyovo urnové schéma	3
1.1 Pólyovo urnové schéma	3
1.1.1 Pravděpodobnostní rozdělení	3
1.1.2 Martingalová vlastnost	5
1.1.3 Konvergence	6
1.2 Beta-Bernoulliho model	8
1.3 Ekvivalence modelů	10
2 Ergodická teorie stacionárních posloupností	11
2.1 Úvod do ergodické teorie	11
2.2 Birkhoffova ergodická věta	13
2.3 Ergodicita a extremalita	14
2.3.1 Markovovy řetězce	15
3 Oceňování finančních derivátů	16
3.1 Extremální martingalové míry	16
3.2 Příklady	17
3.2.1 Jednokrokový binomický strom	18
3.2.2 Dvoukrokový binomický strom	19
Literatura	22

Úvod

Cílem této práce je seznámení se s vlastnostmi extremálních bodů některých množin pravděpodobnostních měr. Studované množiny měr nejsou mezi sebou propojené, ani jsme se na jejich propojení nezaměřovali. Následkem toho je práce rozčleněná na tři nezávislé části, z kterých každá tvoří samostatnou kapitolu.

V první kapitole uvádíme dva parametrické modely: první je model Pólyova urnového schématu, kde odvodíme jeho základní charakteristiky, jako jsou martingalová vlastnost a konvergence relativních četností tažených kuliček. Druhý je Beta-Bernoulliho model, ve kterém ukážeme, že pravděpodobnostní rozdělení můžeme vyjádřit v analogickém tvaru jako rozdělení při Pólyovém urnovém schématu. Následně modely porovnáme a stanovíme, za jakých podmínek můžeme mezi nimi předpokládat ekvivalence.

Ergodické vlastnosti stacionárních posloupností a jejich invariantních měr jsou hlavním tématem druhé kapitoly. Nejprve se seznámíme se základními pojmy, které jsou nezbytné pro vybudování ergodické teorie, pak podstatnou část kapitoly věnujeme podrobnému důkazu Birkhoffové ergodické věty o konvergenci. Následně dokážeme i vztah mezi ergodicitou a extremalitou pravděpodobnostních měr invariantních vůči měřitelné transformaci. Na příkladě homogenního Markovova řetězce jako stacionárního procesu ukážeme jak tento vztah vypadá pro konkrétní míry.

V třetí kapitole se dozvíme jaké je praktické použití extremálních martingalových měr v procesu oceňování finančních derivátů. Je možné říct, že kapitola má přehledový charakter, kde probereme základní principy oceňování derivátu využitím teorie martingalových měr a zkusíme je pak aplikovat na jednoduchých příkladech binomických oceňovacích stromů.

Kapitola 1

Pólyovo urnové schéma

Pólyovo urnové schéma je známý urnový model, který nese název podle maďarského matematika George Pólyi. V této kapitole se Bayesovým přístupem podíváme na jeho základní vlastnosti a následně ukážeme, že tento model za určitých podmínek lze porovnat s Bernoulliho schématem nezávislých alternativních pokusů s náhodným parametrem, které má beta rozdělení.

1.1 Pólyovo urnové schéma

Model. Uvažujme urnu, ve které se v počátečním čase $t = 0$ nachází a černých a b bílých kuliček. Z urny náhodně vytahujeme kuličky a po každé, když jednu vytáheme, po zjištění barvy ji zase do urny vrátíme, spolu s dalšími c kuličkami stejné barvy, kde $c > 0$.

Všimněme si, že tento model zobecňuje model výběru s vracením a byl mu ekvivalentní, kdyby platilo, že $c = 0$. Kdybychom připustili možnost, že $c = -1$, šlo by o opačný případ výběru bez vracení. Zajímáme se o to, zda a jakým způsobem se s přibýváním nových kuliček mění i šance, že vytáhneme konkrétní barvu. Definujeme veličinu X_n jako indikátor náhodného jevu, že v čase $t = n$ byla vytažena bílá kulička. Pak podíl počtu bílých kuliček ku počtu všech v čase $t = n$ označíme B_n a vyjádříme ho pomocí X_n následujícím způsobem:

$$B_n = \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k}{a + b + nc},$$

V následujících odstavcích se podíváme na základní charakteristiky uvedeného modelu.

1.1.1 Pravděpodobnostní rozdělení

Značení 1. Pro $r \in [0, \infty)$ a $n \in \mathbb{N}_0$ budeme symbolem

$$r^{[n]} = \prod_{k=0}^{n-1} (r + k) = r(r+1)\cdots(r+(n-1))$$

značit n -tou vzestupnou mocninu čísla r . Zde jsme definovali $r^{[0]} = 1$.

Tvrzení 1. Nechť X_k je náhodná veličina z Pólyova urnového modelu, indukující tažení bílé kuličky v k -tému tahu, kdykoli $k \in \mathbb{N}$, a nechť $x_k \in \{0, 1\}$, $k \leq n$ jsou binární proměnné, čí hodnotu 1 interpretujeme jako vytažení bílé, a hodnotu 0 jako vytažení černé kuličky. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{[m]} \left(\frac{a}{c}\right)^{[n-m]}}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^{[n]}}, \quad \text{kde } m = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.1)$$

Důkaz. Provedeme indukcí dle $n \in \mathbb{N}$. Pro $n = 1$ bychom tak měli ukázat, že

$$P(X_1 = 1) = \frac{b}{a+b}, \quad P(X_1 = 0) = \frac{a}{a+b},$$

ale to plyně z prosté úvahy, neboť na počátku je v urně a černých kuliček a b bílých. Pravděpodobnost nalevo vyjadřuje pravděpodobnost tažení bílé kuličky a je přirozeně rovna relativní četnosti bílých kuliček v osudí. Druhy vztah dostaneme obdobně. Analogickou úvahou dostaneme následující rovnosti

$$P(X_{n+1} = 1 | X_1, \dots, X_n) = B_n = \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k}{a + b + nc}, \quad (1.2)$$

$$P(X_{n+1} = 0 | X_1, \dots, X_n) = 1 - B_n \quad (1.3)$$

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a indukcí předpokládejme, že vzorec 1.1 platí. Z 1.2 dostaneme, že

$$P(X_{n+1} = 1 | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{b + cm}{a + b + cn} = \frac{\frac{b}{c} + m}{\frac{a+b}{c} + n}.$$

Protože pro vzestupnou množinu platí, že $r^{[k+1]} = (r+k)r^{[k]}$, postupním podmiňováním dostáváme

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = 1) &= \frac{\frac{b}{c} + m}{\frac{a+b}{c} + n} \cdot \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{[m]} \left(\frac{a}{c}\right)^{[n-m]}}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^{[n]}} \\ &= \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{[m+1]} \left(\frac{a}{c}\right)^{[n+1-(m+1)]}}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^{[n+1]}}. \end{aligned}$$

Pro případ $X_{n+1} = 1$ tak máme ukázanou platnost vzorce 1.1 kde n je nahrazeno $n + 1$. Případ $X_{n+1} = 0$ se ukáže obdobně. Z 1.2 dostaneme, že

$$P(X_{n+1} = 0 | X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = 1 - \frac{b + cm}{a + b + cn} = \frac{a + c(n - m)}{a + b + cn} = \frac{\frac{b}{c} + m}{\frac{a+b}{c} + n}.$$

Pak ovšem

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = 0) &= \frac{\frac{a}{c} + n - m}{\frac{a+b}{c} + n} \cdot \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{[m]} \left(\frac{a}{c}\right)^{[n-m]}}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^{[n]}} \\ &= \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{[m]} \left(\frac{a}{c}\right)^{[n+1-m]}}{\left(\frac{a+b}{c}\right)^{[n+1]}}. \end{aligned}$$

Zde i v předchozím případě je důležité si uvědomit, že hodnota $m = \sum_{j=1}^n x_j$ se vztahuje k hodnotě n , zatímco odpovídající hodnota vztahující se k $n + 1$ by byla

tvaru $m^* = \sum_{j=1}^{n+1} x_j$ a byla by rovna v předchozích případech po řadě $m + 1$ a m .

