Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Michal Sekera

Rekurzivní výpočet složených rozdělení

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2015

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 21. 5. 2015

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí mé bakalářské práce RNDr. Lucii Mazurové, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které mi velmi pomohly.

Název práce: Rekurzivní výpočet složených rozdělení

Autor: Michal Sekera

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce je zaměřena na výpočet složených rozdělení pomocí algoritmu známého jako Panjerova rekurze. Tento algoritmus se omezuje na diskrétní rozdělení a rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ a $(a, b, 1)$; ukážeme, která rozdělení jsou členy těchto tříd. Popíšeme diskretizaci spojitých rozdělení pomocí zaokrouhlovací metody a shody lokálních momentů; vše je ukázáno na konkrétních příkladech. Poznatky aplikujeme na výpočet ryzího zajistného v zajištění škodního nadměrku se saturacemi (XL-zajištění se saturacemi) a na stanovení kapitálového požadavku na základě kvantilu rozdělení škodních úhrnů. Aplikace obsahují numerické ilustrace.

Klíčová slova: Panjerova rekurze, třída rozdělení (a, b, 0), (a, b, 1), diskretizace

Title: Recursive calculation of compound distributions

Author: Michal Sekera

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Lucie Mazurová, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: The aim of this work is the calculation of compound distributions by using the algorithm known as the Panjer recursion. This algorithm is limited to discrete distributions and the $(a, b, 0)$ and $(a, b, 1)$ classes of distributions. The thesis shows which distributions are members of these classes. The thesis then describes the discretization of continuous distributions by using the rounding method and the method of local moments matching; everything is explained on examples. These methods are then applied to the calculation of the premium for model of excess of loss reinsurance with reinstatements (XL-reinsurance with reinstatements), and the calculating the solvency capital requirement. Numerical illustrations are included.

Keywords: Panjer recursion, (a, b, 0), (a, b, 1) class of distributions, discretization

Obsah

Úvod

V této bakalářské práci se budeme věnovat rekurzivnímu výpočtu složených rozdělení pomocí metody známé jako Panjerova rekurze. Tato metoda nám umožňuje najít předpis pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny, která má složené rozdělení, tedy je součtem náhodného počtu nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Obecně se jedná o konvoluci náhodných veličin, jejíž výpočet bývá problematický, ale pokud je náhodná veličina udávající jejich počet ze specifické třídy rozdělení, tzv. $(a, b, 0)$ nebo $(a, b, 1)$, můžeme najít rekurzivní vzorec. Aplikace Panjerova vzorce se omezuje na diskrétní náhodné veličiny, proto část práce bude zaměřena na vhodné metody diskretizace.

V první části definujeme třídy rozdělení $(a, b, 0)$ a $(a, b, 1)$ a ukážeme, která známá rozdělení do těchto tříd patří. V druhé části se zaměříme na vysvětlení Panjerova rekurzivního vzorce a ukážeme jeho použití na konkrétních příkladech. Třetí část bude věnována metodám diskretizace, díky kterým bude možné ze spojitých náhodných veličin vytvořit diskrétní veličiny s podobnými vlastnostmi. V poslední části ukážeme použití získaných poznatků na praktických příkladech z pojišťovnictví.

Kapitola 1

Základní pojmy a poznatky

V první kapitole definujeme některé základní pojmy a odvodíme jejich vlastnosti, které využijeme v dalších kapitolách.

1.1 Základní definice

Definice 1. *Nechť X je nezáporná diskrétní náhodná veličina. Potom funkci $p_k = \mathsf{P}(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, nazveme pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X, jestliže platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Definice 2. *Nechť $x \in \mathbb{R}$, potom definujeme*

$$(x)_+ = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Definice 3. *Nechť X je náhodná veličina a $u \in \mathbb{R}$, potom definujeme*

$$X \wedge u = \begin{cases} X, & X < u, \\ u, & X \geq u. \end{cases}$$

Střední hodnotu $\mathsf{E}[X \wedge u]$ nazveme limitovanou střední hodnotou.

Lemma 1 (O výpočtu limitované střední hodnoty)**.** *Pro nezápornou náhodnou veličinu X s konečnou střední hodnotou a distribuční funkcí F a $u > 0$ platí, že*

$$\mathsf{E}[X \wedge u] = \int_0^u (x - u) \, \mathrm{d}F(x) + u. \tag{1.1}$$

Důkaz. Zřejmě $X = (X \wedge u) + (X - u)_+$, tedy $\mathsf{E}[X \wedge u] = \mathsf{E}\, X - \mathsf{E}[(X - u)_+]$. Navíc platí

$$\mathsf{E}[(X - u)_+] = \mathsf{E}[X - u \mid X > u] = \int_u^{\infty} (x - u) \, \mathrm{d}F(x).$$

Použitím linearity integrálu ihned plyne výsledek.

❑

1.2 Třída rozdělení $(a, b, 0)$ a $(a, b, 1)$

V této sekci zavedeme speciální třídy rozdělení uvedené v práci Klugman, Panjer a Willmot (2004, str. 81).

Definice 4. *Nechť* $p_k = \mathsf{P}(X = k)$ *je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny* X*. Řekneme, že* X *je z třídy rozdělení* $(a, b, 0)$*, jestliže existují* $a, b \in \mathbb{R}$ *taková, že*

$$p_k = (a + \frac{b}{k})p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Definice 5. *Nechť* $p_k = \mathsf{P}(X = k)$ *je pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny* X*. Řekneme, že* X *je z třídy rozdělení* $(a, b, 1)$*, jestliže existují* $a, b \in \mathbb{R}$ *taková, že*

$$p_k = (a + \frac{b}{k})p_{k-1}, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots. \tag{1.2}$$

Příklad. Ukážeme, že náhodná veličina, která má Poissonovo, binomické, negativně binomické nebo geometrické rozdělení, je z třídy rozdělení $(a, b, 0)$, vyjádříme parametry a, b. Stačí ověřit, že

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = (a + \frac{b}{k}), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

1. Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení s parametrem $\lambda > 0$ je

   $$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

   Potom

   $$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda}{k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Tedy $a = 0, b = \lambda$.

2. Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení s parametry $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ je

   $$p_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

   Potom

   $$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(n-k+1)p}{(1-p)k} = \frac{-p}{1-p} + \frac{(n+1)p}{(1-p)k}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

   Tedy $a = -p(1-p)^{-1}, b = p(1-p)^{-1}(n+1)$.

3. Pravděpodobnostní funkce negativně binomického rozdělení s parametry $r > 0$, $0 < p < 1$ je

   $$p_k = \binom{k+r-1}{k}p^r(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{1.4}$$

Potom

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(k+r-1)(1-p)}{k} = (1-p) + \frac{r-1}{k}(1-p), \qquad k = 1,2,3,\dots.$$

Tedy $a = 1-p$, $b = (r-1)(1-p)$.

