Univerzita Karlova v Prahe
Fakulta sociálnych vied

Inštitút ekonomických štúdií

DIPLOMOVÁ PRÁCA

Mikroekonomické modelovanie správania sa na finančných trhoch – obchodovanie s derivátmi

Vypracovala: Viera Koľová
Konzultant: prof. RNDr. Jiří Hlaváček, CSc.
Akademický rok: 2005/2006

Za cenné rady, pripomienky a ochotu pomôcť pri riešení problémov spojených s touto prácou ďakujem prof. RNDr. Jiřímu Hlaváčkovi, CSc.

Prehlásenie

Prehlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne a použila len uvedené pramene a literatúru.

V Prahe dňa 22. 5. 2006

podpis študenta

Abstrakt

Finančné trhy predstavujú obrovský komplex, na ktorý má vplyv množstvo faktorov. Dôležité pre agentov na finančných trhoch je určiť spôsob predikcie budúcej spotovej ceny aktív a rizika, vyplývajúceho z ich pozície.

Finančné deriváty sú inštrumenty, ktorých obchodovanie s očakávaniami budúcich cien súvisí a sú používané buď na špekulatívne účely alebo na zaistenie sa proti riziku.

Black-Scholasová rovnosť slúži na stanovenie ceny opcie, avšak vychádza z viacerých nereálnych predpokladov.

Spôsob, ako cenu opcie určiť a pritom sa vyhnúť predpokladom u Black-Scholasovej rovnosti, je vychádzať zo zmeny bohatstva vypisovateľa opcií.

Abstract

Financial markets represent a large comlex with a lot of factors. What is for the agents, who are trading on the financial markets important, is to set a method of predicting the future spot price of the assets and the risk, resulting from their positions.

Financial derivatives are instruments, those trading depends on the future spot prices predictions and are used for speculative purposes or for hedging.

Black-Scholes equation implies the option price, but concludes some not real assumptions.

The way, how to determine the option price and to avoid the assumptions in Black-Scholes equation, is to start from the option writer' variation of wealth.

Obsah

1. Úvod

Finančné trhy predstavujú komplex, ktorý je ovplyvňovaný viacerými podnetmi. Čo je však pre agenta obchodujúceho na finančných trhoch najdôležitejšie, je snaha o čo najpresnejšiu predikciu budúcej tržnej ceny aktív. Jednak z dôvodu uskutočnenia výhodných obchodov a jednak preto, aby sa prípadným budúcim nepriaznivým situáciam mohol agent vyhnúť.

Práca rozoberá správanie sa na finančných trhoch a kladie hlavne dôraz na to, aký vývoj sa dá očakávať u zmien cien. To je následne prepojené aj s predvídaním rizika. Ide len o to, aká forma vyjadrenia rizika je najvernejšia.

Inštrumenty ako FRA kontrakty, swapy, opcie, forwardové a futuritné kontrakty sú finančné deriváty, ktorých použitie je spojené s predikciou budúcich tržných cien. Práca bližšie určuje podrobnosti jednotlivých kontraktov a popisuje zámery, ktoré sa dajú kontraktmi dosiahnuť.

Ďalšia časť práce sa sústreďuje výhradne na opcie, keďže ide o inštrument, kde sa stanovuje aj jeho cena. Cieľom je dospieť k odvodeniu stanovenia reálnej ceny opcie, teda ceny, akú by mal vypisovateľ za opciu žiadať.

Vychádzať sa najprv bude z Black-Scholasovej rovnosti. Snahou je ukázať cestu, akou sa k rovnosti dospeje, čo sa z nej dá vyčítať a poprípade ukázať, aké nedokonalosti za rovnosťou stoja.

V závere je zobrazený iný spôsob odvodenia reálnej ceny opcie, tak aby sa predišlo niektorým nedostatkom Black-Scholasovej rovnosti. Súčasťou tejto kapitoly je stanovenie rizika, ktoré pre vypisovateľa opcií, ako z pozície vypisovateľa, vyplýva a jeho porovnanie s rizikom v prípade odvodenia z Black-Scholasovej rovnosti.

2. Finančné trhy

Finančné trhy predstavujú obrovský celok, na ktorý má vplyv obrovské kvantum faktorov. Pozorovaniami môžeme zistiť, k akým tendenciám finančné trhy smerujú pri zmene určitých podmienok. Najdôležitejšie, čo nás pri všetkých týchto zmenách na trhu zaujíma, je v konečnom dôsledku aktuálna spotová cena aktív, teda momentálna, aktuálna cena na trhu. Kladie sa ale otázka, či existuje vôbec možnosť predikcie, ako sa bude aktívum vyvíjať, keďže vývoj ovplyvňuje obchodovanie s aktívom, založené na preferenciách účastníkov finančných trhov a dôležitú úlohu tu zohráva čas a načasovanie si jednotlivých rozhodnutí alebo akcií.

Všetci máme rozličné časové horizonty, kapitál, ktorým disponujeme, rôzny prístup na trh a taktiež odlišnosť vnímania transakčných nákladov a potenciálneho rizika. Ale s určitosťou máme všetci spoločný cieľ, a to že nechceme stratiť peniaze.

Naše správanie sa nezakladá len na tom, aby sme aktívum zakúpili (resp. predali), dúfajúc, že jeho spotová cena v budúcnosti vzrastie (resp. klesne). Ale chceme tiež na finančných trhoch odhadnúť budúce riziko, ktoré z našej súčasnej pozície vyplýva a poistiť sa proti nemu.

2.1. Finančné centrá

Finančné centrá sú miesta, kde sa stretáva dopyt po finančných službách. Centrá navzájom súťažia na svetovom trhu so snahou, aby sa na domácom trhu udržali. Ak sú úspešné, zvýši sa príliv zahraničných investícií a vzniknú nové pracovné miesta. Domácej ekonomike môžu pomôcť investíciami s vysokým výnosom.

Najdôležitejšou úlohou finančného centra je presun fondov a tovaru od účastníkov trhu s prebytkom, k účastníkom s deficitom a to najviac efektívnou cestou. Aby bol tento prevod efektívny, musia finančné trhy ponúkať širokú škálu produktov, tak aby sa čo najbližšie trafili do presných požiadaviek svojich klientov.

Deriváty vznikli z potreby eliminovať prílišné riziko, za čo sú agenti ochotní i zaplatiť. Časom dochádza k postupnému vývoju finančných derivátov, finančných nástrojov, ktoré vznikajú odvodením od produktov obchodovaných na spotovom trhu. Na prelome 20. a 21. storočia dochádza k prudkému rozmachu obchodov s finančnými derivátmi. Jednak z dôvodu zvýšenej volatility úrokových sadzieb, menových a akciových kurzov a jednak z dôvodu rozvoja moderných metód riadenia investičných rizík.

Trhy sa členia na primárne a sekundárne. Rozdiel je v tom, že kým na primárnom trhu je možné obchodovať len s novovydanými aktívami, na sekundárnom trhu sa obchoduje už s existujúcimi aktívami. Pod názvom finančné trhy označujeme práve sekundárne trhy a obchoduje sa na nich s finančnými aktívami.

Majiteľ vydaním aktíva benefituje priamo z jeho predaja na primárnom trhu. Z predaja na sekundárnom trhu však už neprofituje nič, ale aj tak je pre neho sekundárny trh dôležitý. Ukazuje mu totiž, akú cenu sú kupujúci za dané aktívum ochotní zaplatiť. Majiteľ aktíva potom môže odhadnúť, koľko by ďalším vydaním aktíva na primárnom trhu získal. Sekundárne trhy zabezpečujú likviditu aktív. Bez existencie možnosti opätovného predaja aktív by ceny na primárnom trhu poklesli.

Na finančných trhoch sa stretávajú tri typy agentov: kupujúci, predávajúci a agenti, ktorí ich na trhu zjednocujú. Patria sem brokerské firmy, tvorcovia trhu a regulátori trhu. Brokeri spájajú investora s vhodným finančným aktívom, za čo si môžu nárokovať určitú finančnú odmenu. Tvorcovia trhu sa zasa snažia aktíva nakúpiť a opätovne ich na trhu predať, s cieľom dosiahnutia čo najvyššieho zisku z rozdielu medzi nákupnou a predajnou cenou. Ak je na trhu prebytok predávajúcich, tvorcovia trhu môžu cenu aktíva posunúť smerom dolu a naopak. Ak prevyšuje počet kupujúcich, cena sa môže vďaka nim posunúť smerom nahor. Regulátori trhu sa starajú o správnu výkonnosť trhu a zaručujú určitý stupeň jeho stability. A to napríklad tým, že sa zastaví obchodovanie aktív, ktoré prekročia stanovené cenové limity. Zastavením obchodovania sa očakáva upokojenie trhu s danými aktívami.

Investorov, ktorí vyhľadávajú operácie na finančných trhoch, môžeme zaradiť do troch skupín. Tie sa líšia podľa toho, z akého dôvodu investori na trh vstúpili a podľa toho, aký výnos z investície očakávajú vzhľadom k riziku.

Špekulátori vstupujú na trh z dôvodu zisku. Nakupujú, podľa ich názoru podhodnotené aktíva a tie v budúcnosti predávajú, ak si myslia, že ide o nadhodnotené ceny. Tieto operácie sú založené na investorových očakávaniach. Tie však môžu byť u investorov odlišné a investor podstupuje riziko, že sa jeho očakávania nesplnia.