□

Všimněme si, že obdržený vzorec pro rozdělení závisí pouze na výsledném počtu tažení bílých kuliček do času n a nikoliv na tom, kdy k těmto tažením došlo. Pokud bychom tedy výsledky tažení zpermutovali pevnou permutací, dostali bychom výslednou posloupnost délky n , která má stejně rozdělení jako ta původní. Tato vlastnost je v knize [4], na str. 399 definována následujícím způsobem:

Definice 1. Řekneme, že posloupnost reálných náhodných veličin je symetrická, jestliže pro každou permutaci $\{k_1, \dots, k_n\}$ množiny $\{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\mathcal{L}(X_{k_1}, \dots, X_{k_n}, X_{n+1, \dots}) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1, \dots})$$

Intuitivně se symetrii říká i permutovatelnost. Tento poznatek nám bude v dalším textu užitečný. Jestli si, navíc, uvědomíme, že náhodné veličiny X_n nejsou nezávislé, neboť pravděpodobnost, že v n -tém čase vytáhneme kuličku určité barvy se zvětšuje nebo zmenšuje v závislosti na tom, které kuličky jsme vytáhli předtím, pak Pólyovo urnové schéma je dobrý ilustrativní příklad toho, že náhodné veličiny mohou tvorit symetrickou posloupnost i přes to, že nejsou nezávislé, stejně rozdělené. Jinými slovy, vlastnost symetrie je slabší.

1.1.2 Martingalová vlastnost

Jelikož víme, že při výběru bez vracení každé vytažení kuličky jedné barvy zmenšuje pravděpodobnost výskytu stejné barvy v dalším kroku, logickým je důsledkem, že se v našem urnovém modelu tato pravděpodobnost bude, naopak, zvětšovat. Zajímavé je ale to, že s každým dalším časovým posunem tažení konkrétní barvy má menší a menší vliv na budoucí výsledek tažení. Je tomu tak proto, že se větší pravděpodobnost vytažení jedné barvy kvůli předchozímu častému výskytu vyváží tím, že každý další výskyt míň tažené barvy má o dost větší vliv na relativní četnost.

Takovéto uvažování nás usměrňuje k matematickému pojmu *martingal*, který je důležitým prvkem teorie pravděpodobnosti a jak se podíváme, dobře zachycuje vlastnost (stochastické) vyváženosti. Uvádíme zde základní definici, spolu s pojmy nezbytnými k jejímu vyslovení:

Definice 2. Uvažujme (Ω, \mathcal{F}, P) pravděpodobnostní prostor. Neklesající posloupnost σ -algeber $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots$, takových, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, nazveme filtrace.

Jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ náhodná veličina X_n je \mathcal{F}_n -měřitelná, řekneme, že $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ -adaptovaná posloupnost.

Pokud, navíc, platí $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ nazveme \mathcal{F}_n kanonickou filtrací posloupnosti X_n .

Definice 3. Nechť pro $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ -adaptovaný proces $(X_n, n \in \mathbb{N})$ platí, že $X_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$ -martingal, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \text{ skoro jistě.}$$

Máme-li kanonickou filtraci, pak říkáme že $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je martingal.

V skriptách [1] jsou k nalezení definice v obdobném znění, spolu se základy martingalové teorie.

Můžeme tedy uvést následující tvrzení:

Tvrzení 2. Posloupnost relativních četností B_n je martingal (vzhledem ke kanonické filtraci).

Důkaz. Nejprve si uvědomíme, že B_n , jakožto relativní četnost bílých kuliček v urně, nabývá hodnot pouze na omezeném intervalu $[0,1]$, z čehož víme, že $B_n \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Je třeba ještě ukázat, že $\mathbb{E}[B_{n+1}|B_1, \dots, B_n] = B_n$ skoro jistě. Z definice B_n bezprostředně plyne, že $\sigma(B_1, \dots, B_n) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$, proto obdržíme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{n+1}|B_1, \dots, B_n] &= \mathbb{E}\left[\frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k + c X_{n+1}}{a + b + (n+1)c} \middle| X_1, \dots, X_n\right] \\ &= \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k + c \mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n]}{a + b + (n+1)c} = \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k + c B_n}{a + b + (n+1)c} \\ &= \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k + c \frac{b+c \sum_{k=1}^n X_k}{a+b+nc}}{a + b + (n+1)c} = \frac{(b + c \sum_{k=1}^n X_k)(a + b + nc + c)}{(a + b + nc)(a + b + (n+1)c)} \\ &= B_n \text{ skoro jistě.} \end{aligned}$$

quod erat demonstrandum. Ve výpočtu jsme využili skutečnosti, že veličina X_{n+1} nabývá pouze hodnot 0 a 1, z čehož plyne

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|X_1, \dots, X_n] = 1 \cdot P(X_{n+1} = 1|X_1, \dots, X_n) = B_n \text{ skoro jistě.}$$

□

1.1.3 Konvergance

K lepšímu pochopení studovaného modelu též dospějeme vyšetřováním limitního chování relativních četností bílých kuliček a při odvozování této vlastnosti budou nám užitečné poznatky z předchozích odstavců. Z Doobovy věty (Věta 4.1 v [1]) je totiž patrné, že pro martingal $(B_n, n \in \mathbb{N})$, který nabývá hodnot na intervalu $[0, 1]$ existuje integrovatelná náhodná veličina B taková, že $B_n \rightarrow B$ skoro jistě pro $n \rightarrow \infty$. Předtím, než zjistíme vlastnosti této veličiny, uvedeme pomocní tvrzení:

Tvrzení 3. Platí $|B_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k| \rightarrow 0$ všude na Ω , pro $n \rightarrow \infty$.

