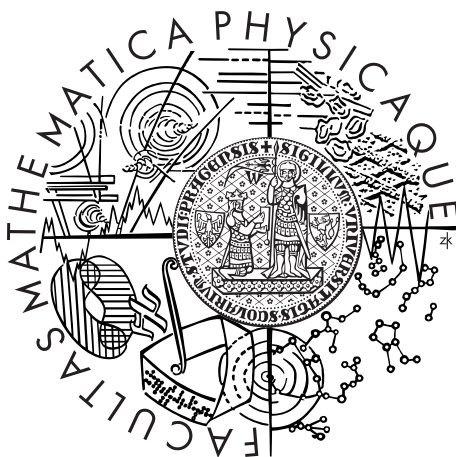


Univerzita Karlova v Praze Matematicko-fyzikální fakulta

DISERTAČNÍ PRÁCE



Oldřich Ulrych

Nestlačitelné tekutiny s viskozitou závislou na teplotě, numerická analýza a počítačové simulace

Matematický ústav Univerzity Karlovy

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Matematické a počítačové modelování

Praha 2014

Děkuji svému školiteli prof. RNDr. Josefu Málkovi, CSc., DSc. za dodání odvahy začít znovu studovat. Během studia mi poskytoval trvalou inspiraci a motivaci k jeho dokončení. Bez jeho trpělivosti, podpory a podnětných konzultací by nemohla vzniknout ani tato práce.

Také děkuji kolegům Jaroslavu Hronovi a Janu Blechtovi za konzultace při řešení problémů s numerickou implementací úloh a jejich rady. V neposlední řadě též děkuji rodině a nejbližším spolupracovníkům za jejich laskavost a toleranci, kterou se mnou měli při plnění mých studijních povinností.

Prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 11. srpna 2014

Název práce: Nestlačitelné tekutiny s viskozitou závislou na teplotě, numerická analýza a počítačové simulace

Autor: RNDr. Oldřich Ulrych

Katedra: Matematický ústav UK

Vedoucí disertační práce: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Abstrakt: Proudění nestlačitelných tekutin, kdy dochází k významné výměně tepelné a mechanické energie a kdy se vlastnosti tekutin mění s teplotou a kinematickými veličinami, jsou popsány bilančními rovnicemi pro hybnost a energii, doplněné o konstitutivní rovnice pro Cauchyův tenzor napětí a tepelný tok. Rovnice bilance energie má v kontextu hladkých funkcí několik ekvivalentních formulací. Tyto formulace však v kontextu slabých řešení ekvivalentní obecně nejsou. Na druhou stranu, pokud globální existence řešení pro velká data je dokázána, týká se vesměs právě slabých řešení. Disertační práce vychází z existenční teorie pro zobecněný Navier-Stokes-Fourierův systém popisující rovinná proudění, kdy viskozita závisí na teplotě a rychlosti smyku. Vymezuje parametry mocninného modelu, pro které má slabá formulace bilančních rovnic ve dvou dimenzích smysl a pro které jsou dvě uvažované slabé formulace bilance energie ekvivalentní. Na základě existenčního výsledku jsou navrženy a numericky řešeny příklady a systematicky srovnávány obě formulace bilančních rovnic energie pro různé parametry mocninného modelu. Byly nalezeny případy, ve kterých obě formulace dávají při numerické implementaci odlišné výsledky.

Klíčová slova: Navier-Stokes-Fourierův systém, nestlačitelná tekutina, mocninná tekutina, viskozita závislá na teplotě a rychlosti smyku, podmínka skluzu, bilance energie, slabé řešení, metoda konečných prvků

Title: Incompressible fluids with temperature dependent viscosity, numerical analysis and computational simulations
Author: RNDr. Oldřich Ulrych
Department: Mathematical Institute of Charles University
Supervisor: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Abstract: Flows of incompressible fluids connected with significant exchange of thermal and mechanical energy and with material moduli varying with the temperature and the shear rate, are described by the balance equations for linear momentum and energy, complemented by suitable constitution equations for the Cauchy stress and the heat flux. Assuming sufficient smoothness of quantities involved, the energy balance equation exhibits several equivalent formulations. However, within the context of weak solution, these formulations are, in general, not equivalent.

This thesis is based on the existence theory for the generalized Navier-Stokes-Fourier system describing planar flow of fluids with a shear and temperature dependent viscosity. We specify parameters of a generalized power-law model under which weak formulations of balance equations are meaningful and both considered formulations of the energy balance equation are equivalent. Supported by the existence theory, we propose and numerically solve several problems pursuing the aim to systematically compare the results for both energy balance formulations. We identify the parameters for which these two formulations lead to different computational results.

Keywords: Navier-Stokes-Fourier system, incompressible fluid, power-law fluid, temperature and shear dependent viscosity, Navier slip, balance of energy, weak solution, finite element method

Obsah

1	Úvod	7
2	Mechanika kontinua	15
2.1	Globální a lokální tvar bilančních zákonů	15
2.2	Alternativní tvar rovnice bilance energie	18
2.3	Transformace do bezrozměrných souřadnic	18
2.4	Polární souřadnice	19
2.5	Materiálové konstitutivní vztahy	21
2.6	Okrajové podmínky	22
3	Formulace počáteční a okrajové úlohy	24
3.1	Formulace úlohy	24
3.2	Předpoklady na \mathbf{S}^* a κ^*	25
3.3	Věta o existenci	25
3.4	Komentář k metodě důkazu Věty 3.1	27
3.4.1	Pohybové rovnice	28
3.5	Rovnice bilance energie	29
3.6	Speciální řešení	30
3.7	Předpoklady věty a numerický model	30
4	Rámec numerických experimentů	31
4.1	Obecný popis	32
4.2	Analytická řešení	37
4.3	Prostředky pro numerické řešení úloh	42
4.3.1	Časová diskretizace	42
4.3.2	Prostorová diskretizace	43
4.3.3	FEniCS	43
5	Příklady a jejich numerická řešení	44
5.1	Vyčíslení výrazů pro analytické řešení	46
5.2	Úloha U1	47
5.2.1	Ověření implementace	48
5.2.2	Volba perturbace ϵ	51
5.2.3	Volba konstanty A určující závislost viskozity na teplotě	52
5.2.4	Trvale rostoucí objemové síly	53
5.2.5	Výsledky pro s z intervalu $[1.1, 1.6]$	53
5.3	Úloha U2	57
5.3.1	Ověření implementace	57
5.3.2	Trvale rostoucí objemové síly	59
5.3.3	Výsledky pro s z intervalu $[1.1, 1.6]$	59
5.4	Úloha U3	61
6	Závěr	63

1. Úvod

Navier-Stokesovy rovnice (NS rovnice) představují základní matematický popis proudění vzduchu, vody, krevní plazmy a obecně mnoha tekutin a plynů v rozličných procesech. Tyto rovnice jsou známy takřka dvě stě let a jejich původní, zpravidla odlišná odvození vyjádřená v jazyce parciálních diferenciálních rovnic jsou spojena se jmény Navier, St.-Venant, Poisson a Stokes, viz [26, 28, 27, 31].

Navzdory jisté dlouhověkosti samotných rovnic a navzdory nespočetnému množství úspěšného použití těchto rovnic v rozličných aplikacích při řešení inženýrských, geofyzikálních, meteorologických problémů, je matematická teorie základních počátečních a okrajových úloh spojených s NS rovnicemi pro nestlačitelnou tekutinu v obecných třírozměrných oblastech neuspokojivá. A to až tak závažným způsobem, že byl problém existence globálního hladkého řešení, respektive existence řešení vykazujícího singularitu, zařazen mezi sedm nejdůležitějších otevřených matematických úloh pro počátek třetího tisíciletí, viz [11, 10, 30].

Přítom situace pro úlohy rovinné a problémy třírozměrné je diametrálně odlišná. Dá se říci, že dvourozměrné úlohy spojené s NS rovnicemi pro nestlačitelnou tekutinu obvykle slouží jako ideální příklad nekonečně rozměrných nelineárních dynamických systémů, na kterém lze mnoho matematických přístupů úspěšně aplikovat a vysvětlit. Naopak stejné postupy zcela selhávají při snaze využít je ke studiu analogických úloh v třírozměrných oblastech. To se týká jednoznačnosti slabého řešení, jeho vyšší časové a prostorové diferencovatelnosti, úplné regularity slabého řešení, a tedy globální existence hladkého řešení, existence globálního či exponenciálního atraktoru, apod., viz např. [32, 33, 9].

Základy matematické teorie třírozměrných NS rovnic zahrnující globální existenci slabého řešení, globální existenci hladkého řešení pro malá data a lokální existenci hladkého řešení na krátkém časovém intervalu byly položeny v práci Lerayho; viz [22]. Leray studoval vesměs Cauchyho úlohu¹ a rozšíření výsledků na omezenou oblast je spojeno se jmény Hopf, Ladyženská, Temam a mnoha dalšími, kteří rozvíjeli tyto ideje pro různé prostory funkcí, ve kterých se nacházejí data úlohy a ve kterých se nachází samotné řešení, tj. rychlost a tlak; viz např. [21]. Navzdory úsilí mnoha renomovaných matematiků (L. Nirenberg, L. Caffarelli, P.-L. Lions, R. Temam, C. Foias, P. Constantin, J. Nečas, V. Šverák, G. Seregin, O. A. Ladyženská, G.P. Galdi a mnoho dalších), jsou základní otázky existence hladkého řešení či jednoznačnost slabého či jiného řešení, jehož globální existence je známa, otevřené. Je tedy přirozené studovat systémy obecnější, jako jsou například NS rovnice pro stlačitelnou tekutinu (viz práce Lionse [23] a Feireisla [12, 15, 16]) či systémy, kde je celková energie izolovaného systému zachována. Studium těchto obecnějších systémů může totiž poskytnout nový pohled na samotné NS rovnice pro nestlačitelnou tekutinu.

¹Jak mimo jiné indikuje rovnice (1.6) níže, je přirozené předepisovat počáteční (a okrajovou) podmínku pouze pro rychlost.

Navier-Stokesovy rovnice pro proudění nestlačitelné tekutiny v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ pro $d \in \{2, 3\}$ mají tvar

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^d v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \right) - \nu \Delta \mathbf{v} &= -\nabla p + \varrho \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

kde ϱ a ν jsou dané kladné konstanty představující hustotu a (smykovou) viskozitu tekutiny, $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)$ jsou dané objemové síly, a dvojice $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d)$ a p jsou rychlost a tlak, tedy veličiny charakterizující studované proudění. Nestlačitelnost tekutiny je zachycena první rovnicí v (1.1), kde

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i}.$$

Tato rovnice na jednu stranu zjednodušuje studovaný systém oproti například NS rovnicím pro stlačitelnou tekutinu, které mají tvar (kladná konstanta λ označuje objemovou viskozitu)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) &= 0, \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^d v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \right) - \nu \Delta \mathbf{v} - (\nu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} &= -\nabla p(\varrho) + \varrho \mathbf{f}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

na druhou stranu počet veličin charakterizujících proudění se nemění ((\mathbf{v}, p) pro (1.1) versus (\mathbf{v}, ϱ) pro (1.2)) a omezení $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ způsobuje jistou formu neurčitosti, co přesně veličina p v rovnici (1.1) znamená. Na tuto neurčitost lze nahlížet z mnoha stran, přibližme jeden z pohledů.

Helmholtzova dekompozice rozkládá vektorovou funkci $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in (L^2(\Omega))^d$ na část gradientní a část s nulovou divergencí, přitom tyto části jsou navzájem ortogonální vzhledem k skalárnímu součinu v prostoru $(L^2(\Omega))^d$. Přesněji:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\operatorname{div}} + \nabla h, \quad (1.3)$$

kde h je určeno řešením Neumannovy úlohy pro Laplaceovu rovnici (\mathbf{n} označuje vnější normálu k hranici $\partial\Omega$)

$$-\Delta h = -\operatorname{div} \mathbf{u} \quad \text{v } \Omega, \quad \frac{\partial h}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } \partial\Omega \quad (1.4)$$

a

$$\mathbf{u}_{\operatorname{div}} := \mathbf{u} - \nabla h. \quad (1.5)$$

Označíme-li symbolem \mathbb{P} projektor, který přiřadí vektoru \mathbf{u} jeho část s nulovou divergencí $\mathbf{u}_{\operatorname{div}}$, tj.

$$\mathbb{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{\operatorname{div}}, \quad (1.6)$$

a aplikujeme-li tento projektor na druhou rovnici v (1.1), dostaneme

$$\varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbb{P} \sum_{k=1}^d v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \right) - \nu \mathbb{P} \Delta \mathbf{v} = \varrho \mathbb{P} \mathbf{f}. \quad (1.7)$$

Vidíme tedy, že z rovnice zmizely informace o gradientních částech jednotlivých vektorových členů, které se tak dají připojit k členu ∇p v rovnici (1.1). Tento neurčitý charakter tlaku lze podpořit ještě jednou z charakterizací nestlačitelnosti: tekutina je nestlačitelná, pokud je schopna udržet jakoukoliv sférickou část tensoru napětí.

Kromě podmínky na nestlačitelnost tekutiny, která je sice idealizací, nicméně pro mnoho aplikací je podmínka $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ velmi dobře obhajitelná, a tedy relevantní, samotné NS rovnice poskytují informace o bilanci hmoty a bilanci hybnosti. Bilance, respektive zachování celkové energie systému, však přímo v rovnicích zachycena není. Přitom energie disipovaná prouděním se mění na energii tepelnou a viskozita mnoha tekutin je velice senzitivní i k relativně malým změnám teploty. Chceme-li tyto jevy zachytit, je třeba NS systém rozšířit o bilanci energie a uvažovat systém Navier-Stokes-Fourierův (NSF), který má tvar

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) - \operatorname{div} (2\nu(e) \mathbf{D}(\mathbf{v})) &= -\nabla p + \varrho \mathbf{f}, \\ \varrho \left(\frac{\partial (e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2)}{\partial t} + \operatorname{div} ((e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p) \mathbf{v}) \right) - \operatorname{div} (\kappa(e) \nabla e) &= \operatorname{div} (2\nu(e) \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{v}) \\ &\quad + \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

kde e označuje vnitřní energii, která je v mnoha aplikacích v mechanice tekutin buď přímo úměrná teplotě nebo na teplotě nelineárně závislá. V této práci budeme vesměs pracovat s vnitřní energií místo teploty. Hustota ϱ je v (1.8) (a níže) kladná konstanta a symbol $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ označuje symetrickou část gradientu rychlosti, tj.

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial v_j} + \frac{\partial v_j}{\partial v_i} \right) \right)_{i,j=1}^d.$$

Třetí rovnice v systému (1.8) představuje bilanci celkové energie E , která je dána součtem vnitřní a kinetické energie

$$E = e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2. \quad (1.9)$$

Obvykle se místo systému (1.8) uvažuje systém NSF v jednodušším alternativním tvaru

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) - \operatorname{div} (2\nu(e) \mathbf{D}(\mathbf{v})) &= -\nabla p + \varrho \mathbf{f}, \\ \varrho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} (e \mathbf{v}) \right) - \operatorname{div} (\kappa(e) \nabla e) &= 2\nu(e) |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

kde se třetí rovnice v (1.10) získá tak, že od třetí rovnice v (1.8) odečteme rovnici, která vznikne provedením skalárního součinu \mathbf{v} s druhou rovnicí v (1.8).

Z tohoto pohledu, respektive v kontextu hladkých řešení, jsou tyto dvě formulace bilance energie ekvivalentní. V kontextu slabých řešení však ekvivalence obou formulací platí jen za předpokladu, že rychlost \mathbf{v} je přípustná testovací funkce ve slabé formulaci bilance hybnosti, tj. ve slabé formulaci druhé rovnice v (1.8). Je-li viskozita, uvažovaná jako funkce e , omezená zdola kladnou konstantou, pak jsou v kontextu slabého řešení prostory funkcí pro rychlost NSF systému stejné jako u NS systému. Rychlost je přípustná testovací funkce ve slabé formulaci bilance hybnosti NS rovnic ve dvou dimenzích; ve třech dimenzích však rychlost nemá dostatečnou hladkost, aby mohla být použita jako funkce testovací. To znamená, že v kontextu slabých řešení NSF rovnic, kde

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &\in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \\ |\nabla \mathbf{v}| &\in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \end{aligned} \quad (1.11)$$

nejdou slabé formulace rovnic (1.8) a (1.10) v třírozměrných oblastech obecně ekvivalentní.

Porovnáme-li rovnici

$$\varrho \left(\frac{\partial(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2)}{\partial t} + \operatorname{div}((e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + p)\mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\kappa(e)\nabla e) = \operatorname{div}(2\nu(e)\mathbf{D}(\mathbf{v})) + \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \quad (1.12)$$

s rovnicí

$$\varrho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\kappa(e)\nabla e) = 2\nu(e)|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2, \quad (1.13)$$

pozorujeme, že (1.13) neobsahuje tlak p , a tedy v kombinaci s rovnicí typu (1.7) tlak zcela zmizí z takto redukované formulace. Navíc pravá strana je nezáporná, což dává možnost ukázat nezápornost e použitím (slabého) principu minima. Toto jsou vedle samotné jednoduchosti silné stránky rovnice (1.13). Na druhou stranu člen obsahující $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ je v (1.12) v divergentním tvaru, zatímco v rovnici (1.13) je pravá strana v kontextu řešení splňujících (1.11) jen v prostoru $L^1(0, T; \Omega)$. Důsledkem tohoto rysu je pak skutečnost, že místo slabé formulace rovnice (1.13) je doposud možné ukázat jen platnost nerovnice

$$\varrho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\kappa(e)\nabla e) \geq 2\nu(e)|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2, \quad (1.14)$$

kde se podobně jako v energetické nerovnosti NS rovnic

$$\frac{1}{2}\varrho \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t, \cdot)|^2 d\Omega + \nu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{v}|^2 d\Omega d\tau \leq \frac{1}{2}\varrho \int_{\Omega} |\mathbf{v}(0, \cdot)|^2 d\Omega + \int_0^t \int_{\Omega} \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega d\tau \quad (1.15)$$

ztrácí informace o jisté části energie.

Původní formulace bilance energie (1.12) nabízí možnost ukázat existenci slabého řešení NSF systému (1.8), pokud $2\nu(e)\mathbf{D}(\mathbf{v})$ bude integrovatelný v prostoru $L^q(0, T; L^q(\Omega))$ s $q > 1$. Je-li viskozita ν uvažovaná jako funkce e omezená shora, pak (1.11) implikuje

$$2\nu(e)\mathbf{D}(\mathbf{v}) \in L^{5/4}(0, T; L^{5/4}(\Omega)). \quad (1.16)$$

Důkazy existence slabého řešení pro úlohy spojené s NSF systémem (1.8) jsou poměrně nedávné; prostorově periodický případ je studován v [14] a existence globálního

slabého řešení pro počáteční a okrajovou úlohu v libovolné třírozměrné oblasti je pak dokázána v práci [6] za předpokladu, že tekutina vykazuje jistý skluz na hranici. Například lze uvažovat situaci, kdy na nepropustné stěně uvažujeme podmínky skluzu zapsané ve tvaru

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{a} \quad (2\nu(e)\mathbf{D}(\mathbf{v})\mathbf{n})_\tau = \mathbf{0} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.17)$$

kde $\mathbf{z}_\tau := \mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ je projekce vektoru \mathbf{z} definovaného na hranici do tečné nadroviny. Metodu důkazu globální existence v článku [6] nelze rozšířit přímo pro případ, kdy tekutina ulpívá na hranici, tj.

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (1.18)$$

a tento případ je z pohledu existenční teorie otevřený. Důvodem je přítomnost tlaku ve formulaci bilance energie (1.12), která vyžaduje, aby tlak byl integrovatelnou funkcí, tj. aby alespoň platilo

$$p \in L^1(0, T; L^1(\Omega)). \quad (1.19)$$

Vycházejí z informace, že \mathbf{v} splňuje (1.11), je důkaz vlastnosti (1.19) pro slabé řešení \mathbf{v} druhé rovnice v (1.8) spojené s homogenní Dirichletovou okrajovou podmínkou (1.18) otevřený problém, neboť nelze oddělit informaci o tlaku od informace o součtu časové derivace a tlaku. Skluzové okrajové podmínky, jako například podmínka (1.17), však jsou kompatibilní s Helmholtzovým rozkladem (1.3) a vlastnost (1.19) platí; podrobnosti viz [6]. Poznamenejme, že vektorové pole \mathbf{u} je kompatibilní s Helmholtzovou dekompozicí (1.3), pokud okrajové podmínky vložené na \mathbf{u} se zachovávají pro bezdivergentní část \mathbf{u}_{div} .

Formulace (1.8) a (1.10) NSF rovnic v původním a alternativním tvaru nejsou ekvivalentní v kontextu slabých řešení z pohledu matematické analýzy odpovídajících počátečních a okrajových úloh ve třech dimenzích. Je přirozené se ptát, zda při počítačových simulacích mohou mít tyto odlišné slabé formulace bilance rovnic vliv například na přesnost či efektivitu výpočtu numerického řešení, zda obě formulace dávají stejné řešení atd. Provádět testování této hypotézy a takového srovnání na evolučních NSF systémech ve třírozměrných oblastech je časově a datově náročné a zpravidla vyžadující algoritmy vhodné pro paralelní výpočty. Alternativně je možné se zaměřit na nelineární modely mechaniky tekutin, kdy i ve dvourozměrných oblastech není rychlost přípustná testovací funkce v rovnicích bilance hybnosti a kdy tedy formulace bilance energie typu (1.12) a (1.13) jsou odlišné.

Vhodnou třídou modelů pro tento účel jsou takzvané zobecněné NS tekutiny či tekutiny mocninného typu studované v dvourozměrných oblastech, kde energetické odhady vedou k informaci (srovnej s (1.11))

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}|^2 &\in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \\ |\nabla \mathbf{v}| &\in L^s(0, T; L^s(\Omega)) \end{aligned} \quad (1.20)$$

a parametr s splňuje

$$1 < s < 2. \quad (1.21)$$

Konkrétně lze v kontextu výše řečeného zkoumat následující úlohy. Pro $T > 0$ a otevřenou, omezenou a souvislou $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a pro dané funkce $\mathbf{f} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$

splňující $\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0$ v Ω a $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ na $\partial\Omega$ nalézt funkce (\mathbf{v}, p, e) tak, aby pro $s \in (1, 2)$ a $\alpha_0 \geq 0$ byly při označení

$$\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v})) := 2\nu(e)(1 + \alpha_0|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2}\mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad (1.22)$$

řešením zobecněné NSF úlohy

$$\left. \begin{aligned} & \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ & \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))) = -\nabla p + \varrho \mathbf{f}, \\ & \varrho \left(\frac{\partial(e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2)}{\partial t} + \operatorname{div}((e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + p)\mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\kappa(e)\nabla e) = \operatorname{div}(\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{v}) + \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \\ & \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0 \quad \text{a} \quad e(0, \cdot) = e_0 \quad \text{v } \Omega, \\ & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \\ & (\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + \kappa(e)\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

Alternativní formulace výše uvedené NSF úlohy pak zní

$$\left. \begin{aligned} & \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ & \varrho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\mathbf{S}(e, \mathbf{v})) = -\nabla p + \varrho \mathbf{f}, \\ & \varrho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(e\mathbf{v}) \right) - \operatorname{div}(\kappa(e)\nabla e) = \mathbf{S}(e, \mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{v}), \\ & \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0 \quad \text{a} \quad e(0, \cdot) = e_0 \quad \text{v } \Omega, \\ & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{S}(e, \mathbf{v})\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

Zatímco existence slabého řešení systému (1.23) je dokázána v [6], existence slabého řešení (1.24) je otevřená. Lze však ukázat existenci slabého řešení (\mathbf{v}, e, p) , které bude splňovat (1.24) s jedinou výjimkou: třetí rovnice v (1.24) je nahrazena slabou formulací nerovnice (1.14). To má fundamentální důsledky: zatímco pro systém (1.23) lze snadno ukázat, že celková energie (součet kinetické a vnitřní energie integrovaný přes Ω) se zachovává, tj. pro $t > 0$

$$\int_{\Omega} (e + \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2)(t, \cdot) \, d\Omega = \int_{\Omega} (e_0 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}_0|^2) \, d\Omega,$$

je tato vlastnost pro (1.24) obecně otevřená. Platí určitě v případech, kdy lze ve slabé formulaci druhé rovnice v (1.23) a (1.24) testovat funkcí \mathbf{v} .

Hlavním cílem této dizertační práce je srovnat řešitelnosti úloh (1.23) a (1.24) a zejména porovnání vhodnosti, shodnosti a rozdílů obou formulací pro numerické výpočty. Schéma dizertační práce je následující.

²Poznamenejme, že z $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ a $(\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{n})_\tau = 0$ plyne $\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = ([\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{n}]_n + [\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{n}]_\tau) \cdot ((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{v}_\tau) = 0$. V důsledku toho se druhá hraniční podmínka v (1.23)₆ redukuje na podmínku

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega.$$

V druhé kapitole shrneme postup, jakým je obecný fyzikální problém popsán matematickými prostředky a převeden do bezrozměrných souřadnic, tedy do tvaru vhodného pro teoretické i numerické zkoumání. Též zapíšeme úlohy (1.23) a (1.24) v polárních souřadnicích, protože tento tvar využijeme pro numerické testování při řešení úlohy v mezikruží s podmínkami skluzu.