Zaisťovatelia nepodnikajú na finančných trhoch operácie kvôli obdržaniu zisku, ale pretože im ide o poistenie si svojho portfólia. Preto nakupujú a predávajú finančné aktíva tak, aby prípadné nepriaznivé vplyvy na ich portfólio boli tlmené pozíciou na finančných trhoch.

Na finančných trhoch sa môžu objaviť aj agenti, ktorým ide o arbitrážny obchod. Arbitráž je operácia, ktorá vedie k zisku za podmienok nulového rizika. Agent zakúpi aktívum na trhu s nižšou cenou a na trhu s vyššou cenou ho predá. Tak si zaručí zisk bez podstúpenia akéhokoľvek rizika. V skutočnosti ale takéto arbitrážne situácie vznikajú len zriedka a ak sa vôbec vyskytnú, ceny na trhoch sa obchodovaním upravia veľmi rýchlo tak, aby arbitráž nebola možná.

Investori svoje obchody realizujú na finančných trhoch pomocou brokerov. Tým zadávajú svoje pokyny, ktoré môžu byť nepodmienené (investor zadá brokerovi v určitý moment príkaz na vykonanie) alebo podmienené (investor zadá brokerovi príkaz, aby konal, ak cena aktíva dosiahne danú hodnotu). Za akú cenu však budú príkazy napokon skutočne uzatvorené, závisí na zosúladení dopytu a ponuky.

Ide o to, že investori vstupujú na finančný trh zadaním príkazov, ku ktorým dospájú na základe všetkých informácií, ktoré až do doby zadania príkazu majú. Príkazy následne obdržia brokeri, ktorí ich zaevidujú u tvorcov trhu. Tí určia prevyšujúci dopyt a na tomto základe stanovia novú cenu, podľa ktorej sú príkazy aj uskutočnené. Čím je dopyt od ponuky vyšší, realizačná cena obchodu sa zvyšuje. Ak pribúda počet predávajúcich, cena naopak klesá. Investori následne na to opäť určia svoje obchodné rozhodnutia, podložené na nových informáciach.

Tvorcovia trhu po obdržaní všetkých príkazov od brokerov stanovia nákupnú (p_N) a predajnú (p_P) cenu a vykonajú všetky príkazy, ktoré sú nepodmienené cenou, ako aj všetky podmienené (tzv. limitované) príkazy: kúpiť, ak je p_N menšie ako zákazníkom stanovený limit, predať, ak p_P je vyššie ako zákazníkom stanovený limit. Hoci tvorcovia trhu chcú profitovať z rozdielu medzi nákupnou a predajnou cenou, ich prvotným záujmom je sprostredkovať čo najviac príkazov a tým zabezpečiť likviditu trhu. Tým, že po vykonaní všetkých príkazov sa tvorca trhu môže ocitnúť v situácii, kedy má buď prebytok alebo nedostatok aktív, ocitol by sa vlastne v nechcennej situácii špekulátora. Pri stanovovaní nových cien sa aj táto skutočnosť berie do úvahy.

2.2. Štandardná finančná teória

2.2.1. Hypotéza efektívnych trhov

Podľa hypotézy efektívnych trhov sú finančné aktíva v každom momente ocenené tak, že zohľadňujú všetky dostupné informácie. Mnoho investorov finančné aktíva nakupuje len preto, že si myslia, že ich skutočná hodnota je väčšia ako nákupná cena a aktíva predávajú, pretože si myslia, že ich aktuálna predajná cena je nižšia ako ich skutočná hodnota. Avšak pri existencii efektívneho trhu všetky ceny presne zodpovedajú aktuálnej hodnote aktív. A preto na efektívnych trhoch nemôže nikdy nastať možnosť arbitráže. Avšak efektívny trh je podobná modelová abstrakcia ako dokonalá konkurencia, teda v realite v čistej podobe neexistuje.

Efektívny trh môžeme zadefinovať ako trh s veľkým množstvom racionálnych agentov, ktorí sa snažia o maximalizáciu svojho zisku na základe čo najpresnejšej predikcie budúcich cien aktív. Agenti majú vždy voľný prístup k dôležitým aktuálnym informáciam.

Existujú tri druhy hypotézy efektívnych trhov:

1. *slabá forma*: ktorá tvrdí, že aktuálne ceny aktív v sebe zahrňujú všetky minulé údaje a ceny na trhu,

2. *semi-silná* forma: tvrdí, že aktuálne ceny aktív v sebe zahrňujú všetky verejne dostupné informácie

3. a *silná forma*: tvrdí, že aktuálne ceny aktív v sebe zahrňujú absolútne všetky existujúce informácie.

Preto, čím je hypotéza silnejšia, tým menej môžeme hovoriť o spôsobe využitia nejakej metódy na predikciu budúcich cien aktív, hoci práve správne predikcie sú tým, čím môže agent svoje postavenie na trhu optimalizovať.

Hypotéza efektívnych trhov zastáva názor, že ceny pri vývoji neopakujú určitý trend a nie je možné na základe starých cien predpovedať ceny budúce. Ceny sa teda podľa tejto hypotézy vyvíjajú náhodne podľa vzniknutých, a všetkým známych, okolností. Sledujú takpovediac náhodnú prechádzku.

Paradoxne, aby však efektívny trh mohol aj fungovať, musia existovať agenti, ktorí veria, že trh efektívny nie je. Iba v prípade tohto presvedčenia o neefektivnosti trhu sa na trh vydajú, pretože chcú nájsť priestor na realizáciu zisku. V opačnom prípade by k obchodovaniu na trhu vôbec nedochádzalo. Agenti, veriaci, že o efektívny trh ide, by na takomto trhu len zaujali pozície kvôli potrebám ich portfólia. Najčastejšie by išlo o možnosť poistenia svojho portfólia.

2.2.2. Náhodná prechádzka

Vývoj tržných cien finančných aktív stojí ako prvé v pozornosti účastníkov finančných trhov. Zaujímajú nás preto vlastnosti cenových zmien Δx_i aktív v čase i, konkrétne nezávislosť a rozdelenie cenových zmien.

Nezávislé premenné sú pevne dané. Hodnota takejto premennej sa nedá odvodiť vzťahom iných premenných. Ak by to možné bolo, išlo by už o závislú premennú. Vzájomná nezávislosť premenných jednosmerne (teda neplatí obrátene) implikuje aj ich vzájomnú nekoreláciu.

Premenné sú identicky rozdelené vtedy, ak majú všetky to isté pravdepodobnostné rozdelenie (hustotu), teda každému prvku z prípustnej množiny priradia rovnakú pravdepodobnosť a to za podmienok,

1. $0 < P(\Delta x_i^{\,1})$: pravdepodobnosť, že v čase i nastane cenová zmena $\Delta x_i^{\,1}$, z prípustnej množiny všetkých možných cenových zmien (Ω), je nezáporná,
2. $P(\Omega) = 1$: súčet pravdepodobností všetkých možností prípustnej množiny je jedna,
3. $P\left(\Delta x_i^{\,1} \cup \Delta x_i^{\,2} \cup \Delta x_i^{\,3}\right) = \sum_{n=1}^{n=3} P\left(\Delta x_i^{\,n}\right)$: pravdepodobnosť, že v čase i sa cena aktíva zmení o veľkosť Δx_i^1, Δx_i^2 alebo Δx_i^3, je súčet ich pravdepodobností.

Štandardná finančná teória zastáva názor, že cenové zmeny sú nezávislé a identicky rozdelené premenné, teda i.i.d. (independent and identically distributed).

2.2.3. Pravdepodobnostná distribučná funkcia

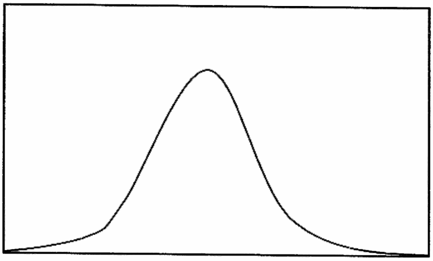
Rozhodovacím mechanizmom, ako sa agenti v konečnom dôsledku na finančných trhoch správajú, sú ich predpoklady o budúcich cenových zmenách. Na to, aby sme vedeli, aký cenový vývoj sa dá v budúcnosti očakávat, nám môže pomôcť pravdepodobnostná distribučná funkcia (PDF) cenových zmien.

Táto funkcia priradí všetkým možným cenovým zmenám pravdepodobnosť ich výskytu pri ďalšej zmene ceny. Ak staviame prepoklad, že cenové zmeny sú i.i.d., graf pravdepodobnostnej distribučnej funkcie je stredovo symetrický okolo strednej hodnoty, kde je pravdepodobnosť výskytu najväčšia. Avšak nemusí zodpovedať reálnej situácii. Napríklad, pri jednom hode mince môže padnúť buď hlava alebo rub, čo predstavuje ½ pravdepodobnosť, že padne hlava a my sa z miesta (0 krokov) posunieme o 1 krok dopredu a ½ pravdepodobnosť, že padne rub a my sa o 1 krok posunieme späť.

V takomto prípade leží stredná hodnota nášho pohybu na bode 0: ½(+1) + ½(-1) = 0, čo ale nie je prípustný výsledok.

Cenové zmeny môžu byť buď spojité alebo diskrétne veličiny. Podľa toho je aj potom pravdepodobnostná distribučná funkcia spojitá alebo nie. Graf PDF u diskrétnych veličín sa zahusťuje rastom počtu operácií (napr. opakovanie hádzania mince), až v nekonečnu prechádza do spojitosti.