4. Geometrické rozdělení je negativně binomické rozdělení s parametrem $r = 1$, tedy $a = 1-p$, $b = 0$.

Náhodnou veličinu z třídy rozdělení $(a,b,1)$ můžeme získat modifikací rozdělení ze třídy $(a,b,0)$, pokud zvolíme libovolné $p_0^M \in [0{,}1]$ a ostatní pravděpodobnosti určíme tak, abychom dostali pravděpodobnostní funkci, tedy

$$p_k^M = \frac{1-p_0^M}{1-p_0} p_k, \qquad k = 1{,}2{,}3,\dots. \tag{1.5}$$

V případě volby $p_0^M = 0$ pak takové rozdělení nazýváme useknuté v nule a v případě $p_0^M > 0$ modifikované v nule. Takto lze modifikovat i negativně binomické rozdělení, potom $r > -1$ (viz Klugman a kol., 2004, str. 96). Zvolíme-li parametr $r = 0$, pak takové rozdělení nazýváme logaritmické. Pro modifikovaná rozdělení jsou zachovány původní hodnoty a a b.

1.3 Složená rozdělení

Definice 6. *Nechť $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Nechť N je náhodná veličina nezávislá na posloupnosti $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, která nabývá pouze hodnot $0,1,2,\dots$. Položme*

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} X_i, & N = 1,2,3,\dots, \\ 0, & N = 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Potom rozdělení náhodné veličiny S nazveme složeným rozdělením.

Definice 7. *Nechť X je náhodná veličina. Nechť $Z = \{z \in \mathbb{R}, \mathsf{E}\,[z^X]$ konečná$\}$. Funkci P_X definovanou předpisem*

$$P_X(z) = \mathsf{E}\,[z^X], \qquad z \in Z,$$

nazveme pravděpodobnostní vytvořující funkcí náhodné veličiny X.

Příklad. V tomto příkladu odvodíme tvar pravděpodobnostní vytvořující funkce pro Poissonovo a negativně binomické rozdělení.

1. Nechť náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení (1.3). Potom

$$P_X(z) = \mathsf{E}\,[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}. \tag{1.7}$$

2. Nechť náhodná veličina Y má negativně binomické rozdělení (1.4). Potom

$$\begin{aligned} P_Y(z) = \mathsf{E}\left[z^Y\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \\ &= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} ((1-p)z)^k \\ &= p^r \frac{1}{(1-(1-p)z)^r} = \left(\frac{p}{1-(1-p)z}\right)^r . \end{aligned} \tag{1.8}$$

Lemma 2 (PVF náhodné veličiny se složeným rozdělením)**.** *Nechť S je náhodná veličina se složeným rozdělením tvaru* (1.6)*. Potom pro její pravděpodobnostní vytvořující funkci platí*

$$P_S(z) = P_N(P_{X_1}(z)). \tag{1.9}$$

Důkaz. S pomocí základních vlastností podmíněných středních hodnot (viz Lachout, 2004, str. 40) upravujme:

$$\begin{aligned} P_S(z) = \mathsf{E}\left[z^S\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left[z^S \mid N\right]\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[z^S \mid N=n\right] \mathsf{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{E}\left[z^{X_1+X_2+\cdots+X_n}\right] \mathsf{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathsf{E}\left[z^{X_1}\right])^n \mathsf{P}(N=n) \\ &= \mathsf{E}\left[(\mathsf{E}\left[z^{X_1}\right])^N\right] = P_N(\mathsf{E}\left[z^{X_1}\right]) = P_N(P_{X_1}(z)). \end{aligned}$$

❑

Kapitola 2

Panjerova rekurze

V této kapitole bude podrobně vysvětlena metoda známá jako Panjerova rekurze popsaná v publikaci Klugman a kol. (2004, str. 91), která nám umožní přesný výpočet pravděpodobnostní funkce g_j náhodné veličiny S, která má složené rozdělení tvaru (1.6), pokud N je z třídy rozdělení $(a, b, 0)$ nebo $(a, b, 1)$ a X_i jsou diskrétní náhodné veličiny s pravděpodobnostní funkcí f_j.

2.1 Panjerův rekurzivní vzorec

Věta 3 (Panjerův vzorec pro $(a, b, 1)$ rozdělení)**.** *Nechť náhodná veličina S má složené rozdělení tvaru* (1.6)*. Nechť náhodná veličina N je z třídy rozdělení* $(a, b, 1)$*. Nechť X_1 je nezáporná diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $f_j = \mathsf{P}(X_1 = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Označme $p_n = \mathsf{P}(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny N. Potom pro pravděpodobnostní funkci $g_k = \mathsf{P}(S = k)$ náhodné veličiny S platí*

$$g_k = \frac{[p_1 - (a+b)p_0]f_k + \sum_{j=1}^{k}(a + \frac{bj}{k})f_j g_{k-j}}{1 - af_0}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.1}$$

Důkaz. N je z třídy rozdělení $(a, b, 1)$, tedy pro její pravděpodobnostní funkci platí (1.2). Upravujme:

$$\begin{aligned}
P_N'(z) = (\mathsf{E}\ z^N)' = (\sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}p_n = p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} nz^{n-1}(a + \frac{b}{n})p_{n-1} \\
= p_1 + a\sum_{n=2}^{\infty} nz^{n-1}p_{n-1} + b\sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1}p_{n-1} \\
= p_1 + az\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)z^{n-2}p_{n-1} + a\sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1}p_{n-1} + b\sum_{n=2}^{\infty} z^{n-1}p_{n-1} \\
= p_1 + az\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1}p_n + a\sum_{n=1}^{\infty} z^n p_n + b\sum_{n=1}^{\infty} z^n p_n.
\end{aligned}$$

Celkem:

$$P_N'(z) = p_1 - (a+b)p_0 + azP_N'(z) + (a+b)P_N(z). \tag{2.2}$$

Zderivováním obou stran rovnosti (1.9) z lemmatu 2 dostáváme

$$P'_S(z) = P'_N(P_X(z))P'_X(z).$$

V rovnosti (2.2) dosadíme $P_X(z)$ za z a vynásobíme $P'_X(z)$:

$$P'_S(z) = [p_1 - (a+b)p_0]P'_X(z) + aP_X(z)P'_S(z) + (a+b)P_S(z)P'_X(z). \tag{2.3}$$

Identitu (2.3) můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kg_k z^{k-1} &= (p_1 - (a+b)p_0)\sum_{k=1}^{\infty} kf_k z^{k-1} + a(\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k)(\sum_{k=1}^{\infty} kg_k z^{k-1}) \\ &\quad + (a+b)(\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k)(\sum_{k=1}^{\infty} kf_k z^{k-1}).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Koeficienty u z^{k-1} musí být na obou stranách rovnice (2.4) stejné, a proto pro $k = 1, 2, 3, \ldots$ máme

$$\begin{aligned}kg_k &= (p_1 - (a+b)p_0)kf_k + a\sum_{j=0}^{k}(k-j)f_j g_{k-j} + (a+b)\sum_{j=0}^{k} jf_j g_{k-j} \\ &= (p_1 - (a+b)p_0)kf_k + akf_0 g_k + \sum_{j=1}^{k}(ak+bj)f_j g_{k-j}.\end{aligned}$$

Po úpravě dostáváme (2.1).