Třetí kapitola obsahuje formulaci úlohy a definici slabého řešení. Opírá se především o práci [8], ze které je zde citován hlavní výsledek — věta o existenci slabého řešení pro NSF úlohu (1.23). Existenční věta zaručuje existenci řešení pro NSF systém s okrajovou podmínkou úplného nebo částečného skluzu, ve kterém konstitutivní materiálové vztahy zahrnují i případ

$$\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v})) := \nu_0(e)(1 + \nu_1(e) + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2} \mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad (1.25)$$

$$\mathbf{q}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}), \nabla e) := -\kappa(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))e^\beta \nabla e \quad (1.26)$$

pro $s > \frac{3}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$, kde \mathbf{q} je tepelný tok, který u (1.23) a (1.24) má speciálnější tvar. Je zde uveden stručný přehled metod používaných v existenčních důkazech NSF systému mocninného typu s cílem ukázat, že metoda ořezávacích funkcí zvolená v [8] je pro daný problém optimální. Rovněž je vymezen interval parametrů mocninného modelu, ve kterém se lze zaměřit na numerické testování rozdílů a efektivnosti výpočtů formulací (1.23) a (1.24).

Kapitola čtvrtá je přípravná a obsahuje obecný popis numerických experimentů, o který se pak opírají postupy při řešení tří úloh další kapitoly. Navrhujeme zde funkce rychlosti a tlaku, ze kterých odvodíme pro konkrétní konstitutivní vztahy (1.25) a (1.26) objemové síly a okrajové a počáteční podmínky tak, aby zvolené funkce byly přesným řešením pohybových rovnic. Funkce rychlosti, které zde navrhujeme ve tvaru

$$\mathbf{v}(t, x, y) = (y, -x)\mathcal{T}(t)(\epsilon^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - \tilde{r})^2)^{\alpha-1}(\sqrt{x^2 + y^2} - \tilde{r}),$$

kde \tilde{r} je konstanta a $\alpha \in (0, 1)$, mohou být volbou parametru ϵ libovolně blízko funkci

$$(y, -x)\mathcal{T}(t) |\sqrt{x^2 + y^2} - \tilde{r}|^{\alpha-1}(\sqrt{x^2 + y^2} - \tilde{r}),$$

která náleží do prostoru $L^\infty(0, T; W^{1,q}(\Omega)^2)$ pro libovolné $q < s = 1/(1 - \alpha)$. Funkce tlaku je pak z prostoru $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))$. Znalost přesného řešení rychlosti umožní vyhodnocovat chyby vypočtených řešení v případě, kdy viskozita nezávisí na vnitřní energii, a posuzovat přesnost řešení rovnice pro bilance energie v plné i alternativní variantě, protože je znám člen $\int_0^t \int_\Omega (e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))\mathbf{D}(\mathbf{v}) \, d\Omega \, dt$. Ve čtvrté kapitole též uvádíme charakteristiku softwarových prostředků použitých pro řešení.

Pátá kapitola obsahuje tři úlohy. Ve všech úlohách uvažujeme materiálově i energeticky izolovaný systém a nulovou počáteční podmínku pro rychlost i energii. První úloha uvažuje na oblasti ve tvaru mezikruží NSF systém (1.23) a jeho alternativní tvar (1.24) s Navierovou podmínkou skluzu na rychlost a nulovým tokem energie přes hranici oblasti. Protože mezikruží má hladkou hranici, která je při přímočarém použití metody konečných prvků nahrazena polygonem a tudíž znamená zanášení chyb do výpočtu už při numerické formulaci, obsahuje druhý příklad stejnou úlohu transformovanou do polárních souřadnic, kdy mezikruží je převedeno na obdélník a Dirichletovy okrajové podmínky zůstávají na dvou stranách obdélníku a na zbývajících dvou stranách jsou předepsány periodické okrajové podmínky. První a druhá úloha by tedy měly dávat stejná řešení. Druhá úloha je ve skutečnosti redukovatelná do jedné prostorové dimenze a numerické řešení ve dvou dimenzích by mělo nezávislost na jedné

prostorové dimenzi zachovat. Třetí úloha je uvažována jen ve vyjádření v polárních souřadnicích, ve kterých lze na hranici obdélníku i v numerické implementaci přesně předepsat podmínku úplného skluzu (1.23).

Ve všech úlohách užíváme konstitutivní vztahy ve tvaru

$$\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v})) := 2\nu_0(1 + \alpha_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2} \mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad (1.27)$$

respektive

$$\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v})) := 2\nu_0 \frac{A}{A + e} (1 + \alpha_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2} \mathbf{D}(\mathbf{v}) \quad (1.28)$$

a

$$\mathbf{q}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}), \nabla e) := -\kappa_0 \nabla e, \quad (1.29)$$

kde $\nu_0 > 0$, $\kappa_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ a $A > 0$ jsou konstanty.

V úlohách testujeme shodnosti a odlišnosti obou formulací v rozsahu parametrů, které přesahují rámec teoretických hodnot parametrů mocninného modelu s cílem odpovědět na otázku, jak se chová numerický model i za těmito hraničními hodnotami.

V závěrečné kapitole pak shrnujeme dosažené výsledky. Během teoretických prací i numerických výpočtů vyvstávaly nové otázky v problematice ekvivalence modelů a jejich numerické implementace. Proto v závěru nastíníme i možnosti dalšího směřování úvah o vztahu obou modelů při jejich implementaci.

2. Mechanika kontinua

Matematický popis pohybující se látky, jejích vlastností a chování je založen na modelu kontinua, který považuje hmotu za spojité prostředí. Tento model vychází z makroskopického popisu hmoty a jeho abstrakce, při které se zanedbává částicová struktura hmoty daná molekulární a atomární strukturou (či na ještě hrubší úrovni většími shluky částic při popisu směsí apod.). Z tohoto pojetí vycházíme i v této kapitole, kde uvádíme formulaci základních bilančních zákonů, tj. zákona zachování, pohybových zákonů (Newtonovy zákony) a zákona zachování energie (I. termodynamický zákon).¹ Z nich odvozujeme lokální tvar těchto bilančních principů (diferenciální rovnice), jejich vyjádření v bezrozměrném tvaru, které je vhodné pro matematické studium a vyjádření v polárních souřadnicích, vhodné pro přesnější popis některých reálných geometrií. Na závěr kapitoly se též zmíníme o konstitutivních vztazích, které zachycují modely chování reálných látek a zohledňují vliv vlastností a stavu látky na její pohyb.

Tématu definice kontinua, jeho popisu, kinematiky pohybu kontinua a termodynamickému chování je věnována řada publikací, např. [18, 25].

2.1 Globální a lokální tvar bilančních zákonů

Předpokládáme, že nějaká látka vyplňuje geometrickou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega$. Při abstraktním chápání látky jako kontinua jsou popsány její fyzikální vlastnosti (rychlost, hustota, ...) hustotou ρ , tokem σ a hustotou zdrojů γ . V libovolném časovém intervalu $(t_1, t_2) \subset (0, T)$ pro libovolný pevný (kontrolní) objem $\Omega_c \subset \Omega$ platí, že změna celkového množství fyzikální veličiny za časový interval (t_1, t_2) je dána jejím tokem přes hranici objemu Ω_c a zdroji v oblasti, což můžeme popsat vztahem

$$\int_{\Omega_c} (\rho(t_2, x) - \rho(t_1, x)) d\Omega + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega_c} \sigma(t, x) \cdot \mathbf{n} dS dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_c} \gamma(t, x) d\Omega dt. \quad (2.1)$$

Tento vztah lze upravit při zohlednění počátečních podmínek $\rho_0(x)$ definovaných na oblasti Ω a okrajových podmínek $\sigma_b(t, x)$ definovaných na $(0, T) \times \partial\Omega$ na slabou formulaci bilančního zákona (viz [13])

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_c} (\rho(t, x) \partial_t \psi(t, x) + \sigma(t, x) \cdot \nabla_x \psi(t, x)) d\Omega dt + \int_0^T \int_{\Omega_c} \gamma(t, x) \psi(t, x) d\Omega dt = \\ - \int_{\Omega_c} \rho_0(x) \psi(0, x) d\Omega + \int_0^T \int_{\partial\Omega_c} \sigma_b(t, x) \psi(t, x) dS dt \end{aligned} \quad (2.2)$$

pro libovolnou funkci $\psi \in C_c([0, T) \times \overline{\Omega})$. Jsou-li všechny veličiny dostatečně hladké, můžeme tento zákon zapsat v lokálním tvaru

$$\partial_t \rho(t, x) + \operatorname{div}_x \sigma(t, x) = \gamma(t, x) \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2.3)$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\sigma(t, x) \cdot \mathbf{n} = \sigma_b(t, x) \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \quad (2.5)$$

¹Druhý zákon termodynamiky (bilanční rovnice pro entropii) neuvádíme. Jeho platnost je zaručena požadavky, aby viskozita ν a tepelná vodivost κ byly kladné; požadujeme, aby $\nu > 0$ a $\kappa > 0$.

Prvotním tvarem bilančních zákonů je integrální tvar (2.1), který má na vlastnosti funkcí popisujících kontinuum nejmenší nároky a přirozeným způsobem popisuje i počáteční a okrajové podmínky. Pokud je hranice $\partial\Omega_c$ uvnitř oblasti Ω , pak tokem σ_b se rozumí tok v kontinuu. Na části hranice $\partial\Omega_c \cap \partial\Omega$ je tok σ_b dán tokem veličiny přes hranici a zachycuje interakci kontinua s okolím.

Diferenciální tvar (2.3) bilančních zákonů je tvarem odvozeným. Formulace ve tvaru diferenciálních rovnic vyžaduje vyšší hladkost funkcí než které se vyskytují v primární vztahu (2.1).

Hustota

Reálná tekutina vyplňující v čase $t = 0$ oblast Ω_0 (referenční oblast) se skládá z mikroskopických částic. V abstraktním pojetí definujeme hustotu tekutiny v libovolném bodě $X \in \Omega_0$ jako limitu podílu hmotnosti $m(V_0)$ tekutiny zaujímající objem $V_0 \subset \Omega_0$ ($X \in V_0$) ku zmenšujícím se objemu, tj.

$$\varrho_0(X) := \lim_{|V_0| \rightarrow 0} \frac{m(V_0)}{|V_0|}.$$

Jestliže je pohyb částice v bodě X tekutiny na časovém intervalu $(0, T)$ popsán funkcí $\chi(t, X)$

$$\chi : (0, T) \times \Omega_0 \mapsto R^d,$$

pak v čase $t \in [0, T]$ tekutina zaujímá tekutý objem $\Omega_t := \{x := \chi(t, X); X \in \Omega_0\}$ a rychlost částice v čase t a bodě $x = \chi(t, X)$ je $\mathbf{v}(t, x) = \partial_t \chi(t, X)|_{X=\chi^{-1}(t,x)}$.

Na pohybující se tekutinu můžeme nahlížet dvojím základním způsobem. Bud' sledujeme vlastnosti a chování částice, která se v čase $t = 0$ nacházela v bodě $X \in \Omega_0$, a popisujeme její pohyb s souřadným systémem svázaným s referenční oblastí Ω_0 (Lagrangeův popis) nebo sledujeme v bodě x souřadného systému vlastnosti a chování částice, která se v čase t do bodu x dostala (Eulerův popis).

V dalším budeme uvažovat popis v Eulerovských souřadnicích, ve kterých jsou formulovány i rovnice (2.3)–(2.5).

Bilance hmoty

Globální tvar pro kontrolní objem Ω_c (hustotu $\rho := \varrho$, tok $\sigma := \varrho \mathbf{v}$ a zdroj $\gamma := 0$) je

$$\int_0^T \int_{\Omega_c} \left(\varrho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \varrho \mathbf{v} \cdot \nabla_x \psi \right) d\Omega dt = - \int_{\Omega_c} \varrho_0(x) \psi(0, x) d\Omega + \int_0^T \int_{\partial\Omega_c} \rho_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} \psi dS dt \quad (2.6)$$

pro libovolnou funkci $\psi \in C_c([0, T) \times \overline{\Omega})$ a odtud odvozený lokální tvar

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \quad (2.7)$$

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_0 \quad \text{v } \Omega, \quad (2.8)$$

$$\varrho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \varrho_b \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.9)$$

kde \mathbf{v}_b je rychlost tekutiny na hranici.

Bilance hybnosti

Globální tvar pro kontrolní objem Ω_c vyjadřuje změnu hybnosti v důsledku toku hybnosti přes hranici, působení Cauchyho tenzoru napětí $\mathbf{T}(t, x)$ a hustoty objemových sil $\mathbf{b}(t, x)$ ($\rho := \varrho \mathbf{v}$, $\sigma := \varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}$, $\gamma := \varrho \mathbf{b}$)

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_c} \left[\varrho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) : \nabla_x \psi - \mathbf{T} : \nabla_x \psi + \varrho \mathbf{b} \cdot \psi \right] d\Omega dt = & \quad (2.10) \\ - \int_{\Omega_c} \varrho_0(x) \mathbf{v}_0(x) \cdot \psi(0, x) d\Omega + \int_0^T \int_{\partial\Omega_c} (\varrho_b(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_b - \mathbf{T}_b \mathbf{n}) \cdot \psi dS dt \end{aligned}$$

pro libovolnou funkci $\psi \in (C_c([0, T] \times \overline{\Omega}))^d$ a lokální tvar

$$\frac{\partial(\varrho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \varrho \mathbf{b} \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \quad (2.11)$$

$$\varrho(0, \cdot) \mathbf{v}(0, \cdot) = \varrho_0 \mathbf{v}_0 \quad \text{v } \Omega, \quad (2.12)$$

$$\varrho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v} - \mathbf{T} \mathbf{n} = \varrho_b(\mathbf{v}_b \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}_b - \mathbf{T}_b \mathbf{n} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (2.13)$$

Poznamenejme, že při odvozování těchto formulací je napětí na hranici kontrolního objemu napětím vyvolávaným třením jednotlivých vrstev tekutiny o sebe, tedy tenzorem napětí v tekutině. Pokud bude kontrolním objemem celá zkoumaná oblast, pak napětím \mathbf{T}_b na hranici je napětí zachycující interakci mezi tekutinou a hranicí oblasti.

Bilance momentu hybnosti

Za obvyklých předpokladů (pro nepolární tekutiny) vzplývá z bilance momentu hybnosti pouze symetrie tenzoru napětí $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ (viz [18]).

Bilance energie

Změna hustoty celkové energie $E(t, x) := e(t, x) + \frac{1}{2} |\mathbf{v}(t, x)|^2$ (kde e je hustota vnitřní energie) je dána tokem tepla \mathbf{q} a kinetické energie $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ přes hranici, prací objemových sil $\mathbf{b}(t, x)$ a hustotou tepelných zdrojů $r(t, x)$ a je popsána pro kontrolní objem Ω_c rovností v globálním tvaru ($\rho := \varrho E$, $\sigma := \varrho E \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T} \mathbf{v}$, $\gamma := \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$)

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_c} \varrho E \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\varrho E \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T} \mathbf{v}) \cdot \nabla_x \psi + \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \psi d\Omega dt = & \quad (2.14) \\ - \int_{\Omega_c} \varrho_0(x) E_0(x) \psi(0, x) d\Omega + \int_0^T \int_{\partial\Omega_c} (\varrho_b E_b \mathbf{v}_b + \mathbf{q}_b - \mathbf{T}_b \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} \psi dS dt \end{aligned}$$

a v lokálním tvaru

$$\frac{\partial(\varrho E)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho E \mathbf{v}) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \operatorname{div}(\mathbf{T} \mathbf{v}) + \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \quad (2.15)$$

$$E(0, x) = E_0(x) \quad \text{v } \Omega, \quad (2.16)$$

$$(\varrho E \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (\varrho E_b \mathbf{v}_b + \mathbf{q}_b - \mathbf{T}_b \mathbf{v}_b) \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (2.17)$$

2.2 Alternativní tvar rovnice bilance energie

Formálně lze rovnici (2.11) vynásobit rychlostí \mathbf{v} a odečíst od rovnice (2.15) a získat alternativní tvar rovnice bilance vnitřní energie. Stejnou úvahu lze provést i v globálním tvaru rovnic, přičemž tento postup vede názorněji k formulaci okrajových podmínek. Jestliže funkce ϱ , \mathbf{v} vyhovují rovnosti (2.6) a lze-li pro libovolnou funkci $\psi \in C_c([0, T] \times \overline{\Omega})$ použít funkci $|\mathbf{v}|^2 \psi$ jako testovací funkci v rovnici (2.6) a funkci $\mathbf{v}\psi$ použít jako testovací funkci v rovnici (2.10), pak rovnici bilance energie (2.14) můžeme upravit do tvaru

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_c} [\varrho e \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\varrho e \mathbf{v} + \mathbf{q}) \cdot \nabla \psi] d\Omega dt - \int_0^T \int_{\Omega_c} [\mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} - r] \psi d\Omega dt = \\ & - \int_{\Omega_c} \varrho_0(x) e_0(x) \psi(0, x) d\Omega + \int_0^T \int_{\partial\Omega_c} (\varrho_b e_b + \mathbf{q}_b) \cdot \mathbf{n} \psi dS dt \end{aligned} \quad (2.18)$$

a lokálního tvaru

$$\frac{\partial(\varrho e)}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho e \mathbf{v} + \mathbf{q}) = \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} - r \quad (t, x) \in (0, T) \times \Omega, \quad (2.19)$$

$$\varrho(0, x) e(0, x) = \varrho_0(x) e_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (2.20)$$

$$(\varrho e \mathbf{v} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = (\varrho_b e_b \mathbf{v}_b + \mathbf{q}_b) \cdot \mathbf{n} \quad (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega. \quad (2.21)$$

2.3 Transformace do bezrozměrných souřadnic

Bilanční rovnice popisují kontinuum bez ohledu na velikost oblasti, ve které jej zkoumáme a bez ohledu na hodnoty veličin, které se v rovnicích vyskytují. Vhodným škálováním časově-prostorových souřadnic a funkcí, které se v rovnicích vyskytují, lze získat popis v bezrozměrném tvaru při zachování významu (=velikosti) jednotlivých členů² charakteristických vlastností rovnic.

Jestliže souřadnice prostoru a času popisují reálnou geometrickou oblast a veličiny popisují reálné fyzikální vlastnosti (mají fyzikální jednotky) a označíme-li všechny funkce, proměnné a diferenciální operátory vzhledem k těmto souřadnicím vlnkou, pak bilanční zákony (2.7), (2.11) a (2.15) píšeme ve tvaru

$$\frac{\partial \tilde{\varrho}}{\partial \tilde{t}} + \widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{v}})}{\partial \tilde{t}} + \widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) = \widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{\mathbf{T}}) - \tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{f}}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\varrho}(\tilde{e} + \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2))}{\partial \tilde{t}} + \widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{\varrho}(\tilde{e} + \frac{1}{2} |\tilde{\mathbf{v}}|^2) \tilde{\mathbf{v}}) = -\widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{\mathbf{q}}) + \widetilde{\operatorname{div}}(\tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{\varrho} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}. \quad (2.24)$$

Pro převod do bezrozměrných souřadnic budeme uvažovat tenzor napětí ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{T}} := -\tilde{p} \mathbf{I} + 2\tilde{\mu}(\tilde{e}, |\tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{v}})|^2) \tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{v}}) + \lambda \widetilde{\operatorname{div}} \tilde{\mathbf{v}} \mathbf{I}. \quad (2.25)$$

Pro charakteristickou délku L_c , rychlost v_c a hustotu ϱ_c zavedme konstanty

$$T_c := \frac{L_c}{v v_c}, \quad p_c := \varrho_c v_c^2, \quad f_c := \frac{v_c^2}{L_c}, \quad e_c := v_c^2, \quad q_c := \varrho_c v_c^3. \quad (2.26)$$

²Tento postup lze použít v úlohách, kdy charakteristické (typické) hodnoty pro rychlost, hustotu a energii jsou známy.

Pak při transformaci souřadnic

$$\tilde{t}, \tilde{x} \Rightarrow t, x, \quad \text{kde} \quad t = \tilde{t}/T_c, \quad x = \tilde{x}/L_c,$$

škálování funkcí

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= f_c f(t, x), & \tilde{\mathbf{v}}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= v_c \mathbf{v}(t, x), & \tilde{\varrho}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= \varrho_c \varrho(t, x), \\ \tilde{p}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= p_c p(t, x), & \tilde{e}(\tilde{t}, \tilde{x}) &= e_c e(t, x), \end{aligned}$$

škálování a transformaci funkcí a značení

$$\frac{1}{\varrho_c v_c L_c} \tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{s}) = \frac{1}{\varrho_c v_c L_c} \tilde{\mu}(v_c^2 e, \frac{v_c^2}{L_c^2} s) = \nu(e, s), \quad \bar{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{v}}) = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) \right\} = \frac{v_c}{L_c} \mathbf{D}(\mathbf{v})$$

dostaneme rovnice v bezrozměrném vyjádření

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial(\varrho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{I} + 2\nu(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I}) + \varrho \mathbf{f}, \\ \frac{\partial(\varrho(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2))}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v}) + \operatorname{div} \mathbf{q} &= \operatorname{div} \left(\left((-p \mathbf{I} + 2\nu(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \lambda \operatorname{div}(\mathbf{v}) \mathbf{I}) \mathbf{v} \right) \right) + \varrho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned}$$

což pro homogenní nestlačitelnou tekutinu (odpovídá konstantní hustotě $\varrho = 1$) vede na rovnice ve tvaru:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \operatorname{div}(-p \mathbf{I} + 2\nu(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) \mathbf{D}(\mathbf{v})) + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial(e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2)}{\partial t} + \operatorname{div}((e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v}) + \operatorname{div} \mathbf{q} &= \operatorname{div} \left(\left((-p \mathbf{I} + 2\nu(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) \mathbf{D}(\mathbf{v})) \mathbf{v} \right) \right) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Pokud je viskozita tekutiny konstantní, pak konstanta

$$Re := \frac{\varrho_c v_c L_c}{\tilde{\mu}} \quad (2.28)$$

se nazývá Reynoldsovo číslo (vyjadřuje poměr vnitřních sil a viskózních sil) a používá se k identifikaci podobných proudění (různé fyzikální problémy jsou srovnatelné, pokud po převedení do bezrozměrných souřadnic vedou na rovnice (2.27), se stejným Reynoldsovým číslem) či k charakterizaci proudění (laminární pro nízká Reynoldsova čísla, turbulentní pro vyšší). Pro tekutiny, které nejsou Newtonovské (nemají konstantní viskozitu $\tilde{\mu}$), lze Reynoldsovo číslo používat bodově nebo existují různé postupy jeho zobecnění (i pro tekutiny mocninného typu).

2.4 Polární souřadnice

Pro potřeby kapitol (4) a (5) uveďme bilanční rovnice (2.27) v polárních souřadnicích a též uveďme vztahy pro diferenciální operátory v polárních souřadnicích. Ty využijeme při formulaci slabého řešení v kapitole (4).

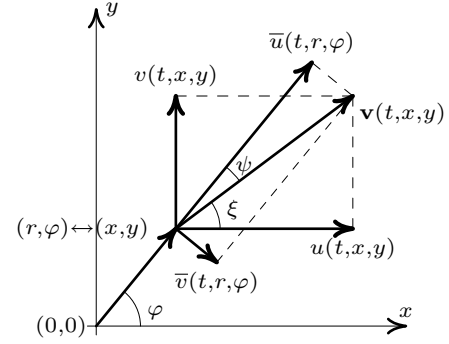
Definice zobrazení

Bilanční rovnice (2.27) v bezrozměrném tvaru převedeme do polárních souřadnic, kdy jak bod $(x, y) \in \Omega$, tak vektor $\mathbf{v} = (u, v)$ vyjádříme v polárních souřadnicích (r, φ) . Pro lepší přehlednost budou funkce v proměnných (r, φ) v celém dalším textu označeny pruhem a diferenciální operátory vztažené k polárním souřadnicím označeny indexem r, φ . Skalární funkce při přechodu do polárních souřadnic svoji hodnotu nemění. Vektorové funkce se transformují podle vztahů uvedených níže.

$$\begin{aligned} (r(x, y), \varphi(x, y)) &\leftrightarrow (x, y), \\ (\bar{u}(t, r, \varphi), \bar{v}(t, r, \varphi)) &\leftrightarrow (u(t, x, y), v(t, x, y)), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2} \in (r_0, r_1), \\ \varphi(x, y) &= \text{sign}(y) \arccos \frac{x}{r(x, y)} \in (0, 2\pi), \\ \xi &= \text{sign}(v) \arccos \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \psi &= \xi - \varphi, \end{aligned}$$



Obrázek 1

$$u = \bar{u} \cos \varphi - \bar{v} \sin \varphi, \quad v = \bar{u} \sin \varphi + \bar{v} \cos \varphi.$$

Diferenciální operátory a operace s nimi

Definujme pro skalární funkci \bar{p} , vektorovou funkci $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}, \bar{v})$ a tenzorovou funkci $\bar{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} \\ \bar{T}_{21} & \bar{T}_{22} \end{pmatrix}$ diferenciální operátory³

$$\begin{aligned} \nabla_{r, \varphi} \bar{p} &:= (\partial_r \bar{p}, \frac{1}{r} \partial_\varphi \bar{p}), & \nabla_{r, \varphi} \bar{\mathbf{v}} &:= \begin{pmatrix} \partial_r \bar{u} & \frac{1}{r} \partial_\varphi \bar{u} - \frac{1}{r} \bar{v} \\ \partial_r \bar{v} & \frac{1}{r} \partial_\varphi \bar{v} + \frac{1}{r} \bar{u} \end{pmatrix}, \\ \text{div}_{r, \varphi} \mathbf{v} &:= \partial_r \bar{u} + \frac{1}{r} \partial_\varphi \bar{v} + \frac{1}{r} \bar{u}, & \text{div}_{r, \varphi} \bar{\mathbf{T}} &:= \begin{pmatrix} \partial_r \bar{T}_{11} + \frac{1}{r} \partial_\varphi \bar{T}_{12} + \frac{1}{r} (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{22}) \\ \partial_r \bar{T}_{21} + \frac{1}{r} \partial_\varphi \bar{T}_{22} + \frac{1}{r} (\bar{T}_{12} + \bar{T}_{21}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Při takto definovaných operátorech platí obvyklé vztahy

$$\begin{aligned} \text{div}_{r, \varphi} (\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{v}}) &= \text{div}_{r, \varphi} \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{S}} : \nabla_{r, \varphi} \bar{\mathbf{v}}, \\ \text{div}_{r, \varphi} (\bar{p} \bar{\varphi}) &= \nabla_{r, \varphi} \bar{p} \cdot \bar{\varphi} + \bar{p} \text{div}_{r, \varphi} \bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Dále zavedeme označení (veličina $|\mathbf{D}|^2$ je invariantní vůči transformaci souřadnic, a proto $|\mathbf{D}|^2 = \bar{\mathbf{D}}$)

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}} &:= \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} (\nabla_{r, \varphi} \bar{\mathbf{v}} + (\nabla_{r, \varphi} \bar{\mathbf{v}})^T), \\ (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r, \varphi}) \bar{\mathbf{v}} &:= \begin{pmatrix} \bar{u} \partial_r \bar{u} + \frac{1}{r} \bar{v} \partial_\varphi \bar{v} - \frac{1}{r} \bar{v}^2 \\ \bar{u} \partial_r \bar{v} + \frac{1}{r} \bar{v} \partial_\varphi \bar{v} + \frac{1}{r} \bar{u} \bar{v} \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{S}} &:= \nu(\bar{\epsilon}, |\bar{\mathbf{D}}|^2) \bar{\mathbf{D}}. \end{aligned}$$

³Rozsáhlý přehled diferenciálních operátorů týkajících se mechaniky kontinua ve válcových a sférických souřadnicích lze nalézt např. v [4].