Tieto pravdepodobnostné distribučné funkcie môžeme popísať dvoma druhmi funkcií, a to Gaussianovou a Lorentzianovou PDF, znázornenými na obrázku č. 1. Podstatným rozdielom medzi nimi je to, že jedine Gaussianová PDF má rozptyl konečný a tak s ním môžeme pracovať ďalej.



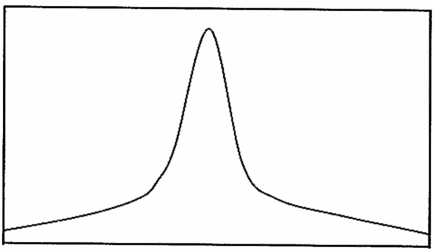
$p[\Delta x]$

cenová zmena Δx

Lorentzianová PDF

$$p[\Delta x] = \frac{C}{(\Delta x)^2 + C^2 \pi^2}$$

(C je konštanta)



$p[\Delta x]$

cenová zmena Δx

Gaussianová PDF

$$p[\Delta x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\Delta x)^2/2\sigma^2}$$

Obrázok č. 1.

Cenové zmeny majú svoje určité statistické vlastnosti. Cenovú zmenu v čase i označujeme ako $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ a zmenu ceny za obdobie od 0 do n ako $\Delta x_{n,0} = \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = x_n - x_0$.

Označme si $f(\Delta x_i)$ ako funkciu, ktorá nám cenovú zmenu v čase i zobrazí do oboru hodnôt a predpokladajme, že $f(\Delta x_i) = \Delta x_i$. Potom pomocou strednej hodnoty funkcie $f(\Delta x_i)$, danej ako

$$E[f(\Delta x_i)] = \sum_{j=1}^{m} f(\Delta x_{ij})p(\Delta x_{ij}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x_{ij})p(\Delta x_{ij})d(\Delta x_{ij}), \tag{2.1}$$

môžeme strednú hodnotu zmeny ceny v čase i vyjadriť ako

$$E[(\Delta x_i)] = \sum_{j=1}^{m} (\Delta x_{ij})p(\Delta x_{ij}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta x_{ij})p(\Delta x_{ij})d(\Delta x_{ij}). \tag{2.2}$$

Ide teda o sumu všetkých možných pohybov ceny (ich počet je m), ktoré môžu v čase i nastať, vynásobených ich pravdepodobnosťou výskytu. Záleží len na tom, či Δx_i nadobúda hodnoty diskrétne alebo spojité.

Stredná hodnota n cenových pohybov je daná ako súčet ich stredných hodnôt. V prípade, že cenové zmeny sú i.i.d., stredná hodnota je u každej zmene ceny rovnaká. Preto

$$E[(\Delta x_{n,0})] = nE[(\Delta x_i)]. \tag{2.3}$$

Stredná hodnota je vlastnosť premennej, ktorá ukazuje jej vývoj bez rušivých faktorov. Ak sa však chceme zamerať na riziko, vyplývajúce z rozsiahlých cenových zmien, oveľa podstatnejší je rozptyl a smerodatná odchýlka.

Rozptyl cenovej zmeny v časovom období od 0 do n je

$$\sigma_{n,0}^2 = E\left[(\Delta x_{n,0} - E[(\Delta x_{n,0})])^2\right]. \tag{2.4}$$

Opäť, v prípade i.i.d. premenných je rozptyl každej cenovej zmeny rovnaký a σ_{n0}^2 sa potom rovná

$$\sigma_{n,0}^2 = n\sigma_i^2 = nE\left[(\Delta x_i - E[(\Delta x_i)])^2\right]. \tag{2.5}$$

Rozptyl $\sigma_{n,0}^2$ nám ohraničuje priestor, kam sa až cenová zmena po n obdobiach môže ocitnúť. Druhá odmocnina rozptylu predstavuje smerodatnú odchýlku (volatilitu). Tá označuje veľkosť, o akú sa cenová zmena môže od svojej strednej hodnoty maximálne odchýliť. V prípade cien (resp. cenovej zmeny) ide o pohyb nad a pod strednou hodnotou ceny (resp. cenovej zmeny). Volatilita cenovej zmeny rastie tempom $n^{1/2}$, keďže jej hodnota je $\sigma_{n,0} = n^{1/2}\sigma_i$.

2.2.4. *Centrálny limitný teorém (CLT)*

Nech Δx_1, Δx_2, Δx_3, ..., Δx_n sú náhodné veličiny s rovnakou pravdepodobnostnou distribučnou funkciou $p[\Delta x]$ a nech sú i.i.d. Ďalej predpokladajme, že tak ako stredná hodnota $E[(\Delta x)]$, tak aj smerodatná odchýlka σ tejto pravdepodobnostnej distribučnej funkcie existuje a sú zároveň konečné. Potom suma $S = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + ... + \Delta x_n$ má strednú hodnotu $nE[(\Delta x)]$ a smerodatnú odchýlku $n^{1/2}\sigma$ a pravdepodobnostná distribučná fukcia sumy S dosahuje normálne rozdelenie, keď $n \to \infty$.

Podľa CLT, pravdepodobnostná distribučná funkcia sumy n cenových zmien má normálne, teda Gaussianové, rozdelenie, ak platia nasledujúce skutočnosti:

1. cenové zmeny Δx_1, Δx_2, Δx_3, ..., Δx_n sú i.i.d.,
2. PDF každej cenovej zmeny má konečný rozptyl σ_i^2 a
3. n (množstvo cenových zmien) rastie nad všetky medze: $n \to \infty$.

Hoci sa na finančných trhoch pracuje s predpokladom, že denné cenové zmeny majú tvar Gaussianového rozdelenia, v skutočnosti však toto rozdelenie nie je dosiahnuté úplne. A to preto, že vyššie tri uvedené podmienky neplatia stopercentne.

Medzi cenovými zmenami, v za sebou idúcich časových obdobiach, sa nájdu, síce malé, ale existujúce, dočasné korelácie vyššieho stupňa. Čím podmienka 1. nie je splnená. Nemôžeme zaručiť ani konečný rozptyl, takže cenové zmeny môžu nadobúdať aj Lorentzianovo rozdelenie, ktoré konverguje veľmi pomaly ku Gaussianovému. A hlavne počet cenových zmien n nespĺňa podmienku nekonečnosti.

Gaussianové rozdelenie nemôžeme teda úplne zaručiť a čo je z hľadiska rizika podstatné, je to, že Gaussianové rozdelenie nezobrazuje veľké cenové zmeny.

2.2.5. *Meranie rizika*

Štandardným spôsobom merania rizika v oblasti financií je rozptyl σ. Hodnotu rozptylu môžeme získať z empirických pozorovaní cenových zmien za časový úsek Δt. Ak by distribučná pravdepodobnostná funkcia týchto empirických pozorovaní mala Gaussianové rozdelenie, potom by meranie rizika na základe rozptylu malo význam, pretože pri normálnom rozdelení s nulovou strednou honotou je rozptyl jediný parameter, ktorý určuje tvar pravdepodobnostnej distribučnej funkcie. A teda aj možné odchýlky a výkyvy. Avšak použitie rozptylu pre stanovenie možného rizika má aj svoje nedostatky.

Napríklad, rozptyl σ je získaný len na jeden časový úsek Δt a preto na ňom nemôžeme sledovať naakumulované riziko straty za niekoľko časových období Δt. Rozptyl σ neberie v rámci časového úseku Δt do úvahy hodnotu maximálnej straty. Zároveň môže predstavovať problém aj určenie samotného rozptylu σ. A to z toho dôvodu, že môže byť obtiažné rozhodnúť, či cenové zmeny majú Gaussianové alebo Lorentzianové rozdelenie, keďže sa od seba líšia len hodnotou rozptylu. Kým Gaussianové rozdelenie má rozptyl konečný, Lorentzianové rozdelenie nadobúda nekonečný rozptyl. Hoci je konečný rozptyl oveľa výhodnejší, vypovediaca hodnota rozptylu u Gaussianového rozdelenia sa znižuje, pretože podľa CLT sa rozdelenie sústreďuje len okolo strednej hodnoty a nesústreďuje sa na okrajové časti, práve ktoré s rizikom súvisia.

2.2.6. Metóda VaR

Okrem rozptylu existujú aj iné možnosti mapovania rizika, tak aby sa predišlo už spomýnaným nedostatkom. Jednou takou možnosťou je metóda VaR (value at risk), pri ktorej je však veľkosť rozptylu tiež zahrnutá.

Hodnota VaR je spojená s troma parametrami:

1. *časový horizont (x dní)*, udávajúci počet dní, počas ktorých chceme dané aktívum analyzovať na trhu (najčastejšie sa VaR zadáva na jeden alebo desať dní, alebo potom na jeden rok),
2. *hladina významnosti (y%)*, na ktorej chceme odhad uskutočniť (väčšinou ide o 99% alebo 95% hladinu významnosti),
3. *mena (napr. USD)*, v akej bude výsledné číslo uvedené.

Zistenie metódy VaR sa udáva vo forme: 1-dňový VaR portfólia na hladine významnosti 95% má hodnotu $3 milióny. Čo znamená, že majiteľ portfólia môže očakávať, že na 95% sa mu dnešná hodnota portfólia po nasledujúcom dni zníži o maximálne $3 milióny alebo menej. Zároveň je tu 5%-ná pravdepodobnosť, že hodnota portfólia poklesne o viac ako $3 milióny v priebehu jedného dňa.