❑

Důsledek (Panjerův vzorec pro $(a, b, 0)$ rozdělení). Nechť náhodná veličina S má složené rozdělení tvaru (1.6). Nechť náhodná veličina N je z třídy rozdělení $(a, b, 0)$. Nechť X_1 je nezáporná diskrétní náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $f_j = \mathsf{P}(X_1 = j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Označme $p_n = \mathsf{P}(N = n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny N. Potom pro pravděpodobnostní funkci $g_k = \mathsf{P}(S = k)$ náhodné veličiny S platí

$$g_k = \frac{1}{1 - af_0}\sum_{j=1}^{k}(a + \frac{bj}{k})f_j g_{k-j}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{2.5}$$

Důkaz. Vzorec (2.5) ihned vyplývá z předchozí věty 3, protože pro třídu rozdělení $(a, b, 0)$ navíc platí, že $p_1 = (a+b)p_0$.

❑

Poznámka. V předchozích větách jsme předpokládali, že X nabývá celočíselných hodnot. Obecněji můžeme uvažovat veličinu s aritmetickým rozdělením popsaným pravděpodobnostmi $f_j = \mathsf{P}(X = jh)$, $h > 0$. Potom zavedeme novou náhodnou veličinu $\bar{X} = X/h$, která má pravděpodobnostní funkci $\bar{f}_j = \mathsf{P}(\bar{X} = j)$, která již splňuje předpoklady vět. Výsledkem je potom pravděpodobnostní funkce $\bar{g}_k = \mathsf{P}(\bar{S} = k)$, $\bar{S} = S/h$, tedy $g_k = \mathsf{P}(S = kh)$ popisuje rozdělení náhodné veličiny S.

Poznámka. Abychom mohli používat vzorce (2.1) a (2.5), musíme nejdříve spočítat hodnotu g_0. Tu lze odvodit s pomocí vzorce (1.9):

$$g_0 = \mathsf{P}(S = 0) = P_S(0) = P_N(P_X(0)) = P_N(f_0). \tag{2.6}$$

Na výpočet střední hodnoty $\mathsf{E}[S]$ a rozptylu $\mathrm{var}(S)$ můžeme aplikovat následující větu.

Tvrzení 4 (Waldovy rovnosti)**.** *Nechť S je náhodná veličina se složeným rozdělením tvaru* (1.6)*. Nechť náhodná veličina X je stejně rozdělená jako X_i.*

1. *Nechť náhodné veličiny X a N mají konečné střední hodnoty. Potom*

$$\mathsf{E}[S] = \mathsf{E}[N]\,\mathsf{E}[X]. \tag{2.7}$$

2. *Nechť náhodné veličiny X a N mají konečné druhé momenty. Potom*

$$\mathrm{var}(S) = \mathsf{E}[N]\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(N)(\mathsf{E}[X])^2.$$

Důkaz. Pomocí základních vlastností podmíněných středních hodnot (viz Lachout, 2004, str. 40) můžeme vyjádřit střední hodnotu:

$$\mathsf{E}[S] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[S \mid N]] = \mathsf{E}[\mathsf{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_N \mid N]] = \mathsf{E}[N\,\mathsf{E}[X]] = \mathsf{E}[N]\,\mathsf{E}[X]$$

a rozptyl:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(S) &= \mathsf{E}[\mathrm{var}(S \mid N)] + \mathrm{var}(\mathsf{E}[S \mid N]) \\ &= \mathsf{E}[\mathrm{var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_N \mid N)] + \mathrm{var}(\mathsf{E}[X_1 + X_2 + \cdots + X_N \mid N)] \\ &= \mathsf{E}[N\,\mathrm{var}(X)] + \mathrm{var}(N\,\mathsf{E}[X]) = \mathsf{E}[N]\,\mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(N)(\mathsf{E}[X])^2.\end{aligned}$$

❑

Nyní ukážeme použití Panjerovy rekurze na cvičení 6.40 z knihy Klugman a kol. (2004, str. 171).

Příklad. Náhodná veličina S má složené rozdělení tvaru (1.6), N se řídí Poissonovým rozdělením (1.3) s parametrem $\lambda = 6$, X_i mají rozdělení určené pravděpodobnostní funkcí

$$f_j = \begin{cases} \frac{1}{3}, & j = 1, 2, 4, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Chceme stanovit rozdělení g_k, střední hodnotu $\mathsf{E}[S]$ náhodné veličiny S a pravděpodobnost $\mathsf{P}(S > 10)$.

V předchozí kapitole jsme ukázali, že pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení je z třídy $(a, b, 0)$ s parametry $a = 0$, $b = \lambda$. Vzorec (2.5) tedy můžeme zjednodušit do tvaru

$$g_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{6j}{k} f_j g_{k-j}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Protože pravděpodobnostní vytvořující funkce $P_N(z)$ je tvaru (1.7), z (2.6) máme, že $g_0 = e^{6(0-1)} = e^{-6}$. Numerické hodnoty g_k jsme uspořádali do tabulky 2.1. Pro názornost spočteme několik hodnot g_k:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \frac{6 \cdot 1}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-6} = 2e^{-6} \\
g_2 &= \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2e^{-6} + \frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-6} = 4e^{-6} \\
g_3 &= \frac{6 \cdot 1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4e^{-6} + \frac{6 \cdot 2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2e^{-6} + \frac{6 \cdot 3}{3} \cdot 0 \cdot e^{-6} = \frac{16}{3}e^{-6} \\
g_4 &= \frac{6 \cdot 1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{3}e^{-6} + \frac{6 \cdot 2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4e^{-6} + \frac{6 \cdot 3}{4} \cdot 0 \cdot 2e^{-6} + \frac{6 \cdot 4}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{-6} = \frac{26}{3}e^{-6} \\
&\ldots .
\end{aligned}
$$

Upravujme:

$$\mathsf{P}(S > 10) = 1 - \mathsf{P}(S \le 10) = 1 - \sum_{k=0}^{10} g_k \doteq 0{,}32.$$

K výpočtu střední hodnoty využijeme Waldovu rovnost (2.7):

$$\mathsf{E}[N] = \lambda = 6, \qquad \mathsf{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Tedy $\mathsf{E}[S] = 14$.

k	g_k	k	g_k	k	g_k	k	g_k
0	0,00248	10	0,05996	20	0,03439	30	0,00440
1	0,00496	11	0,06019	21	0,02910	31	0,00335
2	0,00992	12	0,06337	22	0,02510	32	0,00257
3	0,01322	13	0,06116	23	0,02071	33	0,00192
4	0,02148	14	0,06111	24	0,01737	34	0,00145
5	0,02710	15	0,05656	25	0,01402	35	0,00107
6	0,03658	16	0,05403	26	0,01147	36	0,00079
7	0,04105	17	0,04845	27	0,00906	37	0,00057
8	0,05003	18	0,04455	28	0,00725	38	0,00042
9	0,05345	19	0,03870	29	0,00562	39	0,00030

Tabulka 2.1: Numerické hodnoty g_k pro složené Poissonovo rozdělení

Kapitola 3

Metody diskretizace

V předchozí kapitole jsme pro použití Panjerova rekurzivního vzorce potřebovali, aby náhodná veličina X měla diskrétní rozdělení s pravděpodobnostní funkcí f_j. V této kapitole ukážeme dva způsoby diskretizace spojitých rozdělení popsaných v publikaci Klugman a kol. (2004, str. 167) – zaokrouhlovací metodu a metodu shody lokálních momentů. Naším cílem bude vytvořit pravděpodobnostní funkci nové náhodné veličiny $X^\star$, která bude zachovávat některé vlastnosti původního rozdělení.