Při tomto označení můžeme bilanční rovnice (2.27) a alternativní tvar rovnice bilance energie přepsat do tvaru

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{v}} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r,\varphi}) \bar{\mathbf{v}} &= -\nabla_{r,\varphi} \bar{p} + \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{f}}, \\ \frac{\partial (\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2)}{\partial t} + \operatorname{div}_{r,\varphi} ((\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2) \bar{\mathbf{v}}) &= -\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{q}}, + \operatorname{div}_{r,\varphi} (\bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \\ \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \operatorname{div}_{r,\varphi} (\bar{e} \bar{\mathbf{v}}) &= -\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

2.5 Materiálové konstitutivní vztahy

Konstitutivní vztahy jsou dány vlastnostmi tekutiny. Celkovou energii E uvažujeme jako součet vnitřní energie e a kinetické energie tekutiny $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$

$$E := e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2, \quad (2.30)$$

kde e je hustota vnitřní energie definovaná na $(0, T) \times \Omega$.

Tepelný tok \mathbf{q} uvažujeme ve tvaru obecného Fourierova zákona

$$\mathbf{q} := \hat{\mathbf{q}}(\theta, \mathbf{D}(\mathbf{v}), \nabla \theta) = -\hat{\kappa}(\theta, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \nabla \theta, \quad (2.31)$$

kde $\kappa : R_+ \times R_+ \rightarrow R$ je tepelná vodivost tekutiny a $\theta : (0, T) \times \Omega \rightarrow R_+$ je teplota.

Aby nebylo nutné se zabývat tepelnou kapacitou tekutiny, budeme předpokládat, že vnitřní energie e je hladkou a prostou funkcí teploty θ , tj.

$$e = \tilde{e}(\theta) \quad \text{a} \quad \theta = \tilde{\theta}(e), \quad (2.32)$$

kde $\tilde{\theta} = (\tilde{e})^{-1}$.

Za tohoto předpokladu můžeme považovat vnitřní energii za primitivní veličinu (a teplotu za veličinu z ní odvozenou), neboť

$$\kappa^*(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) := \hat{\kappa}(\tilde{\theta}(e), |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \tilde{\theta}'(e), \quad (2.33)$$

a tedy vztah (2.31) můžeme uvažovat ve tvaru

$$\mathbf{q} := \mathbf{q}^*(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}), \nabla e) = -\kappa^*(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|) \nabla e. \quad (2.34)$$

Pro nestlačitelnou tekutinu uvažujeme Cauchyův tenzor napětí \mathbf{T} ve tvaru

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}, \quad (2.35)$$

kde

$$\mathbf{S} := \mathbf{S}^*(e, \mathbf{D}(\mathbf{v})). \quad (2.36)$$

V článku [8], o který se v této práci opíráme, se na funkce \mathbf{S}^* a κ^* v (2.34) a (2.36) kladnou podmínky, které zahrnují i případ

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^*(e, \mathbf{D}) &= \nu_0(e)(1 + \nu_1(e) + |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2} \mathbf{D}(\mathbf{v}), \\ \mathbf{q}^*(e, \mathbf{D}, \nabla e) &= -\kappa_0(e, \mathbf{D}(\mathbf{v})) e^\beta \nabla e, \end{aligned} \quad (2.37)$$

kde ν_0 , ν_1 a κ_0 jsou spojité funkce zdola ohraničené kladnou konstantou.

V numerické části této práce budeme uvažovat jednodušší formy těchto vztahů. Jednak pro tekutiny s viskozitou nezávislou na vnitřní energii ve tvaru

$$\nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) = 2\nu_0(1 + \alpha_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2} \quad (2.38)$$

pro $s > 1$ a konstanty $\nu_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ a jednak s viskozitou závislou na vnitřní energii ve tvaru

$$\nu(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) = 2\nu_0 \frac{A}{A + e} (1 + \alpha_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2}, \quad (2.39)$$

kde $A > 0$ je kladná konstanta. Tento model je aproximací Arrheniova modelu, který předpokládá závislost viskozity na teplotě ve tvaru

$$\nu(\theta) = \nu_0 \exp\left(\frac{\tilde{E}}{R\theta}\right),$$

kde θ je absolutní teplota, $\nu_0 > 0$ je kladná konstanta, \tilde{E} je aktivační energie a R je univerzální plynová konstanta. Přehled různých modelů závislostí viskozity na teplotě lze nalézt například v [29].

Vztah (2.32) mezi vnitřní energií e a teplotou θ zvolíme nejjednodušší možný, tedy lineární

$$e = c_v \theta, \quad (2.40)$$

kde konstanta $c_v > 0$ je měrná tepelná kapacita a tok tepla (2.31) se řídí lineárním Fourierovým zákonem

$$\mathbf{q} = -\kappa_0 \nabla \theta = -\frac{\kappa_0}{c_v} \nabla e \quad (2.41)$$

s konstantním koeficientem $\kappa_0 > 0$.

2.6 Okrajové podmínky

V celé práci uvažujeme pouze dokonale izolovaný systém, který si nevyměňuje s okolím ani hmotu, ani energii. Podmínku neproniknutelnosti hranice zachycuje vztah

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega.$$

Závislost tečné složky rozdílu rychlosti tekutiny \mathbf{v} a hranice \mathbf{v}_b na tečné složce síly působené napětím na hranici (interakce hraniční vrstvy tekutiny s povrchem hranice) je dána konstitutivním vztahem

$$\gamma(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b)_\tau + (1 - \gamma)(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.42)$$

kde $\gamma \in [0, 1]$, \mathbf{z}_τ označuje tečnou složku vektoru \mathbf{z} na hranici s jednotkovou vnější normálou \mathbf{n}

$$\mathbf{z}_\tau := \mathbf{z} - (\mathbf{z} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}. \quad (2.43)$$

Pro $\gamma = 0$ podmínka (2.42) znamená dokonalý skluz, pro $\gamma \in (0, 1)$ částečný skluz a pro $\gamma = 1$ Dirichletovu okrajovou podmínku ulpívání tekutiny na hranici. Podmínka (2.42) s $\gamma \in (0, 1)$ se nazývá Navierova podmínka skluzu.

Na hranici dále uvažujeme vztah

$$(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (2.44)$$

který vyjadřuje, že pro energeticky izolovaný systém přispívá práce konaná tenzorem napětí na hranici plně k růstu vnitřní energie tekutiny.

3. Formulace počáteční a okrajové úlohy

3.1 Formulace úlohy

Pro dvoudimenzionální oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a časový interval $(0, T)$, kde $T > 0$, uvažujeme na oblasti $(0, T) \times \Omega$ NSF systém ve tvaru (viz kapitola 2)

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{S} = -\nabla p + \mathbf{f}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}(E + p)) - \operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (3.3)$$

kde $\mathbf{S} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ je deviatorická část Cauchyova tenzoru napětí \mathbf{T} , která je určena konstitutivními vztahy, $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je tlak a E je hustota celkové energie ($E = e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$, kde e je vnitřní energie a $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$ je kinetická energie tekutiny).

Tyto rovnice jsou doplněny o počáteční podmínky

$$\mathbf{v}(0, x) = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{a} \quad e(0, x) = e_0(x) \quad \text{pro } x \in \Omega, \quad (3.4)$$

a okrajové podmínky pro rychlost vyjádřené podmínkou neproniknutelnosti hranice a podmínkou skluzu pro $\gamma \in [0, 1)$ ve tvaru (\mathbf{z}_τ je projekce vektoru \mathbf{z} do roviny tečné k hranici v uvažovaném bodě, viz (2.43))

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{a} \quad \gamma \mathbf{v}_\tau + (1 - \gamma)(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma, \quad (3.5)$$

kde jsme označili $\Gamma = (0, T) \times \partial\Omega$. Tato podmínka se pro $\gamma \in (0, 1)$ nazývá Navierova podmínka skluzu (nebo podmínka částečného skluzu) a vyjadřuje, že rychlost na hranici je úměrná tečné složce třecí síly na hranici Γ . Je-li $\gamma = 0$, pak hranice je dokonale kluzká a nevystavuje tekutině žádný odpor.

Dále předpokládáme, že systém je energeticky izolovaný, což je zachyceno okrajovou podmínkou pro energii

$$(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.6)$$

Ve vztazích (3.5)–(3.6) vektor \mathbf{n} označuje vnější jednotkovou normálu k hranici $\partial\Omega$.

Protože globální integrovatelnost tlaku je přirozeným požadavkem pro slabou formulaci rovnice (3.3) a existence globálně integrovatelné funkce tlaku pro případ $\gamma = 1$ v okrajové podmínce (3.5) je otevřený problém, je případ $\gamma = 1$ z dalších úvah vynechán. Pro zjednodušení dalšího zápisu proto můžeme položit

$$\omega := \frac{\gamma}{1 - \gamma}. \quad (3.7)$$

Okrajová podmínka (3.6) též zaručuje, že celková energie systému se za předpokladu nulových objemových sil zachovává.

Z podmínek (3.5)–(3.6) lze odvodit okrajovou podmínku pro $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ na Γ . Vzhledem k symetrii tenzoru \mathbf{S} a předpokladu $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ na Γ totiž můžeme psát $(\mathbf{S}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau \cdot \mathbf{v}$ na Γ , a tudíž s přihlédnutím k (3.5)–(3.6) píšeme

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\omega |\mathbf{v}|^2 \quad \text{na } \Gamma. \quad (3.8)$$

3.2 Předpoklady na \mathbf{S}^* a κ^*

Abychom mohli uvést hlavní výsledek článku [8], uved' me nejdříve značení a prostory funkcí používané v existenční větě níž. Předpokládejme, že funkce \mathbf{S}^* a κ^* v (2.36) a (2.33) jsou spojitými funkcemi: $\mathbf{S}^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ a $\kappa^* : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Dále předpokládáme, že existují $s \in (1, \infty)$ a $\beta \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $e \in \mathbb{R}_+$ a všechny $\mathbf{B}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$, $\mathbf{B} \neq \mathbf{D}$ je

$$C_1(|\mathbf{D}|^s - 1) \leq \mathbf{S}^*(e, \mathbf{D}) : \mathbf{D}, \quad |\mathbf{S}^*(e, \mathbf{D})| \leq C_2(|\mathbf{D}|^{s-1} + 1), \quad (3.9)$$

$$[\mathbf{S}^*(e, \mathbf{D}) - \mathbf{S}^*(e, \mathbf{B})] : (\mathbf{D} - \mathbf{B}) > 0, \quad (3.10)$$

$$C_3 e^\beta \leq \kappa^*(e, |\mathbf{D}|) \leq C_4 e^\beta, \quad (3.11)$$

tj. \mathbf{S}^* je s -koercitivní, má $(s-1)$ -růst a je striktně monotónní vzhledem k \mathbf{D} .

Dále ve formulaci existenční věty budeme používat pro $s, q \in [1, \infty]$ toto označení prostorů funkcí:

$$W_{\mathbf{n}}^{1,q} := \{\mathbf{v} \in W^{1,q}(\Omega)^2; \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad W_{\mathbf{n}}^{-1,q'} := (W_{\mathbf{n}}^{1,q})^*, \quad (3.12)$$

$$W_{\mathbf{n},\text{div}}^{1,q} := \{\mathbf{v} \in W_{\mathbf{n}}^{1,q}; \text{div } \mathbf{v} = 0\}, \quad W_{\mathbf{n},\text{div}}^{-1,q'} := (W_{\mathbf{n},\text{div}}^{1,q})^*, \quad (3.13)$$

$$L_{\mathbf{n},\text{div}}^q := \overline{\{\mathbf{v} \in W_{\mathbf{n},\text{div}}^{1,q}\}}^{\|\cdot\|_q}, \quad (3.14)$$

a pro funkce závislé na t a x

$$X^{s,q} := \{\mathbf{u} \in L^s(0, T; W_{\mathbf{n}}^{1,s}) \cap L^q(0, T; L^q(\Omega)^2); \mathbf{u} \in L^2(0, T; L^2(\partial\Omega)^2)\}, \quad (3.15)$$

$$X_{\text{div}}^{s,q} := \{\mathbf{u} \in X^{s,q}; \text{div } \mathbf{u} = 0\}, \quad (3.16)$$

kde ztotožňujeme funkci \mathbf{u} se stopou funkce \mathbf{u} ve smyslu zobecněné restriktce na hranici.

Lebesgueův prostor funkcí s nulovým průměrem budeme značit L_0^q , tj.

$$L_0^q := \left\{ p \in L^q(\Omega); \int_{\Omega} p \, dx = 0 \right\}. \quad (3.17)$$

Pro skalární, vektorové nebo tenzorové funkce f, g takové, že $f \cdot g \in L^1(O)$ definujeme $(f, g)_O := \int_O f \cdot g$. Pro $g \in X$ a $f \in X^*$ značíme $\langle f, g \rangle := \langle f, g \rangle_{X^*, X}$, kdykoliv je z kontextu zřejmé, o jakou dualitu jde.

3.3 Věta o existenci

Pro úlohu (3.1)–(3.3) s počátečními podmínkami (3.4) a okrajovými podmínkami (3.5), (3.6) a konstitutivními vztahy (2.37), (2.36) je dokázána existence globálního řešení v článku [8]. Ocitujme zde její znění a uved' me komentář k jejímu důkazu. Tato věta dává teoretický základ numerickým experimentům, neboť jednak vymezuje objekt, který aproximujeme, a zároveň specifikuje podmínky, za kterých tento objekt existuje.

Věta 3.1. *Necht' $\Omega \in C^{1,1}$ je otevřená souvislá množina v \mathbb{R}^2 , $s > \frac{3}{2}$ a necht' $\beta > \max(-1, \frac{s}{2(s-1)} - 2)$ je libovolné. Předpokládejme, že počáteční podmínky splňují vztahy*

$$\mathbf{v}_0 \in L_{\mathbf{n},\text{div}}^2 \quad a \quad e_0 \in L^1(\Omega); \quad e_0(x) \geq e_{\min} > 0 \quad \forall \Omega, \quad (3.18)$$

\mathbf{S}^* a \mathbf{q}^* splňují (3.9)–(3.11) s hodnotami s a β a necht' pro $m_E > 1$ platí

$$m_E := \begin{cases} \frac{2(\beta+2)}{3} & \text{pro } \beta \geq s-2, \beta \in (-\frac{1}{2}, 1), \\ \frac{2s(\beta+1)}{2s+\beta-1} & \text{pro } \beta \geq s-2, \beta \geq 1, \\ \frac{2(\beta+2)(s-1)}{2s-1+\beta} & \text{pro } \beta < s-2, s > 2, \\ \frac{2s(\beta+2)}{2\beta+s+4} & \text{pro } \beta < s-2, \frac{3}{2} < s \leq 2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Pak existuje šestice funkcí $(\mathbf{v}, p, e, \mathbf{S}, \mathbf{q}, E)$ taková, že platí

$$\mathbf{v} \in C_{weak}(0, T; L_{\mathbf{n}, \text{div}}^2) \cap X_{\text{div}}^{s, 2s}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{v}_{,t} \in \left(X_{\text{div}}^{s, \frac{2s}{s-3}} \right)^* \cap L^{\min(s, s')}(0, T; W_{\mathbf{n}}^{-1, \min(s, s')}), \quad s' = s/(s-1), \quad (3.21)$$

$$\mathbf{S} \in L^{s'}(0, T; L^{s'}(\Omega)^{2 \times 2}), \quad (3.22)$$

$$p \in L^{\min(s, s')}(0, T; L^{\min(s, s')}(\Omega)), \quad (3.23)$$

$$e \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad e \geq e_{min}, \quad (3.24)$$

$$e^{\frac{\beta+\lambda+1}{2}} \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \quad \text{pro všechna } \lambda < 0, \quad (3.25)$$

$$E \in L^q(0, T; L^q(\Omega)) \cap W^{1, \tilde{q}}(0, T; (W^{1, s})^*) \cap C_{weak}([0, T]; L^1(\Omega)) \quad (3.26)$$

pro všechna $q < \min(2 + \beta, s)$ a všechna $\tilde{q} < \min(\frac{2s}{3}, \frac{2s}{2s-1}, m_E)$,

$$\mathbf{q} \in L^m(0, T; L^m(\Omega)^2) \quad \text{a všechna } 1 \leq m < \frac{4+2\beta}{3+2\beta}, \quad (3.27)$$

taková, že splňují (2.30), (2.34) a (2.36) skoro všude v $Q := (0, T) \times \Omega$ a splňují rovnice (3.2)–(3.3) a rovnici (1.14) v následujícím smyslu

$$\langle \mathbf{v}_{,t}, \varphi \rangle - (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \nabla \varphi)_Q + \alpha(\mathbf{v}, \varphi)_\Gamma + (\mathbf{S}, \mathbf{D}(\varphi))_Q = (p, \text{div } \varphi)_Q \quad (3.28)$$

$$\forall \varphi \in L^{\max(s, s')}(0, T; W_{\mathbf{n}}^{1, \max(s, s')}),$$

$$\langle E_{,t}, \varphi \rangle - ((E+p)\mathbf{v}, \nabla \varphi)_Q + (\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{q}, \nabla \varphi)_Q = 0 \quad (3.29)$$

$$\forall \varphi \in L^\infty(0, T; W^{1, \infty}(\Omega)),$$

$$-(e, \psi_{,t})_Q - (\mathbf{v}e, \nabla \psi)_Q - (\mathbf{q}, \nabla \psi)_Q \geq (\mathbf{S}, \mathbf{D}(\mathbf{v})\psi)_Q + \omega(|\mathbf{v}|^2, \psi)_\Gamma \quad (3.30)$$

pro všechna nezáporná $\psi \in \mathcal{D}(0, T; W^{1, \infty}(\Omega))$.

Počáteční podmínka (3.4) platí v následujícím smyslu

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0\|_2^2 + \|e(t) - e_0\|_1 = 0. \quad (3.31)$$

Důkaz: Pro podrobný důkaz věty odkazujeme na práci [8].

Poznámka: • Je-li $\beta = 0$ a $s \in (1, 2)$, pak z první varianty v (3.19) vyplývá, že

$$m_E = \frac{4}{3}$$

a je-li $\beta = 0$ a $s \geq 2$, pak

$$m_E = \frac{4(s-1)}{2s-1}.$$

- Je-li $\beta = 0$, pak z (3.25) plyne, že \sqrt{e} „skoro“ patří do $L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$. Přesněji

$$e^{\frac{1}{2}+\lambda} \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \quad \text{pro všechna } \lambda < 0. \quad (3.32)$$

3.4 Komentář k metodě důkazu Věty 3.1

Dříve než přistoupíme ke komentáři důkazu věty, ocitujme zde ještě z práce [8] interpolační nerovnosti, které budeme v této sekci využívat.

Lemma 3.4.1. *Necht' $\Omega \in C^{0,1}$ je otevřená ohraničená oblast v R^2 . Předpokládejme, že jsou dána $1 < r < \infty$ a $\gamma > 0$. Pak pro $s \in [2, \frac{2r}{2-r}]$ (pro $r < 2$) nebo $s \in [2, \infty)$ (pro $r \geq 2$) a pro jakékoliv q takové, že*

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{s(r-1)} = \frac{1}{2(r-1)}$$

platí následující nerovnosti

$$\|f\|_{L^q(0,T;L^s(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^\beta \|f\|_{L^r(0,T;W^{1,r}(\Omega))}^{1-\beta},$$

kde

$$\beta := \frac{r}{s(r-1)} + \frac{r-2}{2(r-1)}.$$

Navíc pro jakékoliv $1 < s, q < \infty$ takové, že

$$\frac{2}{q} + \frac{1}{s\gamma} = \frac{1}{\gamma}$$

platí pro libovolnou nezápornou funkci $f \geq 0$ nerovnost

$$\|f\|_{L^q(0,T;L^s(\Omega))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{\frac{1}{s}} \|f^\gamma\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))}^{\frac{s-1}{s\gamma}}.$$

Důkaz. Důkaz je uveden v [8, Lemma 3.4] □

Přímým důsledkem tohoto lemmatu jsou následující nerovnosti.

Lemma 3.4.2. *Za předpokladů Lemmatu 3.4.1 platí následující odhady:*

$$\int_0^T \|\mathbf{v}\|_{2r}^{2r} dt \leq C \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^r \int_0^T \|\mathbf{v}\|_{1,r}^r dt, \quad (3.33)$$

$$\int_0^T \|f\|_{2\gamma+1}^{2\gamma+1} dt \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))}^{2\gamma+1} \int_0^T \|f^\gamma\|_{1,2}^2 dt. \quad (3.34)$$

Aplikace

- Z Věty 3.1 a (3.33) plyne, že

$$\mathbf{v} \in L^{2s}(0, T; L^{2s}(\Omega)^2). \quad (3.35)$$

- Z Věty 3.1 a (3.34) s $\beta = 0$ a tedy $\gamma = \frac{1}{2}(1 + \lambda)$ plyne, že

$$e \in L^{2+\lambda}(0, T; L^{2+\lambda}(\Omega)) \quad \text{pro každé } \lambda < 0. \quad (3.36)$$

3.4.1 Pohybové rovnice

Pro důkaz existence řešení pohybových rovnic (3.1)–(3.2), které nejsou svázány s rovnicí bilance energie (3.3), byly v uplynulých desetiletích vyvinuty různé metody, které umožňovaly dokázat existenci řešení pro mocninný model a pro globální data pro různé hodnoty parametru s mocninného modelu. Důkaz věty je konstruktivního typu. Řešení jsou konstruována jako limity Galerkinovských aproximací v konečnědimenzionálních prostorech, pro které je dokázána na základě apriorních odhadů konvergence s.v. jak funkčních hodnot rychlosti, tak zejména jeho gradientu. Nedávná práce [7] ukazuje, že lze požadavek na striktní monotonii oslabit a požadovat jen monotonii operátoru generovaného nelinearitou $\mathbf{S}(e, \mathbf{D}(\mathbf{v}))$.

Metoda monotónních operátorů

Tato metoda byla poprvé použita O.A. Ladyženskou v šedesátých letech (viz [20]) a umožňuje v Galerkinovských aproximacích slabé formulace provést limitní přechod v nelineárním členu $(\mathbf{S}, \mathbf{D}(\varphi))_Q$ využitím monotonie nelineárního operátoru za předpokladu, že rovnici (3.2) ve slabé formulaci lze testovat řešením. Tento předpoklad vyžaduje, aby

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)). \quad (3.37)$$

Toto je možné splnit, pokud (připomeňme, že uvažujeme rovinné proudění, tj. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)

$$s \geq 2. \quad (3.38)$$

Vskutku, s (3.35) dostáváme

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v}| \, d\Omega \, dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 |\nabla \mathbf{v}| \, d\Omega \, dt \\ &\leq \left(\int_0^T \|\nabla \mathbf{v}\|_s^s \, dt \right)^{1/s} \left(\int_0^T \|\mathbf{v}\|_{2s'}^{2s'} \, dt \right)^{1/2s'} \end{aligned}$$

a

$$2s' \leq 2s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{s-1} \leq s \quad \Leftrightarrow \quad s \geq 2.$$

Metoda L^∞ -seřezávání

Tato metoda využívá opět monotonii. V kritickém místě netestuje rovnici bilance energie ve slabé formulaci řešením \mathbf{v} , ale jeho ořezanou aproximací. Protože tato ořezaná funkce je v $L^\infty((0, T) \times \Omega)$, kritický požadavek metody

$$v_k \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} \in L^1(0, T; L^1(\Omega)^2)$$

neboli

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}| |\nabla \mathbf{v}| \, d\Omega \, dt < \infty, \quad (3.39)$$

je pro funkce $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^s(0, T; L^s(\Omega)^2)$ splněn, pokud (s přihlédnutím k (3.33))

$$\frac{1}{2s} + \frac{1}{s} = \frac{3}{2s} \geq 1. \quad (3.40)$$

Odtud plyne omezení na použitelnost této metody pro mocninné modely:

$$s \geq \frac{3}{2}. \quad (3.41)$$

Metoda $W^{1,\infty}$ -seřezávání

Pro tuto techniku důkazu, kdy gradient $\nabla \mathbf{v}$ v (3.37) je aproximován funkcí z $W^{1,\infty}(\Omega)$, je podstatná L^1 integrovatelnost funkce $|\mathbf{v}|^2$ přes $(0, T) \times \Omega$ a kompaktnost vnoření $W^{1,s}(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ pro splnění předpokladů Aubin-Lionsova lemmatu. Ve dvou dimenzích je tento předpoklad splněn pro všechna

$$s > 1. \quad (3.42)$$

V další sekci ukážeme, že pro potřeby analýzy NSF úloh se metoda L^∞ -seřezávání zdá být optimální.

