

Oponentský posudek doktorské disertační práce

Mgr. Martin Rmoutil:

Exceptional Sets in Mathematical Analysis

Oponent: doc. RNDr. Ondřej Zindulka, CSc.

České vysoké učení technické v Praze, Fakulta stavební

Posuzovaná práce má standardní rozsah 90 stran. Je napsána anglicky. Sestává z úvodu a čtyř kapitol. Každá z kapitol obsahuje jeden článek. Tři z těchto článků již vyšly, jeden právě úspěšně prochází recenzním řízením.

Proberu stručně každou z částí, některé stručněji než jiné. Nedostatky uvádím jen namátkou, drobnosti většinou pomíjím. Všechny části s výjimkou úvodu koneckonců prošly recenzním řízením v renomovaných časopisech.

Introduction

První dvě části úvodní kapitoly jsou historickou expozicí. Ve třetí autor podává anotace oněch čtyř článků. Ačkoliv jde o část z odborného hlediska nejméně závažnou, autor mimoděk prozrazuje už v tomto úvodu mnohé své silné stránky i slabiny.

Je možná až příliš rozsáhlý, např. první polovina stran 3 a 4 mají jen slabý, pokud vůbec nějaký vztah k tématu práce. Autor se často pouští do vágních exposé a formulací, které nemají oporu, např. “*In mathematics, one often encounters the question of existence of certain objects*”, “*a number of philosophical questions, which we are not going to discuss here*”. Některá sousloví mají význam známý patrně jen autorovi (*non-differentiability “from above”*). Vyskytují se stylisticky pochybné konstrukce (*The obstacle [...] non- σ -upper porosity is in the presence of the “ σ ”*). Některé formulace jsou matoucí (*... Lebesgue null set in \mathbb{R}^2 which is not c -removable (we prove that such sets exist if we do not require zero measure)*).

Bylo jistě zbytečné uvést definici notoricky známého pojmu σ -ideálu (možná méně známý pojem první kategorie zaveden není).

Na str. 4 je uveden **Theorem Z**. Na str. 21 se ovšem objevuje úplně jiná věta se stejným označením. Je to důsledkem hektických změn dlouho po deadline.

Angličtina je bohatá a vysoká, ale je zatížena systematickými chybami (“... need to define what do we mean by...”) a bohemismy (... holds the well-known formula $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$). Stejnou představu o jazyku práce si čtenář udělá i při čtení jednotlivých kapitol, snad v výjimkou třetí.

Úvod je nicméně napsán zajímavě a svižně a plní svoji roli: uvádí i nezasvěceného čtenáře do problematiky a shrnuje obsah následujících kapitol v optimální míře.

Chapter 1

Tato kapitola obsahuje článek **Products of Non- σ -Lower Porous Sets**, který vyšel v *Czechoslovak Math.J.* 2013. Jeho autorem je M. Rmoutil.

Zabývá se kartézskými součiny množin, které nejsou σ -porous, resp. σ -lower-porous. Podle jedné Zajíčkovy věty součin dvou G_δ -množin v topologicky úplných metrických prostorech, které nejsou σ -porous, také není σ -porous. Autor se kromě σ -porous zabývá také σ -lower-porous množinami. Dokazuje obdobnou (leč mnohem snazší) větu, podle níž součin dvou Suslinovských množin v topologicky úplných metrických prostorech, z nichž jedna není σ -porous a druhá není σ -lower-porous, také není σ -lower-porous, a konstruuje příklad dokazující, že součin dvou uzavřených σ -lower-porous množin nemusí být σ -lower-porous.

Je s podivem, že se touto situací ještě nikdo nezabýval a je autorovou zásluhou, že do teorie porozity doplnil tyto přirozené výsledky.

Článek má také slabiny. Věty v odstavci 1.1 se vymkly číslování. Definition 1.2.1 by měla obsahovat odkaz. Remark 1.2.2 by měla splynout s Proposition 1.2.3 do stručného tvrzení σ -lower-porous sets form an F_σ -based σ -ideal a důkaz by se měl vynechat. Důkaz Proposition 1.2.4 by měl být odbyt odkazem na Baireovu větu o kategoriích, jíž je triviálním důsledkem. I důkaz Theorem 1.3.1 je zbytečně podrobný. Celkově je článek rozvleklý a tyto změny by mu daly přiměřenější rytmus. Pro čtenáře by bylo pohodlnější, kdyby se, v kontrastu s lower-porous, říkalo upper-porous místo porous.