V následující části předpokládejme, že nezáporná náhodná veličina X má spojité rozdělení s distribuční funkcí F.

3.1 Zaokrouhlovací metoda

Zaokrouhlovací metoda vytvoří pro pevné $h > 0$ pravděpodobnostní funkci $f_j = \mathsf{P}(X^\star = jh), j = 0, 1, 2, \ldots$ tak, že f_j bude rovno pravděpodobnosti, které X nabývá na intervalu $(jh - \frac{1}{2}h, jh + \frac{1}{2}h)$. Formálně definujeme

$$
\begin{aligned}
&f_0 = \mathsf{P}(X < \frac{h}{2}) = F(\frac{h}{2}),\\
&f_j = \mathsf{P}(jh - \frac{h}{2} \leq X < jh + \frac{h}{2}) = F(jh + \frac{h}{2}) - F(jh - \frac{h}{2}), \qquad j = 1, 2, 3, \ldots.
\end{aligned}
$$

3.2 Metoda shody lokálních momentů

Základní myšlenkou metody shody lokálních momentů je, že pravděpodobnost, kterou má náhodná veličina X na intervalu $[x_k, x_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}_0$, nahradíme diskrétními pravděpodobnostmi $m_0^k, m_1^k, \ldots, m_p^k$ v bodech $x_k, x_k + h$,$x_k + 2h$, $x_k + 3h, \ldots, x_k + ph = x_{k+1}$ tak, aby prvních p momentů nově vytvořené pravděpodobnostní funkce bylo shodných s původními momenty náhodné veličiny X. To v lokálním smyslu odpovídá následující soustavě rovnic:

$$
\sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} x^r \,\mathrm{d}F(x), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, p. \tag{3.1}
$$

Vezmeme-li systém intervalů $\{[x_k, x_k+ph)\}_{k=0}^{\infty}$ takový, že $x_0 = 0$ a $x_{k+1} = x_k + ph$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, potom výsledná pravděpodobnostní funkce má předpis:

$$\begin{array}{llll} f_0 = m_0^0, & f_1 = m_1^0, & \ldots, & f_{p-1} = m_{p-1}^0, \\ f_p = m_p^0 + m_0^1, & f_{p+1} = m_1^1, & \ldots, & f_{2p-1} = m_{p-1}^1, \\ \ldots & & & \\ f_{kp} = m_p^{k-1} + m_0^k, & f_{kp+1} = m_1^k, & \ldots, & f_{(k+1)p-1} = m_{p-1}^k, \\ \ldots . & & & \end{array} \tag{3.2}$$

Zřejmě po sečtení rovnic (3.1) přes všechna $k \in \mathbb{N}_0$ zůstanou zachovány momenty i v globálním smyslu a $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} m_j^k = 1$, tedy hodnoty vyjádřené vzorcem (3.2) představují pravděpodobnostní funkci.

Poznámka. V případě, že X nemá spojité rozdělení, můžeme použít stejnou metodu s tím, že v soustavě rovnic (3.1) diskrétní pravděpodobnost v bodě x_k zahrneme, ale v bodě $x_k + ph$ nikoli.

Následující tvrzení nám umožní explicitně vyjádřit hodnoty m_j^k.

Tvrzení 5 (O tvaru řešení rovnice pro metodu shody lokálních momentů). *Řešením soustavy rovnic* (3.1) *je*

$$m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{\substack{0 \le i \le p \\ i \ne j}} \frac{x - x_k - ih}{(j-i)h} \, \mathrm{d}F(x), \qquad j = 0,1,2,\ldots,p. \tag{3.3}$$

Důkaz. Lagrangeova interpolace (viz Govil a kol., 2007, str. 176), polynomu $f(y)$ v bodech $y_0, y_1, \ldots, y_n$ je

$$f(y) = \sum_{j=0}^{n} f(y_j) \prod_{\substack{0 \le i \le n \\ i \ne j}} \frac{y - y_i}{y_j - y_i}.$$

Aplikací na polynom x^r v bodech $x_k, x_k + h, x_k + 2h, \ldots, x_k + ph = x_{k+1}$ máme:

$$x^r = \sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r \prod_{\substack{0 \le i \le p \\ i \ne j}} \frac{x - x_k - ih}{(j-i)h}, \qquad r = 0,1,2,\ldots.$$

Integrací přes interval $[x_k, x_{k+1})$ vyjde:

$$\int_{x_k}^{x_k+ph} x^r \, \mathrm{d}F(x) = \sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{\substack{0 \le i \le p \\ i \ne j}} \frac{x - x_k - ih}{(j-i)h} \, \mathrm{d}F(x), r = 0,1,2,\ldots.$$

Srovnáním s (3.1) ihned vidíme výsledek (3.3). ❑

Poznámka. Podle Klugman a kol. (2004, str. 169) zaokrouhlovací metoda a metoda shody lokálních momentů pro $p = 1$ mají podobnou chybovost a v případě volby $p = 2$ dochází ke značnému zlepšení. Navíc volba $p = 2$ je zpravidla dostačující a při jeho zvětšení dochází jen k malému zpřesnění. Výhoda zaokrouhlovací metody a metody shody prvního momentu je, že všechny pravděpodobnosti f_j jsou nezáporné, což u shody dvou a více momentů není zaručeno.

V případě, že požadujeme pouze shodu střední hodnoty, můžeme hledanou pravděpodobnostní funkci f_j vyjádřit pomocí vzorce uvedeného v následujícím tvrzení, které je uvedeno bez důkazu v knize Klugman a kol. (2004, str. 170).

Tvrzení 6 (Shoda lokálních středních hodnot). *Metoda shody lokálních momentů daná soustavou rovnic* (3.1) *pro* $p = 1$ *generuje pravděpodobnostní funkci* $f_j = \mathsf{P}(X^\star = jh)$ *určenou předpisem*

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 - \frac{\mathsf{E}\left[X \wedge h\right]}{h}, \\ f_j &= \frac{2\mathsf{E}\left[X \wedge jh\right] - \mathsf{E}\left[X \wedge (j-1)h\right] - \mathsf{E}\left[X \wedge (j+1)h\right]}{h}, \qquad j = 1,2,3,\dots. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Důkaz. Dosazením p=1 do předpisu (3.2) dostáváme, že

$$f_0 = m_0^0, \qquad f_j = m_1^{j-1} + m_0^j, \qquad j = 1,2,3,\dots.$$

Ve vzorci (3.3) využijeme toho, že $x_j = jh$ a spočteme:

$$m_0^j = \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{x-(j+1)h}{-h}\,\mathrm{d}F(x), \qquad m_1^{j-1} = \int_{(j-1)h}^{jh} \frac{x-(j-1)h}{h}\,\mathrm{d}F(x). \tag{3.5}$$

Za použití vzorce (1.1) z lemmatu 1 upravujme (3.4):

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 - \int_0^h \frac{x-h}{h}\,\mathrm{d}F(x) - 1 = \int_0^h \frac{x-h}{-h}\,\mathrm{d}F(x) = m_0^0, \\ f_j &= \int_0^{jh} 2\frac{x-jh}{h}\,\mathrm{d}F(x) + 2j - \int_0^{(j-1)h} \frac{x-(j-1)h}{h}\,\mathrm{d}F(x) - j + 1 \\ &\quad - \int_0^{(j+1)h} \frac{x-(j+1)h}{h}\,\mathrm{d}F(x) - j - 1 \\ &= \int_{(j-1)h}^{jh} 2\frac{x-jh}{h}\,\mathrm{d}F(x) - \int_{(j-1)h}^{(j+1)h} \frac{x-(j+1)h}{h}\,\mathrm{d}F(x) \\ &= \int_{(j-1)h}^{jh} \frac{x-(j-1)h}{h}\,\mathrm{d}F(x) + \int_{jh}^{(j+1)h} \frac{x-(j+1)h}{-h}\,\mathrm{d}F(x) = m_1^{j-1} + m_0^j. \end{aligned}$$

Poslední rovnost plyne ze vzorců (3.5).