3. Charakteristika finančných derivátov

„Deriváty sú finančné produkty, ktoré sa odvodzujú od iných finančných produktov, alebo lepšie: Deriváty sú finančné produkty, v ktorých základe ležia iné finančné produkty.“[1]

Pojem “deriváty” pri obchodoch na finančnom trhu predstavuje finančné nástroje, ktorých cena je závislá od hodnoty podkladového aktíva ako je napríklad akcia, alebo iný cenný papier, akciový index, mena, fyzická komodita, úroková miera atď.

Pod pojmom “finančný derivát” sa označuje finančný produkt alebo operácia, ktorá umožňuje v danom okamihu zafixovať, respektíve dohodnúť kurz alebo cenu, za ktorú sa môže aktívum, ktoré sa k tomuto kontraktu vzťahuje, kúpiť alebo predať k určitému dátumu v budúcnosti. Finančné deriváty sa využívajú na termínových trhoch s cieľom obchodovania za účelom dosiahnutia špekulatívneho zisku a na elimináciu rizika, alebo proti stratám v dôsledku prudkých výkyvov na trhu.

Tento pojem sa používa na označenie swapov, opcií, budúcich úrokových mierí (FRAs), termínových kontraktov futures a forwards a cenných papierov obsahujúcich tieto inštrumenty. Finančné deriváty sa môžu viazať k úrokovej sadzbe, mene, komodite alebo akcii.

Hoci sa deriváty začali vo veľkom rozsahu používať len v posledných desaťročiach, ich pôvod siaha až do dávnej histórie. Veľkú podobnosť s dnešnými derivátmi deklaruje udalosť z pred viac ako sto rokov, kedy sa v roku 1863 spomína o tom, že londýnski bankári, ktorí spolupracovali na získavaní finančných prostriedkov pre Konfederáciu amerických štátov, získali “dvojmenovú” pôžičku, ktorej úrok bol viazaný na budúcu cenu bavlny.

Širšie využitie v minulosti získali opčné obchody predovšetkým v súvislosti s obchodovaním s pšenicou v USA, keď pomáhali americkým farmárom vyrovnávať sezónne výkyvy ceny pšenice.

Obchody s opciami na cenné papiere sa začali rozvíjať až začiatkom nášho storočia, ale až do začiatku 70-tych rokov likvidita týchto obchodov bola veľmi nízka a to predovšetkým vďaka tomu, že prakticky neexistovala možnosť uzavretia pozície, respektíve nadväzného obchodovania s opciami.

---

[1] Beire, R. – Sclütz, J. : Finanznachrichten. Schäffer – Poeschel Verlag. Stuttgart, 1996, str. 6.

Takáto situácia pretrvávala až do roku 1973, keď v Chicagu založili opčnú burzu, na ktorej standardizovali jednotlivé kontrakty a investorom zostal prakticky len jeden problém, a to dohodnúť sa na cene opčného obchodu.

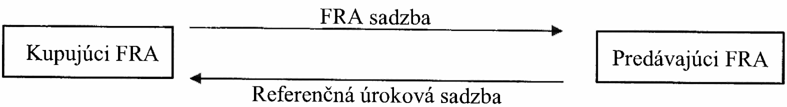
3.1. Forward Rate Agreement (FRA)

FRA kontrakt je dohoda o termínovej úrokovej sadzbe. Ide o neštandardizovaný kontrakt s obchodovaním na mimoburzovnom trhu (OTC), čo znamená, že všetky podmienky obchodu si partneri môžu dohodnúť individuálne. Plnenie z FRA kontraktu predstavuje poskytnutie úrokového rozdielu medzi pevne zjednanou úrokovou sadzbou vo FRA kontrakte a skutočnou výškou tržnej úrokovej miery tej danej referenčnej sadzby, ktorá bola tiež zjednaná v kontrakte a to v termíne, ku ktorému bol FRA kontrakt zjednaný.

Medzi základné podmienky, ktoré FRA kontrakt musí obsahovať, patria:

- vymedzenie kupujúceho a predávajúceho,
- dohodnutá fixná úroková miera (p_{FRA} , udávaná v percentách),
- dĺžka obdobia, na ktoré je kontrakt uzavretý (t_{FRA} , udávané v počte dní),
- stanovenie počiatku úrokového obdobia (T_1),
- stanovená mena, v ktorej sa má úrokový rozdiel uhradiť,
- nominálna čiastka v stanovenej mene, z ktorej sa výška plnenia určuje (NH),
- určitá tržná úroková miera, z ktorej hodnoty sa plnenie odvodzuje, tzv. referenčná sadzba (p_{REF} , udávaná v percentách),
- termín, v ktorom plnenie prebehne (T_2).

Kupujúci FRA, alebo tiež subjekt v dlhej (long) pozícii si zaisťuje fixnú úrokovú sadzbu pre svoje budúce, pohyblivo úročené záväzky, alebo sa zaisťuje proti rastu úrokových sadzieb v budúcnosti a obrátene (Obrázok č. 2.).



Obrázok č. 2.

Trh s FRA kontraktmi je vytvorený najmä medzi bankami a ďalšími finančnými inštitúciami, ako napríklad komerčné a investičné banky, firmy cenných papierov, vystupujúce na trhu ako tvorcovia trhu a iné.

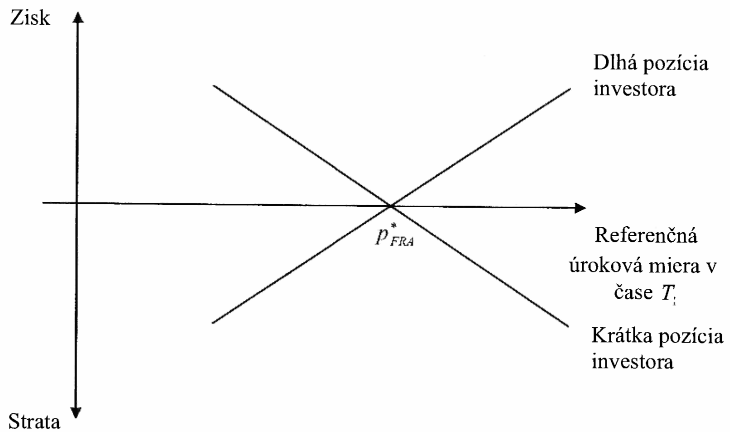
Podstata plnenia vyplývajúceho z FRA spočíva vo vzájomnej výmene FRA sadzby a referenčnej sadzby platnej v rozhodný deň na začiatku FRA obdobia. Výška plnenia v čase T_2 sa rovná hodnote

$$\frac{(p_{REF} - p_{FRA})}{100} * \frac{t_{FRA}}{360} * NH = \frac{(p_{REF} - p_{FRA}) * t_{FRA} * NH}{360 * 100}, \tag{3.1}$$

keďže hodnoty p_{REF} a p_{FRA} sú dosadené v percentách a t_{FRA} v počte dní. Zlomok $\frac{t_{FRA}}{360}$, vyjadrujúci dĺžku trvania kontraktu v rokoch, má najčastejšie formu ACT/360, ktorá sa používa pri väčšine mien, vrátane USD a EUR. Pre GBP je najpoužívanejšia forma ACT/365. Ďalej sa môžu použiť vyjadrenia 30/360, ACT/ACT a iné. My si ale na tomto mieste stanovíme, že vo vyjadreniach budeme používať ACT/360.

Keďže plnenie vyplývajúce z FRA sa však zvyčajne platí na začiatku FRA obdobia, v T_1, musíme preto sumu v čase T_2 odúročiť a pre výšku plnenia dostaneme hodnotu

$$\frac{\frac{(p_{REF} - p_{FRA})}{100} * \frac{t_{FRA}}{360} * NH}{1 + \frac{p_{REF}}{100} * \frac{t_{FRA}}{360}} = \frac{(p_{REF} - p_{FRA}) * t_{FRA} * NH}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}}. \tag{3.2}$$



Obrázok č. 3.

Pri dohodnutí kontraktu je postavenie oboch subjektov zhodné, čo je dôvod, prečo nie je na začiatku zjednaná žiadna platba. Výhodnosť kontraktu je tak determinovaná výškou FRA sadzby.

Rovnovážnu FRA sadzbu môžeme podľa Dvořáka, 2003, odvodiť z dvoch investičných možností, ktoré sa uskutočnia, ale len zásadne za podmienok dokonalého trhu.

V podmienkach takéhoto dokonalého trhu sa nemôže vyskytnúť arbitrážna príležitosť. Preto uloženie kapitálu K dvoma rôznymi spôsobmi musí viesť k rovnakému výnosu. Predpokladajme nasledujúce možnosti uloženia kapitálu K:

1. kapitál K uložíme na celé obdobie od T_0 do T_2,

2. kapitál K uložíme len na obdobie od T_0 do T_1, potom zúročený kapitál opäť hneď v období T_1 investujeme až do konca obdobia T_2. Aby sme sa proti výkyvom tržných úrokových sadzieb poistili, v období T_0 predáme FRA kontrakt a to na obdobie T_1 - T_2.

1. V prvom prípade má konečná výška kapitálu hodnotu

$$K_{T_2} = K * \left(1 + \frac{p * t}{36000}\right), \tag{3.3}$$

kde opäť, p predstavuje úrokovú mieru vyjadrenú v percentách a t počet dní, na ktoré kapitál K na úrokovú mieru p uložíme.