Chapter 2

Tato kapitola obsahuje článek σ -Porosity is Separably Determined, který vyšel v *Czechoslovak Math.J.* 2013. Jeho autory jsou Marek Cúth a M. Rmoutil.

Autoři v tomto článku využívají metodu *elementárních podmodelů*, která se užívá už delší dobu, ale v poslední době prožívá renesanci. Do funkcionální analýzy ji teprve před pěti lety uvedl Wiesław Kubiś. Článek Marka Cútha *Separable reduction theorems by the method of elementary submodels. Fund. Math., 219(3):191–222, 2012* byl ideovým východiskem tohoto článku.

Cílem článku je dokázat tzv. *separabilní determinovanost* horní i dolní σ -porosity v Banachových prostorech: zhruba řečeno, na Suslinovské množině v Banachově prostoru se pozná, zda je (lower)- σ -porous podle toho, zda mají tuto vlastnost její stopy na velkých separabilních podprostorech. To samozřejmě umožňuje např. zobecnit některá tvrzení o σ -porositě v prostorech se separabilním duálem na Asplundovy prostory, což je nepochybně velice zajímavé. Článek je jasným důkazem, že metoda elementárních podmodelů je užitečná. Hlavní výsledky – Theorem 2.1.1 a Theorem 2.1.2 a hlavní aplikace na Asplundovy prostory Theorem 2.5.6 jsou nové a zajímavé.

Paradigma metody elementárních podmodelů je natolik odlišné od paradigmat reálné analýzy, že si zaslouží promyšlený a řádný výklad. Slabinou článku je podle mého názoru to, že Section 2, ve které se metoda vykládá, byla téměř doslova opsána z Cúthova výše uvedeného článku. Za velmi nedostatečné (tj. vůči čtenáři necitlivé) považuji zejména zavedení konstruktů *For any suitable elementary submodel M the following holds* a *Let us fix a (*)-elementary submodel*.

Namátkou uvádím některé další nedostatky. Vágní formulace *we need to know that many sets are elements of M* (před Lemma 2.2.2), nebo *Note, that this is exactly the moment, where we were unable to reduce the property of not*

being lower porous at a point (na konci Section 2.4). Proposition 2.2.7, Lemma 2.4.4 a Theorem 2.5.1 by si zasloužily pozornější formulaci. Str. 41₃: Tvzení [1, Corollary 4.13] je podstatným krokem v důkazu jedné z hlavních vět. Mělo by být tedy rozhodně uvedeno! Odstavec za důkazem věty 2.5.1 je formulován tak ledabyly, že se v něm nelze zorientovat. V Remark 2.5.2 se manipuluje bez definice s pojmem (g, c) -porous.

Chapter 3

Tato kapitola obsahuje článek **On Separable Determination of σ -P-Porous Sets in Banach Spaces**, který právě úspěšně prochází recenzním řízením. Jeho autory jsou Marek Cúth, M. Rmoutil a M. Zelený.

Tento článek rozvíjí techniku užitou v předchozím článku, je však napsán daleko pozorněji a jde do větší hloubky. Pracuje se s pojmem abstraktní *porosity-like relation*. Zavádí Suslinovské schéma, které je zároveň Foranovým systémem (tzv. *Foran-Zajíček scheme*). Výsledky o separabilní determinovanosti jsou jemnější a obecnější (Theorem 4.6). Jako v předchozím článku se aplikují na situace v Asplundových prostorech. Pozornost se věnuje pojmu *cone-small*, což je *porosity-like relation*. Srozumitelnou aplikací je Theorem 3.6.3: V Asplundově prostoru je množina nediferencovatelnosti spojitě aproximativně konvexní funkce na otevřené množině *cone-small*.

Jde o velmi zajímavý článek s množstvím netriviálních a nových postupů a zajímavými výsledky.