❑

Příklad. Vzorec (3.4) je vhodné aplikovat na rozdělení, jejichž limitovaná střední hodnota je snadno vyjádřitelná. Odvodíme limitované střední hodnoty některých známých rozdělení za pomoci vzorce (1.1).

a) Nechť $\alpha > 0$, $u > 0$. Pro náhodnou veličinu X s exponenciálním rozdělením s distribuční funkcí $F(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x > 0$ a hustotou

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \qquad x > 0, \tag{3.6}$$

platí:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[X \wedge u\right] &= \int_0^u (x-u)\alpha e^{-\alpha x} dx + u \\
&= \alpha \int_0^u x e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x - u \int_0^u \alpha e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x + u \\
&= \left[-x e^{-\alpha x}\right]_0^u + \left[\frac{-1}{\alpha} e^{-\alpha x}\right]_0^u - uF(u) + u = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha u})
\end{aligned}$$

b) Nechť $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $u > \beta$. Pro náhodnou veličinu X s Paretovým rozdělením s hustotou

$$f(x) = \alpha \beta^\alpha x^{-\alpha-1}, \qquad x \geq \beta, \tag{3.7}$$

platí:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}\left[X \wedge u\right] &= \int_\beta^u (x-u)\alpha\beta^\alpha x^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}x + u \\
&= \alpha\beta^\alpha \int_\beta^u x^{-\alpha} dx - \alpha\beta^\alpha u \int_\beta^u x^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}x + u \\
&= \alpha\beta^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\beta^u - \alpha\beta^\alpha u \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_\beta^u + u = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} - \frac{\beta^\alpha u^{1-\alpha}}{\alpha-1}
\end{aligned}$$

3.3 Příklady

V následujícím příkladu ukážeme použití obou metod diskretizace. K numerickým výpočtům budeme používat program Wolfram *Mathematica*® 10.

Příklad. Uvažujme náhodnou veličinu X, která má exponenciální rozdělení (3.6) s parametrem $\alpha = 0{,}2$. K diskretizaci jsme použili výše popsané metody s různými volbami parametrů $h > 0$ a $p \in \mathbb{N}$. Přehledně uspořádané hodnoty pravděpodobnostní funkce $f_j = \mathsf{P}(X^\star = jh)$ uvádíme v tabulce 3.1. Pro názornost naznačíme výpočet některých hodnot.

Zaokrouhlovací metoda pro $h = 1$:

$$\begin{aligned}
f_0 &= F(0{,}5) = 1 - e^{-0{,}2\cdot 0{,}5} \doteq 0{,}09516, \\
f_j &= F(j+0{,}5) - F(j-0{,}5) = e^{-0{,}2(j-0{,}5)} - e^{-0{,}2(j+0{,}5)}.
\end{aligned}$$

Metoda shody lokálních momentů pro $p = 1$, $h = 1$ (požíváme vzorec (3.4)):

$$\begin{aligned}
f_0 &= 1 - \mathsf{E}\left[X \wedge 1\right] = 1 - \frac{1}{0{,}2}(1 - e^{-0{,}2}) = 5e^{(-0{,}2)} - 4 \doteq 0{,}09365, \\
f_i &= 2\,\mathsf{E}\left[X \wedge i\right] - \mathsf{E}\left[X \wedge (i-1)\right] - \mathsf{E}\left[X \wedge (i+1)\right] \\
&= \frac{1}{0{,}2}[2(1 - e^{-0{,}2i}) - (1 - e^{-0{,}2(i-1)}) - (1 - e^{-0{,}2(i+1)})] \\
&= 5[e^{-0{,}2} + e^{0{,}2} - 2]e^{-0{,}2i}.
\end{aligned}$$

j	ZM $h=1$	MSM $h=1$ $p=1$	MSM $h=1$ $p=2$	ZM $h=2$	MSM $h=2$ $p=1$	MSM $h=2$ $p=2$
0	0,09516	0,09365	0,06620	0,18127	0,17580	0,13003
1	0,16402	0,16429	0,21920	0,26992	0,27172	0,36326
2	0,13429	0,13451	0,08865	0,18093	0,18214	0,11581
3	0,10995	0,11013	0,14694	0,12128	0,12209	0,16322
4	0,09002	0,09017	0,05943	0,08130	0,08184	0,05204
5	0,07370	0,07382	0,09849	0,05450	0,05486	0,07334
6	0,06034	0,06044	0,03983	0,03653	0,03677	0,02338
7	0,04940	0,04948	0,06602	0,02449	0,02465	0,03295
8	0,04045	0,04051	0,02670	0,01641	0,01652	0,01051
9	0,03311	0,03317	0,04426	0,01100	0,01108	0,01481
10	0,02710	0,02716	0,01790	0,00738	0,00742	0,00472

Pozn: ZM Zaokrouhlovací metoda.
MSM Metoda shody lokálních momentů.

Tabulka 3.1: Hodnoty f_j diskretizovaného exponenciálního rozdělení

Metoda shody lokálních momentů pro $p = 2$, $h = 1$:
Předpis (3.2) pravděpodobnostní funkce se zjednoduší na tvar

$$f_{2k} = m_2^{k-1} + m_0^k, \qquad f_{2k+1} = m_1^k, \qquad k = 0{,}1{,}2, \dots,$$

kde $m_0^{-1} = 0$. Pomocí vzorce (3.3) spočteme:

$$m_0^k = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x - 2k - 1 \cdot 1}{(0-1) \cdot 1} \cdot \frac{x - 2k - 2}{(0-2) \cdot 1} \cdot 0{,}2e^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x,$$
$$m_1^k = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x - 2k - 0 \cdot 1}{(1-0) \cdot 1} \cdot \frac{x - 2k - 2}{(1-2) \cdot 1} \cdot 0{,}2e^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x,$$
$$m_2^k = \int_{2k}^{2k+2} \frac{x - 2k - 0 \cdot 1}{(2-0) \cdot 1} \cdot \frac{x - 2k - 1}{(2-1) \cdot 1} \cdot 0{,}2e^{-0{,}2x}\,\mathrm{d}x.$$