2. V druhom prípade je hodnota kapitálu na konci obdobia T_1 následovná

$$K_{T_1} = K * \left(1 + \frac{p_1 * t_1}{36000}\right). \tag{3.4}$$

Na obdobie od T_1 do T_2 investor zakúpil FRA kontrakt, z ktorého vyplýva v čase T_1 plnenie vo výške

$$\frac{(p_{REF} - p_{FRA}) * K_{T_1} * t_{FRA}}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}} = \frac{(p_{REF} - p_{FRA}) * K * \left(1 + \frac{p_1 * t_1}{36000}\right) * t_{FRA}}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}}. \tag{3.5}$$

Výška kapitálu na konci obdobia T_2 bude teda predstavovať

$$K_{T_2} = \left[K * \left(1 + \frac{p_1 * t_1}{36000}\right) - \frac{(p_{REF} - p_{FRA}) * K * \left(1 + \frac{p_1 * t_1}{36000}\right) * t_{FRA}}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}} \right] * \left(1 + \frac{p_{REF} * t_{FRA}}{36000}\right). \tag{3.6}$$

Keďže veľkosť získaného kapitálu v čase T_2 musí byť v obidvoch prípadoch zhodná, dostávame rovnosť

$$K * \left(1 + \frac{p * t}{36000}\right) =$$

$$\left[K * \left(1 + \frac{p_1 * t_1}{36000}\right) - \frac{(p_{REF} - p_{FRA}) * K * \left(1 + \frac{p_1 * t_1}{36000}\right) * t_{FRA}}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}} \right] * \left(1 + \frac{p_{REF} * t_{FRA}}{36000}\right), \tag{3.7}$$

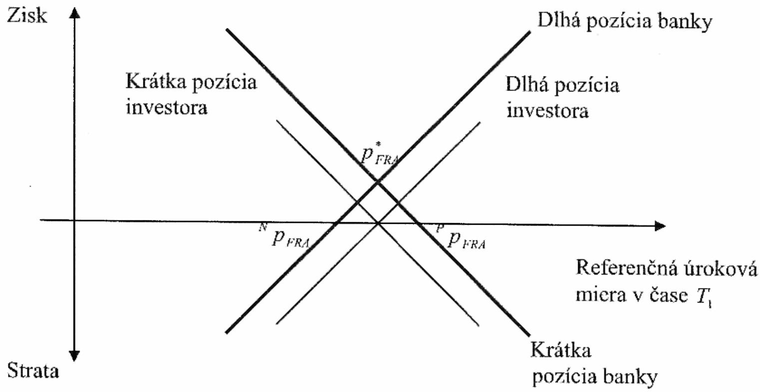
z ktorej vyjadrením dostaneme rovnovážnu hodnotu p^*_{FRA}

$$p^*_{FRA} = \frac{(p * t - p_1 * t_1) * 36000}{(36000 + p_1 * t_1) * t_{FRA}}. \tag{3.8}$$

Rovnovážna hodnota FRA sadzby, p^*_{FRA}, je teda dohodnutá fixná úroková miera FRA kontraktu, pri ktorej rovnako ako kupujúci, tak aj predávajúci nerealizujú z uzatvoreného FRA kontraktu žiaden dodatočný zisk. Táto sadzba sa nachádza na prieniku výnosovej priamky dlhej a krátkej pozície (Obrázok č. 3).

Aby si banky zabezpečili určitý zisk, sadzba nákup-predaj je u FRA kótovaná. Sadzba FRA–nákup (${}^N p_{FRA}$), banka je v pozícii kupujúceho FRA, je nižšia oproti rovnovážnej hodnote p^*_{FRA}, prienik výnosovej priamky dlhej a krátkej pozície banky a naopak, sadzba FRA-predaj (${}^P p_{FRA}$), banka je v pozícii predávajúceho FRA, leží nad sadzbou p^*_{FRA} (Obrázok č. 4.).

Ak banka uskutoční operácie s FRA kontraktmi, jednak ako kupujúci za sadzbu FRA-nákup a jednak ako predávajúci za sadzbu FRA-predaj, ale s rovnakými charakteristikami (na rovnaké FRA-obdobie, rovnaká nominálna výška kapitálu a mena), plnenie z obidvoch zjednaných obchodov sa nielen kompenzuje, ale zároveň banka dosiahne vždy určitý zisk.



Obrázok č. 4.

Výška tohto zisku závisí od plnenia z obidvoch zjednaných FRA kontraktov, ktorá je daná rozdielom:

$$\frac{(p_{REF} - {}^N p_{FRA}) * t_{FRA} * NH}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}} \quad \frac{(p_{REF} - {}^P p_{FRA}) * t_{FRA} * NH}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}} = \frac{({}^P p_{FRA} - {}^N p_{FRA}) * t_{FRA} * NH}{36000 + p_{REF} * t_{FRA}} \tag{3.9}$$

a teda výška zisku závisí od rozdielu medzi FRA sadzbami predaj a nákup.

3.2. Swapy

Swapové kontrakty sú podobne ako FRA kontrakty vyjednávané predovšetkým medzi bankami. Na swapovom trhu platí, že ak chce subjekt zohrávať na trhu významnejšiu úlohu, musí disponovať vysokým ratingom. Z tohto dôvodu tú najpodstatnejšiu úlohu zohrávajú veľké nadnárodné banky.

Swap predstavuje kontrakt, v ktorom sa dohodne zámena predom stanoveného cash flow medzi dvoma či viacerými subjektmi v určitých termínoch v budúcnosti. Medzi základné druhy swapov patria úrokové swapy, menové swapy, akciové a komoditné swapy. Toto rozdelenie vychádza zo štyroch tržných rizík. Tieto základné druhy sa však dajú navzájom kombinovať a zároveň kombinovať aj s niektorými inými derivátmi.

3.2.1. Úrokové swapy

Ide o zmluvne dohodnutú opakovanú zámenu určitých úrokových platieb v rovnakej mene, ktoré nastávajú v dohodnutých termínoch v budúcnosti a vzťahujú sa k dohodnutej nominálnej hodnote úrokových období. Dohodnutá nominálna hodnota swapu v zmluve slúži k odvodeniu výšky úrokových platieb. Medzi swapovými partnermi sa kapitál nepresúva.

Úrokové swapy ďalej rozlišujeme na kupónové a bazické a to podľa toho, či ide o zámenu úrokových platieb na fixnej alebo na pohyblivej báze.

3.2.1.1. Kupónové swapy:

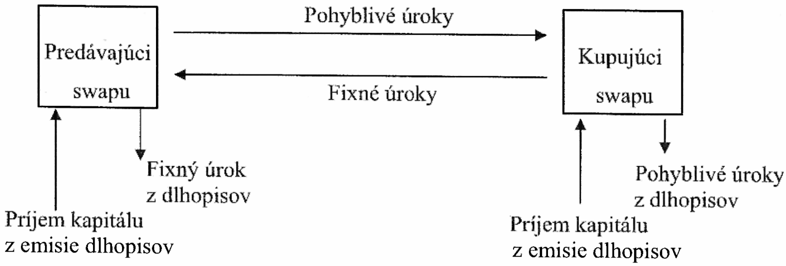
U kupónových swapov dochádza k zámene úrokových platieb, z ktorých jedna je definovaná na fixnej báze a druhá na báze pohyblivej. Predmetom plnenia kupónového swapu sú úrokové platby behom doby do splatnosti. K presunu kapitálu medzi subjektmi nedochádza. V praxi nedochádza ani k protistrannému pohybu úrokových sadzieb medzi subjektmi, ale len k transferu úrokového rozdielu.

Subjekt platiaci fixné platby je označovaný ako kupujúci swapu a subjekt platiaci pohyblivé platby ako predávajúci swapu.

Medzi základné motívy pre uskutočnenie kupónového swapu sa zahrňuje:

- zaistenie pohľadávok (záväzkov) proti poklesu (rastu) tržných úrokových sadzieb,
- získanie kapitálu na požadovanej úrokovej báze za výhodnejších podmienok ako priamo na trhu a to v dôsledku využitia komparatívnych výhod,

- špekulatívny motív vyplývajúci z rôznych úrokových špekulácií oboch swapových partnerov.



Obrázok č. 5.
(Dvořák, 2003)

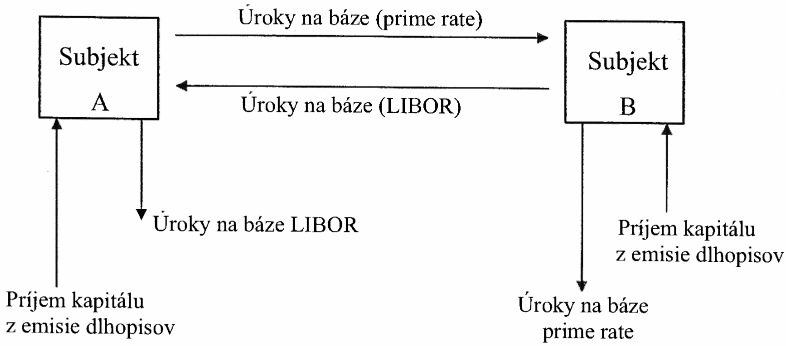
Obrázok č. 5. znázorňuje princíp kupónového swapu. Predávajúci swapu emitoval dlhopisy s fixným úrokovým kupónom, ale má záujem o pohyblivý spôsob úročenia. Na druhej strane stojí kupujúci swapu, subjekt, ktorý emitoval dlhopisy s pohyblivým úročením a požaduje úročenie fixné. Znázornený swap im tieto požiadavky umožňuje dosiahnuť.

