Posudek disertační práce Mgr. Martina Rmoutila

Disertační práce M. Rmoutila se skládá z úvodu a čtyř kapitol. Úvod je věnován historii problematiky související s pojmy malých množin a jejich aplikacemi, analýze problémů, které přicházejí v úvahu a popisu hlavních výsledků a metod, které lze nalézt v následujících kapitolách. Ve všech čtyřech kapitolách jde o texty článků nebo jejich dodatečné úpravy (např. na základě připomínek k článkům od oponentů). Články, které jsou obsahem či zdrojem pro kapitoly 1,2 a 4 byly již publikovány. Článek, který je až na drobnosti obsahem 3. kapitoly byl zaslán k publikaci. V kapitole 1 jde o část diplomové práce doktoranda. V kapitole 2 jde o práci společnou s M. Cúthem, na jejímž celém obsahu dle vyjádření M. Rmoutila oba autoři pracovali společně. V kapitole 3 jde o práci společnou s M. Cúthem a M. Zeleným. Dle M. Rmoutila náleží nové výsledky o Foranových systémech M. Zelenému a oba zbylí autoři měli společně hlavní podíl na aplikacích metody submodelů. V kapitole 4 jde o práci společnou s D. Pokorným a oba autoři pracovali společně zejména na důkazu vlastností příkladu, jehož studium navrhl M. Rmoutil. Částečný výsledek o Kochově křivce náleží druhému autorovi. Všechny tyto informace mám od M. Rmoutila a odpovídají tomu, co je mi známo z jiných zdrojů.

První kapitola se zabývá studiem pórovitosti zdola pro součin dvou podmnožin reálné přímky eventuálně obecnějších metrických prostorů. Hlavními výsledky jsou příklad množin $A, B \subset \mathbb{R}$, které nejsou σ-zdola pórovité, ale jejich součin v $\mathbb{R}^2$ ano a dále důkaz σ-zdola pórovitosti za předpokladu, že jedna z množin A a B není ani σ-pórovitá.

Kapitoly 2 a 3 jsou aplikací metody spočetných submodelů na věty o separabilní redukci pro různé varianty (σ-)pórovitosti, které jsou užitečné pro další aplikace zejména v diferencovatelnosti funkcí na Banachových prostorech.

V kapitole 2 je dokázáno např. to, že pro suslinovskou podmnožinu A Banachova prostoru X existují separabilní podprostory V prostoru X takové, že zároveň platí ekvivalence pro σ-pórovitost množiny A a její separabilní redukce $A \cap V$ a zároveň lze totéž říci o jejich σ-zdola pórovitosti. Druhým příkladem výsledku je to, že pro Banachovy prostory X, Y a $f : X \to Y$ existují separabilní podprostory V takové, že σ-pórovitost množiny bodů fréchetovské nediferencovatelnosti funkcí f a její separabilní restrikce $f \restriction V$ jsou ekvivalentní.

Kapitola 3 se zabývá podobnou problematikou pro další typy pórovitosti. Je zaměřená hlavně na aplikaci na tzv. kuželově malé (neboli jisté varianty pojmu σ-α-kuželově pórovité množiny pro všechna $\alpha \in (0,1)$). Důvodem je to, že tato pórovitost popisuje malost množiny bodů nediferencovatelnosti pro aproximativně konvexní funkce na separabilních Asplundových prostorech (výsledky L. Zajíčka), ale rozšíření na neseparabilní prostory vyžadovalo technicky náročnější užití metody submodelů než v předchozím zmíněné případy (kapitola 2).

Kapitola 4 se zabývá dvěma typy malosti uzavřených (kompaktních) podmnožin A prostorů $\mathbb{R}^d$. V jednom případě jde o A takové, že spojité funkce $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, které jsou lokálně konvexní na doplňku k A, jsou automaticky konvexní na celém $\mathbb{R}^d$ (c-removability). Ve druhém případě jde o A takové, že lokálně konvexní funkce f definované na doplňku A (resp. na $U \setminus A$ pro okolí U množiny A) lze lokálně konvexně rozšířit na $\mathbb{R}^d$ (resp. na U). Asi hlavním výsledkem je příklad podmnožiny $A \subset \mathbb{R}^2$, která není malá ve smyslu definovaném Jackem Taborem a Józefem Taborem a zároveň je malá ve smyslu rozšiřování lokálně konvexních funkcí na libovolná okolí U množiny A. Za tím účelem našli autoři postačující podmínky pro automatickou lokální konvexitu (c-removability), kterou lze pro jejich příklad množiny A použít. Navíc ukázali, že součin uzavřených množin kladné míry na přímce není c-removable. Na závěr kapitola obsahuje částečný výsledek o Kochově křivce a několik otevřených problémů.