V následujícím příkladu porovnáme použití různých metod diskretizace exponenciálního rozdělení a Panjerovy rekurze s přesným výpočtem složeného Poissonova rozdělení. Pro náhodnou veličinu S se složeným rozdělením tvaru (1.6), kde N se řídí Poissonovým rozdělením (1.3) s parametrem λ a X_i mají exponenciální rozdělení (3.6) s parametrem α, platí (viz Mandl a Mazurová, 1999, str. 17) následující vzorec pro distribuční funkci F_S náhodné veličiny S:

$$F_S(s) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha s)^k}{k!} e^{-\alpha s} \right].$$

Příklad. Předpokládejme, že $\lambda = 30$ a $\alpha = 0{,}2$. Zajímá nás pravděpodobnost $\mathsf{P}(S \leq s)$ pro různé hodnoty $s > 0$. Využijeme hodnot spočtených v tabulce 3.1 pro $h = 1$ a výsledky uspořádáme do tabulky 3.2. Porovnáním jednotlivých hodnot zjistíme, že zaokrouhlovací metoda poskytuje nejméně přesné výsledky; mezi metodou shody lokálních momentů pro $p = 1$ a $p = 2$ nelze jednoznačně rozhodnout, která dává přesnější výsledky.

s	ZM	MSM $p = 1$	MSM $p = 2$	PRSN
60	0,00314	0,00308	0,00302	0,00284
90	0,04987	0,04921	0,04885	0,04721
120	0,23356	0,23158	0,23117	0,22683
130	0,32754	0,32521	0,32491	0,31997
140	0,42986	0,42733	0,42720	0,42200
150	0,53344	0,53087	0,53092	0,52581
180	0,79335	0,79150	0,79186	0,78847
210	0,93240	0,93155	0,93182	0,93038
240	0,98314	0,98286	0,98298	0,98254

Pozn: ZM Zaokrouhlovací metoda.
MSM Metoda shody lokálních momentů.
PRSN Přesný výpočet.

Tabulka 3.2: Porovnání hodnot ditribuční funkce složeného Poissonova a exponenciálního rozdělení při použití různých metod diskretizace s přesným výpočtem

Kapitola 4

Aplikace

4.1 XL-zajištění

Jedním z praktických příkladů využívajících diskretizaci a Panjerovu rekurzi je stanovení zajistného v XL-zajištění (viz Mandl (2009, str. 25), Čápová (2014)). Náhodná veličina Y_i vyjadřuje i–té pojistné plnění pojišťovny, která se zajistí proti překročení hodnoty (priority) l, ale nejvýše do hodnoty (kapacity vrstvy) m. X_i je tedy část i–tého pojistného plnění, které plní zajišťovna a S je celkové plnění zajišťovny za nějaké období. Pokud je zajistná smlouva nastavena tak, že pokud celkové plnění zajišťovny překročí hodnotu m, pojišťovna zaplatí další zajistné, pak hovoříme o zajištění se saturací. Pokud je tímto způsobem sjednáno K saturací, pak plnění zajišťovny je nejvýše $M = (K+1)m$, $K \in \mathbb{N}_0$. Pokud není vyčerpána celá kapacita vrstvy m, pak pojišťovna zaplatí pouze její poměrnou část. V takovém případě pro celkové plnění zajišťovny S_K platí

$$S_K = S \wedge (K+1)m.$$

Pokud ryzí zajistné za krytí jedné vrstvy označíme π, pak pojišťovna celkem zaplatí zajišťovně

$$\Pi = \pi(1 + \frac{1}{m}[S \wedge Km]) = \pi(1 + \frac{1}{m}S_{K-1}).$$

Ryzí zajistné se pak stanoví tak, aby platilo

$$\mathsf{E}\,[\Pi] = \mathsf{E}\,[S_K]\,,$$

což lze vyjádřit pro π jako

$$\pi = \frac{\mathsf{E}\,[S_K]}{1 + \frac{1}{m}\,\mathsf{E}\,[S_{K-1}]}. \tag{4.1}$$

Za předpokladu, že S má distribuční funkci F_S, můžeme (4.1) přepsat pomocí (1.1) do tvaru

$$\pi = \frac{\displaystyle\int_0^{(K+1)m} s\,\mathrm{d}F_S(s) + (K+1)\,m\,[1 - F_S\,((K+1)\,m)]}{\displaystyle 1 + \frac{1}{m}\int_0^{Km} s\,\mathrm{d}F_S(s) + K\,[1 - F_S\,(Km)]}.$$

Pokud mají jednotlivá plnění spojité rozdělení a použijeme diskretizaci s krokem h a následně Panjerovu rekurzi na výpočet pravděpodobnostní funkce g_j, pak lze (4.1) vyjádřit jako

$$\pi = \frac{h \sum_{k=0}^{\frac{(K+1)m}{h}} k g_k + (K+1)\, m \left(1 - \sum_{k=0}^{\frac{(K+1)m}{h}} g_k \right)}{1 + \frac{h}{m} \sum_{k=0}^{\frac{Km}{h}} k g_k + K \left(1 - \sum_{k=0}^{\frac{Km}{h}} g_k \right)}. \tag{4.2}$$

Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s distribuční funkcí F_Y a náhodnou veličinu $\bar{N}$ nabývající pouze nezáporných celočíselných hodnot, která je nezávislá na $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Zajímají nás pouze náhodné veličiny Y_i, $i \in \mathbb{N}$, které překročí pevně stanovenou dolní mezí l. Navíc je omezíme shora pevně stanovenou horní mezí m. Zavedeme tedy nové náhodné veličiny

$$X_i = (Y_i - l)_+ \wedge m, \qquad i \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

které jsou také nezávislé a stejně rozdělené. Pro jejich distribuční funkci F_X platí vztah

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{F_Y(x+l) - F_Y(l)}{1 - F_Y(l)}, & 0 \le x \le m, \\ 1, & x > m, \end{cases} \tag{4.4}$$

což lze odvodit pomocí podmíněných pravděpodobností, neboť

$$\begin{aligned} \mathsf{P}((Y_i - l)_+ \le x) &= \mathsf{P}(Y_i - l \le x \mid Y_i \ge l) = \frac{\mathsf{P}(Y_i \le x + l, Y_i \ge l)}{\mathsf{P}(Y_i \ge l)} \\ &= \frac{\mathsf{P}(l \le Y_i \le x + l)}{\mathsf{P}(Y_i \ge l)} = \frac{F_Y(x+l) - F_Y(l)}{1 - F_Y(l)}, \qquad x \ge 0. \end{aligned}$$

Jejich hustotu f_X můžeme vyjádřit jako

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{f_Y(x+l)}{1 - F_Y(l)}, & 0 < x < m, \\ \mathsf{P}((Y_i - l)_+ > m) = 1 - F_X(m), & x = m, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Jestliže $\bar{N}$ určuje počet Y_i, pak pro N určující počet Y_i překračujících hodnotu l platí

$$p_n = \mathsf{P}(N = n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mathsf{P}(N = n \mid \bar{N} = k)\, \mathsf{P}(\bar{N} = k). \tag{4.6}$$

Pokud má N rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ nebo $(a, b, 1)$, potom pro výpočet pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny S, která má složené rozdělení tvaru (1.6), můžeme využít Panjerovu rekurzi.

V následujícím příkladu se podíváme na konkrétní plnění zajistitele.