3.5 Rovnice bilance energie

Nutnou podmínkou pro to, aby bylo možné definovat slabou formulaci v rovnici pro energii, je nutné, aby členy $\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 \mathbf{v}$, $p\mathbf{v}$, $\mathbf{S}\mathbf{v}$ a člen $e\mathbf{v}$ byly integrovatelné. Z apriorních odhadů pro rovnici hybnosti a z interpolačního lemmatu 3.4.1 víme, že $\mathbf{v} \in L^{2s}(0, T; L^{2s}(\Omega))$. Odtud dostáváme omezení

$$2s \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad s \geq \frac{3}{2}. \quad (3.43)$$

Podobně i z požadavků na L^1 integrovatelnost členů $p\mathbf{v}$, respektive $\mathbf{S}\mathbf{v}$ na $(0, T) \times \Omega$ dostáváme (pro subkritický případ $s < 2$ s přihlédnutím k (3.23), (3.22) a (3.20) a $\mathbf{v} \in L^{2s}(0, T; L^{2s}(\Omega)^2)$) omezení

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{2s} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad s \geq \frac{3}{2}, \quad (3.44)$$

respektive

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{2s} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s-1}{s} + \frac{1}{2s} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad s > 0. \quad (3.45)$$

V případě lineárního Fourierova zákona (2.41), který budeme uvažovat v příkladech kapitoly 5, je $\beta = 0$. Z (3.24), (3.25) a lemmatu 3.4.2, kde pro libovolné $\lambda < 0$ je

$$\gamma = (\lambda + 1)/2, \quad \text{a tudíž} \quad 2\gamma + 1 = 2 + \lambda, \quad (3.46)$$

plyne $e \in L^{2+\lambda}(0, T; L^{2+\lambda}(\Omega))$ pro libovolné $\lambda < 0$. Odtud a z $\mathbf{v} \in L^{2s}(0, T; L^{2s}(\Omega)^2)$ plyne L^1 integrovatelnost členu $e\mathbf{v}$, tj.

$$|e\mathbf{v}| \in L^1(0, T; L^1(\Omega))$$

pro

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2s} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad s > 1. \quad (3.47)$$

Pokud neoslabíme pojem řešení pro energetickou rovnici, resp. budeme pracovat s řešením, kde bude ve slabé formulaci člen $\int (\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 + p + e)\mathbf{v}$, pak požadujeme $s > \frac{3}{2}$ a ze sekce 3.4.1 plyne, že v takovém případě je metoda L^∞ -seřezávání postačující a není třeba využít technicky náročnější metodu $W^{1,\infty}$ -seřezávání.

3.6 Speciální řešení

Pokud budeme uvažovat řešení, pro která platí $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; W^{1,s}(\Omega)^2)$, a tedy z věty o vnoření $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; L^{2s/(2-s)}(\Omega)^2)$, pak je pro existenci slabé formulace bilance energie nutné, aby

$$|\mathbf{v}|^3 \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)). \quad (3.48)$$

To platí, je-li

$$\frac{2s}{2-s} \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2s \geq 6 - 3s \quad \Leftrightarrow \quad s \geq \frac{6}{5}. \quad (3.49)$$

Pro ekvivalenci obou formulací je nutné, aby i člen $(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) : \nabla \mathbf{v}$ byl L^1 integrovatelný (toto potřebujeme pro odvození alternativní formulace bilance energie, jak je uvedeno v kapitole 1). Vztah

$$|\mathbf{v}|^2 |\nabla \mathbf{v}| \in L^1(0, T; L^1(\Omega)) \quad (3.50)$$

platí pro

$$\frac{2-s}{s} + \frac{1}{s} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad s \geq \frac{3}{2}. \quad (3.51)$$

Odtud plyne, že ve třídě řešení $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; W^{1,s}(\Omega)^2)$ lze slabou formulaci bilance energie (1.23) definovat pro $s \geq \frac{6}{5}$ a obě formulace bilance energie jsou ekvivalentní pro $s \geq \frac{3}{2}$. Pod touto hodnotou nelze testovat rovnici bilance hybnosti (3.2) rychlostí a formulace (1.23) a (1.24) nejsou ekvivalentní. Obě hranice budou předmětem ověřování numerickými experimenty.

3.7 Předpoklady věty a numerický model

Při návrhu numerického modelu z matematického modelu popsaného v této kapitole chceme co nejvíce minimalizovat diskretizační chyby. Z tohoto pohledu se jeví jako omezující předpoklad na oblast $\Omega \in C^{1,1}$. Pro svoji jednoduchou geometrii a přitom dostatečnou hladkost se jako vhodná oblast pro numerickou implementaci jeví mezikruží. Na druhou stranu je ale pro křivočaré hranice obtížné implementovat bez diskretizačních chyb podmínku neproniknutelnosti hranice a Navierovu podmínku skluzu (3.5). Proto budeme uvažovat též transformaci mezikruží do polárních souřadnic, kde tyto i další problémy nenastávají.

4. Rámcem numerických experimentů

Z teorie zabývající se řešitelností NSF systému je známé, že v superkritických případech, kdy nelze použít řešení v jako testovací funkci ve slabé formulaci bilance energie (1.12), není alternativní rovnice (1.13) s rovnicí (1.12) ekvivalentní. V sekci 3.6 jsme ukázali, že slabá formulace rovnice (1.12) má pro mocninný model zformulovaný v sekci 3.1 smysl ve třídě řešení $v \in L^\infty(0, T; W^{1,s}(\Omega))$ pro

$$s \geq \frac{6}{5} \quad (4.1)$$

a že slabá formulace rovnic (1.12) a (1.12) je ekvivalentní pro

$$s \geq \frac{3}{2}. \quad (4.2)$$

Nabízí se přirozená otázka, zda a jak se projeví neekvivalence obou formulací bilance energie při numerickém řešení standardními metodami a volně dostupnými výpočetními nástroji.

Obě formulace budeme srovnávat na oblasti ve tvaru mezikruží pro konstitutivní vztahy (2.38) a (2.39) a okrajové podmínky ulpívání a úplného skluzu. Při sestavování úloh postupujeme tak, abychom do numerického modelu vytvářeného na základě matematického modelu daného předpoklady Věty 3.1 nezanášeli diskretizační chyby tam, kde to není nezbytně nutné a případně ukázali, kde zanedbání některých předpokladů působí numerické potíže. Proto budeme řešit některé úlohy v kartézských souřadnicích a také také po transformaci do polárních souřadnic. Řada postupů a úvah je společných všem úlohám, a to z velké části bez ohledu na konkrétní volbu materiálových konstitutivních vztahů v oblasti či na hranici a na průběh okrajových podmínek. Proto zde uvedeme popis a společné odvození těchto postupů. Parametry úloh budou specifikovány v jednotlivých úlohách následující kapitoly.

Pro kontrolu správnosti řešení a měření chyb vyjdeme tam, kde to bude možné, z analytických řešení, která uvedeme v druhé části této kapitoly.

Budeme řešit tyto úlohy mocninného proudění (podrobněji viz další kapitola):

- Úloha 1 (označíme v dalším U1) — proudění s okrajovou podmínkou skluzu na mezikruží v kartézských souřadnicích.
- Úloha 2 (označíme U2) — proudění s okrajovou podmínkou skluzu na mezikruží převedeném do polárních souřadnic.
- Úloha 3 (označíme U3) — proudění s okrajovou podmínkou úplného skluzu na mezikruží převedeném do polárních souřadnic.

Protože řešíme NSF systém v kartézském souřadném systému i v polárních souřadnicích, budeme pro snadné odlišení popisů v těch těchto případech označovat všechny funkce v polárních souřadnicích pruhem a diferenciální operátory indexem r,φ .

V první části této kapitoly uvedeme slabé formulace bilančních rovnic ve tvaru, v jakém jsou v úlohách implementovány, popis oblasti a obecný popis počátečních a okrajových podmínek a objemových sil. V druhé části zvolíme vhodná řešení rychlosti a tlaku a pro materiálové konstitutivní vztahy nezávislé na vnitřní energii dopočítáme objemové síly a okrajové podmínky. Ty pak použijeme jako vstupní data pro numerické řešení. Vzhledem ke škálování všech funkcí vztahy (2.26), budeme v dalším bez újmy na obecnosti pokládat

$$\varrho \equiv 1.$$

V poslední části kapitoly uvedeme postup numerického řešení úloh, časové a prostorové diskretizace.

V poslední době se objevují práce (viz [3]), které se zabývají numerickou analýzou a odhady chyb pro aproximace mocninných modelů konečnými prvky i v subkritickém případě ($s < 2$). Další prací z nedávné doby, která pojednává o aproximaci singulárních mocninných modelů metodou konečných prvků je [17]. Používají se v ní takové konečné prvky, které podporují teoretické výsledky zaměřené na rychlost konvergence. Protože v této práci využíváme pro numerická řešení úloh standardní konečné prvky (a výpočetní prostředky), postupujeme jinak. Poznamenejme, že teoretické výsledky zabývající se analýzou konvergence konečně-prvkových aproximací pro Navier-Stokes-Fourierův systém a jeho zobecnění nám nejsou známy.

4.1 Obecný popis

Oblast

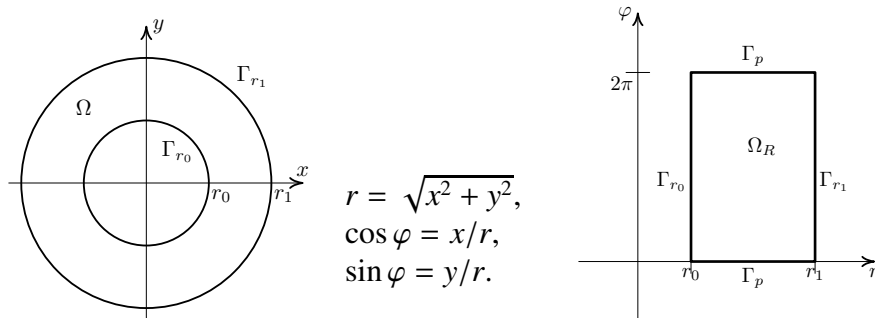
V návaznosti na poznámky k předpokladům Věty 3.1, uvedené v sekci 3.7, budeme úlohy řešit na jedné nebo obou z níže uvedených oblastí. V kartézském souřadném systému uvažujeme oblast

$$\Omega = \{(x, y); r_0 < \sqrt{x^2 + y^2} < r_1\} \quad (4.3)$$

ve tvaru mezikruží se středem v počátku a poloměry $0 < r_0 < r_1 < \infty$. V polárních souřadnicích pak zvolíme oblast

$$\Omega_R = \{(r, \varphi); r \in (r_0, r_1), \varphi \in (0, 2\pi)\} \quad (4.4)$$

ve tvaru obdélníku, který získáme transformací mezikruží do polárních souřadnic. Toto nastavení umožní porovnávat dosažené výsledky pro stejné úlohy formulované na obou oblastech a následně řešit úlohy s podmínkou úplného či částečného skluzu na hranici. Tuto podmínku lze při diskretizaci úlohy standardními postupy metody konečných prvků zadat přesně jen na oblasti ve tvaru obdélníku.



Označme hranice oblastí $\partial\Omega = \Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}$ a $\partial\Omega_R = \Gamma_{r_p} \cup \Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}$ (z kontextu bude zcela zřejmé, kdy Γ_{r_0} a Γ_{r_1} znamená část hranice $\partial\Omega$ a kdy $\partial\Omega_R$).

Bilanční rovnice

Budeme uvažovat NSF systém vyjádřený v kartézských souřadnicích a v polárních souřadnicích. V obou případech uvádíme rovnici pro energii v plném i alternativním tvaru.

V prvním případě uvažujeme rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (4.5)$$

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{f}, \quad (4.6)$$

$$\partial_t (e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) + \operatorname{div} ((e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} (\mathbf{T}\mathbf{v}) + \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (4.7)$$

$$\partial_t e + \operatorname{div} (e\mathbf{v}) = -\operatorname{div} \mathbf{q} + \mathbf{T} : \mathbf{D} \quad (4.8)$$

v oblasti $(0, T) \times \Omega$. Systém rovnic (4.5), (4.6), (4.7) budeme v dalším označovat $\boxed{\text{NSF}}$ a systém rovnic (4.5), (4.6), (4.8) budeme označovat $\boxed{\text{NSFa}}$. Pokud budeme řešit úlohy, kdy tenzor napětí nebude záviset na vnitřní energii, lze pohybové rovnice řešit najednou pro oba případy a nezávisle jak na (4.7) tak na (4.8).

V případě polárních souřadnic uvažujeme bilanční rovnice v jejich polárním vyjádření (definice použitých diferenciálních operátorů v polárních souřadnicích jsou uvedeny v sekci 2.4)

$$\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (4.9)$$

$$\partial_t \bar{\mathbf{v}} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r,\varphi}) \bar{\mathbf{v}} = -\nabla_{r,\varphi} \bar{p} + \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{f}}, \quad (4.10)$$

$$\partial_t (\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2) + \operatorname{div}_{r,\varphi} ((\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2) \bar{\mathbf{v}}) = -\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{q}} + \operatorname{div}_{r,\varphi} (\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (4.11)$$

$$\partial_t \bar{e} + \operatorname{div}_{r,\varphi} (\bar{e}\bar{\mathbf{v}}) = -\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{S}} : \bar{\mathbf{D}} \quad (4.12)$$

v oblasti $(0, T) \times \Omega_R$. Systém rovnic (4.5), (4.6), (4.7) budeme v dalším označovat $\boxed{\text{R-NSF}}$ a systém rovnic (4.5), (4.6), (4.8) budeme označovat $\boxed{\text{R-NSFa}}$.

Slabá formulace bilančních rovnic

Bilanční rovnice budou implementovány ve slabé formulaci získané obvyklým způsobem (srovnej s kapitolou 2) a to ve tvaru, v jakém jej použijeme při implementaci. Nyní ještě neklademe na testovací funkce žádná omezení, a proto se ve slabé formulaci vyskytují všechny hraniční integrály. Jejich vhodnou interpretací v jednotlivých úlohách v další kapitole budeme dosahovat splnění okrajových podmínek.

V případě kartézských souřadnic obecně pro libovolné dostatečně hladké funkce ψ , φ a ξ definované na oblasti $\bar{\Omega}$, které budeme specifikovat později s ohledem na okrajové podmínky, máme

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}) \psi \, d\Omega = 0, \quad (4.13)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \cdot \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \varphi \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \varphi \, d\Omega - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \varphi \, ds}_{I_{HT}} = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) \xi \, d\Omega - \int_{\Omega} (e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} \cdot \nabla \xi \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \xi \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \nabla \xi \, d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \xi \, d\Omega + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \xi \, ds}_{I_q} - \underbrace{\int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \xi \, ds}_{I_{ET}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (e + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \xi \, d\Omega}_{I_{Ev}} = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} e \xi \, d\Omega - \int_{\Omega} e \mathbf{v} \cdot \nabla \xi \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \nabla \xi \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \xi \, d\Omega \\ & + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \xi \, ds}_{I_q} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} e (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \xi \, ds}_{I_{Ev}} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Variační formulaci v polárních souřadnicích lze získat různým způsobem. Například je možné v slabé formulaci (4.13)–(4.16) v kartézských souřadnicích použít větu o substituci objemových a hraničních integrálů a získat tak vyjádření v polárních souřadnicích. V takovém případě jsou testovací funkce v obou souřadných systémech identické. Zde zvolíme způsob analogický odvození variační formulace v kartézských souřadnicích. Diferenciální rovnice (4.9)–(4.12) vynásobené dostatečně hladkými testovacími funkcemi integrujeme přes oblast Ω_R a na členy vyšších řádů použijeme integraci per partes. Pro zjednodušení zápisu definujeme pro vektorovou funkci $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ definovanou na Ω_R lineární formu

$$\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\mathbf{g}}) := \int_{\Omega_R} \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{g}} \, d\Omega_R = \int_{\partial\Omega_R} (\bar{g}_1 \bar{n}_1 + \frac{1}{r} \bar{g}_2 \bar{n}_2) \, ds + \int_{\Omega_R} \frac{1}{r} \bar{g}_1 \, d\Omega_R, \quad (4.17)$$

kde $\bar{\mathbf{n}} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2)$ je jednotkový vektor vnější normály na $\partial\Omega_R$.

Po vynásobení rovnic (4.9)–(4.12) dostatečně hladkými testovacími funkcemi $\bar{\psi}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\xi}$ definovanými na oblasti Ω_R využijeme vztahy

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \nabla_{r,\varphi} \bar{p} \cdot \bar{\varphi} \, d\Omega_R &= \mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{p}\bar{\varphi}) - \int_{\Omega_R} (\bar{p} \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\varphi}) \, d\Omega_R, \\ \int_{\Omega_R} \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\varphi} \, d\Omega_R + \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{S}} : \nabla_{r,\varphi} \bar{\varphi} \, d\Omega_R &= \mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\varphi}), \\ \int_{\Omega_R} (\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{g}}) \bar{\xi} \, d\Omega_R + \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{g}} \cdot \nabla_{r,\varphi} \bar{\xi} \, d\Omega_R &= \mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\xi}\bar{\mathbf{g}}) \end{aligned}$$

a získáme slabou formulaci ve tvaru (opět včetně všech hraničních integrálů)

$$\int_{\Omega_R} (\operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{v}}) \bar{\psi} \, d\Omega_R = 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\varphi} \, d\Omega_R + \int_{\Omega_R} ((\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r,\varphi}) \bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\varphi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} \bar{p} \operatorname{div}_{r,\varphi} \bar{\varphi} \, d\Omega_R \\ + \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{S}} : \nabla_{r,\varphi} \bar{\varphi} \, d\Omega_R - \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\mathbf{S}}\bar{\varphi})}_{RI_{HT}} - \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\varphi} \, d\Omega_R + \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{p}\bar{\varphi})}_{RI_{Hp}} \, ds = 0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} (\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2) \bar{\xi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} (\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2) \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r,\varphi} \bar{\xi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{r,\varphi} \bar{\xi} \, d\Omega_R \\ + \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r,\varphi} \bar{\xi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{f}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \bar{\xi} \, d\Omega_R + \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\xi}\bar{\mathbf{q}})}_{RI_q} - \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\xi}\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{v}})}_{RI_{ET}} \\ + \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\xi}(\bar{e} + \frac{1}{2} |\bar{\mathbf{v}}|^2) \bar{\mathbf{v}})}_{RI_{Eev}} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_R} \bar{e} \bar{\xi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} \bar{e} \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_{r,\varphi} \bar{\xi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_{r,\varphi} \bar{\xi} \, d\Omega_R - \int_{\Omega_R} \bar{\mathbf{T}} : \bar{\mathbf{D}} \bar{\xi} \, d\Omega_R \\ + \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\xi}\bar{\mathbf{q}})}_{RI_q} + \underbrace{\mathcal{B}_{\Omega_R}(\bar{\xi}\bar{e}\bar{\mathbf{v}})}_{RI_{ev}} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Okrajové podmínky budeme implementovat vhodnou náhradou integrálů RI_{HT} , RI_{Hp} , RI_{Eq} , RI_{ET} , RI_{Eev} , RI_{ev} v jednotlivých příkladech.

Počáteční podmínky

Aby počáteční a okrajové podmínky nezanášely do výpočtů další nepřesnosti, budeme vycházet z nulových počátečních podmínek jak pro rychlost, tak pro vnitřní energii

$$\mathbf{v}(0, x, y) = \mathbf{0}, \quad e(0, x, y) = 0 \quad \text{pro } (x, y) \in \Omega. \quad (4.22)$$

Okrajové podmínky — proudění bez výměny hmoty a energie s okolím

Ve všech příkladech budeme uvažovat úlohy, ve kterých nedochází k výměně hmoty a energie s okolím. Normálový tok hmoty a energie přes hranici je tedy nulový. To je zachyceno okrajovými podmínkami

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.23)$$

respektive

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}), \quad (4.24)$$

$\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{q}}$ jsou periodické (v prostorových souřadnicích) na $(0, T) \times \Gamma_p$

a podmínkou pro energii

$$(\mathbf{q} - \mathbf{S}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.25)$$

respektive

$$(\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{v}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}). \quad (4.26)$$

Dále uvažujeme pro $\gamma \in (0, 1)$ podmínku skluzu

$$\gamma(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b)_\tau + (1 - \gamma)(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.27)$$

kde \mathbf{v}_b je rychlost pohybující se hranice (v úlohách v další kapitole budeme uvažovat mezikruží, jehož hranice bude rotovat, tedy oblast se nemění, pouze hranice se může pohybovat). Tuto podmínku můžeme zapsat též ve tvaru

$$\omega(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b)_\tau + (\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.28)$$

kde $\omega \in (0, \infty)$. Podmínka zachycuje skutečnost, že rozdíl tečné rychlosti tekutiny na hranici oblasti a hranice oblasti odpovídá tečné síle na hranici způsobené napětím tekutiny.

Jestliže požadujeme, aby tekutina měla stejnou rychlost jakou má hranice, tj. předepíšeme-li okrajovou podmínku pro rychlost

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_b \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.29)$$

pak z (4.28) vyplývá

$$(\mathbf{S}\mathbf{n})_\tau = \mathbf{0} \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega. \quad (4.30)$$

Odtud a z podmínky (4.25) vzhledem k symetrii tenzoru \mathbf{S} dostaneme $\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = (\mathbf{S}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{S}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}$, a tedy

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \partial\Omega, \quad (4.31)$$

respektive

$$\bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}). \quad (4.32)$$

Rychlost hranice \mathbf{v}_b budeme uvažovat ve tvaru $\mathbf{v}_b = \mathcal{T}(t)\mathbf{v}_*$. Funkce $\mathcal{T}(t)$ bude spojitě diferencovatelná s hodnotou v počátku $\mathcal{T}(0) = 0$ a \mathbf{v}_* bude funkce pouze prostorových proměnných splňující rovnici kontinuity (a podobně pro funkci $\bar{\mathbf{v}}_b$). To zajistí mj. shodnost počáteční podmínky pro rychlost s okrajovou podmínkou v čase $t = 0$. Funkce \mathcal{T} , \mathbf{v}_* , $\bar{\mathbf{v}}_*$, ω , $\bar{\omega}$ budeme specifikovat v následující části této kapitoly.

Objemové síly

Objemové síly budeme rovněž určovat na základě předpisu funkcí analytického řešení v následující části.

Bilance energie

Pokud se pohybujeme ve třídě úloh, pro které jsou formulace $\boxed{\text{NSF}}$ i $\boxed{\text{NSFa}}$ ekvivalentní a máme-li řešení (\mathbf{v}, p, e) , které splňuje počáteční podmínky (4.22) a okrajové podmínky (4.23), (4.25), (4.30), pak integrací rovnice (4.8) přes oblast Ω a časový interval $(0, t)$ získáme vztah

$$\int_{\Omega} e(t) \, d\Omega = \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, d\Omega \, d\tau. \quad (4.33)$$

Odtud plyne, že přírůstek vnitřní energie systému za časový interval Δt je

$$\int_{\Omega} e(t) \, d\Omega - \int_{\Omega} e(t - \Delta t) \, d\Omega = \int_{t-\Delta t}^t \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, d\Omega \, d\tau. \quad (4.34)$$

Pokud formulace $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$ ekvivalentní nejsou, pak v rovnici (4.8) platí pouze nerovnost (viz též (1.14)) a místo (4.33) získáme nerovnost

$$\int_{\Omega} e(t) \, d\Omega \geq \int_0^t \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, d\Omega \, d\tau \quad (4.35)$$

a případně

$$\int_{\Omega} e(t) \, d\Omega - \int_{\Omega} e(t - \Delta t) \, d\Omega \geq \int_{t-\Delta t}^t \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, d\Omega \, d\tau. \quad (4.36)$$

Pokud vyřešíme systémy $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$ pro stejná data, může vyčíslení levých stran v (4.33) a (4.34) sloužit pro jejich srovnání. Pokud řešení má stacionární profil rychlosti (to je možné, pokud viskozita nebude záviset na vnitřní energii), pak hodnota na levé straně (4.34) je konstantní. Jestliže v takovém případě známe analytické řešení, je možné vyčíslit pravou stranu v (4.33) a (4.34) a i tyto hodnoty použít pro srovnání s vypočtenými řešeními.

Poznamenejme, že výše uvedené úvahy jsme činili za předpokladu platnosti okrajových podmínek. Při numerickém řešení však hraniční integrály nemusí být nulové například kvůli nepřesnostem v aproximaci hranice oblasti.

4.2 Analytická řešení

Znalost analytického řešení umožňuje srovnání vypočtených a teoretických výsledků. Pro materiálové konstitutivní vztahy různých typů, různé okrajové podmínky a materiálové konstitutivní vztahy je však obtížné či nemožné získat analytické řešení i pro jednoduché geometrie, se kterými pracujeme, a proto zvolíme obrácený postup. Navrhujeme vhodné řešení, dosadíme jej do pohybových rovnic a vypočteme objemové síly a okrajové podmínky. Ty pak použijeme jako vstupní data pro numerické řešení úloh, na kterých chceme ověřit numerické chování obou formulací rovnice bilance energie. Teoretický základ k tomu dává Věta 3.1.

Uvažujme $s > 1$ a oblast Ω ve tvaru mezikruží z odstavce 4.1. Zvolíme funkci \mathbf{v}_* definovanou na oblasti Ω tak, aby pro každé $1 < s' < s$ platilo $\mathbf{v}_* \in (W^{1,s'}(\Omega))^2$ a $\mathbf{v}_* \notin (W^{1,s}(\Omega))^2$. Protože oblast Ω je omezená a chceme dát dobrý smysl hraničním podmínkám, budeme hledat funkci \mathbf{v} se singularitou uvnitř oblasti.

Dále zvolíme funkci tlaku p_* a z pohybových rovnic (4.5)–(4.6) dopočteme objemové síly a okrajové podmínky pro stacionární případ.