Důkaz. Pro $n \rightarrow \infty$ platí:

$$\begin{aligned} B_n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k &= \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k}{a + b + nc} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \\ &= \frac{b + c \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{n}(a + b + nc) \sum_{k=1}^n X_k}{a + b + nc} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n X_k (c - \frac{a+b+nc}{n}) + b}{a + b + nc} = \frac{b - \frac{a+b}{n} \sum_{k=1}^n X_k}{a + b + nc} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kde omezenost čitatele posledního zlomku plyne z omezenosti $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, jakožto relativní četnosti nabývající hodnot na omezeném intervalu $[0,1]$. \square

Jinými slovy, ukázali jsme že veličiny B_n mají limitu právě tehdy, když $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ konvergují taky a této dvě limity se rovnají. Chtěli bychom tedy poblíž určit, jak tato limita vypadá. Připomeňme si, předtím, základní charakteristiky beta rozdělení.

Poznámka (Beta rozdělení). Nechť náhodná veličina X má beta rozdělení s parametry $Beta(\alpha, \beta)$, kde $\alpha, \beta > 0$. Pak hustota X je určena následujícím vzorcem

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad x \in (0,1)$$

kde $B(\alpha, \beta)$ značí *beta* funkci definovanou takto: $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$. Ještě si připomínáme, že mezi *beta* a *gama* funkci platí vztah

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

a navíc

$$\Gamma(\alpha + k) = \alpha^{[k]} \Gamma(\alpha).$$

Už máme všechny potřebné informace, k tomu, abychom spočítali k -tý moment

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X^k &= \int_0^1 x^k f(x) dx = \int_0^1 x^k \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 x^{\alpha+k-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{B(\alpha+k, \beta)}{B(\alpha, \beta)} \\ &= \frac{\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{\frac{\alpha^{[k]}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)^{[k]}\Gamma(\alpha+\beta)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{\alpha^{[k]}}{(\alpha+\beta)^{[k]}} = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha+k}{\alpha+\beta+k}. \end{aligned}$$

Znalost momentů bude užitečná při určení rozdělení, a to ve smyslu následující poznámky.

Poznámka. Pro náhodnou veličinu $0 \leq X \leq 1$ platí

$$\mathbb{E} e^{itX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E} X^k.$$

Speciálně, momenty $\mathbb{E} X^k, k \in \mathbb{N}$ určují rozdělení P_X veličiny X .

K tomuto výsledku dospějeme použitím Fubiniho věty na Taylorův rozvoj exponeciały. Tedy

$$\mathbb{E} e^{itX} = \mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} X^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E} X^k.$$

Jelikož uvažujeme omezenou veličinu X , použití Fubiniho věty je odůvodněné následující nerovností

$$\mathbb{E} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(it)^k}{k!} X^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^k}{k!} = e^{|t|} < \infty.$$

Tvrzení 4. Náhodná veličina B má beta rozdělení s parametry $\frac{b}{c}, \frac{a}{c}$.

Důkaz. K žádanému výsledku se dopracujeme pomocí momentů $\mathbb{E} B^d, d \in \mathbb{N}$, neboť pro náhodnou veličinu $B \in [0, 1]$ platí, že momenty jednoznačně určují její rozdělení.[zdroj]

Jelikož už víme, že posloupnost B_n je martingal, jednoduše plyne

$$\mathbb{E} T_n = \mathbb{E} T_0 = \frac{b}{a+b}$$

Dále využijeme znalosti symetrie posloupnosti a předchozího tvrzení, neboť pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} B_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)^2$$

Obdržíme pak pro $d = 2, n \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j,k=1}^n \mathbb{E} X_j X_k = \frac{1}{n^2} (\mathbb{E} X_1^2 n + n(n-1) \mathbb{E} X_1 X_2) \rightarrow \mathbb{E} X_1 X_2,$$

kde podle 1.1

$$\mathbb{E} X_1 X_2 = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{\frac{b}{c}(\frac{b}{c} + 1)}{\frac{a+b}{c}(\frac{a+b}{c} + 1)}.$$

Tedy i

$$\mathbb{E} B_n^2 \rightarrow \frac{\frac{b}{c}(\frac{b}{c} + 1)}{\frac{a+b}{c}(\frac{a+b}{c} + 1)}$$

Analogickým postupem přispějeme k výsledku, že pro $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} B_n^d &\rightarrow \mathbb{E} X_1 X_2 \dots X_d = P(X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_d = 1) \\ &= \frac{(\frac{b}{c})^{[d]} (\frac{a}{c})^{[d-d]}}{(\frac{a+b}{c})^{[d]}} = \prod_{j=0}^{d-1} \frac{\frac{b}{c} + j}{\frac{a+b}{c} + j} \end{aligned}$$

což je přesně tvar d -tého momentu rozdělení Beta $(\frac{b}{c}, \frac{a}{c})$.

Konečně, protože $B_n \rightarrow B$ skoro jistě,

$$\mathbb{E} B^d = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} B_n^d = \prod_{j=0}^{d-1} \frac{\frac{b}{c} + j}{\frac{a+b}{c} + j}, \quad \text{tj. } B \sim \text{Beta} \left(\frac{b}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

□

1.2 Beta-Bernoulliho model

V následující části prezentujeme další parametrický model a s cílem, abychom se co nejlépe všimli souvislosti s Pólyovým urnovým schématem, zkusíme značení parametrů přizpůsobit těm už uvedeným.

Model. Uvažujme náhodnou veličinu B s hodnotami na intervalu $(0, 1)$ a beta rozdelením $\text{Beta}(\alpha, \beta)$, kde $\alpha, \beta > 0$. Nechť náhodné veličiny X_1, X_2, \dots jsou podmíněně veličinou B nezávislé a alternativně rozdelené s parametrem b , tedy platí

$$P(X_n = 1 | B = b) = b, \quad b \in (0, 1).$$

Obecně pro $n \in \mathbb{N}$ a $x_j \in \{0, 1\}, j \leq n$ binární proměnné dostáváme

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | B = b) = b^m(1 - b)^{n-m}, \quad \text{kde } m = \sum_{j=1}^n x_j. \quad (1.4)$$

Tuto posloupnost pak nazýváme Beta-Bernoulliho proces.

Chtěli bychom ukázat, že konečně-rozměrné rozdelení pravděpodobnosti takto definované posloupnosti je totožné rozdelení posloupnosti $(X_n, n \in \mathbb{N})$ definované v modelu Pólyových urn. Vyslovíme proto následující tvrzení:

Tvrzení 5. Označme $\sum_{j=1}^n x_j = m, m \leq n$, kde každé x_j nabývá hodnot 0 nebo 1 a pro $r \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ použijeme opět značení: $r^{[n]} = r(r+1)\cdots(r+(n-1))$, kde definujeme $r^{[0]} = 1$. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \frac{\alpha^{[m]}\beta^{[n-m]}}{(\alpha + \beta)^{[n]}} \quad (1.5)$$

Důkaz. Jelikož jsme si už připomněli vlastnosti beta rozdelení, ze znalosti 2.6 dostáváme

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{E}(P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | B = b)) \\ &= \int_0^1 b^m(1 - b)^{n-m} f(b) db = \int_0^1 b^m(1 - b)^{n-m} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} b^{\alpha-1}(1 - b)^{\beta-1} db \\ &= \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \int_0^1 b^{m+\alpha-1}(1 - b)^{n+\beta-m-1} db = \frac{B(m+\alpha, n+\beta-m)}{B(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha^{[m]}\beta^{[n-m]}}{(\alpha + \beta)^{[n]}} \end{aligned}$$

Abychom se dostali k poslední rovnosti, použili jsme vztah beta a gama funkcí, neboť:

$$\begin{aligned} \frac{B(m+\alpha, n+\beta-m)}{B(\alpha, \beta)} &= \frac{\frac{\Gamma(m+\alpha)\Gamma(n+\beta-m)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}}{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\alpha^{[m]}\Gamma(\alpha)\beta^{[n-m]}\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)(\alpha+\beta)^{[n]}\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha^{[m]}\beta^{[n-m]}}{(\alpha+\beta)^{[n]}} \end{aligned}$$

□

Poznámka. Podobně jako v případě rozdelení 1.1, posloupnost $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je symetrická (tj. permutovatelná) neboť její pravděpodobnostní rozdelení opět závisí na počtu úspěchů ale ne i na jejím pořadí.