3.2.1.2. Bazické swapy:

Ide o analógiu ako u kupónového swapu, avšak s tým rozdielom, že obidve swapované úrokové platby sú na pohyblivej báze, pričom ale referenčné sadzby musia byť rozdielné.

Účelom bazického swapu je premena úrokovej bázy u pohyblivo úročených záväzkov. Dôvodom pre túto premenu môže byť zaistenie (zladenie úrokovej bázy u pohľadávok a záväzkov), špekulácia (očakávanie rozdielneho vývoja obidvoch úrokových sadzieb), alebo zníženie úrokových nákladov na získanie kapitálu (oproti priamemu vstupu na trh) prostredníctvom využitia komparatívnych výhod.

Použitie bazického swapu je znázornené na Obrázku č. 6. Subjekt A získal kapitál emisiou dlhopisov, ktorých úročenie je na báze LIBOR, subjekt B získal kapitál emisiou dlhopisov, úročených na báze prime rate. Po uskutočnení swapu zostáva subjektom aj naďalej pohyblivo úročený kapitál, ale mení sa referenčná úroková sadzba, na ktorú sú viazaní.



Obrázok č. 6.
(Dvořák, 2003)

3.2.2. Menové swapy

Pri uskutočnení menového swapu dojde najprv k výmene získaného kapitálu v dvoch rôznych menách medzi dvoma stranami (na základe dohodnutého výmenného kurzu). Behom obdobia splatnosti swapu si vymieňajú úrokové platby z vymeneného kapitálu. V dobe splatnosti sa kapitál opäť vymení za rovnaký kurz, aký bol pri počiatočnej výmene kapitálu.

3.2.3. Akciové swapy

Ide o zmluvne dohodnutú výmenu určitých platieb v rovnakej mene, ku ktorej dochádza v dohodnutých termínoch v budúcnosti.

Medzi subjektmi dochádza k výmene dvoch platieb:

- prvá platba má obvykle formu úrokovej platby vzťahujúcej sa k dohodnutej nominálnej hodnote a úrokovému obdobiu,
- druhá platba je odvodená ako celkový výnos (kapitálový a dividendový) z určitého akciového indexu alebo iného akciového inštrumentu.

3.2.4. Komoditné swapy

U subjektov dochádza k nasledujúcim výmenám platieb:

- násobok fixne dohodnutej ceny za jednotku určitej komodity a dohodnutého nominálneho množstva tejto komodity,
- násobok pohyblivej jednotkovej ceny a dohodnutého (obvykle rovnakého) množstva komodity.

V obchodovaní so swapmi sa črtajú dve tendencie. Na strane jednej stojí snaha o zjednodušenie swapových kontraktov a tým o zvýšenie flexibility s ich obchodovaním a na strane druhej stojí snaha o ďalšie rozvíjanie týchto kontraktov v kombinácii s inými inštrumentmi a to hlavne zo špekulatívnych dôvodov.

3.2.5. Optimálna pevná úroková sadzba pre swap

Pri odvodení optimálnej pevnej úrokovej sadzby pre swap budeme vychádzať z Dvořáka, 2003. Na začiatku stanovíme, že žiadna strana tej druhej neplatí a predmetom dohody je len výška pevnej sadzby, z ktorej budú platby odvodené.

Pre stanovenie rovnovážnej pevnej úrokovej sadzby budeme predpokladať podmienky dokonalého trhu a zároveň to, že platby vyplývajúce zo swapu nastávajú v rovnakom okamihu a vzťahujú sa k rovnakému obdobiu.

Odvodenie:

1.) Zo spotových úrokových sadzieb vypočítame implicitné forwardové sadzby pre všetky termíny a obdobia, v ktorých dochádza zo swapov k platbám

$$\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i * \left[1+\frac{fr_{T_0,T_i,T_{i+t}}}{1/t}\right] = \left[1+\frac{sr_{T_0,T_{i+t}}}{1/t}\right]^{i+1}. \qquad (3.10)$$

Forwardové sadzby predstavujú v T_0 sadzby, od ktorých sa výška pohyblivej platby vo swape bude odvodzovať pre jednotlivé obdobia. Forwardová sadzba $f_{T_0,T_i,T_{i+t}}$ predstavuje výšku pohyblivej platby, ktorá bude v čase T_{i+t} vyplatená. Označenie t vyjadruje dĺžku, na akú sú forwardové sadzby stanovené a je udávané v časti roka (napr. ½). Parameter i vyjadruje určitý počet t.

2.) Ak poznáme výšku pohyblivých platieb, ktoré v budúcnosti nastanú (v jednotlivých termínoch), môžeme ich výšku v čase T_0 vyjadriť ako ich súčasnú hodnotu

$$PV\left[fr_{T_0,T_{i-t},T_i}\right] = fr_{T_0,T_{i-t},T_i} * \frac{1}{\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i}. \tag{3.11}$$

Súčasná hodnota všetkých pohyblivých platieb je

$$\sum PVfr_{T_0,T_{i-t},T_i} = \sum_{i=1}^{n/t} fr_{T_0,T_{i-t},T_i} * \frac{1}{\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i}, \tag{3.12}$$

kde symbol n predstavuje dĺžku swapového kontraktu vyjadrenú v rokoch.

Keďže pri dohode swapu je jeho hodnota nulová, musí sa PV pohyblivých platieb rovnať PV pevných platieb. Súčasná hodnota pevnej platby je daná ako

$$PVr_{T_0,T_{i-t},T_i} = r * \frac{1}{\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i}. \tag{3.13}$$

Súčasná hodnota všetkých pevných platieb je

$$\sum PVr_{T_0,T_{i-t},T_i} = \sum_{i=t}^{n/t} r * \frac{1}{\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i} \tag{3.14}$$

a musí platiť, že

$$\sum PVfr_{T_0,T_{i-t},T_i} = \sum PVr_{T_0,T_{i-t},T_i}. \tag{3.15}$$

Hľadaná úroková sadzba v swape sa teda rovná optimálnej pevnej sadzbe

$$r^* = \frac{\sum_{1}^{n/t} fr_{T_0,T_{i-t},T_i} * \frac{1}{\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i}}{\sum_{1}^{n/t} \frac{1}{\left[1+\frac{sr_{T_0,T_i}}{1/t}\right]^i}}. \tag{3.16}$$

Aktuálnu hodnotu swapu môžeme potom vyjadriť ako

$$\sum PVr_{T_0,T_{i-t},T_i} - \sum PVfr_{T_0,T_{i-t},T_i} = r^* * \sum_{1}^{n/t} \frac{1}{\left[1+\frac{sr}{1/t}\right]^i} - \sum_{1}^{n/t} fr_{T_0,T_{i-t},T_i} * \frac{1}{\left[1+\frac{sr}{1/t}\right]^i}, \tag{3.17}$$

čo je rozdiel PV všetkých pohyblivých a pevných platieb, odvodených od optimálnej úrokovej sadzby. Tento rozdiel (3.17) však musí dávať hodnotu nula, keďže sa za uzatvorenie swapu neplatí.

3.3. *Forwardové kontrakty*

Forwardový kontrakt je dohoda medzi dvoma stranami o presne vymedzenej výmene, ktorá sa uskutoční v budúcnosti. Ide o neštardardizovaný kontrakt, obchodovateľný jedine na mimoburzovnej pôde.

V kontrakte sú stanovené veci:

- čo je predmetom výmeny (podkladové aktívum),
- cena, za ktorú sa výmena uskutoční (forwardová cena),
- dátum v budúcnosti, ku ktorému k výmene dôjde (dátum splatnosti).

Kontrakt teda uzamyká všetky náležitosti výmeny, ktorá sa uskutoční niekedy v budúcnosti. Investor, nachádzajúci sa v dlhej pozícii vo forwardovom kontrakte, súhlasí s kúpou špecifického množstva dohodnutého podkladového aktíva k dohodnutému dátumu za pevne, vopred stanovenú cenu. K peňažným tokom medzi stranami obvykle až do chvíle plnenia nedochádza. Pri kontrakte dochádza spravidla k jedinému finančnému toku a to vo výške rozdielu medzi forwardovou a spotovou cenou v deň dodania.

Investor, ktorý si myslí, že forwardová cena je príliš nízka, môže byť ochotný zaplatiť istú prémiu za to, aby takýto forwardový kontrakt získal. Ak je forwardová cena považovaná za príliš vysokú, kontrakt má pre predávajúceho vnútornú hodnotu. Existuje teda niekde v strede cena, pri ktorej má kontrakt nulovú hodnotu. Takáto cena zodpovedá cene forwardového kontraktu.

Forwardové kontrakty majú svoje výhody aj nevýhody. Ich prednosťou je možnosť dohodnutia podmienok, ktoré čo najlepšie sedia obidvom stranám. Nevýhodou je, že dohoda, bez toho, aby sa na tom obidve strany dohodli, sa nedá zrušiť, ani previesť záväzky na inú (tretiu) stranu. Tým pádom kontrakt nie je veľmi likvidný a obchodovateľný. Ďalším rizikom je neexistencia záruky, že obidve strany k svojim záväzkom dospejú. Toto kreditné riziko je tým väčšie, čím je väčší rozdiel medzi dohodnutou (forwardovou) a spotovou cenou.