Z těchto funkcí doplněním o časovou závislost získáme nestacionární funkce \mathbf{v}_\circ , p_\circ , které opět dosadíme do pohybových rovnic a dopočteme konečný tvar objemových sil a okrajových podmínek závislých na čase. Takto získaná data budou použita v příkladech, jejichž přesným řešením budou zvolené funkce \mathbf{v}_\circ a p_\circ . Zdůrazněme, že zde uvažujeme rovnice (4.13)–(4.14) nesvázané s rovnicemi pro energii (4.15)–(4.16) (viskozita není závislá na vnitřní energii).

Volba rychlosti \mathbf{v}

Pro oblast ve tvaru mezikruží lze napsat jednoduchý předpis funkce rychlosti, která bude splňovat rovnici kontinuity a bude mít nulový normálový tok přes hranici oblasti. Mějme libovolnou (budeme specifikovat později), spojitou, skoro všude diferencovatelnou funkci $P : \langle r_0, r_1 \rangle \mapsto \mathbb{R}$ a definujme rychlost \mathbf{v}_* předpisem

$$\mathbf{v}_*(x, y) := (y, -x)P(r), \quad \text{kde} \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.37)$$

Při označení

$$\mathbf{v}_*(x, y) = (u_*(x, y), v_*(x, y)) := (yP(r), -xP(r)) \quad (4.38)$$

můžeme dopočítat

$$\begin{aligned} \partial_x r &= x/r, & \partial_y r &= y/r, \\ \partial_x P &= P' \partial_x r = xP'/r, & \partial_y P &= P' \partial_y r = yP'/r \end{aligned}$$

a dále

$$\begin{aligned} \partial_x u_* &= -\partial_y v_* = xyP'/r, & \partial_y u_* &= P + y^2 P'/r, & \partial_x v_* &= -P - x^2 P'/r, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_* &= \partial_x u_* + \partial_y v_* = 0, \\ \mathbf{D}_* &:= \mathbf{D}(\mathbf{v}_*) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v}_* + (\nabla \mathbf{v}_*)^T) = \begin{pmatrix} xy & \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \\ \frac{1}{2}(y^2 - x^2) & -xy \end{pmatrix} P'/r, \\ \mathbf{S}_* &:= \nu(|\mathbf{D}_*|^2) \mathbf{D}_*, \\ |\mathbf{D}_*|^2 &= (2x^2 y^2 + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)^2) P'^2 / r^2 = \frac{1}{2}(y^2 + x^2)^2 P'^2 / r^2 = \frac{1}{2} r^2 P'^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Tedy funkce \mathbf{v}_* splňuje identicky rovnici kontinuity (4.5) na Ω a na hranici $\partial\Omega$ má nulovou normálovou rychlost, neboť

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= (-x/r_0, -y/r_0) && \text{pro } (x, y) \in \Gamma_{r_0}, \\ \mathbf{n} &= (x/r_1, y/r_1) && \text{pro } (x, y) \in \Gamma_{r_1},\end{aligned}$$

a proto $\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} = 0$. Dále na hranici $\partial\Omega$ platí

$$(\mathbf{v}_*)_t := \mathbf{v}_* - (\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{v}_*, \quad \text{pro } (x, y) \in (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}).$$

Předpokládejme, že $p_*(r)$ je primitivní funkce k $rP^2(r)$, tj.

$$p_*(r) := \int rP^2(r) dr + C. \quad (4.40)$$

Pak

$$\begin{aligned}u_* \partial_x u_* + v_* \partial_y u_* &= xy^2 PP'/r - xP^2 - xy^2 PP'/r = -xP^2 = -rP^2 \partial_x r = -\partial_x p_*, \\ u_* \partial_x v_* + v_* \partial_y v_* &= -yP^2 - x^2 y PP'/r + x^2 y PP'/r = -yP^2 = -rP^2 \partial_y r = -\partial_y p_*,\end{aligned}$$

a tedy

$$(\mathbf{v}_* \cdot \nabla)\mathbf{v}_* = \text{div}(\mathbf{v}_* \otimes \mathbf{v}_*) = -\nabla p_*. \quad (4.41)$$

Mají-li být funkce \mathbf{v}_* a p_* stacionárním řešením pohybových rovnic (4.5)–(4.6) a označíme-li kvůli zjednodušení $Q(r)$ společnou část všech prvků tenzoru $\nu(|\mathbf{D}_*|^2)\mathbf{D}_*$, tj.

$$Q(r) := \nu(\frac{1}{2}r^2 P'^2)P'/r, \quad \text{přičemž } \partial_x Q = xQ'/r, \quad \partial_y Q = yQ'/r, \quad (4.42)$$

pak z rovnice bilance hybnosti (4.6) plyne, že funkce \mathbf{v}_* , p_* jsou řešením stacionárních pohybových rovnic pro objemové síly

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \text{div}(\mathbf{v}_* \otimes \mathbf{v}_*) + \nabla p_* - \text{div}(\nu(|\mathbf{D}_*|^2)\mathbf{D}_*) \stackrel{(4.41)}{=} -\text{div}(\nu(|\mathbf{D}_*|^2)\mathbf{D}_*) \\ &= -\text{div} \left(\begin{pmatrix} xy & \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \\ \frac{1}{2}(y^2 - x^2) & -xy \end{pmatrix} Q(r) \right) = (\frac{1}{2}rQ' + 2Q) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (4.43)$$

Analogicky v polárních souřadnicích na množině Ω_R definujeme funkci

$$\bar{\mathbf{v}}_*(r, \varphi) := (0, -rP(r)), \quad (4.44)$$

což je vyjádření funkce \mathbf{v}_* v polárních souřadnicích. S přihlédnutím k definicím diferenciálních operátorů v polárních souřadnicích uvedených v sekci 2.4 můžeme psát

$$\begin{aligned}\nabla_{r,\varphi} \bar{\mathbf{v}}_* &= \begin{pmatrix} 0 & P(r) \\ -(r(P(r)))' & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{D}_* &:= \mathbf{D}(\bar{\mathbf{v}}_*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -rP'(r) \\ -rP'(r) & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{S}}_* &:= \nu(|\bar{\mathbf{D}}_*|^2)\bar{\mathbf{D}}_*, & -\text{div}_{r,\varphi} \bar{\mathbf{S}}_* &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(\nu r P')' + \nu P' \end{pmatrix}, \\ \bar{\mathbf{f}} &= -\text{div}_{r,\varphi} \left(\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \frac{1}{2} \mathcal{T} r P'(r) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (\frac{1}{2}r^2 Q' + 2rQ) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (4.45)$$

Volba funkce P

Podle toho, jakou formulaci objemových sil v (4.43) použijeme, potřebujeme vyjádřit první a případně i druhou derivaci funkce P a tyto derivace bude potřeba i implementovat. Zároveň požadujeme, aby rychlost odvozená z této funkce patřila jen do některých Sobolevových prostorů $(W^{1,s}(\Omega))^2$. Proto zde zavedeme parametry, jejichž nastavení při numerické implementaci umožní přiblížit se libovolně k cílovým hodnotám.

Nechť $r_0 < \tilde{r} < r_1$ je pevně zvoleno (volba není příliš důležitá, v příkladech budeme volit obvyklou hodnotu $\tilde{r} = \frac{1}{2}(r_0 + r_1)$), $\alpha > 0$ a $\epsilon \geq 0$ jsou parametry. Definujeme-li funkci P_ϵ předpisem

$$P = P_\epsilon := (\epsilon^2 + (r - \tilde{r})^2)^{(\alpha-1)/2} (r - \tilde{r}), \quad (4.46)$$

pak pro $\alpha \geq 1$ platí $\mathbf{v}_* \in (W^{1,s}(\Omega))^2$ pro každé $s \geq 1$. Pro $1 > \alpha > 0$ z požadavku $\mathbf{v}_* \in (W^{1,s}(\Omega))^2$ plyne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_*\|_{1,s}^s &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_{r_0}^{r_1} \left((\cos^s \varphi + \sin^s \varphi) r^s |P_\epsilon|^s + \sin 2\varphi |rP'_\epsilon|^s \right. \\ &\quad \left. + |P_\epsilon + \sin^2 \varphi rP'_\epsilon|^s + |P_\epsilon + \cos^2 \varphi rP'_\epsilon|^s \right) r \, dr \, d\varphi < \infty, \end{aligned}$$

což je splněno pro libovolné $\epsilon > 0$. Pro $\epsilon = 0$ je $P'_0 = \alpha |r - \tilde{r}|^{\alpha-1}$ a

$$\mathbf{v}_* \in (W^{1,s}(\Omega))^2 \Leftrightarrow s < \frac{1}{1-\alpha}. \quad (4.47)$$

Parametr α zároveň definuje i prostor funkcí, ve kterém leží objemové síly.

Analytické určení tlaku p_*

Jestliže pro funkci P_ϵ je zadán předpis (4.46), můžeme určit tlak ze vztahu (4.40) nalezením primitivní funkce k funkci rP_ϵ^2 . Toto je možné pouze pro některé hodnoty α nebo pro $\epsilon = 0$. Protože pro funkci P_0 lze nalézt primitivní funkci, tlak je v rovnici (4.6) zastoupen lineárně a uvažujeme úlohy s nenulovou objemovou silou, předepíšeme přesné řešení pro tlak pomocí funkce P_0 , u které lze nalézt primitivní funkci a rozdíl $P_\epsilon - P_0$ zahrneme do objemových sil:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}_* \otimes \mathbf{v}_*) = -rP_\epsilon^2 \nabla r = -rP_0^2 \nabla r + r(P_0^2 - P_\epsilon^2) \nabla r = -\nabla p_* + \mathbf{f}_p,$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p &:= (P_0^2(r) - P_\epsilon^2(r))(x, y), \\ p_*(r) &= \int r |r - \tilde{r}|^{2\alpha} \, ds = \frac{|r - \tilde{r}|^{2\alpha} (r - \tilde{r})}{2\alpha + 1} \left(r - \frac{r - \tilde{r}}{2\alpha + 2} \right) + C. \end{aligned}$$

Volba nestacionárního řešení

Předpokládejme, že funkce $\mathbf{v}_*(x, y)$ a $p_*(x, y)$ z předchozího popisu jsou stacionárním řešením rovnic (4.13)–(4.14) (kdy tlak kompenzuje konvektivní člen s dodatkovou objemovou silou) pro objemové síly $-\operatorname{div}(v(|\mathbf{D}_*|^2)\mathbf{D}_*) + \mathbf{f}_p$. Mějme spojitou, dostatečně hladkou funkci času $\mathcal{T}: [0, T] \rightarrow [0, \infty)$. Pak funkce

$$\mathbf{v}_\diamond(t, x, y) = \mathcal{T}(t)\mathbf{v}_*(x, y), \quad p_\diamond(t, x, y) = \mathcal{T}^2(t)p_*(x, y) \quad (4.48)$$

jsou řešením nestacionárních rovnic (4.13)–(4.14) (s Dirichletovou podmínkou $\mathcal{T}(t)\mathbf{v}_*$ na hranici $\partial\Omega$) pro objemovou sílu

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_\diamond &= \mathcal{T}'\mathbf{v}_* + \mathcal{T}^2 \operatorname{div}(\mathbf{v}_* \otimes \mathbf{v}_*) + \mathcal{T}^2 \nabla p_* - \operatorname{div}(\nu(\mathcal{T}^2 |\mathbf{D}_*|^2) \mathcal{T} \mathbf{D}_*) \\ &= \mathcal{T}'\mathbf{v}_* - \operatorname{div}(\nu(\mathcal{T}^2 |\mathbf{D}_*|^2) \mathcal{T} \mathbf{D}_*) + \mathcal{T}^2 \mathbf{f}_p.\end{aligned}\quad (4.49)$$

Implementace objemové síly ve slabé formulaci

Divergentní člen v objemových silách (4.49) je možné vypočítat a zadat do slabé formulace ve dvou tvarech, jak je patrné ze vztahu (4.43). Bud' funkci \mathbf{f} zadáme ve tvaru vypočteného vektoru, pak příspěvek objemových sil ve slabé formulaci je

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nu(\mathcal{T}^2 |\mathbf{D}_*|^2) \mathcal{T} \mathbf{D}_*) \cdot \varphi \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{2}(rQ' + 2Q)(-y, x) \cdot \varphi \, d\Omega \quad (4.50)$$

nebo ve tvaru divergence tenzoru a divergenci převedeme integrací per partes na testovací funkci. Pak je nutné obecně počítat i s hraničním integrálem se stopou testovací funkce (zde vyčíslení stopy tenzoru $\nu(\mathcal{T}^2 |\mathbf{D}_*|^2) \mathcal{T} \mathbf{D}_*$ nečiní potíže, protože je na hranici dobře definovaný). V případě, kdy funkce \mathbf{f} je ve tvaru vektoru, je nutno počítat i druhou derivaci P'' .

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nu(\mathcal{T}^2 |\mathbf{D}_*|^2) \mathcal{T} \mathbf{D}_*) \cdot \varphi \, d\Omega &= \int_{\Omega} Q(r) \begin{pmatrix} xy & \frac{1}{2}(y^2 - x^2) \\ \frac{1}{2}(y^2 - x^2) & -xy \end{pmatrix} : \nabla \varphi \, d\Omega \\ &+ P_\epsilon(r_0) \mathcal{T} \int_{\Gamma_{r_0}} (y, -x) \cdot \varphi \omega \, ds.\end{aligned}\quad (4.51)$$

Shrnutí

Z výše uvedené konstrukce plyne, že pro $\epsilon \geq 0$ a $\alpha > 0$ a pro funkci

$$P_\epsilon(r) := (\epsilon^2 + (r - \tilde{r})^2)^{\alpha-1} (r - \tilde{r}) \quad (4.52)$$

jsou funkce

$$\mathbf{v}_\diamond(t, x, y) = (\mathcal{T}(t)yP_\epsilon(r), -\mathcal{T}(t)xP_\epsilon(r)), \quad (4.53)$$

$$p_\diamond(t, x, y) = \mathcal{T}(t)^2 \frac{|r - \tilde{r}|^{2\alpha} (r - \tilde{r})}{2\alpha + 1} \left(r - \frac{r - \tilde{r}}{2\alpha + 2} \right) + C \quad (4.54)$$

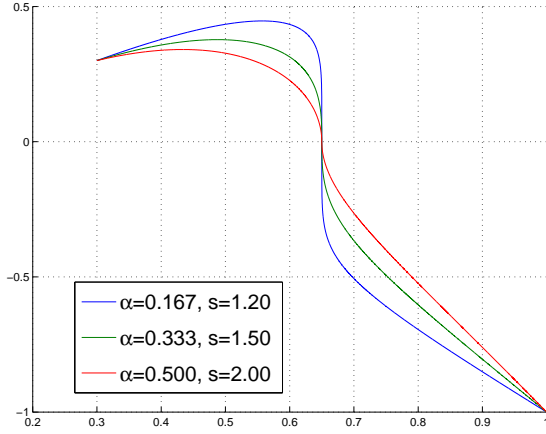
přesným řešením rovnic (4.5)–(4.6) s pravou stranou

$$\mathbf{f}_\diamond = \mathcal{T}'\mathbf{v}_* - \operatorname{div}(\nu(\mathcal{T}^2 |\mathbf{D}_*|^2) \mathcal{T} \mathbf{D}_*) + \mathcal{T}^2 \mathbf{f}_p, = \mathcal{T}'\mathbf{v}_* + \frac{1}{2}(Q'_\epsilon + 2Q_\epsilon)(-y, x) + \mathcal{T}^2 \mathbf{f}_p, \quad (4.55)$$

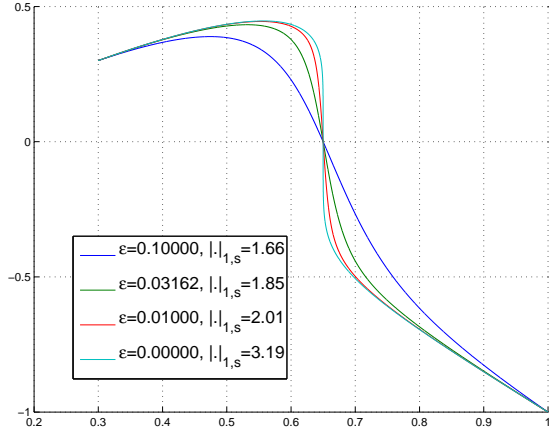
kde funkce Q_ϵ je daná vztahem

$$Q_\epsilon(r) := \mathcal{T} \nu \left(\frac{1}{2} r^2 \mathcal{T}^\alpha P_\epsilon'^2(r) \right) P_\epsilon'(r) / r. \quad (4.56)$$

Následující obrázky ukazují profil funkce \mathbf{v}_* na průsečíku oblasti Ω s kladnou poloosou x . Oba obrázky jsou vykresleny pro hodnoty $r_0 = 0.3$, $\tilde{r} = 0.65$, $r_1 = 1$. Obrázek 2 ukazuje rychlostní profil $-rP_0(r)$ pro různé hodnoty α a odpovídající $s = 1/(1 - \alpha)$. Obrázek 2 pak zachycuje citlivost funkce $rP_\epsilon(r)$ na perturbaci ϵ pro hodnotu $\alpha = 1/6$.

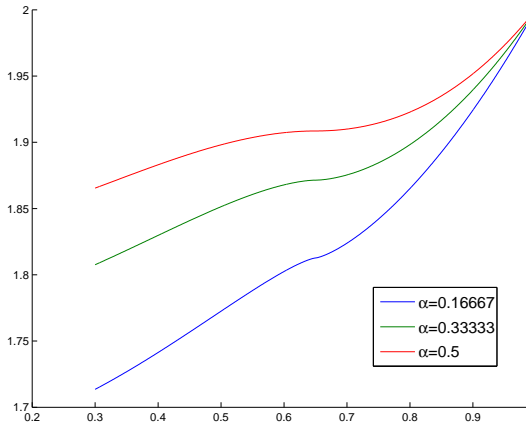


Obrázek 2

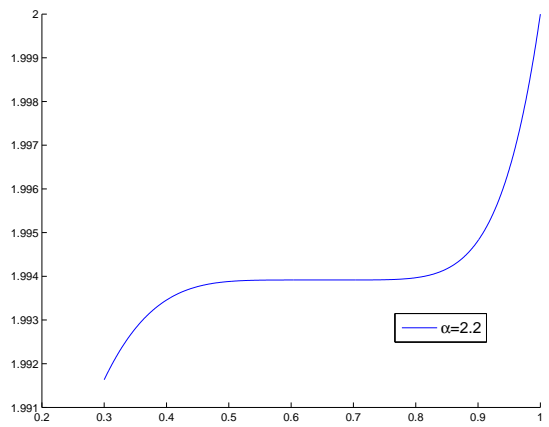


Obrázek 3

Další dva obrázky zachycují profil analytického řešení tlaku p_* na průřezu oblasti s kladnou poloosou x . Konstanta C je vypočtena tak, aby $p_*(0, 1) = 2.0$. Obrázek 4 zachycuje profil tlaku pro hodnoty α a s odpovídající obrázku 2 a obrázek 5 je detail průběhu tlaku pro hodnotu $\alpha = 2.2$.



Obrázek 4



Obrázek 5

Analogicky jsou v polárních souřadnicích funkce

$$\bar{\mathbf{v}}_\diamond(t, r, \varphi) = (0, -\mathcal{T}(t)rP_\epsilon(r)), \quad (4.57)$$

$$\bar{p}_\diamond(t, r, \varphi) = \mathcal{T}(t)^2 \frac{|r - \tilde{r}|^{2\alpha} (r - \tilde{r})}{2\alpha + 1} \left(r - \frac{r - \tilde{r}}{2\alpha + 2} \right) + C \quad (4.58)$$

přesným řešením rovnic (4.18)–(4.19) s pravou stranou

$$\bar{\mathbf{f}}_\diamond = \mathcal{T}' \bar{\mathbf{v}}_* - \operatorname{div}(\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_*) + \mathcal{T}^2 \bar{\mathbf{f}}_p, \quad (4.59)$$

kde funkce $\bar{\mathbf{f}}_p$ je daná vztahem

$$\bar{\mathbf{f}}_p(r, \varphi) := (P_0(r) - P_\epsilon(r))(0, r) \quad (4.60)$$

a platí

$$-\operatorname{div}_{r,\varphi}(\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_*) = \operatorname{div}_{r,\varphi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) r P'_\epsilon \\ \frac{1}{2} \nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) r P'_\epsilon & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

$$= (0, \frac{1}{2} r^2 Q'(r) + 2rQ(r)), \quad (4.62)$$

a tedy vzhledem k periodickým okrajovým podmínkám na Γ_p

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega_R} \operatorname{div}_{r,\varphi} (\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_*) \bar{\varphi} \, d\Omega_R &= -\mathcal{B}_{\Omega_R} (\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_* \bar{\varphi}) \\
&+ \int_{\Omega_R} \nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_* : \nabla_{r,\varphi} \bar{\varphi} \, d\Omega_R, \quad (4.63)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega_R} \operatorname{div}_{r,\varphi} (\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_*) \bar{\mathbf{v}} \bar{\xi} \, d\Omega_R &= -\mathcal{B}_{\Omega_R} (\nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_* \bar{\mathbf{v}} \bar{\xi}) \\
&+ \int_{\Omega_R} \nu(\mathcal{T}^2 |\bar{\mathbf{D}}_*|^2) \mathcal{T} \bar{\mathbf{D}}_* : \nabla_{r,\varphi} (\bar{\mathbf{v}} \bar{\xi}) \, d\Omega_R. \quad (4.64)
\end{aligned}$$

Poznámka

Pokud použijeme takto získané objemové síly a okrajové podmínky v zadání úloh, je možné v prostorových proměnných úlohy redukovat na jednodimenzionální. Naším cílem však bude přesto řešit tyto úlohy ve dvou dimenzích právě kvůli porovnání formulací $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$. Objemové síly, které jsme zde odvodili pro případ viskozity nezávislé na vnitřní energii budeme používat i v případě závislosti viskozity na vnitřní energii. V takovém případě neznáme přesně řešení ani pro rychlost.

4.3 Prostředky pro numerické řešení úloh

4.3.1 Časová diskretizace

Pro časovou diskretizaci jsme zvolili jednokrokovou implicitní metodu, kterou lze obecně popsat na následující úloze. Pro pro nelineární funkci

$$f : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$$

a vektor $X_0 \in \mathbb{R}^d$ hledáme funkci $X(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^d$, která splňuje rovnici

$$\frac{\partial X(t)}{\partial t} = f(t, X) \quad \text{pro } t > 0$$

s počáteční podmínkou

$$X(0) = X_0.$$

Pro jednokrokovou θ metodu zvolíme posloupnost časů $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \dots$ a posloupnost aproximací X^n ($n \geq 0$) přesného řešení předpisem

$$\frac{X^{n+1} - X^n}{t^{n+1} - t^n} = \theta f(t^{n+1}, X^{n+1}) + (1 - \theta) f(t^n, X^n), \quad (4.65)$$

kde $X^0 := X_0$. Tento postup vyžaduje na každé časové úrovni vyřešit nejvýše jednu nelineární úlohu.

Pro $\theta = 1$ se tato metoda nazývá zpětná Eulerova metoda, jejíž přesnost je prvního řádu v čase, ale má problémy s numerickou disipací při simulacích delších časových intervalů.

Pro $\theta = 1/2$ dostaneme metodu Crank-Nicholsonové, která má přesnost druhého řádu a také klade omezení na volbu časového kroku. Tuto metodu použijeme na rovnice (4.14)-(4.16). Rovnici kontinuity (4.13) budeme řešit vždy na časové úrovni t^{n+1} , abychom se vyhnuli numerickým oscilacím (a analogicky pro polární souřadnice).

4.3.2 Prostorová diskretizace

Pro prostorovou diskretizaci použijeme metodu konečných prvků. Oblast Ω , jejíž hranice je křivočará (viz (4.3)), aproximujeme polygonální oblastí Ω_h , která je pokryta trojúhelníky \mathcal{T}_h . Předpokládáme, že toto pokrytí je regulární, tj. neprázdný průnik libovolných dvou trojúhelníků je buď bod, nebo celá společná hrana obou trojúhelníků. Na rozdíl od mezikruží Ω při triangulaci obdélníkové oblasti Ω_R nevzniká žádná diskretizační chyba.

Z celé plejády konečných prvků (viz např. [24]) jsme pro numerické experimenty zvolili stabilní konečné prvky P_2/P_1 pro rychlost a tlak a P_1 pro vnitřní energii.

Prvky P_1 jsou tvořeny lineárními funkcemi určenými funkčními hodnotami ve vrcholech trojúhelníků, prvky P_2 jsou tvořeny polynomy druhého stupně a jsou určeny funkčními hodnotami ve vrcholech trojúhelníků a funkčními hodnotami ve středech stran. Prvky P_2/P_1 jsou nejjednodušší spojité prvky, které splňují inf-sup podmínku kompatibility (viz [5]).

4.3.3 FEniCS

Pro řešení úloh v této práci jsme zvolili volně dostupné softwarové prostředky projektu FEniCS (viz [1]) implementované na výpočetním clusteru na MFF UK v Karlíně (viz [2]). Vzhledem k tomu, že řešené úlohy nebyly extrémně náročné na paměť, byly řešeny bez použití paralelního prostředí, což též umožnilo snadnější srovnávání časové náročnosti úloh.

Nelineární problémy (4.65) na každé časové vrstvě byly řešeny Newtonovou metodou, přičemž linearizované soustavy rovnic byly řešeny přímými řešiči (LU rozklad).

5. Příklady a jejich numerická řešení

V návaznosti na předchozí kapitolu jsou zde všem příkladům v polárních i kartézských souřadnicích společné konstanty charakterizující geometrii oblastí Ω a Ω_R v (4.3) a (4.4)

$$r_0 = 0.3, \quad r_1 = 1.0, \quad \tilde{r} = \frac{1}{2}(r_0 + r_1) \quad (5.1)$$

a konstanty charakterizující materiál v konstitutivních vztazích (2.38), (2.39) a (2.41) (pokud nebudou v příkladu výslovně uvedeny jiné hodnoty)

$$\nu_0 = 0.01, \quad c_\nu = 0.2, \quad \kappa_0 = 0.1, \quad A = 0.1. \quad (5.2)$$

Počáteční podmínky pro rychlost i vnitřní energii uvažujeme vždy ve tvaru

$$\mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad e(0, \cdot) = 0 \quad \forall \Omega \quad (5.3)$$

a stejně tak i pro oblast Ω_R .