1.3 Ekvivalence modelů

Dostáváme se k poněkud překvapivému závěru, že dva analyzované modely jsou i přes všechny rozdílnosti propojené. Dokonce, pro každé $c > 0$ můžeme mezi Pólyovým urnovým schématem a modelem beta-Bernoulliho alternativních pokusů předpokládat i ekvivalenci. Například, pravděpodobnostní rozdělení 1.1 a 1.5 mají pro $\alpha = \frac{b}{c}$ a $\beta = \frac{a}{c}$ totožný tvar. Vzhledem k tomu, že rozdělení náhodné posloupnosti je určeno systémem konečně rozměrných rozdělení, dostáváme se k závěru, že v obou modelech posloupnosti X_1, X_2, \dots mají stejné rozdělení. Jestli si navíc uvědomíme, že v obou případech veličinu B dostaneme jako limitu skoro jistě $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ pro $n \rightarrow \infty$, tento závěr můžeme rozšířit i na posloupnost (B, X_1, X_2, \dots) .

Kapitola 2

Ergodická teorie stacionárních posloupností

V této kapitole se podíváme na základy ergodické teorie stacionárních posloupností a seznámíme se podrobně s Birkhoffovou ergodickou větou. Dále si ukážeme vztah mezi extremalitou a ergodicitou pro míry, které jsou invariantní vůči nějaké měřitelné transformaci, což na konci zkusíme ilustrovat na příkladu Markovských řetězců.

2.1 Úvod do ergodické teorie

Nejprve si definujme základní pojmy, kterým se budeme skrz celou kapitolu sloužit. Převezmemme si přitom značení podobně tomu v kapitole VI.6 v knize [4].

Definice 4. *Mějme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a měřitelné zobrazení $T : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega, \mathcal{F})$, kterému někdy budeme říkat transformace. Řekneme, že P je T -invariantní míra, jestliže platí:*

$$P(T^{-1}A) = P(A) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Pak $\mathcal{I}_T = \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}A = A\}$ značí σ -algebru T -invariantních množin.

Definice 5. *Řekneme, že náhodná posloupnost $(X_n, n \in \mathbb{N})$ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) je stacionární, když její podmíněné rozdělení je invariantní vůči posunutí, tj.*

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots | P) = \mathcal{L}(X_n, X_{n+1}, \dots | P) \quad n \in \mathbb{N}$$

Posloupnost $(X_n, n \in \mathbb{N})$ je stacionární a ergodická, pokud $P[(X_1, X_2, \dots) \in A]$ je rovno 0 nebo 1 pro $A \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}$ takovou, že $p^{-1}A = A$. Zde p definujeme jako operátor posunutí:

$$\begin{aligned} p : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}) &\rightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}}) \\ p^n(X) &= X_{n+1} \end{aligned}$$

Poznámka: V rámci této kapitoly nás více, než samotná stacionární posloupnost bude zajímat její rozdělení $\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots | P)$ jakožto p -invariantní míra na

$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$. Můžeme se na tyto pojmy dívat jako na svým způsobem ekvivalentní, neboť využitím stacionarity dostáváme

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots | P) = \mathcal{L}(X_n, X_{n+1}, \dots | P) = p^{n-1} \mathcal{L}(X_1, X_2, \dots | P).$$

Dále se už budeme zajímat o následující pojem:

Definice 6. Bud' P T -invariantní míra (z definice 1). Řekneme, že je navíc ergodická, pokud $P(A) \in \{0,1\}$ kdykoli $A \in \mathcal{I}_T$.

Předtím, než vyslovíme Birkhoffovu ergodickou větu, dokážeme pomocné tvrzení, které bude užitečným nástrojem při její dokazování.

Lemma 6. (O maximální nerovnosti) Nechť T je měřitelné zobrazení na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) a P nechť je T -invariantní míra. Pro reálnou náhodnou veličinu $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ označme

$$S_n = X + X \circ T + \dots + X \circ T^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i),$$

kde definujeme $S_0 = 0$. Zaved'me navíc veličinu $M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i$. Pak pro $A \in \mathcal{S}_T$, $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_{A \cap [M_n > 0]} X dP \geq 0. \quad (2.1)$$

Důkaz. Je jasné, že i veličina M_n je integrovatelná vzhledem k P . Také pro $0 \leq i \leq n$ zřejmě platí

$$M_n = \max_{0 \leq i \leq n} S_i \geq S_i \quad \text{a tedy} \quad M_n(T) \geq S_i(T).$$

Z nerovnosti

$$M_n(T) + X \geq S_i(T) + X = S_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

a definice $S_0 = 0$ pak dostáváme

$$M_n(T) + X \geq \max_{1 \leq i \leq n} S_i = \max_{0 \leq i \leq n} S_i = M_n \quad \text{na} \quad [M_n > 0], \quad (2.2)$$

přičemž první nerovnost platí všude na Ω , zatímco následná rovnost platí pouze, pokud je alespoň jedna z hodnot S_1, \dots, S_n nezáporná. To je splněno např. na množině $[M_n > 0]$. Z nerovnosti 2.2 pak dostáváme

$$\int_{A \cap [M_n > 0]} X dP \geq \int_{A \cap [M_n > 0]} M_n dP - \int_{A \cap [M_n > 0]} M_n(T) dP \geq 0$$

neboť platí

$$\int_{A \cap [M_n > 0]} M_n dP = \int_A M_n dP = \int_A M_n(T) dP \geq \int_{A \cap [M_n > 0]} M_n(T) dP.$$

První rovnost využívá toho, že M_n dle definice nabývá pouze nezáporných hodnot. poslední nerovnost pak využívá toho, že přirozeně i veličina $M_n(T)$ je nezáporná. Centrální rovnost pak využívá toho, že míra P je dle předpokladu T -invariantní a předpokladu, že A je T -invariantní množina.