3.3.1. *Forwardová cena*

Ak je Y_t náhodná premenná vyjadrujúca cenu aktíva v čase t, teda v čase uplatnenia forwardového kontraktu, potom pri zanedbaní všetkých ostatných vedomostí o trhu môžeme cenu podkladového aktíva Y_0, uzamknutú pri uzavretí kontraktu v čase t_0 a ktorá musí byť v čase t vyplatená, vyjadriť ako strednú hodnotu

$$Y_0 = E[Y_t]. \tag{3.17}$$

Premennú Y_t môžeme zadefinovať aj ako peňažnú čiastku M, ktorú ak v čase uzavretia forwardového kontraktu t_0 uložíme do banky na časové obdobie $t_0 \to t$, obdržíme hodnotu Y_t.

Na forwardovú cenu Y_0 majú samozrejme vplyv aj všetky dostupné informácie na trhu I_0 a to až do doby t_0. Preto výslednú forwardovú cenu môžeme zapísať ako

$$Y_0 = E[Y_t | I_0]. \tag{3.18}$$

3.4. *Futuritné kontrakty*

U futuritných kontraktov ide tiež o presne dohodnuté podmienky výmeny, ku ktorej dôjde k termíne v budúcnosti. Ide teda o podobnosť s forwardovými kontraktmi. Základné rozdiely medzi týmito kontraktmi sú:

• futuritné kontrakty sú obchodovateľné výhradne na burze, forwardové kontrakty sú mimoburzové inštrumenty,

• futuritné kontrakty sú vysoko štandardizované, forwardové kontrakty sú unikátne,

• futuritné kontrakty sa vysporiadavajú za vysporiadaciu cenu (cenu podkladového aktíva v poslednom obchodovacom dni kontraktu), forwardové kontrakty sa vysporiadavajú za vopred dohodnutú forwardovú cenu,

• kreditné riziko u futuritných kontraktov je z dôvodu existencie systému prepočtu na trh menšie ako u forwardových kontraktov,

• u forwardových kontraktov nedochádza až do doby splatnosti k peňažným tokom, u futuritných kontraktov dochádza k platbe vzniknutých ziskov a strát každý deň, keď sa cena podkladového aktíva zmení.

Súčasťou futuritného kontraktu je:

- predmet výmeny (podkladové aktívum),
- množstvo tohto obchodovaného predmetu,
- cena, za akú sa výmena uskutoční (futures cena),
- dátum dodania (alebo dátum splatnosti).

Investor majúci dlhú pozíciu v kontrakte sa zaväzuje kúpiť špecifické množstvo daného podkladového aktíva v presne stanovenom termíne za vopred dohodnutú futures cenu. Futures cena je na začiatku stanovená tak, že z nej nevyplývajú žiadne finančné toky.

Veľkou výhodou kontraktov je možnosť ich obchodovania. Teda zmluvné strany sa môžu meniť. Každá strana môže z kontraktu odísť uskutočnením obráteného obchodu. Futuritné kontrakty sú mimoriadne likvidné. Zároveň sa minimalizujú problémy s likviditou a úverové riziko sa odstraňuje vytvorením zúčtovacieho strediska a vytvorením systému prepočtu na trh a systému cenových limitov. Jediné úverové riziko sa potom viaže len k zúčtovaciemu stredisku.

Systém prepočtu na trh funguje tak, že každý obchodovateľný deň, keď dôjde k zmene ceny, musia obidve strany kontraktu zaplatiť príslušné zisky a straty. Ak futures cena vzrastie, investor s dlhou pozíciou dostáva za vzniknutý rozdiel platbu od krátkej strany. Keď futures cena klesne, kupujúci utrpí stratu rovnú veľkosti poklesu.

Ak niektorá strana nezaplatí, znamená to uzatvorenie kontraktu proti nej. Pri otvorení kontraktu musia obidve strany zložiť počiatočnú zálohu, ktorá sa používa na vyrovnanie strát. Nesmie však dôjsť k prekročeniu udržovacej (minimálnej) zálohy. V takomto prípade, ak by k jej prekročeniu došlo, strata musí byť uhradená variačnou zálohou.

Týmto systémom obchodovania môže dochádzať k pomerne veľkým finančným ziskom, pretože uložením počiatočnej zálohy, ktorá predstavuje len pomerne malý zlomok celkovej hodnoty kontraktu, konečný zisk vzhľadom k počiatočnej zálohe môže byť veľký. Samozrejme, v prípade nepriaznivého vývoja sa môže rovnako jednať aj o stratu.

Zúčtovacie stredisko sa pred priveľmi veľkým kreditným rizikom chráni stanovením cenových limitov. To znamená, že v prípade ak sa futures cena dostane na úroveň stanoveného horného alebo dolného cenového limitu, prestane sa obchodovať, aby sa trh upokojil. V strede tohto cenového rozpatia sa nachádza vysporiadacia cena predchádzajúceho dňa. Blokovanie obchodovania môže trvať od niekoľkých hodín až po niekoľko dní. Nevýhodou stanovenia limitov je však to, že po otvorení obchodovania sa trh môže hneď zablokovať z dôvodu dosiahnutia cenového stropu, čo je práve dôvodom, prečo mnoho búrz v mesiaci plnenia s týmito cenovými limitami nepracuje.

3.4.1. Futures cena

Futures cena sa odvodzuje od spotovej ceny daného podkladového aktíva. Ak sa nachádzame v situácii, kde nie sú možné žiadne arbitrážne príležitosti, potom u podkladového aktíva, z ktorého nevyplýva platba dividend, môžeme vzťah medzi futures cenou F_t v čase t a spotovou cenou S_t v čase t vyjadriť ako

$$F_t = S_t(1+r)^{(T-t)} , \tag{3.19}$$

alebo v prípade spojitého úročenia ako

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}, \tag{3.20}$$

kde r predstavuje bezrizikovú úrokovú mieru a T dátum splatnosti kotraktu. V skutočnosti je však tento vzťah narušovaný rôznymi nedokonalosťami trhu.

V čase plnenia platí, že vysporiadacia cena kontraktu sa rovná aktuálnej spotovej cene na trhu. V prípade ak by to tak neplatilo, existoval by priestor na špekulácie. To znamená, že v prípade ak by vysporiadacia cena bola vyššia ako cena spotová, predávajúci by dosiahol zisk zakúpením podkladového aktíva na spotovom trhu a jeho následným predajom prostredníctvom futuritného kontraktu. V prípade vyššej spotovej ceny by zisk dosiahol kupujúci a to tým, že by zakúpené podkladové aktívum futuritným kontraktom predal na spotovom trhu.

Čistý peňažný tok $CF_{0\to T}$ vygenerovaný dlhou pozíciou futuritného kontraktu počas obdobia $0 \to T$ sa rovná sume rozdielov denných peňažných vysporiadaní:

$$\begin{aligned} CF_{0\to T} &= \left[F_T - F_{(T-1)\to T}\right] + \left[F_{(T-1)\to T} - F_{(T-2)\to T}\right] + \;.\,.\,.\,.\,.\; + \left[F_{1\to T} - F_{0\to T}\right] \\ &= F_T - F_{0\to T} \\ &= S_T - F_{0\to T}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

kde $F_{(T-2)\to T}$ predstavuje futures cenu toho istého futuritného kontraktu, ale v čase $(T-2)$ a s $[T-(T-2)]$, dvoma, dňami do dátumu splatnosti. F_T vyjadruje spotovú cenu v dobe splatnosti T. Čistý peňažný tok $CF_{0\to T}$ teda spočíva vždy v rozdiele medzi spotovou cenou v čase splatnosti kontraktu S_T a medzi dohodnutou futures cenou kontraktu $F_{0\to T}$.

Rozdiel medzi futures a spotovou cenou sa označuje ako *základ*. Ak je *základ* kladný, znamená to, že za predpokladu nemennej spotovej ceny bude futures cena kontraktu s bližšou dobou do splatnosti nižšia ako u kontraktu so vzdialenejšou dobou do splatnosti. Situácia sa označuje ako normálne nadsadzovanie. V situácii normálneho zaostávania je futures cena kontraktu s bližšou dobou do splatnosti vyššia ako u kontraktu s dobou do splatnosti vzdialenejšou.

V priebehu doby do splatnosti môže každá strana kontrakt ukončiť uzavretím presne opačnej pozície. Druhá možnosť ukončenia kontraktu je jeho vysporiadanie. Podmienky vysporiadania určí burza. Procesu dodania sa účastní zúčtovacie stredisko. Proces vyvolá buď kupujúci alebo predávajúci, tým že zúčtovaciemu stredisku oznámi, že chce plniť alebo prijať plnenie. Zúčtovacie stredisko následovne spáruje krátke a dlhé pozície. Pri vysporiadaní predávajúci dodá podkladové aktívum kupujúcemu, ktorý mu zaplatí účtovanú cenu.

Ak je možné dodať rôzne druhy inštrumentov, predávajúci si zvolí inštrument najlacnejší k dodaniu. Preto aj futures cena je odvodená od najlacnejšieho inštrumentu k dodaniu.

3.4.2. *Financial futures*

Financial futures sa dajú charakterizovať ako pevné (nepodmienené) štandardizované burzové termínové obchody, ktoré sa vysporiadavajú proti peniazom.

Tak ako futuritné kontrakty, aj financial futures predstavujú pevnú dohodu medzi dvoma partnermi, ktorá im dáva právo a súčasne povinnosť

- kúpiť, resp. predať
- k štandardizovanému termínu v budúcnosti
- štandardizované množstvo
- určitého inštrumentu
- za predom stanovenú termínovú (futures) cenu.

Jedná sa o kontrakty obchodovateľné ako štandardizované kontrakty na špeciálnych derivátových burzách.

Medzi základné typy financial futures partia úrokové futures (krátkodobé, dlhodobé), menové futures a futures na akciový index.