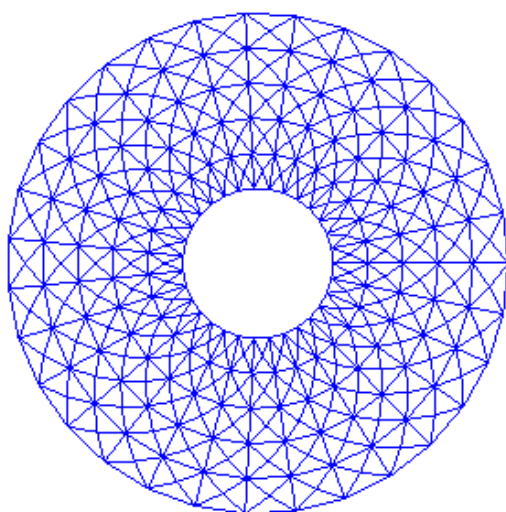
Vždy též považujeme hranici za neproniknutelnou, tj.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \Omega. \quad (5.4)$$

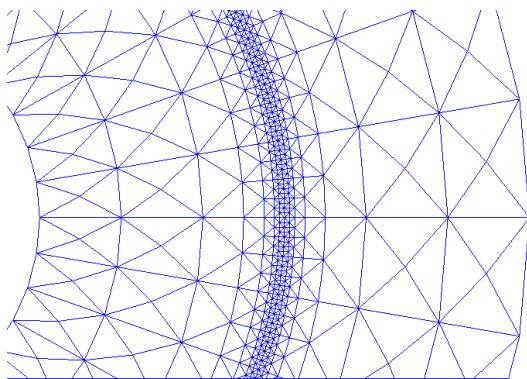
Tato podmínka znamená, že ve slabých formulacích (4.15) a (4.16) platí pro hraniční integrály

$$I_{Ev} = 0, \quad I_{ev} = 0.$$

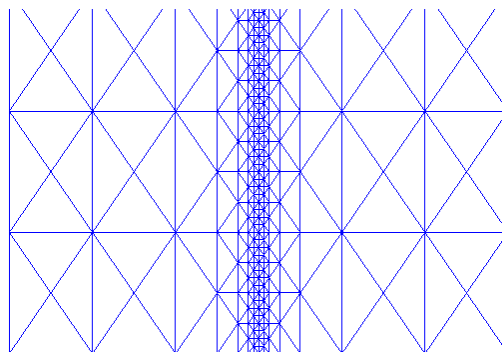
Pro každou z oblastí Ω a Ω_R budeme používat 4 triangulace, které budeme charakterizovat číslem $N \in \{5, 6, 10, 20\}$. Pro $N = 5$, $N = 10$ a $N = 20$ vyjadřuje N počet intervalů hran triangulace na kladné poloose x , respektive r . Triangulace $N = 10$ a $N = 20$ jsou dvojnásobným a čtyřnásobným homogenním zjemněním triangulace s $N = 5$, triangulace $N = 6$ je vytvořená z triangulace se šesti hranami na kladné poloose x trojnásobným opakováním zjemnění elementů kolem poloměru \tilde{r} . Triangulace pro $N = 5$ pro mezikruží i obdélník je vykreslena na obrázcích 6–7. Detail zjemnění triangulace s $N = 6$ je na obrázcích 8–9.



Obrázek 6 Triangulace na mezikruží s $N = 5$. Obrázek 7 Triangulace na obdélníku s $N = 5$.



Obrázek 8 Detail triangulace pro $N = 6$.



Obrázek 9 Detail triangulace pro $N = 6$.

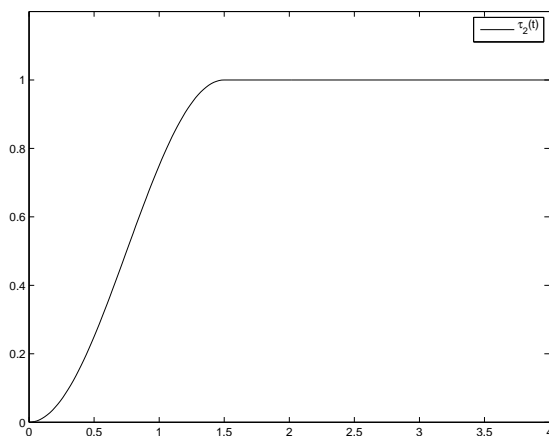
Abychom se vyhnuli numerickým oscilacím pro nespojitě průběhy času (např. skokové změny okrajové podmínky v čase $t = 0$), budeme používat dva průběhy funkce $\mathcal{T}(t) \in C^1([0, \infty))$ pro definici analytického řešení (4.53), a tedy i v okrajových podmínkách z něj odvozených objemových silách (4.55), a to funkci $\mathcal{T}_2(t)$, která se v čase $t = 1.5$ ustálí na konstantní hodnotě 1

$$\mathcal{T}_2(t) := \begin{cases} (1 - \cos(\frac{2}{3}\pi t))/2 & \text{pro } t \in [0, \frac{3}{2}], \\ 1 & \text{pro } t \in (\frac{3}{2}, \infty) \end{cases} \quad (5.5)$$

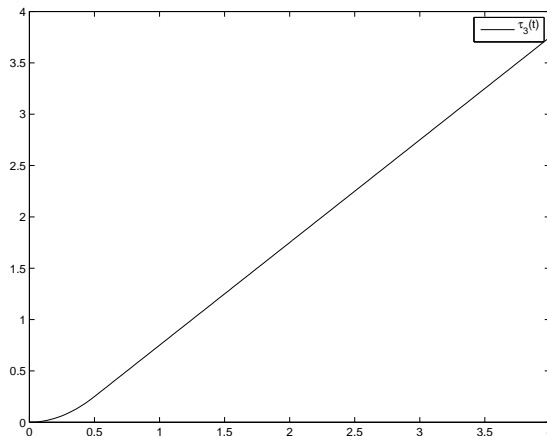
a trvale rostoucí funkci $\mathcal{T}_3(t)$

$$\mathcal{T}_3(t) := \begin{cases} t^2 & \text{pro } t \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} & \text{pro } t \in (\frac{1}{2}, \infty). \end{cases} \quad (5.6)$$

Průběhy obou funkcí jsou vykresleny na obrázcích 10 a 11.



Obrázek 10 Průběh funkce $\mathcal{T}_2(t)$.



Obrázek 11 Průběh funkce $\mathcal{T}_3(t)$.

Jak v kartézském, tak v polárním vyjádření též používáme vztahy odvozené z funkce P_ϵ (viz (4.46)), které zde uvedeme i s vyčíslením vyšších derivací:

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2},$$

$$P_\epsilon = (\epsilon^2 + (r - \tilde{r})^2)^{(\alpha-1)/2}(r - \tilde{r}), \quad (5.7)$$

$$P'_\epsilon = (\epsilon^2 + (r - \tilde{r})^2)^{(\alpha-3)/2}(\alpha(r - \tilde{r})^2 + \epsilon^2), \quad (5.8)$$

$$P''_\epsilon = (\alpha - 1)(\epsilon^2 + (r - \tilde{r})^2)^{(\alpha-5)/2}(r - \tilde{r})[\alpha(r - \tilde{r})^2 + \epsilon^2], \quad (5.9)$$

$$Q_\epsilon = \tilde{Q}_\epsilon P'_\epsilon, \quad \text{kde } \tilde{Q}_\epsilon = \mathcal{T}v(\frac{1}{2}\mathcal{T}^2 r^2 P_\epsilon'^2)/r, \quad (5.10)$$

$$Q'_\epsilon = \tilde{Q}'_\epsilon P'_\epsilon + \tilde{Q}_\epsilon P''_\epsilon,$$

kde $\epsilon > 0$ a $\alpha > 0$ jsou parametry. Ze vztahu (4.50) pro objemové síly plyne nutnost výpočtu i druhé derivace funkce P_ϵ . To pro $\alpha \in (0, 1)$ vede k časově náročnějšímu výpočtu numerické kvadratury integrálu $\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, d\Omega$ ve slabé formulaci rovnice pro hybnost (4.14) a integrálu $\int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\boldsymbol{\xi} \, d\Omega$ ve slabé formulaci rovnice pro energii (4.15), než při použití objemových sil ve tvaru (4.50). Proto jsme pro všechny úlohy implementovali ve slabých formulacích $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$ objemové síly ve tvaru (4.50).

Při numerickém řešení úloh je tedy třeba ještě zvolit:

- materiálové konstitutivní vztahy

$$\nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) = 2\nu_0(1 + \alpha_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2} \quad (5.11)$$

nebo

$$\nu(e, |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) = 2\nu_0 \frac{A}{A + e} (1 + \alpha_0 |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2)^{(s-2)/2}; \quad (5.12)$$

- mocninu $s > 1$ mocninného modelu;
- funkci $\mathcal{T}(t)$ časového průběhu okrajové podmínky a objemových sil;
- parametry ϵ a α v definici funkce P_ϵ (a tedy objemových sil a přesného řešení pro srovnávání výsledků);
- časový interval $[0, T]$ a časový krok Δt pro metodu Crank-Nicolsonové;
- zbývající okrajové podmínky;
- triangulaci oblasti.

Pro numerické řešení úloh pak volíme další parametry — typy konečných prvků $P_2/P_1/P_1$ pro rychlost, tlak a energii, metodu časové diskretizace Crank-Nicolsonové a časový krok $\Delta t = 0.1$ (pokud neuvedeme jinak). Dále stupně kvadratur při sestavování matic tuhosti, metodu numerického řešení soustav a kritérium pro ukončení iteračních algoritmů (přesnost řešení). Pro tyto parametry budeme vesměs používat standardní nastavení ve FEniCSu, přičemž pokud jsme se někde od standardního nastavení odchýlili, uvedeme pozorované důsledky těchto změn.

5.1 Vyčíslení výrazů pro analytické řešení

Disipativní člen $\mathbf{T} : \mathbf{D}$ při ustálení řešení

Tam, kde budeme používat konstitutivní vztah (5.11) nezávislý na vnitřní energii (tedy rovnici bilance hybnosti je možné řešit nezávisle na rovnici bilance energie), lze vyčíslit některé výrazy analyticky. Tato vyčíslení použijeme pro srovnání s vypočteným řešením. Pro ustálený stav okrajových podmínek je možné srovnávat přírůstek vnitřní energie za jednotku času na základě vztahu (4.34). Pro přesné řešení rychlosti \mathbf{v}_\circ

dané vztahem (4.53) a mocninný model (5.11) můžeme pro t takové, že $\mathcal{T}_2(t) = 1$, s přihlédnutím k (4.39) vypočítat

$$\begin{aligned} I_7 &= \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{D} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nu(|\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2) |\mathbf{D}(\mathbf{v})|^2 \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} 2\nu_0 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_0 r^2 P_{\epsilon}^{\prime 2}\right)^{(s-2)/2} \frac{1}{2} r^2 P_{\epsilon}^{\prime 2} \, d\Omega \\ &= 2\pi \int_{r_0}^{r_1} \nu_0 \left(1 + \frac{1}{2}\alpha_0 r^2 P_{\epsilon}^{\prime 2}\right)^{(s-2)/2} r^3 P_{\epsilon}^{\prime 2} \, dr, \end{aligned} \quad (5.13)$$

kde P_{ϵ}^{\prime} je dáno vztahem (5.8). Integrál I_7 je možné pro konkrétní hodnoty α_0 , ϵ a s vyčíslit (např. v Matlabu) a vynásobený časovým krokem Δt použít pro srovnání s vypočtenými přírůstky energie podle vztahu (4.34).

5.2 Úloha U1

Na oblasti $(0, T) \times \Omega$ řešíme systémy $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$ s konstitutivními vztahy (5.11) a (5.12), počátečními podmínkami

$$\mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad e(0, \cdot) = 0 \quad \text{na } \Omega, \quad (5.14)$$

okrajovými podmínkami pro rychlost

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}), \quad (5.15)$$

$$\omega(\mathbf{v} - \mathbf{v}_b)_{\tau} + (\mathbf{S}\mathbf{n})_{\tau} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}), \quad (5.16)$$

okrajovou podmínkou pro vnitřní energii

$$(\mathbf{S}\mathbf{v} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \Omega, \quad (5.17)$$

kteřá dává při požadavku $\mathbf{v} = \mathbf{v}_b$ na $(0, T) \times \Omega$ pro systém $\boxed{\text{NSFa}}$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times \Omega \quad (5.18)$$

(viz diskuze okrajových podmínek v sekci 4.1). Za těchto předpokladů platí ve slabé formulaci (4.13)–(4.16) pro integrály přes hranici $\partial\Omega$ vztahy

$$\begin{aligned} I_{HT} &= 0, & I_{Ev} &= 0, & I_{ev} &= 0, \\ I_q - I_{ET} &= 0 \quad \text{v rovnici (4.15),} & I_q &= 0 \quad \text{v rovnici (4.16),} \end{aligned}$$

přičemž rovnost $I_{HT} = 0$ vyplývá okrajových podmínek (5.14) a (5.15), neboť ty implikují v rovnici (4.14) testování funkcemi φ s nulovou stopou na hranici $\partial\Omega$.

Protože tlak je v NSF systému určen až na konstantu, byla k okrajovým podmínkám přidána podmínka předepisující v bodě $(r_1, 0)$ hodnotu tlaku 2, tj.

$$p(t, r_1, 0) = 2. \quad (5.19)$$

5.2.1 Ověření implementace

Pro ověření správnosti implementace jsme zvolili mocninný model (5.11) a tři sady parametrů, které jsou daleko od kritické hodnoty $s = 6/5$ a odpovídající exponentu $\alpha = (s - 1)/s = 1/6$, tři sady těchto nadkritických parametrů uvádíme v následující tabulce:

Sada	s	α	ϵ
S1	4.5	2.2	0.00
S2	2.0	1.5	0.00
S3	1.5	0.5	0.01

Tabulka 1

V sadě parametrů S1 je zvoleno $s > 2$, což znamená, že počítáme úlohu pro model, kdy se smykové napětí s rostoucím gradientem rychlosti zesiluje a viskozita roste, tedy situaci z numerického hlediska příznivější.

Sada S2 odpovídá lineární závislosti tenzoru napětí na gradientu rychlosti (Newtonská tekutina) a zde můžeme ověřit, zda dosažené rychlosti konvergence odpovídají teoretickým hodnotám pro zvolené prvky P_2/P_1 v metodě konečných prvků.

Sada S3 vzhledem k volbě exponentu $\alpha < 1$ již vynucuje volit nenulovou perturbaci ϵ ve funkci P_ϵ , viz (4.46), a tedy slouží ke kontrole správnosti implementace pro nejobecnější řešený případ.

Po počátečních experimentech jsme se rozhodli řešit úlohu U1 na intervalu $[0, T]$, kde $T = 8$, protože se ukázalo, že rychlostní i tlakové pole pro konstitutivní vztahy (5.11) (tedy viskozitu nezávislou na vnitřní energii) a funkci času \mathcal{T}_2 je přibližně od času $t = 3$ ustálené.

Relativní chyba rychlosti

S ohledem na znalost analytického řešení \mathbf{v}_\diamond , viz (4.53), jsme pro posouzení správnosti implementace zvolili vyčíslení relativní chyby rychlosti \mathbf{v}

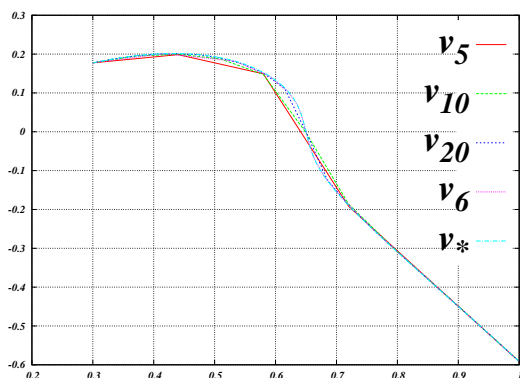
$$I_a := \frac{\|\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_\diamond(t)\|_{1,s}}{\|\mathbf{v}_\diamond(t)\|_{1,s}} \quad \text{pro } t = 8. \quad (5.20)$$

Výsledky pro všechny tři sady parametrů jsou uvedeny v tabulce 2.

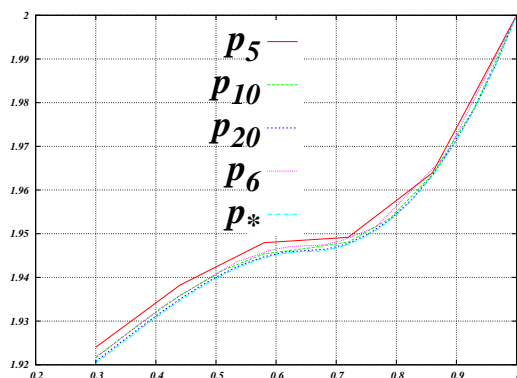
$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 2.2$	NSF	0.015728	0.001495	0.000398	0.004334
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.015728	0.001495	0.000398	0.004334
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 1.5$	NSF	0.022534	0.004524	0.002339	0.004251
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.022534	0.004524	0.002339	0.004251
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 0.5$	NSF	0.086679	0.051086	0.026415	0.005172
$\epsilon = 0.01$	NSFa	0.086679	0.051087	0.026415	0.005172

Tabulka 2

Profily rychlostí a tlaků vypočtených pro sadu parametrů S3 a pro všechna uvažovaná dělení sítě jsou vyobrazeny na obrázcích 12 a 13 (index v legendě u rychlosti a tlaku vyjadřuje řešení pro příslušnou síť).



Obrázek 12



Obrázek 13

Vyhodnocení: Tabulka ukazuje zhruba lineární pokles $W^{1,s}$ normy chyby vypočteného řešení v závislosti na zjemňování sítě pro $N = 5, 10, 20$. Implementace obou formulací dávají stejná řešení rychlosti a tlaku, které v čase konvergují k stacionárnímu řešení. V obrázku 12 rychlost pro triangulaci s $N = 6$ splývá s přesným řešením. Výpočet na síti $N = 6$ v sadě S3 parametrů ukazuje, že zjemnění v okolí singularity se projeví výrazným zvýšením přesnosti vypočteného řešení.

Přírůstek energie v ustáleném stavu

Protože vypočtená řešení (v, p, e) jak pro $\boxed{\text{NSF}}$ tak pro $\boxed{\text{NSFa}}$ jsou v čase $t = 8$ v rychlosti a tlaku ustálená, lze vyčíslit levou stranu rovnosti (4.34), tj. rozdíl

$$I_e := \int_{\Omega} e(t) \, d\Omega - \int_{\Omega} e(t - \Delta t) \, d\Omega \quad (5.21)$$

a ten porovnat s hodnotou

$$I_7 := \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \quad (5.22)$$

vypočtenou pro přesné řešení, viz (5.13). Tabulka 3 obsahuje pro tři sady parametrů a všechny čtyři triangulace vypočtené hodnoty rozdílu I_e z (5.21) a v posledním sloupci hodnotu I_7 vypočtenou v Matlabu z výrazu (5.22) pro analytické řešení dané předpisem (5.13).

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6	I_7
$\alpha = 2.2$	NSF	0.000504	0.000527	0.000533	0.000513	0.005355
$\epsilon = 0.0$	NSFa	0.000504	0.000527	0.000533	0.000513	
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6	I_7
$\alpha = 1.5$	NSF	0.000664	0.000678	0.000681	0.000670	0.006829
$\epsilon = 0.0$	NSFa	0.000665	0.000678	0.000681	0.000670	
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6	I_7
$\alpha = 0.5$	NSF	0.002566	0.002681	0.002740	0.002762	0.002772
$\epsilon = 0.01$	NSFa	0.002590	0.002695	0.002746	0.002765	

Tabulka 3

Vyhodnocení: Vezmeme-li v úvahu, že vypočtené rychlosti formulací $\boxed{\text{NSF}}$ i $\boxed{\text{NSFa}}$ jsou totožné, je patrný drobný rozdíl v řešení rovnice pro vnitřní energii obou formulací pouze pro sadu parametrů S3, a tento rozdíl se snižuje se zjemňováním triangulace.

Celková vnitřní energie v ustáleném stavu

Pro vypočtená řešení (\mathbf{v}, p, e) každé formulace je hodnota

$$\int_0^T \int_{\Omega} e \, d\Omega \, dt \quad (5.23)$$

uvedena v tabulce 4.

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 2.2$	NSF	0.035153	0.036747	0.037164	0.035777
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.035178	0.036760	0.037177	0.035796
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 1.5$	NSF	0.046914	0.047882	0.048096	0.047338
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.047055	0.047954	0.048170	0.047410
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 0.5$	NSF	0.183911	0.191290	0.194753	0.195982
$\epsilon = 0.01$	NSFa	0.185636	0.192486	0.195670	0.196851

Tabulka 4

Vyhodnocení: Se zjemňováním triangulace klesá rozdíl v celkové energii vypočtené z řešení formulace `NSF` a `NSFa`. Pokles rozdílu při zjemňování je zřejmě v důsledku poklesu chyby vypočtené rychlosti.

Výpočetní náročnost

Tabulka 5 obsahuje strojový čas (v sekundách), potřebný k vyřešení úlohy pro jednotlivé formulace, sady parametrů a zjemnění sítě.

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 2.2$	NSF	1872	7173	28513	24817
$\epsilon = 0.00$	NSFa	751	2808	11048	10920
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 1.5$	NSF	73	297	1302	816
$\epsilon = 0.00$	NSFa	29	129	600	390
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 0.5$	NSF	2512	9229	26852	19048
$\epsilon = 0.01$	NSFa	1585	4667	18026	11118

Tabulka 5

Vyhodnocení: Z tabulky 5 vyplývá, že výpočet užitím plné formulace rovnice pro energii je v průměru $2,5 \times$ pomalejší, než při použití alternativní formulace. Z porovnání rovnic (4.15) a (4.16) a z konstrukce objemových sil podle (4.55) plyne, že v rovnici (4.15) jsou dva členy se silnou nelinearitou ($\int_{\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{v}) \cdot \nabla \xi \, d\Omega$ a $\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \xi \, d\Omega$), zatímco v rovnici (4.16) pouze jeden ($\int_{\Omega} (\mathbf{T} : \mathbf{D}\xi) \, d\Omega$). Rovnice (4.15) má též víc nelineárních členů, které se všechny vypočítávají v každé časové vrstvě kvadraturními formulami s implicitně určeným stupněm kvadratury. Zároveň se ukazuje, že model s Newtonovskou tekutinou (mocninný model s $s = 2$) je řádově rychlejší.

5.2.2 Volba perturbace ϵ

Do funkce P ve vztahu (4.46) byl zaveden parametr ϵ , abychom se při výpočtech první derivace P' při numerické implementaci vyhnuli dělení nulou. Hodnotu parametru ϵ pro další výpočty jsme určili na základě následujících testů.

Pro mocninný model (5.11) a s hodnotou $s = 1.5$ jsme provedli sérii výpočtů, pro $\alpha = \frac{1}{2}$ a $\alpha = \frac{1}{3}$. Poznamenejme, že hodnota $s = 3/2$ je podle (4.2) hraniční pro ekvivalenci obou formulací rovnice pro vnitřní energii ve třídě řešení $L^\infty(0, T; W^{1,s}(\Omega)^2)$ a pro $\alpha = 1/3$ a $\epsilon = 0$ funkce \mathbf{v}_* již do prostoru $(W^{1,s}(\Omega))^2$ nepatří. Výsledky zachycují následující tabulky.

$N = 5$	$\alpha = 1/2$				$\alpha = 1/3$			
	NSF		NSFa		NSF		NSFa	
	I_a	I_e	I_a	I_e	I_a	I_e	I_a	I_e
ϵ^2								
10^{-2}					0.02349	0.00323	0.02349	0.00324
10^{-3}	0.06233	0.00252	0.06233	0.00254	0.10390	0.00358	0.10390	0.00363
10^{-4}	0.08667	0.00256	0.08667	0.00259	0.14835	0.00370	0.14835	0.00379
10^{-5}	0.08770	0.00282	0.08770	0.00279	0.16062	0.00467	0.16062	0.00463
10^{-6}	0.19964	0.00334	0.19964	0.00320	0.44832	0.00700	0.44829	0.00692
10^{-7}	0.39473	0.00425	0.39473	0.00397				

Tabulka 6

$N = 10$	$\alpha = 1/2$				$\alpha = 1/3$			
	NSF		NSFa		NSF		NSFa	
	I_a	I_e	I_a	I_e	I_a	I_e	I_a	I_e
ϵ^2								
10^{-2}					0.00619	0.00325	0.00619	0.00325
10^{-3}	0.01333	0.00260	0.01333	0.00261	0.02609	0.00383	0.02609	0.00384
10^{-4}	0.05108	0.00268	0.05108	0.00269	0.10465	0.00410	0.10469	0.00413
10^{-5}	0.05333	0.00287	0.05332	0.00286	0.10401	0.00488	0.10385	0.00482
10^{-6}	0.10859	0.00314	0.10853	0.00309	0.21248	0.00617	0.21272	0.00594
10^{-7}	0.13468	0.00324	0.13464	0.00318				

Tabulka 7

$N = 20$	$\alpha = 1/2$			
	NSF		NSFa	
	I_a	I_e	I_a	I_e
ϵ^2				
10^{-3}	0.00282	0.00262	0.00282	0.00262
10^{-4}	0.02641	0.00274	0.02641	0.00274
10^{-5}	0.04421	0.00281	0.04422	0.00281
10^{-6}	0.07997	0.00310	0.07993	0.00307
10^{-7}	0.17699	0.00352	0.17690	0.00344

Tabulka 8

Vyhodnocení: Všechny výpočty skončily časem $t = 8$ a řešení bylo stabilní. Jak plyne i z tabulek, příliš malé ϵ nemá smysl uvažovat, protože používané sítě neumožňují zachytit chování funkce P_ϵ v okolí poloměru \tilde{r} . To je patrné i z růstu relativní chyby I_a pro zmenšující se ϵ (srovnej s obrázkem 3). Na druhou stranu se zmenšujícím se ϵ roste rozdíl v přírůstcích energie I_e mezi oběma formulacemi, i když je rychlostní pole v obou případech prakticky stejné (viskozita v (5.11) je nezávislá na vnitřní energii). To je vysvětlitelné tím, že v rovnici bilance energie (4.15) se do výpočtů zahrnuje právě

strana \mathbf{f} , která je na ϵ závislá (viz (4.55), (5.7), (5.10)). V dalších výpočtech budeme volit hodnotu $\epsilon = 0.01$, tj. $\epsilon^2 = 10^{-4}$, pro kterou ovlivnění používanými zjemněními sítě i pro hodnoty $s = 3/2$ a $\alpha = 1/3$ není významné.