Práce jsou publikované či zaslané k publikaci, tedy většina již prošla, v některém případě i důkladným, recenzním řízením. Přesto se zmíním o několika málo pozorováních, na základě kterých (podle mého názoru) bylo možné prezentaci výsledků trochu vylepšit. U práce v kapitole 4 dokonce autor reagoval na některé mé připomínky k článku tím, že jej pro účel disertační práce upravil.

Prosím o písemné vyjádření doktoranda k následujícím připomínkám (souhlas, nesouhlas se zdůvodněním, doplnění důkazu či oprava):

V kapitole 1 bych považoval z několika důvodů za vhodné umístit odstavce 1.4.5, 1.4.6, 1.4.8 do kapitoly 1.3 (užívají se tam a v kapitole 1.4 působí trochu nepatřičně).

V důkazu věty 1.3.1 se nejprve najde jádro A, B a pak se řekne, že šlo užít separabilní redukci, aby výsledné množiny byly uzavřené v celém prostoru. Přirozenější by bylo nejprve vepsat a pak uvažovat jádra?

Domnívám se, že alespoň některý z odhadů v důkaze věty 1.4.10 (asi 1.3) předpokládá $j \in J$. Je tomu tak? Pokud ano, prosím o důkaz nerovnosti.

Argument, že důkaz pro A_I by byl samozřejmě analogický by měl být doplněn argumentem, proč tomu tak je. Nejlépe, co přesně bylo podstatné vědět o J v důkazu pro A_J.

V kapitolách 2,3 se užívá metoda submodelů. Domnívám se ze svých dosavadních zkušeností se čtením příslušných článků, že způsob vyjadřování je alespoň pro některé čtenáře trochu zavádějící a že by mohlo být dobré zvážit užívání trochu jasnějších formulací. Např. v konvenci 2.2.3 bych uvítal náhradu "(the following holds ...)"tím, že jde o formuli s jedinou volnou proměnnou M. Naopak "libovolné"formule, o jejichž absolutnosti se mluví např. v Definici 3.2.2, asi M nesmějí jako volnou proměnnou obsahovat (ev.se musejí pro formulaci absolutnosti upravit?)? Formulaci např. v důkazu 2.2.9 "Let us fix a ... submodel M containing X such that $B, D \in M$ atd. bych rozuměl napoprvé, pokud by zněla např.: "Let us fix ... M. Let us further fix X metric, $B \subset X$, $D \subset B$ such that $X, B, D \in M$..."První formulace mi sugeruje dojem, že B a D jsou již dány z formulace tvrzení a X možná také. I ve znění tvrzení bych považoval za vhodné, aby bylo výraznější, že "the following"je tvrzení o M a všechny ostatní proměnné jsou kvantifikované např. pomocí M. Ač jde spíš o psychologickou záležitost, myslím, že každá změna, která by u dalších čtenářů předešla neporozuměním (byť možná kvůli jejich nechápavosti) je prospěšná a že je možná.

V kapitole 3 bych uvítal, kdyby definice pojmu "M is a pointwise $(R \leftarrow R')$-model"byla explicitně definována, např. stačí, že je to totéž jako "M is a pointwise $(\neg R' \rightarrow \neg R)$-model". (Byl jsem chvíli na pochybách, zda "Similarly"nemůže zahrnovat i nějakou přirozenou změnu v užití kvantifikátorů a jejich vymezení na X, resp. X_M, a zda nejde již o vlastnost, která zahrnuje jistou separabilní redukci.)

V důkazu prvního Claimu v 4.3 se užívá dvakrát, že platí nějaká nerovnost díky oddělené konvexitě. V prvním případě nevidím proč a prosím o vysvětlení. (Vidím jinou nerovnost, která by vedla též k potřebnému závěru, mám podezření, že uvedená nerovnost ani neplatí. Prosím o důkaz, ev. opravu a důkaz.)

Nejsem si jist, zda odhad na $\sum \delta_i$ ke konci důkazu lemmatu 4.5.1 se v aplikaci společně s posledním odhadem důkazu na (a) (resp. 1., jeden nově vzniklý překlep) neobjeví dvakrát (díky výskytu g_i i h_i v definici f)? Není třeba poloviční odhad na $\sum \delta_i$? (Nemám čas si to nyní rozmyslet podrobně.)

(V případě zájmu mohu dodat i několik nepřesných formulací a překlepů k předposlední verzi práce (nekontroloval jsem, zda zůstaly v poslední verzi), ale vzhledem k tomu, že práce jsou publikovány či zaslány k publikaci, nevidím k tomu vážný důvod.)

Prosím o zaslání uspokojivého písemného vyjádření k výše zmíněným bodům do konce srpna. Poté o tom budu informovat komisi pro obhajobu.

V takovém případě mohu naprosto zodpovědně prohlásit, že práce odvedená M. Rmoutilem prokazuje plně jeho způsobilost k samostatné vědecké práci se zajímavými původními výsledky a že tím dle mého názoru M. Rmoutil splnil požadavky pro udělení titulu PhD.

V Praze dne 8.8.2014

Doc. RNDr. Petr Holický, CSc.