Příklad. Uvažujme výše popsané XL-zajištění, všechny hodnoty budou uvažovány v jednotkách 1000 Kč. Z předchozích let jsou známa data o škodách přesahujících hodnotu $u = 5$, podle kterých se počet škod $\bar{N}$ řídí Poissonovým rozdělením (1.3) o parametru $\lambda = 60$ a výše škod Y_i Paretovým rozdělením (3.7) o parametrech $\alpha = 0{,}9$ a $\beta = 5$. Je sjednáno XL-zajištění s $K = 2$ saturacemi, prioritou $l = 50$ a kapacitou vrstvy $m = 200$. Chceme stanovit ryzí zajistné π.

Abychom mohli použít vzorec (4.2), nejdříve musíme zjistit, zda je N z třídy rozdělení $(a, b, 0)$ nebo $(a, b, 1)$, a určit jeho pravděpodobnostní funkci p_n. Jestliže označíme $\delta = \mathsf{P}(Y_i > l) \doteq 0{,}12589$, pak

$$\mathsf{P}(N = n \mid \bar{N} = k) = \binom{k}{n}\delta^n(1-\delta)^{k-n}, \qquad k \geq n.$$

Dosazením do (4.6) dostáváme pro $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} p_n &= \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}\delta^n(1-\delta)^{k-n}\,\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \frac{(\lambda\delta)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{[\lambda(1-\delta)]^{k-n}}{(k-n)!} \\ &= \frac{(\lambda\delta)^n}{n!}e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-\delta)]^{k}}{k!} = \frac{(\lambda\delta)^n}{n!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-\delta)} = \frac{(\lambda\delta)^n}{n!}e^{-\lambda\delta}. \end{aligned}$$

Tedy N má Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda\delta \doteq 7{,}55355$, tedy je z třídy rozdělení $(a, b, 0)$ s parametry $a = 0$ a $b = \lambda\delta$.

Pro tento příklad zvolíme metodu shody dvou momentů ($p = 2$) s krokem $h = 0{,}5$, musíme tedy určit hustotu náhodných veličin X_i tvaru (4.3), což dostáváme dosazením do (4.5):

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{f_Y(x+l)}{1-F_Y(l)} = \dfrac{\alpha\beta^\alpha(x+l)^{-\alpha-1}}{1-(1-\beta^\alpha l^{-\alpha})} = \alpha l^\alpha(x+l)^{-\alpha-1}, & 0 < x < m. \\ 1 - F_x(m) = 1 - \dfrac{F_Y(m+l)-F_Y(l)}{1-F_Y(l)} = \left(\dfrac{l}{m+l}\right)^\alpha, & x = m. \end{cases}$$

Pro zadané hodnoty máme

$$f_X(X) = \begin{cases} 0{,}9 \cdot 50^{0{,}9}(x+50)^{-1{,}9}, & 0 < x < 200 \\ \left(\dfrac{50}{250}\right)^{0{,}9} = 5^{-0{,}9}, & x = 200. \end{cases}$$

Nyní si musíme uvědomit, že náhodné veličiny X_i jsou spojité na intervalu (0,200) a v bodě $x = 200$ nabývají hodnoty s nenulovou pravděpodobností. Předpis (3.2) pravděpodobnostní funkce se zjednoduší na tvar

$$f_{2k} = m_2^{k-1} + m_0^k, \qquad f_{2k+1} = m_1^k, \qquad k = 0{,}1{,}2, \ldots,$$

kde $m_2^{-1} = 0$. Pomocí vzorce (3.3) pro $k = 0,1,2,\ldots,199$ spočteme:

$$\begin{aligned}
m_0^k &= \int_k^{k+1} \frac{x-k-0{,}5}{-0{,}5} \cdot \frac{x-k-1}{-1} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_k^{k+1} 0{,}9 \cdot 50^{0,9}(x+50)^{-1,9}(2x-2k-1)(x-k-1)\,\mathrm{d}x \\
m_1^k &= \int_k^{k+1} \frac{x-k}{0{,}5} \cdot \frac{x-k-1}{-0{,}5} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_k^{k+1} -3{,}2 \cdot 50^{0,9}(x+50)^{-1,9}(x-k)(x-k-1)\,\mathrm{d}x \\
m_2^k &= \int_k^{k+1} \frac{x-k}{1} \cdot \frac{x-k-0{,}5}{0{,}5} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_k^{k+1} 0{,}9 \cdot 50^{0,9}(x+50)^{-1,9}(x-k)(2x-2k-1)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

X_i mají omezený nosič, proto $f_{400} = f_X(200) = 5^{-0,9}$. Celkem tak dostáváme předpis pravděpodobnostní funkce f_j, která je pro $j > 400$ nulová.

Použitím Panjerova rekurzivního vzorce (2.5) spočteme pravděpodobnostní funkci g_k náhodné veličiny S:

$$g_k = P(S = \frac{1}{2}k) = \sum_{j=1}^{k} \frac{bj}{k} f_j g_{k-j}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, 1200,$$

kde z (1.7) a (2.6) dostáváme, že $g_0 = \exp\left(\lambda\delta\left(f_0 - 1\right)\right)$. Nyní můžeme dosadit do vzorce (4.2), což dává výsledek

$$\pi = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1200} k g_k + 600\left(1 - \sum_{k=0}^{1200} g_k\right)}{1 + \frac{1}{400}\sum_{j=0}^{800} k g_k + 2\left(1 - \sum_{k=0}^{800} g_k\right)} = 176{,}29890.$$

Tedy ryzí zajistné je 176299 Kč.

4.2 Solventnost pojišťovny

Dalším příkladem je stanovení kapitálového požadavku na základě kvantilu rozdělení škodních úhrnů (viz Mandl a Mazurová, 1999, str. 24). Náhodná veličina S se složeným rozdělením představuje úhrn škod a π je pojistné za určité období. Chceme stanovit počáteční výši kapitálu u tak, aby pojišťovna s pravděpodobností $1 - \varepsilon$ měla dostatek prostředků na výplatu pojistných plnění, tedy

$$\mathsf{P}(S \leq u + \pi) = 1 - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Příklad. Z předchozích let známe informace o škodách. Data o počtu škod přesahujících 10 způsobených v rámci jednotlivých pojistných smluv (viz tabulka 4.1) jsme převzali z publikace Klugman a kol. (2004, str. 396), jednotlivé škody se řídí

Paretovým rozdělením (3.7) s parametry $\alpha = 1{,}1$ a $\beta = 10$. Pojistné π je stanoveno jako 1,1 násobek očekávaného úhrnu škod. Chceme najít výši kapitálu u tak, aby pojišťovna byla schopna platit své závazky s pravděpodobností 0,95.

Abychom mohli použít Panjerovu rekurzi, nejdříve musíme najít nějaké rozdělení z třídy $(a, b, 0)$ nebo $(a, b, 1)$, kterému odpovídají data z tabulky 4.1. V Klugman a kol. (2004, str. 446) je ukázáno, že vhodný model pro tato data je v nule modifikované (1.5) geometrické rozdělení, zvolíme tedy obecnější v nule modifikované negativně binomické rozdělení (1.4), jehož parametry odhadneme pomocí metody maximální věrohodnosti popsané například v publikaci Anděl (2011, str. 146).