5.2.3 Volba konstanty A určující závislost viskozity na teplotě

Pokud uvažujeme konstitutivní vztah (5.12), který svazuje rovnici bilance hybnosti a energie, pak již neznáme analytické řešení ani pro rychlost a tlak. Systém je energetický izolovaný, dodáváme do něj energii formou objemových sil (a Dirichletovy okrajové podmínky), vnitřní energie systému vlivem nenulové viskozity vnitřní roste a tudíž viskozita klesá, musí při výrazném poklesu viskozity dojít k numerické nestabilitě výpočtů. Otázka je, jak se s tímto jevem vyrovnávají obě formulace v závislosti na hodnotě konstanty A ve vztahu (5.12), která určuje, kdy začne růst vnitřní energie významně přispívat ke snižování viskozity.

Protože zde již nemáme možnost srovnání výsledků s přesným řešením, uvedeme zde jiné charakteristiky výpočtů. V tabulce 9 je uveden konečný čas $t \leq 8$, dosažený během 6 hodin času vyhrazeného na výpočet a to pro dva časové kroky $\Delta t = 0.1$ a $\Delta t = 0.01$, a to pro obě formulace a sítě $N = 5, 10, 20$ při volbě $s = 3/2$, $\alpha = 1/2$ a $\epsilon = 0.01$.

Δt	N	NFS				NFSa			
		0.001	0.01	0.1	1	0.001	0.01	0.1	1
0.1	5	7.3	8	8	8	7.5	8	8	8
	10	4	4.5	7	7.2	4.1	5	7.5	7.5
	20	1	1.3	1.3	1.6	1.3	1.3	1.6	1.6
0.01	5	2.45	2.59	3.04	3.05	2.9	3.07	3.03	4.37
	10	0.55	0.62	0.74	0.74	0.73	0.75	0.75	0.75
	20	0.2	0.2	0.2	0.2	0.21	0.21	0.21	0.21

Tabulka 9

Abychom získali alespoň rámcovou představu o bodových hodnotách vnitřní energie e a tudíž o faktoru $A/(A + e)$ v (5.12), uvádíme v tabulce 10 hodnoty $\max_{\Omega} e(t)$ pro čas $t = 4$ pro oba modely při $\Delta t = 0.1$ a pro triangulaci $N = 10$, což jsou parametry vyvažující výpočetní náročnost a vypovídací schopnost výsledků.

Δt	NSF	NSFa
0.001	0.0292	0.0100
0.01	0.0307	0.0191
0.1	0.0305	0.0280
1	0.0306	0.0305

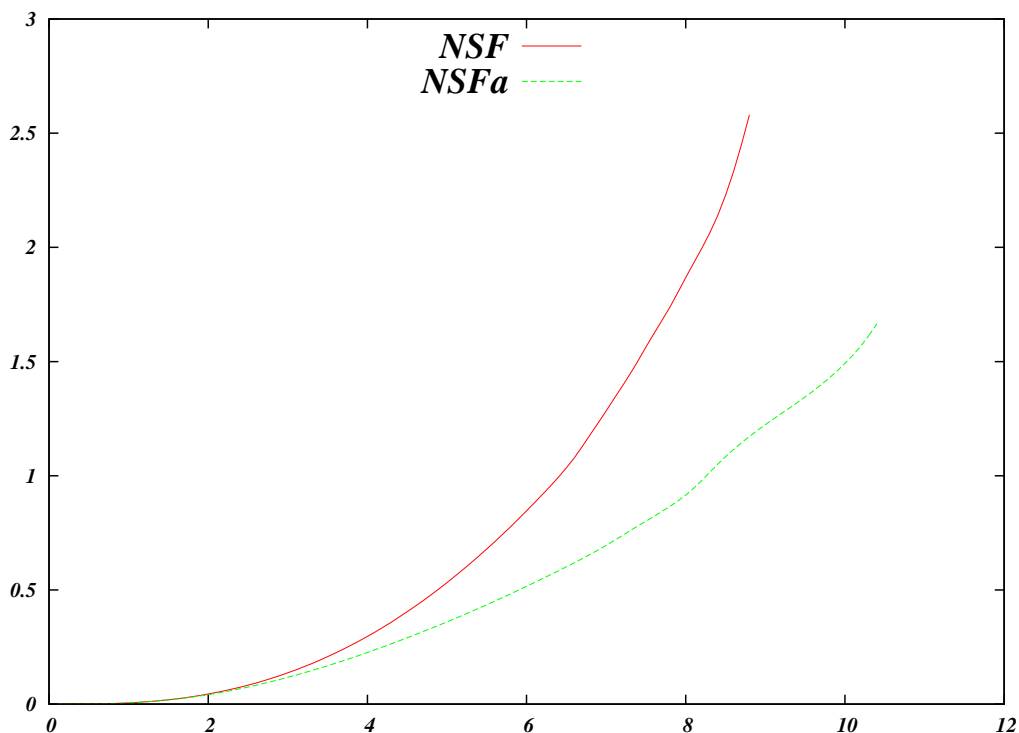
Tabulka 10

Vyhodnocení: V tabulce 10 opět pozorujeme významný rozdíl mezi oběma formulacemi bilance energie pro malé hodnoty parametru A . Na základě tabulek 9 a 10 budeme volit konstantu A ve vztahu pro viskozitu (5.12) v intervalu $[0.01, 0.1]$. Pro tyto hodnoty A a $T = 8$ očekáváme, že viskozita se bude měnit v důsledku růstu vnitřní energie alespoň o řád.

5.2.4 Trvale rostoucí objemové síly

V této části počítáme úlohu s trvale rostoucí objemovou silou a okrajovou podmínkou. Pro tyto účely volíme funkci $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3$ v (5.16) (viz též (4.53), (4.54) a (4.55)).

Obrázek 14 ukazuje časový průběh přírůstku energie I_e pro oba modely pro triangulaci $N = 10$ a parametry $s = 3/2$, $\alpha = 1/2$, $\epsilon = 0.01$, $A = 0.1$.



Obrázek 14

V levé polovině obrázku 15 je nahoře vykreslena vizualizace vektoru rychlosti v čase $t = 6$ získaného řešením systému $\boxed{\text{NSF}}$, v dolní polovině totéž pro systém $\boxed{\text{NSFa}}$. V pravé polovině je vykreslena numerická L^2 projekce výrazu

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} \quad (5.24)$$

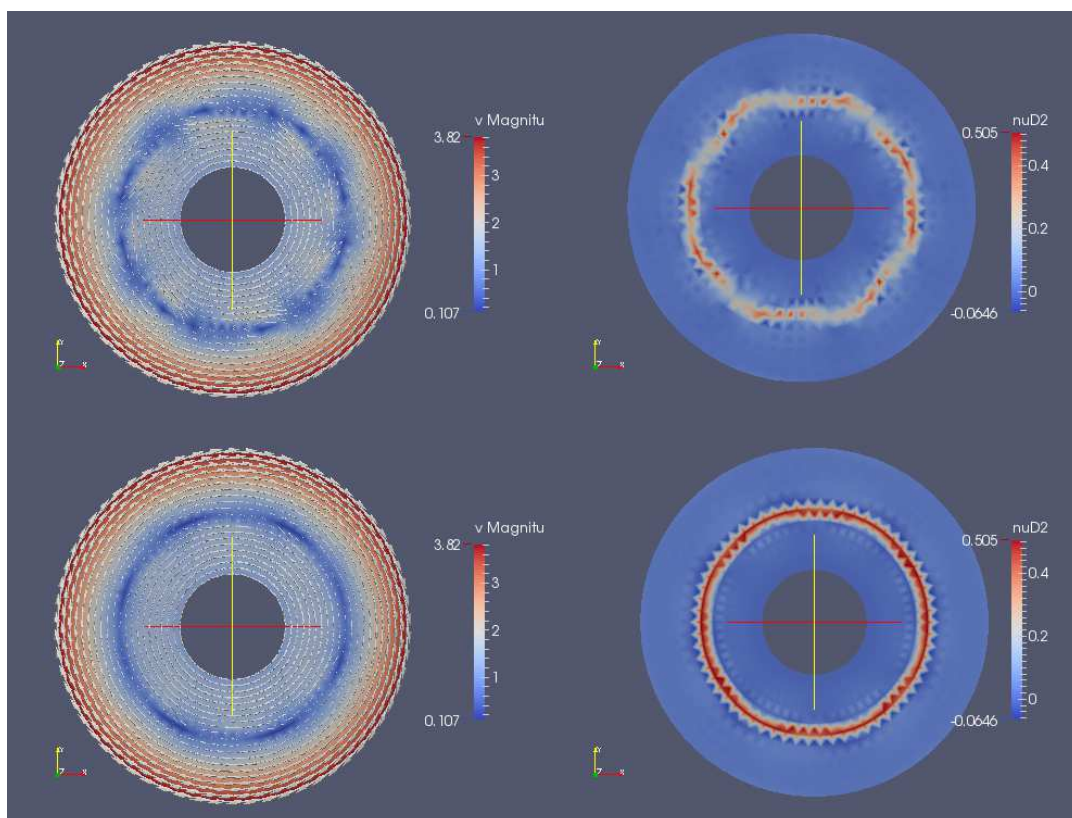
do prostoru P_1 konečných prvků, rovněž v čase $t = 6$. Projekci jsme zvolili proto, že výraz (5.24), který odpovídá přeměně kinetické energie na vnitřní energii tekutiny, je vzhledem k volbě konečných prvků P_2 pro rychlost nespojitý.

Vyhodnocení: Z obrázků je patrné, že v okolí kružnice s poloměrem \tilde{r} se objevují numerické nestability, které další výpočet znehodnotí.

5.2.5 Výsledky pro s z intervalu $[1.1, 1.6]$

V sekci 3.6 jsme ukázali, že pro existenci slabé formulace, respektive pro ekvivalenci formulací $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$ je rozhodující hodnota parametru s mocninného modelu. Proto zde otestujeme implementace obou formulací pro hodnoty $s \in [1.1, 1.6]$ s krokem 0.05 a ostatními parametry

$$\alpha = \frac{s-1}{s}, \quad \epsilon^2 = 0.001, \quad N = 10. \quad (5.25)$$



Obrázek 15

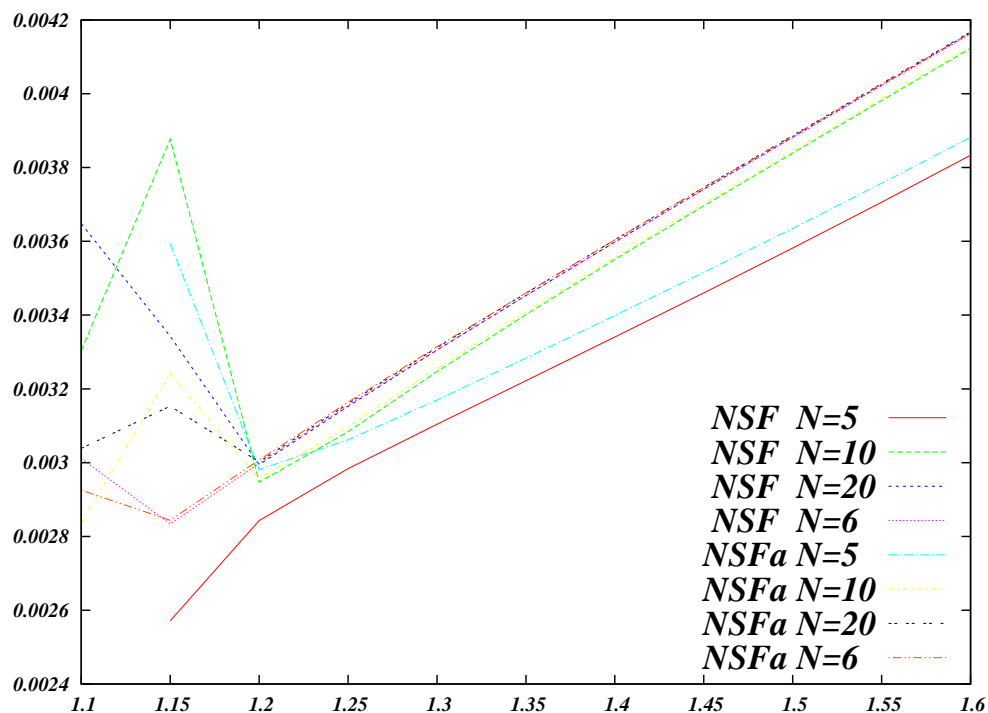
Pro tato data a konstitutivní vztahy (5.11) a (5.12) řešíme obě formulace a vyhodnotíme, zda je možné je dopočítat do času $T = 8$. Též nás bude zajímat, zda řešení je v tomto čase stacionární a jaké jsou přírůstky vnitřní energie v ustáleném stavu.

Konstitutivní vztah (5.11) — viskozita nezávisí na vnitřní energii

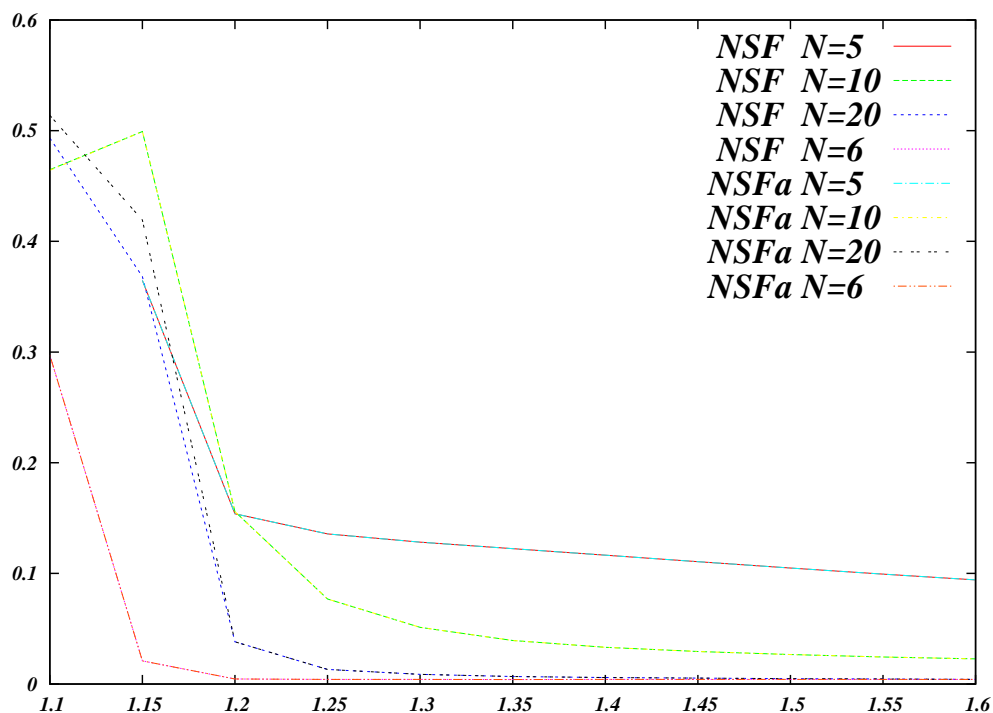
Pro lepší názornost jsem vykreslili hodnoty I_e ze vztahu (5.21) v závislosti na s pro všechny triangulace, viz obrázek 16 a podobně jsme vykreslili v obrázku 18 relativní chybu rychlosti I_a definovanou vztahem (5.20). V tabulce 11 uvádíme čas CPU potřebný pro výpočet na časovém intervalu $[0, 8]$.

	s	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55	1.60
NSF	N=5		48	41	41	40	40	40	40	40	42	41
	N=10	241	209	173	173	169	165	165	165	154	132	125
	N=20	732	722	647	575	467	462	483	449	480	446	467
	N=6	472	430	412	384	371	371	362	356	355	346	338
NSFa	N=5		33	28	28	28	28	28	29	29	29	28
	N=10	166	144	120	120	118	106	84	78	77	76	74
	N=20	648	533	452	302	292	293	291	298	301	300	292
	N=6	329	265	223	215	206	203	201	198	200	195	191

Tabulka 11



Obrázek 16



Obrázek 17

Vyhodnocení: Ze zobrazených výsledků vyplývá, že hranice $s = \frac{6}{5}$, pod kterou nelze definovat slabou formulaci bilance pro hybnost, se jeví významná i z pohledu numerické implementace. Poznamenejme ovšem, že kritická hodnota parametru α , pro kterou by už řešení nemělo ležet v prostoru $L^\infty(0, T; W^{1,s}(\Omega)^2)$ je v tomto smyslu „znehodnocena“ perturbačním parametrem ϵ . Z tabulky 11 CPU časů je patrný nárůst času potřebného na řešení úloh pro $s < 1.2$, což znamená pomalejší konvergenci Newtonovy iterační metody na každém časovém kroku.

Konstitutivní vztah (5.12) — viskozita závisí na vnitřní energii

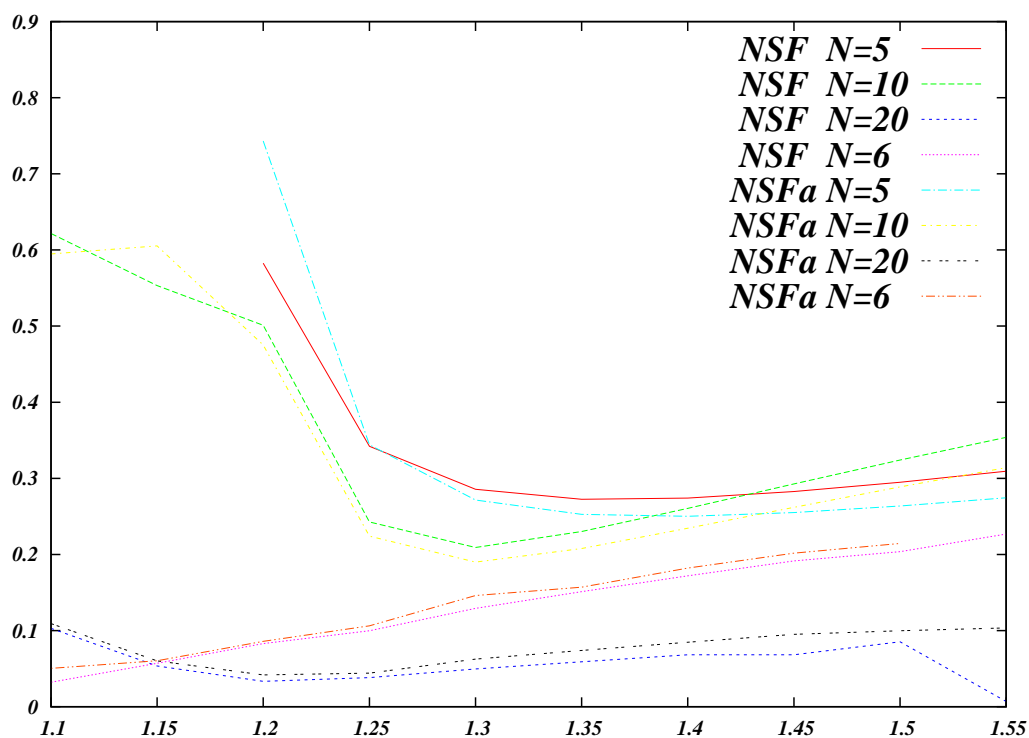
Postupujeme stejně jako v předchozím odstavci. V tomto případě ale nelze dosáhnout ustáleného stavu, neboť viskozita se trvale mění s rostoucí vnitřní energií.

Protože na rozdíl od předchozího případu byly některé výpočty ukončeny vyčerpáním povoleného CPU času (12 hodin). To je patrné z tabulky 12, ve které uvádíme dopočítaný čas t během povoleného CPU času na každý výpočet (12 hodin).

	s	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55
NSF	N=5	5.5	7.6	8	8	8	8	8	8	8	8
	N=10	6.5	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	N=20	3.2	3	3	3.2	3.3	3.3	3.3	3.1	3.3	1
	N=6	5	5.4	5.5	5.3	5.5	5.5	5.5	5.5	5.4	5.5
NSFa	N=5	4.4	6.5	8	8	8	8	8	8	8	8
	N=10	5.8	7.3	8	8	8	8	8	8	8	8
	N=20	3.4	3.4	3.6	3.5	3.8	3.8	3.8	3.8	3.7	3.6
	N=6	5.7	5.7	5.8	5.7	6.2	5.9	6	6	5.9	

Tabulka 12

Obrázek 18 zachycuje $\|\mathbf{v}\|_{1,s}$ řešení z poslední dopočítané časové vrstvy.



Obrázek 18

Vyhodnocení: Srovnáním s výpočty pro konstitutivní vztah (5.11) vidíme, že další nelinearita v konstitutivním vztahu zvyšuje časovou náročnost výpočtů. Jinak se zde neprojevuje rozdíl mezi formulacemi $\boxed{\text{NSF}}$ a $\boxed{\text{NSFa}}$.

5.3 Úloha U2

Tato úloha je totožná s úlohou U1 z předchozí sekce, jen je řešená v polárních souřadnicích. Proto při popisu numerických experimentů budeme postupovat rychleji a zdůrazňovat rozdíly proti úloze U1.

Triangulaci oblasti Ω_R na rozdíl od triangulace oblasti Ω pokrývá celou oblast a proto se zde nedopouštíme diskretizačních chyb.

Na oblasti $(0, T) \times \Omega_R$ (viz (4.4)) řešíme systémy $\boxed{\text{R-NSF}}$ a $\boxed{\text{R-NSFa}}$ uvedené v sekci 4.1 s viskozitou danou vztahy (5.11) a (5.12) a počátečními a okrajovými podmínkami jako v sekci 5.2 doplněnými o periodické podmínky pro rychlost a energii na hranici Γ_p

$$\bar{\mathbf{v}}(t, r, 0) = \bar{\mathbf{v}}(t, r, 2\pi), \quad \bar{e}(t, r, 0) = \bar{e}(t, r, 2\pi) \quad \text{na } (0, T) \times (r_0, r_1). \quad (5.26)$$

Ve slabé formulaci (4.18)–(4.21) je nutno uvažovat i objemové integrály, které vznikly integrací divergentních členů v (4.9)–(4.12) per partes při převodu divergence na testovací funkci.

Rovněž i v této úloze předepisujeme okrajovou bodovou podmínku předepisující v bodě $(r_1, 0)$ hodnotu tlaku 2, tj.

$$\bar{p}(t, r_1, 0) = 2.$$

5.3.1 Ověření implementace

Pro ověření správnosti numerické implementace jsme kvůli srovnání s výsledky z úlohy U1 zvolili stejné sady parametrů s , α , ϵ , jako v úloze U1, viz tabulka 1.

Relativní chyba rychlosti

V tabulce 13 jsou vyčísleny hodnoty relativní chyby (5.20).

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 2.2$	NSF	0.017142	0.001604	0.000419	0.004595
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.017142	0.001604	0.000421	0.004597
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 1.5$	NSF	0.026174	0.006539	0.003186	0.005365
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.026174	0.006539	0.003186	0.005365
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 0.5$	NSF	0.103446	0.052083	0.027297	0.046706
$\epsilon = 0.01$	NSFa	0.103446	0.052085	0.027387	0.055698

Tabulka 13

Vyhodnocení: Charakter výsledků je stejný jako u úlohy U1. Se zjemňováním triangulace klesá relativní chyba řešení I_a . Nicméně řešení úlohy v polárních souřadnicích nevedlo ke zmenšení relativní chyby řešení I_a a to ani na nejhrubší triangulaci, kde bychom to mohli očekávat vzhledem k hrubé náhradě oblasti Ω polygonem v úloze U1.

Přírůstek energie v ustáleném stavu

Přírůstky 5.21 vnitřní energie jsou uvedeny v tabulce 14 včetně hodnot odpovídajících analytickým řešením (tyto hodnoty jsou stejné jako v úloze U1).

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6	I_7
$\alpha = 2.2$	NSF	0.000536	0.000535	0.000535	0.000536	0.005355
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.000536	0.000535	0.000535	0.000536	
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6	I_7
$\alpha = 1.5$	NSF	0.000679	0.000683	0.000682	0.000682	0.006829
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.000679	0.000683	0.000682	0.000682	
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6	I_7
$\alpha = 0.5$	NSF	0.002584	0.002681	0.002746	0.002794	0.002772
$\epsilon = 0.01$	NSFa	0.002631	0.002694	0.002752	0.002828	

Tabulka 14

Vyhodnocení: Srovnání s výsledky v úloze U1 ukazuje, že výsledky při řešení úlohy v polárních souřadnicích jsou přesnější a lépe se blíží přesným hodnotám i na hrubých sítích.

Celková vnitřní energie v ustáleném stavu

Pro vypočtená řešení (\bar{v} , \bar{p} , \bar{e}) jsou hodnoty celkových energií $\int_0^T \int_{\Omega_R} \bar{e} \, d\Omega_R \, dt$ uvedeny v tabulce 15.