Dá se mu snad vytknout jen to, co předchozímu článku: nedostatečná expozice elementárních podmodelů — je zase opsána z Cútha. Jinak je napsán mnohem pozorněji a ačkoliv je mnohem techničtější, chyb jsem našel pomálu. V Lemma 3.4.4 má být místo $\overline{U}(y_{n+1}, r_{n+1}) \cap Y \cap Y$ jen $\overline{U}(y_{n+1}, r_{n+1}) \cap \overline{Y}$, protože Y je uzavřená. Tato chyba se opakuje ještě v důkazu. Ve formulaci lemmatu je *closed subset of it*, což zní divně. Question před koncem Section 5.5 má dva přísudky.

Chapter 4

Tato kapitola obsahuje článek **On Removable Sets For Convex Functions**, který vyšel v *J. Math. Anal. Appl.* 2014. Jeho autory jsou Dušan Pokorný a M. Rmoutil.

Na rozdíl od ostatních částí práce se nezabývá porositou. Navazuje na článek *Jacek Tabor and Józef Tabor, Extensions of convex and semiconvex functions and interally thin sets. J. Math. Anal. Appl., 365(1):43–49, 2010* o lokálně konvexních funkcích v euklidovských prostorech. Množina v \mathbb{R}^n je *interally thin*, pokud existuje hustá množina intervalů s ní disjunktních. V článku Taborů se ukazuje, že na uzavřenou *interally thin* množinu se dá jednoznačně rozšířit každá lokálně konvexní funkce definovaná na jejich komplementu (tzv. UEP *property*), a tážou se, zda lze toto tvrzení obrátit. Důležitým výsledkem Pokorného a Rmoutila je řešení tohoto problému Taborů — nalézají protipříklad. Dále zkoumají tzv. *c-removable* množiny v euklidovských prostorech, tj. množiny

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ takové, že každá funkce na \mathbb{R}^n , která je na komplementu A lokálně konvexní, je konvexní.

Článek a jeho výsledky jsou zajímavé, postupy jsou netriviální. Půvabné je využití integrálněgeometrické míry, to se moc často nevidí.

V článku se nijak neuvádí, jaký je vztah UEP *property* a *c-removable*. Jde o ústřední pojmy článku, zasloužily by si to. Rovněž vztah Proposition 1 a Theorem 1 by si zasloužil hlubší analýzu. V Section 4.4 by bylo třeba nějakého úvodního odstavce, čtenář musí pátrat, o co půjde. Totéž platí pro Section 4.5 — je hodně technická a nějak se v ní ztrácí, o co vlastně autorům jde.

Některé další nedostatky: Proposition 1, Theorem 1 a Theorem 2 se vymkly číslování. 8 řádků nad Theorem TT: *the last intersection* nedává smysl. Theorem TT: není zaveden pojem *locally convex*, ten se objevuje až v Section 4.2. Položka (2) na str. 72: *Once... , then...* není anglicky. Proposition 1: pojem *intervally thin in direction* je zaveden až za Proposition 1, ale zato dvakrát, podruhé v Definition 4.3.2. 8 řádků pod Proposition 1: Co znamená *essentially separately convex*? O 2 řádky níž: *“have a concave angle”* je naprosto vágní. *Among other signs, also from this fact it seems rather obvious that this theorem is far from being a characterization of c-removable sets* je vágní a nejasné. Poslední odstavec před Section 4.2 je ledabyly napsán, těžko se v něm orientovat. *... the crucial one is actually the second* je bohemismus. Zlom stran 76 a 77: Uniká mi, proč *then it is convex on a neighbourhood of any isolated point of N*.

Résumé

Předložená práce splňuje všechny náležitosti. Výsledky v ní obsažené jsou správné, zajímavé a nové. Autor prokázal svrchovanou schopnost tvůrčí a badatelské činnosti, jakož i schopnost výsledky této činnosti tlumočit ostatním. Nedostatky práce, ačkoliv jich není málo a nejsou zcela zanedbatelné, zdaleka nejsou zásadní a je třeba je přičíst autorově nezkušenosti. Jediná nejasnost se týká autorského podílu M. Rmoutila na třech ze čtyř článků, není však na mně, abych to posuzoval. To, že tři ze čtyř předložených článků mají alespoň jednoho spoluautora, však na druhé straně ukazuje, že M. Rmoutil má potenciál k badatelské spolupráci.

Bez nejmenších pochybností doporučuji práci k obhajobě.

Zároveň M. Rmoutila vyzývám, aby vypracoval slohové cvičení o významu slova *deadline*.

11. srpna 2014

Ondřej Zindulka