Nejdříve odvodíme logaritmickou věrohodnost pro obecné v nule modifikované rozdělení s pravděpodobnostní funkcí p_k^M, kde p_k' je pravděpodobnostní funkce původního (v našem případě negativně binomického) rozdělení. Nechť n je celkový počet škod a n_k je počet pojistných smluv, v rámci nichž bylo způsobeno právě k škod, tedy $n = \sum_{k=0}^{\infty} n_k$. Věrohodnost a logaritmická věrohodnost jsou tvaru

$$L = \prod_{k=0}^{\infty} (p_k^M)^{n_k} = (p_0^M)^{n_0} \prod_{k=1}^{\infty} (\frac{1 - p_0^M}{1 - p_0'} p_k')^{n_k},$$

$$l = \log L = n_0 \log p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} n_k \log(1 - p_0^M) + \sum_{k=1}^{\infty} n_k [\log p_k' - \log(1 - p_0')].$$

Maximálně věrohodný odhad parametru p_0^M je

$$\frac{\partial l}{\partial p_0^M} = \frac{n_0}{p_0^M} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n_k}{1 - p_0^M} = \frac{n_0}{p_0^M} - \frac{n - n_0}{1 - p_0^M} \stackrel{!}{=} 0,$$

$$\hat{p}_0^M = \frac{n_0}{n}.$$

Tento maximálně věrohodný odhad $\hat{p}_0^M$ parametru p_0^M odpovídá intuitivní volbě. Pro naše data platí $\hat{p}_0^M = 0{,}87934$.

Dále musíme určit maximálně věrohodné odhady $\hat{r}$ a $\hat{p}$ parametrů r a p, které maximalizují l, tedy maximalizují funkci $\sum_{k=1}^{\infty} [n_k \log p_k'] - (n - n_0) \log(1 - p_0')$. K tomu použijeme program Wolfram *Mathematica*® 10. Výsledkem je $\hat{r} = 1.15439$ a $\hat{p} = 0.92164$. Nyní předpokládejme, že počet škod N se řídí v nule modifikovaným negativně binomickým rozdělením s parametry $r = 1.15439$ a $p = 0.92164$

Počet škod	Počet výskytů
0	370412
1	46545
2	3935
3	317
4	28
5	3
6+	0
celkem	421240

Tabulka 4.1: Data o počtu škod

s pravděpodobnostní funkcí

$$\begin{aligned}
p_0^M &= 0{,}87934\\
p_k^M &= \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}p_k', \qquad k = 1{,}2{,}3,\dots.
\end{aligned}$$

Potom S má tvar (1.6) a k jeho výpočtu můžeme použít vzorec (2.1), kde

$$\begin{aligned}
a &= (1-p) = 0{,}07836,\\
b &= (1-p)(r-1) = 0{,}01210,\\
p_0 &= p_0^M = 0{,}87934,\\
p_1 &= \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}p_1' = \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}rp^r(1-p) = 0.11050.
\end{aligned}$$

Pro výpočet g_0 musíme nejdříve odvodit pravděpodobnostní vytvořující funkci P_N v nule modifikovaného rozdělení. Uvažujme pravděpodobnostní vytvořující funkci původního negativně binomického rozdělení $P(Z)$ tvaru (1.8). Potom upravujme:

$$\begin{aligned}
P_N(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k^M z^k = p_0^M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}p_k' z^k = p_0^M + \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}[P(z) - p_0']\\
&= \left[1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}\right] + \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}P(z).
\end{aligned}$$

Tedy

$$g_0 = P_N(f_0) = \left[1 - \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}\right] + \frac{1-p_0^M}{1-p_0'}\left(\frac{p}{1-(1-p)f_0}\right)^r.$$

K diskretizaci Paretova rozdělení použijeme vzorec (3.4) s krokem $h = 1$ a již odvozenou limitovanou střední hodnotu v příkladu za tvrzením 6. Po spočtení zjistíme, že

$$\sum_{k=0}^{25} g_k = \mathsf{P}(S \leq 25) = 0{,}95126$$

Použitím vzorce (2.7) dostáváme, že $\pi = 1{,}1\,\mathsf{E}[N]\,\mathsf{E}[X_i]$. Určíme tedy jednotlivé střední hodnoty:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X_i] &= \int_\beta^\infty \alpha\beta^\alpha x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} = 110,\\
\mathsf{E}[N] &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k^M = 0{,}13174.
\end{aligned}$$

Tedy $\pi = 1{,}1 \cdot 110 \cdot 0{,}13174 = 15{,}94020$. Tedy počáteční výše kapitálu je

$$u = 25 - \pi = 25 - 15{,}94020 \doteq 9{,}06.$$

Závěr

V první kapitole jsme dokázali, že do třídy $(a, b, 0)$ patří Poissonovo, binomické, negativně binomické a geometrické rozdělení. V druhé kapitole jsme důkaz Panjerova vzorce na rozdíl od Klugman a kol. (2004) uvedli rovnou pro obecnější třídu $(a, b, 1)$ a ukázali použití na příkladu.

Třetí kapitola se zabývala diskretizací spojitých náhodných veličin, ve které jsme dokázali vzorec pro shodu středních hodnot pomocí limitovaných středních hodnot, které jsme spočetli pro exponenciální a Paretovo rozdělení. Nakonec jsme na příkladu ukázali použití všech zmíněných metod a srovnali jsme použití různých diskretizačních metod a následné použití rekurze s přesným výpočtem pro případ složeného Poissonova a exponenciálního rozdělení.

V poslední kapitole jsme předvedli řešení praktických příkladů, které využívají Panjerovu rekurzi i metody diskretizace. První z nich se zabýval XL-zajištěním, odvodili jsme vzorec pro výpočet ryzího zajistného a jeho použití jsme ilustrovali pro konkrétní případ. V závěrečném příkladu jsme se soustředili na stanovování kapitálového požadavku na základě kvantilu rozdělení škodních úhrnů.

Seznam použité literatury

ANDĚL, J. (2011). *Základy matematické statistiky.* 3. vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.

ČÁPOVÁ, P. (2014). Zajištění škodního nadměrku se saturacemi. Bakalářská práce, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Praha.

GOVIL, N. K., MHASKAR, H. N., MOHAPATRA, R. N., NASHED, Z. a SZABADOS, J. (2007). *Frontiers in Interpolation and Approximation.* First Edition. Chapman & Hall, Boca Raton. ISBN 1-58488-636-6.

KLUGMAN, S. A., PANJER, H. H. a WILLMOT, G. E. (2004). *Loss Models: from data to decisions.* Second Edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken. ISBN 0-471-21577-5.

LACHOUT, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti.* 2. vydání. Karolinum, Praha. ISBN 80-246-0872-3.

MANDL, P. (2009). *Účetní výkaznictví pojišťoven pro matematiky.* Vydání první. Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-080-7.

MANDL, P. a MAZUROVÁ, L. (1999). *Matematické základy neživotního pojištění.* Vydání první. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-42-1.

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel
$\mathsf{P}(\cdot)$	pravděpodobnost
$\mathsf{E}[\cdot]$	střední hodnota
$\mathrm{var}(\cdot)$	rozptyl