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 2.2$	NSF	0.039305	0.039256	0.017296	0.023741
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.037370	0.037322	0.024998	0.035751
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 1.5$	NSF	0.059056	0.059256	0.059234	0.059226
$\epsilon = 0.00$	NSFa	0.048089	0.048302	0.048255	0.048242
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 0.5$	NSF	0.346274	0.354042	0.182490	0.210795
$\epsilon = 0.01$	NSFa	0.187507	0.192485	0.033611	0.070796

Tabulka 15

Vyhodnocení: Tuto tabulku je nutno vyhodnocovat spolu s následující tabulkou 5 času CPU. Pro některé kombinace parametrů výpočet byl ukončen před dosažením koncového času $T = 8$. Hodnoty celkové energie na konci intervalu vykazují malou citlivost na zvolené triangulaci. Toto je zvláště patrné pro sadu parametrů S2.

Na rozdíl od úlohy U1 je celková energie počítaná ze systému [R-NSFa] nižší, než celková energie počítaná z [R-NSF]. U úlohy U1 tomu bylo naopak.

Výpočetní náročnost

Tabulka 5 obsahuje strojový čas (v sekundách), potřebný k vyřešení úlohy pro jednotlivé formulace, sady parametrů a zjemnění sítě.

$s = 4.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 2.2$	NSF	4700	18223	43454	43598
$\epsilon = 0.00$	NSFa	3558	13078	43269	43261
$s = 2.0$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 1.5$	NSF	112	394	1670	1096
$\epsilon = 0.00$	NSFa	65	232	1020	671
$s = 1.5$		N=5	N=10	N=20	N=6
$\alpha = 0.5$	NSF	12388	39758	43944	44462
$\epsilon = 0.01$	NSFa	9804	34147	43659	44307

Tabulka 16

Vyhodnocení: Kromě pozorování učiněného v úloze U1 o výrazně rychlejším výpočtu pro případ $s = 2$ z tabulky 16 plyne, že řešení úlohy v polárních souřadnicích způsobem, který jsme popsali v kapitole 4, je výrazně pomalejší, než v kartézských souřadnicích (pro sadu parametrů S3 až čtyřikrát). Zároveň je vidět, že se stírá náročnost výpočtů oběma formulacemi. V obou formulacích je více členů, které jsou v polárních souřadnicích náročnější na vyčíslení.

5.3.2 Trvale rostoucí objemové síly

Na obrázku 19 je vykresleno rychlostní pole v čase $t = 4$ z řešení systému NSF a obrázku 20 zobrazuje rychlostní pole v čase $t = 4$ z řešení systému NSFa. Oba výpočty probíhaly se stejnými okrajovými podmínkami jako v úloze U1.

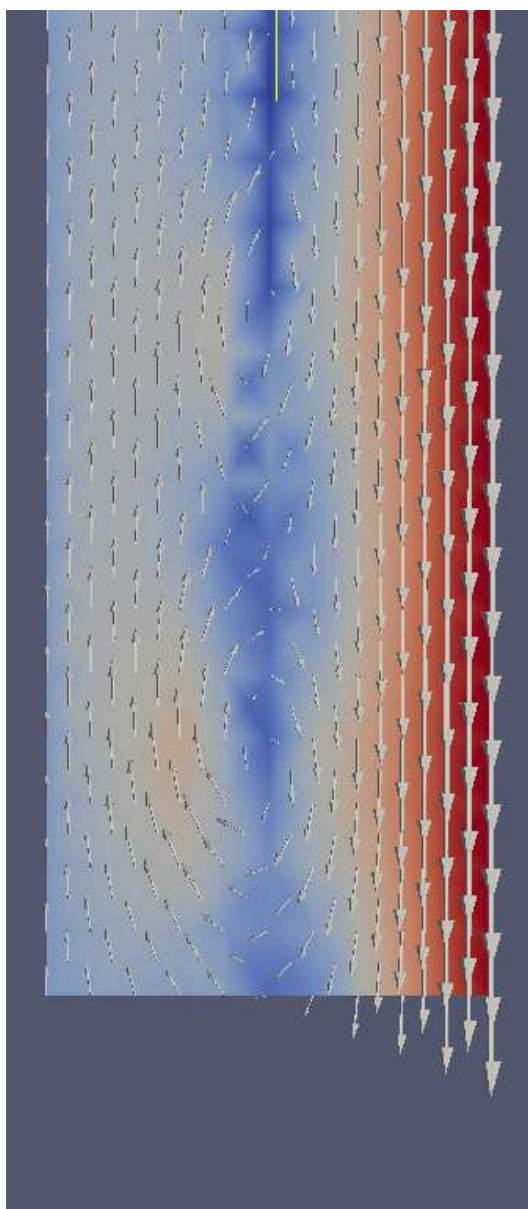
Vyhodnocení: Na rozdíl od úlohy U1, kde se odchylka od přesného řešení začíná objevovat najednou v okolí celé kružnice s poloměrem \tilde{r} a to až okolo času $t = 6$ (srovnej s obrázkem 15), ve vyjádření v polárních souřadnicích se objeví okolo času $t = 4$ a to nejdříve na periodické hranici a odtud se šíří dovnitř oblasti. Pro obě úlohy platí, že se tyto nestability objevují dříve v systému NSF.

5.3.3 Výsledky pro s z intervalu [1.1, 1.6]

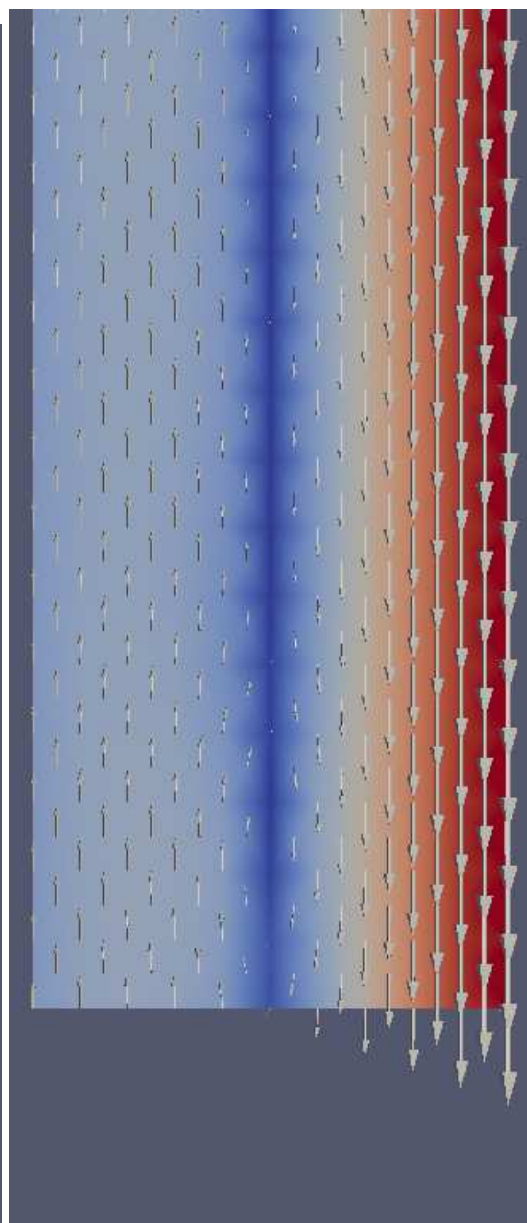
Pro oba typy konstitutivních vztahů (5.11) a (5.12) a oba systémy byly výpočty na jemnějších triangulacích natolik náročné, že je v limitu 12 hodin CPU nebylo možné dopočítat ani do času, ve kterém byly okrajové podmínky a objemové síly konstantní. Časy t dopočítané za 12 hodin CPU času jsou pro konstitutivní vztahy (5.11) v tabulce 17 a pro konstitutivní vztahy (5.12) v tabulce (18).

	s	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55
NSF	N=5	2.7	3.2	8	8	8	8	8	8	8	8
	N=10	3.1	3.6	4.5	5.1	5.5	6.5	6.9	7.2	7.3	7.5
	N=20	1.3	1.4	1.4	1.4	1.7	1.6	1.5		1.6	1.6
	N=6	2.1	2.2	2.3	2.3	2.3	2.2	2.3	2.3	2.5	2.7
NSFa	N=5	2.7	2.8	8	8	8	8	8	8	8	8
	N=10	3.5	4.2	5.3	5.9	6.8	7.8	8	8	8	8
	N=20	1.6	1.8	1.9	2.1	2.2	2.1	2.2	2.1	2.1	2.2
	N=6	2.6	2.8	2.9	3.1	3.1	3	3.1	3.1	3.3	3.5

Tabulka 17



Obrázek 19 Systém $\boxed{\text{NSF}}$.



Obrázek 20 Systém $\boxed{\text{NSFa}}$.

	s	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.55	1.6
NSF	N=5	3.7	4.4	5.4	6	6.6	7.4	8	8	8	8	
	N=10	1.7	1.7	1.8	2	2.1	2.1	2.2	2.2	2.2	2.3	
	N=20	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6	0.7	0.7	0.6	
	N=6	0.9	0.9	1	1	1	1	1	1	1	1	
NSFa	N=5	5.9	2.8	7.5	8	8	8	8	8	8		8
	N=10	2	2.3	2.7	2.8	3.4	3.5	3.8	3.9	3.8		3.9
	N=20	0.7	0.8	0.7	0.7	0.9	0.8	0.8	0.9	0.9		0.9
	N=6	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.2	1.2	1.3	1.4		1.4

Tabulka 18

Vyhodnocení: Výpočty pro $s \leq 2$ končily vyčerpáním povoleného počtu kroků Newtonovy iterační metody (10 kroků). Pokud jsme zde experimentovali se stupněm kvadratury, tj. předepsali jsme nižší, než byl automaticky volen v rámci FEniCSu, nikdy

jsme nedosáhli lepších výsledků. Zrychlili jsme průběh výpočtů, ale výpočty končily (a to i pro výpočty s hodnotou parametru $s > 1.2$) zpravidla divergencí Newtonovy iterační metody při řešení nelineární soustavy.

5.4 Úloha U3

Při formulaci této úlohy vycházíme z úlohy U2 zformulované v polárních souřadnicích, ve které nahradíme okrajovou předepsané rychlosti na hranici podmínkou dokonalého skluzu.

Na oblasti $(0, T) \times \Omega_R$ řešíme systémy $\boxed{\text{R-NSF}}$ a $\boxed{\text{R-NSFa}}$ s konstitutivními vztahy (5.11) a (5.12), počátečními podmínkami

$$\bar{\mathbf{v}}(0, \cdot) = \mathbf{0}, \quad \bar{e}(0, \cdot) = 0 \quad \text{na } \Omega, \quad (5.27)$$

okrajovými podmínkami pro rychlost

$$\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}), \quad (5.28)$$

$$(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{n}})_\tau = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}), \quad (5.29)$$

okrajovou podmínkou pro vnitřní energii

$$(\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{q}}) \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}), \quad (5.30)$$

která spolu s podmínkou (5.29) vede na podmínku

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial \bar{\mathbf{n}}} = 0 \quad \text{na } (0, T) \times (\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}). \quad (5.31)$$

Tyto podmínky implikují nulové hraniční integrály ve slabé formulaci. Protože tlak je v NSF systému určen až na konstantu, byla k okrajovým podmínkám přidána podmínka předepisující v bodě $(r_1, 0)$ hodnotu tlaku 2, tj.

$$\bar{p}(t, r_1, 0) = 2. \quad (5.32)$$

Výsledky pro s z intervalu [1.1, 1.6]

Protože počet stupňů volnosti je vyšší než u úlohy U2, (nárůst je dán uvolněním tečné složky vypočítávané rychlosti na hranici $\Gamma_{r_0} \cup \Gamma_{r_1}$), je časová náročnost výpočtů o něco větší než u úlohy U2 a v tabulce 19 uvádíme čas t poslední dopočítané časové úrovně za 12 hodin CPU času v závislosti na parametru s mocninného modelu.

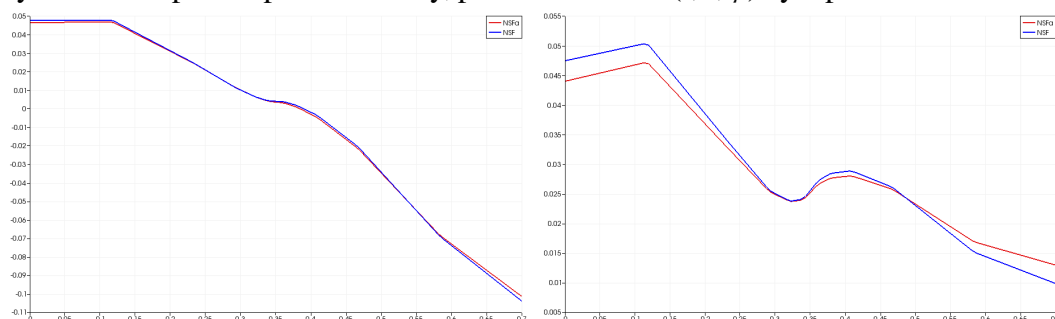
	s	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50	1.6
NSF	N=5	3.7	3.9	4	4.3	4.5	4.9	4.9	5.3	5.8
	N=10	1	1	1.1	1.1	1.2	1.2	1.3	1.2	1.3
NSFa	N=5	4.8	5.8	7	8	8.6	9.3	9.3	9.4	9.4
	N=10	1.2	1.3	1.3	1.4	1.4	1.5	1.8	1.7	1.8

Tabulka 19

Vyhodnocení: Pro další úrovně zjemnění jsou dosažené časy ještě nižší a proto výsledky nejsou vypovídající. Bližším zkoumáním, proč trvají výpočty tak dlouho, je patrné, že podstatná část času je spotřebovaná na numerickou kvadraturu metody konečných prvků. To je způsobeno velmi silnými nelinearitami a požadavkem na vyšší stupeň kvadraturních vzorců při numerické integraci.

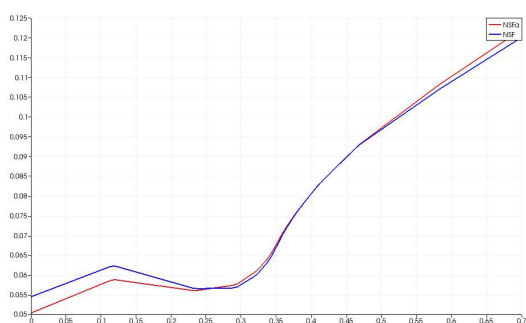
Vývoj profilu rychlosti pro dlouhé časy

Protože výpočet pro neceločíselný exponent s mocninného modelu je řádově náročnější než např. pro 2, spočítali jsme úlohu systém **R-NSF** tak i **R-NSFa** pro parametry $s = 2.0$ a $ar = 1.5$. Na následujících šesti obrázcích je znázorněn vývoj složky $\bar{v}(t, r, \varphi)$ rychlostního profilu pro různé časy, přičemž složka $\bar{u}(t, r, \varphi)$ byla po celou dobu nulová.

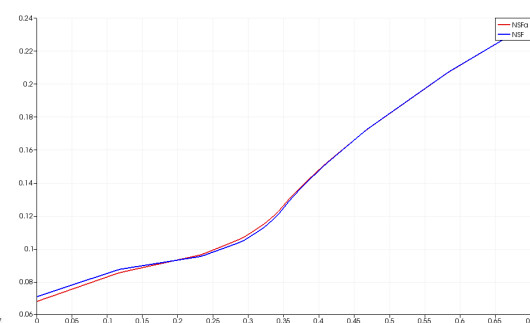


Obrázek 21 Čas $t = 1.5$.

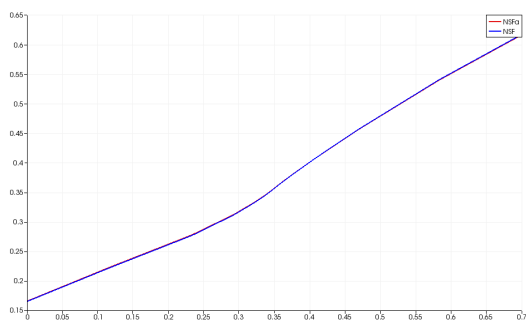
Obrázek 22 Čas $t = 3.5$.



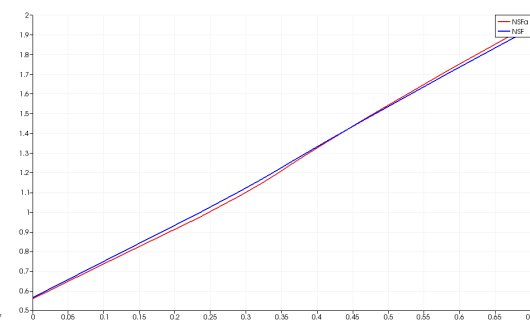
Obrázek 23 Čas $t = 6$.



Obrázek 24 Čas $t = 9$.



Obrázek 25 Čas $t = 20$.



Obrázek 26 Čas $t = 60$.

Vyhodnocení: Z výsledků vyplývá, že rychlostní profil pro obě formulace numericky konverguje k přímce (Couettovo proudění), což je očekávané. Tvar rychlostních profilů pro mocninné modely a tekutinu proudící v mezikruží je možné nalézt v [19]. Rychlost se neustále zvětšuje, protože tekutina je trvale poháněna objemovou silou a není ničím brzděna. Obě formulace se při této volbě parametrů chovají velmi podobně. I přes rozdíly na začátku časového intervalu, pro delší časy dávají totéž (co do profilu konstantní) rychlostní pole.

6. Závěr

V práci je studován mocninný model dvoudimenzionálního proudění nestlačitelné tekutiny pro viskozitu závislou na vnitřní energii a teplotě s cílem zkoumat výsledky získané pro dvě odlišné formulace bilance energie. V souladu s teoretickými výsledky, které zaručují pro různé intervaly parametru mocninného modelu existenci slabé formulace rovnic, existenci slabého řešení a ekvivalenci dvou formulací bilance energie, byl počítány úlohy s Navierovými podmínkami částečného skluzu pro obě formulace. Poznamenejme, že jen pro podmínky skluzu je existenční teorie známa (viz Věta 3.1).

Cílem numerických experimentů bylo dosáhnout nastavení parametrů řešených úloh tak, aby umožnily porovnat výsledky získané pro obě formulace rovnice bilance energie a to jak v situaci, kdy obě formulace jsou dobře definované a ekvivalentní, tak v případech, kdy teoretické výsledky jsou doposud otevřené a kdy lze spíše očekávat, že odlišné formulace bilance energie nebudou ekvivalentní. Poznamenejme, že matematicky korektní formulace, která je též z pohledu odvození rovnice bilance energie ve fyzice kontinua primární, není ta formulace, která je používána v aplikacích (inženýrské praxi) zabývajících se prouděním nestlačitelných tekutin.

Ve snaze odchylovat se od teoretických existenčních výsledků co nejméně, byla pro numerické úlohy zvolena jednoduchá geometrie mezikruží, která na jedné straně má dostatečnou hladkost požadovanou v teorii, na druhou stranu při přímé numerické implementaci je křivočarost hranice obecně zdrojem diskretizačních chyb. Řešení úloh pro okrajovou podmínku skluzu (předepsanou formou ulpívání na pohybující se hranici) na této oblasti pro vytvořený ansatz ukázalo, že oba modely dávají v širokém spektru parametrů na dostatečně jemné síti srovnatelné výsledky. Odlišnosti však existují. Primární rovnice bilance energie se jeví náchylnější na numerické fluktuační a vyžaduje více výpočetního času na sestavení nelineárních rovnic na jednotlivých časových úrovních. Na druhou stranu jen pro tuto formulaci máme oporu v teorii.

Ve snaze odstranit případný vliv diskretizačních chyb při aproximaci mezikruží polygonem byla v dalších úlohách využita transformace do NSF systému do polárních souřadnic. Zde se ukazuje, že na jednu stranu obě formulace pro zvolený ansatz dávají přesnější výsledek, na druhé straně transformací se zvětšil počet členů ve slabé formulaci a narostl čas potřebný na řešení (přesněji řečeno sestavování a řešení) rovnic. Zároveň je z výsledků patrné, že systém s formulací plné rovnice bilance energie byl náchylnější k numerickým fluktuacím.

V závěrečné úloze byla testovány různé parametry s podmínkou úplného skluzu. I zde byly patrné rozdíly mezi oběma formulacemi a také nárůst spotřeby výpočetního času pro obě formulace oproti předchozímu případu.

Při testování parametrů v úlohách byly nalezeny případy, kdy numerická implementace obou formulací rovnice bilance energie vykazovala rozdílné chování. Rovnice proudění kombinovaná s podmínkou skluzu není z pohledu numerické praxe běžně vyšetřována a i tato studie v této oblasti vyvolává zajímavé otázky, které mohou být předmětem dalšího výzkumu.

Literatura

- [1] About the FEniCS project. <http://fenicsproject.org/about/>. 1.6.2014.
- [2] Výpočetní cluster Sněžurka. <http://cluster.karlin.mff.cuni.cz/>. 1.6.2014.
- [3] BELENKI, L., BERSELLI, L., DIENING, L., AND RŮŽIČKA, M. On the finite element approximation of p-stokes systems. SIAM Journal on Numerical Analysis 50, 2 (2012), 373–397.
- [4] BIRD, R. B., CURTISS, C. F., ARMSTRONG, R. C., AND HASSAGER, O. Dynamics of polymeric liquids, 2nd ed., vol. 1–2. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [5] BOFFI, D., BREZZI, F., AND FORTIN, M. Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer, 2013.
- [6] BULÍČEK, M., FEIREISL, E., AND MÁLEK, J. A Navier-Stokes-Fourier system for incompressible fluids with temperature dependent material coefficients. Nonlinear Anal. Real World Appl. 10, 2 (2009), 992–1015.
- [7] BULÍČEK, M., GWIAZDA, P., MÁLEK, J., AND ŚWIERCZEWSKA-GWIAZDA, A. On unsteady flows of implicitly constituted incompressible fluids. SIAM J. Math. Anal. 44, 4 (2012), 2756–2801.
- [8] BULÍČEK, M., AND ULRYCH, O. Planar flows of incompressible heat-conducting shear-thinning fluids - existence analysis. Appl. Math. 56, 1 (2011), 7–38.
- [9] CONSTANTIN, P., AND FOIAS, C. Global Lyapunov exponents, Kaplan-Yorke formulas and the dimension of the attractors for 2D Navier-Stokes equations. Comm. Pure Appl. Math. 38, 1 (1985), 1–27.
- [10] FEFFERMAN, C. Existence & smoothness of the Navier-Stokes equation. Official problem description of the third Clay Mathematical Institute Millennium problem.
- [11] FEFFERMAN, C. Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation. http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf, Retrieved 30th September 2009.
- [12] FEIREISL, E. Dynamics of Viscous Compressible Fluids. Oxford University Press, 2004.
- [13] FEIREISL, E. Asymptotic analysis in thermodynamics of viscous fluids. In Nonlinear partial differential equations and hyperbolic wave phenomena. The 2008–2009 research program on nonlinear partial differential Academy of Science and Letters, Oslo, Norway. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2010, pp. 159–197.
- [14] FEIREISL, E., AND MÁLEK, J. On the Navier-Stokes equations with temperature-dependent transport coefficients. Differ. Equ. Nonlinear Mech. (2006), Art. ID 90616, 14 pp. (electronic).
- [15] FEIREISL, E., AND NOVOTNÝ, A. Singular limits in thermodynamics of viscous fluids. Advances in Mathematical Fluid Mechanics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.

- [16] FEIREISL, E., NOVOTNÝ, A., AND PETZELTOVÁ, H. On the existence of globally defined weak solutions to the Navier-Stokes equations. J. Math. Fluid Mech. 3, 4 (2001), 358–392.
- [17] HIRN, A. Finite element approximation of singular power-law systems. Math. Comput. 82, 283 (2013), 1247–1268.
- [18] HOLZAPFEL, G. A. Nonlinear solid mechanics. A continuum approach for engineering. Chichester: Wiley. xiv, 455 p. \$34.95/pbk, 2000.
- [19] HRON, J., LE ROUX, C., MÁLEK, J., AND RAJAGOPAL, K. Flows of incompressible fluids subject to Navier’s slip on the boundary. Comput. Math. Appl. 56, 8 (2008), 2128–2143.
- [20] LADYZHENSKAYA, O. The mathematical theory of viscous incompressible flow. New York - London - Paris: Gordon and Breach Science Publishers. XVIII, 224 p. (1969)., 1969.
- [21] LEMARIÉ-RIEUSSET, P. G. Recent developments in the Navier-Stokes problem, vol. 431 of Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
- [22] LERAY, J. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. Acta Math. 63 (1934), 193–248.
- [23] LIONS, P.-L. Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1998. Compressible models, Oxford Science Publications.
- [24] LOGG, A., MARDAL, K.-A., AND WELLS, G., Eds. Automated solution of differential equations by the finite element method. The FEniCS book. Berlin: Springer, 2012.
- [25] MARŠÍK, F. Termodynamika kontinua. Academia, Praha, 1999.
- [26] NAVIER, C. Sur les lois des mouvement des fluides, en ayant egard a l’adhesion des molecules. Ann. de Chimie 19 (1821), 244–260.
- [27] POISSON, S. D. Mémoire sur les Équations générales de l’équilibre et du moivement des corps solides élastiques et des fluides. Journal de l’École Polytechnique 13, 20 (1831), 1–174.
- [28] SAINT-VENANT, A. J. C. B. Note á joindre au mémoire sur la dynamique des fluides. C. R. Acad. Sci. 17 (1843), 1240–1243.
- [29] SEETON, C. Viscosity–temperature correlation for liquids. Tribology Letters 22, 1 (2006), 67–78.
- [30] SMALE, S. Mathematical problems for the next century. In Mathematics: frontiers and perspectives. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 271–294.
- [31] STOKES, G. G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. Trans. Cambridge Phil. Soc. 8 (1845), 287–305.

- [32] TEMAM, R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, second ed., vol. 68 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [33] TEMAM, R. Navier-Stokes equations. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2001. Theory and numerical analysis, Reprint of the 1984 edition.