□

Poznámka. Tomuto tvrzení se někdy říka Maximální ergodická věta nebo v některé literatuře Hopfova maximální nerovnost, a je zažitým nástrojem při dokazování ergodické věty (viz [4], kapitola VI.6, věty 6 a 7). Důležité je pro nás všimnout se, že nerovnost 2.1 platí i v případě, když uvažujeme místo M_n veličinu $M = \sup_n S_n$, neboť toto znění maximální nerovnosti budeme potřebovat při důkazu následující věty. Tedy

$$\int_{A \cap [M > 0]} X dP \geq 0. \quad (2.3)$$

2.2 Birkhoffova ergodická věta

Věta 7. (*Birkhoffova ergodická věta*) *Nechť T je měřitelná transformace na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , kde P je T -invariantní míra. Pak pro každou $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i) = E[X|\mathcal{I}_T] \quad \text{skoro jistě.} \quad (2.4)$$

Předpokládáme li navíc, že P je T -invariantní a ergodická, pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i) = E[X] \quad \text{skoro jistě.} \quad (2.5)$$

Důkaz. První část věty dokážeme ve dvou krocích - v prvním ukážeme existenci limity a v druhém odvedeme její tvar.

1. krok. Označme opět $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i)$ a uvažujme

$$\underline{S} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n \quad a \quad \bar{S} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n.$$

Pak $\underline{S}, \bar{S} \in \mathcal{I}_T$. Pro existenci limity skoro jistě stačí ukázat, že $\underline{S} = \bar{S}$ skoro jistě. Označme pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$I_{a,b} = [\underline{S} < a < b < \bar{S}].$$

Je $I_{a,b} \in \mathcal{I}_T$ a chceme, aby $P(I_{a,b}) = 0$ pro každé $a < b$. Pak už nutně rovnost $\underline{S} = \bar{S}$ platí $[P]$ -skoro jistě. Označme množiny

$$J_a = [\inf_n \frac{1}{n} S_n < a] = [\exists n (na - S_n) > 0]$$

a

$$J_b = [\sup_n \frac{1}{n} S_n > b] = [\exists n (S_n - nb) > 0].$$

Pak $I_{a,b} \subseteq J_a \cap J_b$ a využitím maximální nerovnosti 2.3 dostáváme

$$\begin{aligned} \int_{I_{a,b}} (a - X) dP &= \int_{I_{a,b} \cap J_a} (a - X) dP \geq 0 \quad a \\ \int_{I_{a,b}} (X - b) dP &= \int_{I_{a,b} \cap J_b} (X - b) dP \geq 0 \end{aligned}$$

Sečtením obou integrálů dostáváme $(a - b)P(I_{a,b}) \geq 0$, z čehož žádaný výsledek přímo vyplývá. Víme, že $\frac{1}{n}|S_n| \geq 0$, pak pomocí Fatouova lemmatu

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}|S_n| dP \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}|S_n|\right) \leq \sup_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}|X(T^i)| = \mathbb{E}|X| < \infty$$

2. krok. Z první části důkazu plyne, že existuje T -invariantní zobecněná reálná náhodná veličina S^* taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i) = S^*$ skoro jistě. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že tato veličina nabývá pouze reálných hodnot. Rádi bychom ukázali, že $S^* = \mathbb{E}[X|\mathcal{I}_T]$ skoro jistě. Pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ definujeme

$$K_{\alpha,\beta} = [\alpha < S^* < \beta].$$

Pak jistě $K_{\alpha,\beta} \in \mathcal{I}_T$ a navíc platí $K_{\alpha,\beta} \subseteq J_a$, a $K_{\alpha,\beta} \subseteq J_b$; můžeme tedy znovu použít maximální nerovnost 2.3 tak, že:

$$\int_{A \cap K_{\alpha,\beta}} (X - \alpha) dP \geq 0 \quad a \quad \int_{A \cap K_{\alpha,\beta}} (\beta - X) dP \geq 0$$

Je jasné, že předchozí nerovnosti platí i v případě, když $K_{\alpha,\beta}$ nahradíme množinou $K_{\alpha,\beta}^* = A \cap [\alpha \leq S^* < \beta]$. Z uvedených nerovnosti dostáváme vztah

$$\alpha P(K_{\alpha,\beta}) \leq \int_{K_{\alpha,\beta}} X dP \leq \beta P(K_{\alpha,\beta}). \quad (2.6)$$

a z definice $K_{\alpha,\beta}^*$ víme, že stejné nerovnosti platí i nahrazením S^* za X . Odečtením nerovností pro X a S^* dostáváme pak

$$(\alpha - \beta)P(K_{\alpha,\beta}) \leq \int_{K_{\alpha,\beta}} (X - S^*) dP \leq (\beta - \alpha)P(K_{\alpha,\beta}).$$

Pokud α, β vyjádříme ve tvaru $\alpha = k\varepsilon$, $\beta = (k+1)\varepsilon$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon > 0$ libovolné, pak $\Omega \cap A = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} K_{\alpha,\beta,k}$. Sčítáním přes k obdržíme, že

$$\left| \int_{A \in \mathcal{I}_T} S^* dP - \int_{A \in \mathcal{I}_T} X dP \right| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \text{libovolné.}$$

Dostali jsme: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i) = S^* = \mathbb{E}[X|\mathcal{I}_T]$ skoro jistě.

Limita v 2.5 platí jako besprostřední důsledek prvního tvrzení, neboť pro míry, které jsou T -invariantní a ergodické je σ -algebra \mathcal{I}_T triviální. Proto platí, že $\mathbb{E}[X|\mathcal{I}_T] = \int X dP$ skoro jistě. □

2.3 Ergodicita a extremalita

Birkhoffova ergodická věta je nevyhnutelným krokem na cestě seznámení se s teorií ergodických mér. Nás, ovšem, dále budou zajímat extremální body množiny invariantních mér a tato důležitá věta se ukáže být užitečným nástrojem při dokazování následujícího tvrzení, které je k nalezení v [Rey-Bellet] (tvrzení 3.5) které propojuje pojmy ergodicity a extremality.

Tvrzení 8. *Pravděpodobnostní míra μ je na množině T - invariantních měr \mathcal{M} extremální právě tehdy, když μ je ergodická (vůči T).*

Důkaz. Předpokládejme, nejprve, že μ není extremální. To znamená, že existuje $0 < \alpha < 1$ a $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}$, $\mu_1 \neq \mu_2$ takové, že $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$. Tvrdíme, že pak μ není ani ergodická. Kdyby μ byla ergodická, pak by podle věty 7, pro nějakou omezenou $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ platilo

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i) \rightarrow \mathbb{E}_\mu X \quad \text{skoro jistě.}$$

Jelikož $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X(T^i)$ konverguje k $\mathbb{E}_\mu X$ skoro jistě i vzhledem k míre μ_1 a μ_2 , z toho vyplívá, že $\mathbb{E}_\mu X = \mathbb{E}_{\mu_1} X = \mathbb{E}_{\mu_2} X$. Jelikož X bylo zvoleno jako omezená měřitelná funkce, z předchozí rovnosti nutně plyne, že $\mu = \mu_1 = \mu_2$, což je spor s naším předpokladem. Nyní předpokládejme, že μ není ergodická. Pak existuje množina $A \in \mathcal{I}_T$, definovaná v 4 taková, že $\mu(A) \in (0,1)$. Dále definujeme

$$\mu_1(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}, \quad \mu_2(B) = \frac{\mu(A^C \cap B)}{\mu(A^C)}$$

a jelikož $A \in \mathcal{I}_T$, jsou to pravděpodobnostní míry invariantní vůči T . Můžeme tedy psat

$$\mu(A)\mu_1 + \mu(A^C)\mu_2 = \mu(A \cap B) + \mu(A^C \cap B) = \mu.$$

Vzhledem k tomu, že μ_1, μ_2 představují restrikce μ na A a A^C , je $\mu_1 \neq \mu_2$ a tím pádem z předchozího zápisu je jasné, že μ nemůže být extremální.

□

2.3.1 Markovovy řetězce

Bud' $S = \{1, \dots, n\}$ konečná množina stavů a uvažujme pravděpodobnosti P na $\Omega = S^{\mathbb{N}_0}$ takové, že X_0, X_1, \dots je při P homogenní Markovův řetězec s množinou stavů S a s pevně danou maticí pravděpodobností přechodu \mathbb{P} . Navíc budeme předpokládat, že počáteční rozdělení π je stacionární, tj. platí $\pi^T = \pi^T \mathbb{P}$. Pak už víme, že daný Markovův řetězec je striktně stacionární náhodný proces (viz [2], Věta 2.24.), tedy

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = P(X_k = i_0, X_{k+1} = i_1, \dots, X_{k+n} = i_n).$$

Zavedli jsme zde speciální případ stacionární posloupnosti a zajímá nás, kdy tato posloupnost bude i ergodická. Uvádíme proto následující tvrzení, bez důkazu, který je ale v [Rey-Bellet] uveden jako důkaz Vety 3.8..

Tvrzení 9. *Stacionární rozdělení π Markovova řetězce X_0, X_1, \dots při P je extremální mírou na množině stacionárních rozdělení právě tehdy, když P je ergodická vůči operátoru posunutí.*

Využitím předchozí věty 8 můžeme uvedené tvrzení formulovat i takto:

Stacionární rozdělení π Markovova řetězce X_0, X_1, \dots při P je extremální mírou na množině stacionárních rozdělení právě tehdy, když P je extremálním bodem na množině všech měr invariantních vůči operátoru posunutí.

Tomuto tvrzení se někdy říká ergodická dekompozice stacionárních Markovových řetězců.

Kapitola 3

Oceňování finančních derivátů

Deriváty jsou finanční instrumenty, jejichž hodnota je odvozena z ceny podkladového aktiva. Jsou to typy jakýchsi obchodních smluv, které jsou navázané na určitý časový horizont T . V této kapitole budeme uvažovat evropský typ derivátů, kde k uplatnění smlouvy dochází pouze v čase T . Naším cílem je ale najít bezarbitrážní (spravedlivou) cenu derivátu v počátečním čase $t = 0$.

Obchod s finančními deriváty může být motivován různými cíli, jako je realizace arbitráže nebo snaha o zajištění proti riziku příliš velkých ztrát z důvodu změny hodnot podkladového aktiva. V posledním případě se například používá evropská kupní opce, kterou později uvedeme jako příklad. Ovšem, samotný proces oceňování derivátů nepředpokládá podrobnější znalosti jednotlivých typů, neboť se zakládá na obecně aplikovatelném principu.

Tomuto oceňování je možno přistoupit různými matematickými metodami; zde uvádíme tu, která je založena na teorii martingalů, s některými z jejich základních pojmu jsme se seznámili v 1. kapitole.

3.1 Extremální martingalové míry

Uvažujme nyní konečnou množinu Ω a na ní konečnou posloupnost náhodných veličin S_0, \dots, S_T startující z deterministické hodnoty $S_0 = s_0$, a položme $\mathcal{F} = \sigma(S_1, \dots, S_T)$. Zde každá veličina $S_t, t \in \{1, \dots, T\}$ představuje hodnotu podkladového aktiva v daném čase t . Předpokládejme dále, že každá z těchto veličin může nabývat n konečně mnoho hodnot, každou s kladnou pravděpodobností p_i .

Abychom spravedlivě ocenili uvažovaný derivát, chceme najít takovou pravděpodobnostní míru Q , která každému možnému výsledku přiřadí novou váhu $q_i, i = 1, \dots, n$ tak, aby očekáváná cena v každém čase $t \in \{1, \dots, T\}$ (podmíněna střední hodnota vzhledem k míře Q) byla rovna hodnotě aktiva v předchozím čase $t - 1$. Jinými slovy požadujeme, aby posloupnost hodnot S_0, \dots, S_T tvořila martingal vůči míře Q . Tato míra je s rozdelením P ekvivalentní, což pro nás znamená pouze to, že každá $q_i > 0$. Z toho důvodu se jí v literatuře často říká ekvivalentní martingalová míra.

Uvedeme zde obecnou definici:

Definice 7. Pokud $(M_n)_{n=1}^m$ je martingal na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , pak řekneme, že P je martingalová míra procesu $(M_n)_{n=1}^m$.

Zajímá nás, jak vypadá martingalová míra Q posloupnosti S_0, \dots, S_T na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{F}) . Protože množina Ω je konečná, jsou veličiny S_0, \dots, S_T omezené a pravděpodobnost Q na (Ω, \mathcal{F}) je martingalovou mírou posloupnosti S_0, \dots, S_T právě tehdy, když

$$\mathbb{E}_Q(S_1 - S_0) = 0, \quad \mathbb{E}_Q(S_{k+1} - S_k | S_{k-1}, \dots, S_1) = 0 \quad (3.1)$$

kdykoli $k = 1, \dots, T-1$.

Pro jednoduchost zápisu se dále omezíme na případ $T = 2$ a budeme předpokládat, že $\{S_1(\omega); \omega \in \Omega\} = \{x_j, j = 1, \dots, n\}$. V tom případě můžeme podmínu 3.1 zapsat ve tvaru

$$0 = \mathbb{E}_Q(S_1 - S_0); \quad 0 = \mathbb{E}_Q[(S_2 - S_1)1_{[S_1=x_j]}] \quad \text{pro každé } j = 1, \dots, n.$$

Abychom obdrželi odpověď na otázku, jak vypadají extremální martingalové míry posloupnosti (S_0, S_1, S_2) podíváme se na větu, kterou R.G. Douglas poprvé vydal v matematickém žurnálu v roce 1964. Zdě, ovšem, bez důkazu uvádíme větu ve znění, které je přizpůsobeno pro měřitelné prostory a pravděpodobnostní míry, a které je k nalezení v knize [3] (Věta 4.4., kapitola V).

Věta 10. *Douglas Bud' \mathcal{L} systém \mathcal{F} -měřitelných reálných funkcí a $\mathcal{L}^* = \{a + bl; l \in \mathcal{L}, a, b \in \mathbb{R}\}$. Bud' $K_{\mathcal{L}}$ množina všech pravděpodobnostních mér μ na (Ω, \mathcal{F}) takových, že $\int f d\mu = 0$ pro každou $f \in \mathcal{L}$. Pak $K_{\mathcal{L}}$ je konvexní a $\mu \in K_{\mathcal{L}}$ je extremálním bodem $K_{\mathcal{L}}$ právě tehdy když \mathcal{L}^* je hustá v $\mathbb{L}_1(\mu)$.*

V našem případě je $\mathcal{L} = \{S_1 - S_0, (S_2 - S_1)1_{[S_1=x_j]}, j = 1, \dots, n\}$. Pak $\mathcal{L}^* = \{c + h_1(S_1 - S_0) + \sum_{j=1}^n h_{2j}1_{[S_1=x_j]}(S_2 - S_1), j = 1, \dots, n\}$. Množina $K_{\mathcal{L}}$ zde představuje množinu všech martingalových mér posloupnosti (S_0, S_1, S_2) a Douglasova věta říká, že $Q \in K_{\mathcal{L}}$ je extremálním bodem $K_{\mathcal{L}}$ právě tehdy, když každou veličinu $Y \in \mathcal{A} = \sigma(S_1, S_2)$ lze skoro jistě vzhledem k Q zapsat ve tvaru $Y = c + h_1(S_1 - S_0) + H(S_2 - S_1)$, kde H je $\sigma(S_1)$ -měřitelná funkce definovaná předpisem $H = \sum_{j=1}^n h_{2j}1_{[S_1=x_j]}$ a kde h, c jsou reálné hodnoty. Výsledek můžeme interpretovat tak, že extremální martingalové míry posloupnosti (S_0, S_1, S_2) jsou právě takové, že každý derivát $Y \in \sigma(S_1, S_2)$ lze replikovat skoro jistě s počátečním bohatstvím C při nákupu h jednotek aktiva v čase $t = 0$ a při držení H jednotek aktiva v čase $t = 1$.

Poznámka. Jelikož zmíněnou hustotu v \mathbb{L}_1 budeme uvažovat vůči martingalové míře Q , je dobré poznamenat, že konvergence v \mathbb{L}_1 nerozlišuje veličiny lišící se o množinu míry nula. Tedy $\mathbb{L}_1(Q)$ - uzávěr \mathcal{L}^* je tvořen veličinami, lišící se od veličin z \mathcal{L}^* pouze na množině Q -míry nula.

3.2 Příklady

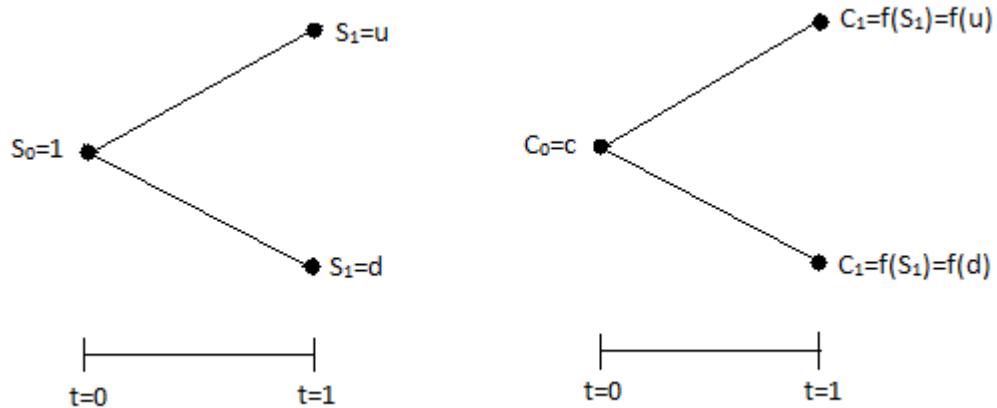
Jelikož předmětem našeho zájmu jsou především extremální martingalové míry, je pro nás přípustné maximální zjednodušení některých podmínek finančního trhu. Ku příkladu, portfolio investora v praxi zřídka sestává z pouze jednoho finančního instrumentu, ale pro naše účely stačí uvažovat singulární případ. V následující části se podíváme na příklady oceňování na binomickém stromu, jako na jednoduchou ukázkou ve které martingalové míry, které se vyskytují jsou extremální. Před tím, ovšem, potřebujeme stanovit další předpoklad:

Pokud například všechny hodnoty $x_i > 1 = S_0$, $i = 1, \dots, n$, pak $S_1 > S_0$ a v tom případě investor má bezrizikovou příležitost nakoupit v čase 0 podkladové aktívum a v čase 1 jej prodat. Vzhledem k tomu, že totéž může provést v neomezené míře, může tak již v čase 1 dosáhnout neomezeného bohatství a tím pro něj otázka spravedlivé ceny finančního derivátu přestává být zajímavá.

Abychom se tomuto případu vyhnuli, budeme předpokládat, že existují $i, j \leq n$ takové, že $x_i < 1 < x_j$.

3.2.1 Jednokrokový binomický strom

Uvažujme nejjednodušší model, kde je předchozí podmínka splněna. Pak $n = 2$. Tento případ můžeme nazvat jednokrokovým binomickým modelem. Svým způsobem je možné v něm demonstrovat princip oceňování finančních derivátů.



Zde máme dva scénáře vývoje. V prvním scénáři cena podkladového aktiva vzroste z hodnoty $S_0 = 1$ na hodnotu $S_1 = u$ (z anglického *up*). V tom případě bude hodnota derivátu $C_1 = f(u)$, kde f je funkce určující jakým způsobem závisí hodnoty C_1 - tedy tržní cena derivátu v čase $t = 1$, na hodnotě podkladového aktiva S_1 . V druhém scénáři cena podkladového aktiva klesne z hodnoty S_0 na hodnotu $S_1 = d$ (z anglického *down*). Poznamenejme, že $f(u)$ nemusí být nutně větší než $f(d)$ tak, jak je to na obrázku. Hodnota S_0 je též zvolena jako jednotková pro jednoduchost, mohly bychom uvažovat jakoukoliv jinou kladnou hodnotu s_0 . Uvažujme investičního agenta, který ma počáteční bohatství c a který v čase 0 nakoupí podkladové aktívum v množství $h \in \mathbb{R}$. Tržní cena jeho portfolia v čase $t = 1$ pak bude $c + h[S_1 - S_0]$. Naší otázkou je, zda je možné najít $c, h \in \mathbb{R}$ tak, aby $c + h[S_1 - S_0] = f(S_1)$. Dostáváme tak dvě rovnice o dvou neznámých

$$\begin{aligned} c + h[u - 1] &= f(u) \\ c + h[d - 1] &= f(d), \end{aligned}$$

které mají následující řešení

$$h = \frac{f(u) - f(d)}{u - d}$$

$$c = \frac{1-d}{u-d}f(u) + \frac{u-1}{u-d}f(d).$$

Počáteční bohatství investora potřebné k tomu, aby dokázal sestavit portfólio, které má v čase $t = 1$ tržní hodnotu $C_1 = f(S_1)$ je lineární funkce hodnot $f(u)$ a $f(v)$ s koeficienty které po řadě označíme $q_u = \frac{1-d}{u-d}$ a $q_d = \frac{u-1}{u-d}$. Tedy $c = q_u f(u) + q_d f(d)$. Všimněme si, že tyto hodnoty vycházejí tak, že $1 = S_0 = q_u u + q_d d$. V řeči středních hodnot vůči mře Q takové, že $Q(S_1 = u) = q_u$ a $Q(S_1 = d) = q_d$ tak můžeme předchozí rovnice zapsat ve tvaru:

$$1 = S_0 = \mathbb{E}_Q S(1)$$

$$c = C_0 = \mathbb{E}_Q f(S_1) = \mathbb{E}_Q C_1.$$

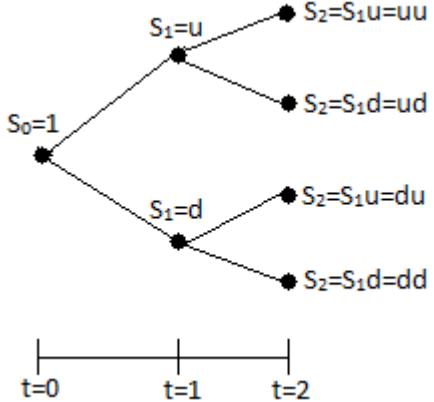
V tomto binomickém jednokrokovém modelu tak můžeme při stanovení ceny c vnímané jako ceny příležitosti postupovat tak, aby platila první rovnost v ?? a hodnotu $c = C_0$ pak dostaneme právě jako střední hodnotu C_1 vůči mře Q . \square

Všimněme si, že jsme v žádném okamžiku nepotřebovali vědět přesné rozdělení skutečné pravděpodobnosti P abychom se dostali k vyjádření martingalové míry Q . To nám ihned napovídá, že jde o matematický nástroj, nikoliv o realistickou pravděpodobnost, podle které by se ceny na trhu měnily. Navíc, bezarbitrážní cena kterou jsme nalezli také nezávisí na konkrétní pravděpodobnosti vývoje cen určitým směrem, ale pouze na těch možných hodnotách a na parametrech jejich změny. To je ovšem výsledek, kterého jsme chtěli docílit, neboť je tím pádem oceňovací proces vyvážený pro všechny scénáře vývoje trhu.

Zde jsme ilustrovali obecný princip oceňování finančních derivátů použitelný v konečném binomickém stromě. Pro lepší ilustraci martingalové vlastnosti ukážeme, jak by se tentýž princip použil na dvoukrokovém binomickém stromu.

3.2.2 Dvoukrokový binomický strom

Nyní se podívejme na podobný model, kde $T = 2$ a opět pro jednoduchost $S_0 = 1$. Nechť v čase $t = 1$ existují pouze dva scénáře vývoje, kde $S_1 = u$ nebo $S_1 = d$ a nechť z každé z těchto hodnot se v čase $t = 2$ mohou vyvinout další dva stavky, kde veličina S_2 bude nabývat hodnot $S_1 u$ a $S_1 d$. Takový model nazveme dvoukrokový binomický strom.



Všimněme si na obrázku, že hodnoty S_1d pro $S_1 = u$ a S_1u pro $S_1 = d$ jsou stejné. Znamená to, že bychom na grafu mohli kreslit o jeden bod méně, čímž binomický strom zachovává jakýsi trojúhelníkový tvar. Nicméně, uvedené znázornění nám lépe poukáže na to, že se na tento strom můžeme dívat jako na sérii jednokrokových binomických stromů. Také, z finančního hlediska, je to dobrá ilustrace faktu, že se ke stejnemu bodu můžeme dostat pomocí různých obchodních strategií.

Využitím zmíněné vlastnosti podíváme se na model po krocích grafu zpětně, začínající od posledního. Uvažujme tedy jednokrokový model s počátečním časem $t = 1$, kde $S_1 = u$ je počáteční hodnota podkladového aktiva a $f(uu)$ je cena finančního derivátu, když hodnota S_1 stoupla na hodnotu $S_2^u = uu$. Analogicky, $f(ud)$ je cena derivátu pro hodnotu $S_2^u = ud$ v čase $t = 2$. Zajímá nás bohatství, které investor potřebuje v čase $t = 1$ aby jeho portfolio v čase $t = 2$ mělo tržní hodnotu $C_2^u = f(S_2^u)$. Chceme tedy najít hodnoty $C_1^u, h \in \mathbb{R}$ takové, že platí:

$$C_1^u + h_{21}[S_2^u - S_1] = f(S_2^u)$$

Obdobně jako v předchozím příkladu, dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých, z čehož stejným postupem dostaneme vyjádření pro C_1^u :

$$C_1^u = \frac{1-d}{u-d}f(uu) + \frac{u-1}{u-d}f(ud).$$

Tím jsme ověřili replikovatelnost a už víme jak vypadá martingalová míra. Přiřadíme-li tedy stejným koeficientům značení q_u a q_v , pak podle míry Q , definované v předchozím příkladu platí:

$$C_1^u = \mathbb{E}_Q f(S_2^u) = \mathbb{E}_Q(C_2^u).$$

Poznámka. Identickým postupem pro případ, kdy $S_1 = d$ obdržíme tržní hodnotu derivátu v čase $t = 1$, pro kterou platí $C_1^d = \mathbb{E}_Q(C_2^d)$. Poznamenejme, že řešením rovnic 3.2.2 a nimi analogických pro $S_1 = d$ dostaneme dvě odlišné hodnoty h_{21} a h_{22} , což znamená, že investoři vycházející z různých stavů budou používat i různé obchodní strategie.

V analýze dvoukrokového binomického modelu už můžeme postoupit o krok dále, kde opět budeme uvažovat jednokrokový strom na intervalu $(0,1]$, který se od předchozího příkladu bude lišit pouze v tom, že místo hodnot $f(S_1)$ uvažujeme hodnoty C_1^u, C_1^d . Tedy hodnotu c můžeme vyjádřit ve tvaru $c = C_0 = \mathbb{E}_Q C_1$.

□

Jak už bylo zmíněno, v uvedených příkladech jsme uvažovali velice zjednodušené případy oceňování finančních derivátů. Nicméně, ukázali jsme tím základní principy procesu oceňovaní použitím ekvivalentní martingalové míry, který je použitelný i na vícerozměrné případy a složitější portfolia.

Literatura

- [1] LACHOUT, P. (2007). Diskrétní martingaly [online]. URL http://www.karlin.mff.cuni.cz/~lachout/Vyuka/tp2/071023-Diskretni_Martingaly.pdf.
- [2] PRÁŠKOVÁ, Z. a LACHOUT, P. (2005). *Základy náhodných procesů*. Karolinum, Praha. ISBN 80-7184-688-0.
- [3] REVUZ, D. a YOR, M. (2005). *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer. ISBN 3-540-64325-7.
- [Rey-Bellet] REY-BELLET, L. Ergodic Properties of Markov Processes [online]. URL https://www.math.umass.edu/~lr7q/ps_files/EMP.pdf.
- [4] ŠTĚPÁN, J. (1987). *Teorie pravděpodobnosti. Matematické základy*. Academia, Praha.