3.4.2.1. *Futures na krátkodobé úrokové sadzby*

Príkladom takéhoto kontraktu je kontrakt na trojmesačné sterlingové termínové depozitá (ST3) alebo kontrakt na trojmesačné eurodolárové termínové depozitá.

Cena futures je daná ako (100,00 – úroková sadzba(v %)). Pokiaľ je teda cena júnového kontraktu ST3 vo výške 90,50, znamená to, že úroková sadzba na júnové sterlingové termínové depozitum sa uzamkne na hodnotu 9,5% po dobu troch mesiacov. Minimálny cenový pohyb (veľkosť kroku kotácie) je jeden bazický bod (0,01%) a maximálny cenový pohyb je 100 bazických bodov nad alebo pod vysporiadacou cenou, pokiaľ sa trh neuzavrie na hornom alebo dolnom limite.

Ak sa kontrakt blíži k dobe dodania, kupujúci si môže vybrať, či chce fyzické alebo finančné vysporiadanie. V obidvoch prípadoch zúčtovacie centrum stanoví vysporiadaciu cenu posledný obchodovací deň.

Blake, 1996, ukazuje príklad. Pokiaľ si kupujúci zvolí fyzické plnenie, potom posledný obchodovací deň predávajúci dohodne možnosť časových depozit u zvolenej banky. Predpokladajme, že výnos u zvolenej banky je napríklad 8,65%. V deň plnenia kupujúci prevedie jednotku obchodovania (stanovenú peňažnú sumu) do alokovanej banky a dostane počiatočnú a variačnú zálohu, spolu s faktúrovanou (vysporiadacou) čiastkou ako kompenzáciu za to, že deponoval časové depozitum s výnosnosťou menšou ako je vysporiadacia úroková sadzba. Faktúrovaná čiastka má hodnotu

$$\text{faktúrovaná čiastka} = \frac{(rs - rd) \times (N/365) \times F}{1 + [rs \times (N/365)]}, \qquad (3.22)$$

kde

F – je nominálna hodnota kontraktu futures,

N – je počet dňov do splatnosti časového depozita,

rd – je úroková sadzba časového depozita,

rs – je vysporiadacia úroková sadzba (8,65%).

Práve obdržaním faktúrovanej čiastky sa nakoniec úroková sadzba uzamyká na hodnote 9,50%, čo si môžeme potvrdiť aj vyjadrením implicitnej sadzby futures

$$\text{rf} = \frac{\text{var}.\textit{záloha} + \textit{úč.čiastka}}{F} \times \frac{365}{91} + rs, \qquad (3.23)$$

ktorá sa musí rovnať práve hodnote 9,50%.

Ak sa kupujúci rozhodne pre vysporiadanie v hotovosti, dostane peňažnú čiastku na svoj maržový účet ako konečné vyspriadanie. Investor, kupujúci júnový futuritný kontrakt za 9,50% očakával, že uzamkne 3-mesačnú sterlingovú úrokovú sadzbu na 9,50% a to sa aj skutočne podarilo. Ak je promtná úroková sadzba v júni len 8,75%, potom čistá hodnota sa zvýši o variačnú zálohu a implicitná sadzba futures sa rovná

$$\text{rf} = \frac{\text{var}.\textit{záloha}}{F} \times \frac{365}{91} + rs, \qquad (3.24)$$

ktorá dáva tiež uzamknutú hodnotu 9,50%, pričom rs tu má hodnotu 8,75%.

3.4.2.2. Futures na dlhodobé úrokové sadzby

Ide o určité druhy štátnych dlhopisov (napr. kontrakt na krátkodobé britské štátne dlhopisy, americké dlhodobé štátne dlhopisy atď.).

Pre názornosť napríklad s kontraktom na dlhodobé britské štátne dlhopisy sa obchoduje s imaginárnym dvadsať ročným dlhopisom s výnosom do splatnosti (yield to maturity, YTM) 9%. Nominálna hodnota kontraktu je 50 000 GBP a hodnota kroku kotácie je 15,625 GBP. Cena tohto futuritného kontraktu sa kótuje v dvaatricatinách britskej libry a je uvádzaná ako čistá cena, čo znamená, že alikvótny úrok sa nezohľadňuje.

Kontrakt si vyžaduje fyzické plnenie, tz. skutočné dodanie príslušného štátneho dlhopisu a to s dobou splatnosti obvykle medzi 15 až 25 rokmi. Zároveň si však predávajúci uplatní právo dodať dlhopis najlacnejší k dodaniu (cheapest-to-delivery bond, CTD). Dlhopis, ktorého špeciálny dátum ex-kupónu pripadá na deň dodania, nemôže byť vybraný. Dodanie sa môže uskutočniť ktorýkoľvek deň v mesiaci plnenia, i keď ide najčastejšie o dva dni v danom mesiaci. Samozrejme, ak je bežný výnos z dlhopisu väčší ako aktuálna úroková miera, predávajúci dodá daný dlhopis v posledný možný deň dodania, s úmyslom dosiahnúť väčšieho zisku, a naopak. Kupujúca strana zaplatí predávajúcemu tzv. účtovanú čiastku a to vo výške:

$$\text{účtovaná čiastka} = \text{vysporiadacia cena posledného obchodovacieho dňa}/100 \times \text{cenový faktor} \times \text{nominálna čiastka dlhopisu} + \text{alikvotný úrok.}$$

Cenový faktor predstavuje jednu stotinu aktuálnej ceny dlhopisu v prvý deň mesiaca dodania. Cenu je však treba upraviť o alikvotný úrok v prípade, ak sa prvý deň mesiaca dodania nezhoduje s dňom splatnosti kupónu.

3.4.2.3. Futures na cudziu menu

Ide o dohodu o zámene dvoch rôznych mien. Kupujúci očakáva, že na konci obdobia splatnosti kontraktu dostane nominálnu hodnotu kontraktu, uvedenú v mene A, za cenu stanovenú v kontrakte. Cena je stanovená ako dohodnutý výmenný kurz konkrétnych mien.

Predávajúci doručí nominálnu hodnotu kontraktu, za čo následne obdrží účtovanú čiastku v hodnote:

$$\text{účtovaná čiastka} = \text{nominálna hodnota kontraktu(v mene A)} \times \text{vysporiadacia cena posledného obchodovacieho dňa (výmenný kurz } B/A\text{).}$$

3.4.2.4. Futures na akciové indexy

Kontrakt má stanovenú svoju menovitú hodnotu na bod indexu a cenu, ktorá je kótovaná v bodoch indexu. U tohto kontraktu neexistujú cenové limity.

V prípade plnenia musí dôjsť k finančnému vysporiadaniu kontraktu (index nie je možné fyzicky dodať). Účtovaná čiastka je určená ako rozdiel medzi vysporiadacou cenou v posledný obchodovací deň a vysporiadacou cenou v deň pred posledným obchodovacím dňom. Je to preto, že všetky platby variačnej zálohy sú splatné k predposlednému dňu obchodovania.

3.5. *Opcie*

Opcie vznikli z podnetu toho, aby sa u futuritných kontraktov odstránila prísna závaznosť. Podnetom boli teda situácie, v ktorých sa investor chcel len poistiť proti nežiadúcej situácii.

Princíp opcie teda spočíva v tom, že držiteľovi dáva právo, ale nie povinnosť, kúpiť alebo predať podkladové aktívum za dohodnutú pevnú cenu, tzv. realizačnú (uplatňovaciu) cenu v rámci stanoveného termínu. Za poskytnutie tohto poistenia je nutné zaplatiť opčnú prémiu. Opčná prémia má dve zložky:

opčná prémia = vnútorná hodnota + časová hodnota.

Kupná (call) opcia dáva právo aktívum zakúpiť, opcia predajná (put) zas právo aktívum predať. Aby sa právo kúpiť, resp. predať, uplatnilo, musí sa opcia uplatniť. U amerických opcií sa toto právo môže uplatniť kedykoľvek do doby splatnosti opcie. U európskych opcií sa právo môže uplatniť výhradne v dobe splatnosti.

Call opcia, obchodovaná za cenu rovnú realizačnej cene (opcia "za peniaze") alebo nižšiu ako je cena realizačná (opcia „mimo peňazí"), má nulovú vnútornú hodnotu. Opcia má jedine časovú hodnotu. Call opcia, ktorej obchodovacia cena je vyššia ako cena realizačná (opcia "v peniazoch"), má vnútornú hodnotu:

vnútorná hodnota = cena opcie – realizačná cena.

Put opcia má vnútornú hodnotu:

vnútorná hodnota = realizačná cena – cena opcie.

Kupujúci opcií sú síce povinný za opcie zaplatiť, ale ich prípadná strata, vyplývajúca z opcie, je limitovaná cenou opcie. Naproti tomu, strata u predávajúcich opcií nie je ohraničená.

3.5.1. Finančné opčné kontrakty

Sú to kontrakty obchodované na burze, čo zaručuje ich vysokú likviditu. Kontrakty sú vysoko špecifikované. Obchoduje sa so špecifickými množstvami cenných papierov s dodaním v určených mesiacoch. Dlhá pozícia sa dá pred jej vypršaním ukončiť vypísaním identickej opcie, čo sa označuje ako uzavretie predaja.

3.5.1.1. Call opcie

Ide o kontrakt, ktorý majiteľovi dáva právo kúpiť dané množstvo akcií daného cenného papiera za špecifickú cenu v dohodnutom termíne. Zvyčajne na jeden kontrakt sa viaže množstvo 100 akcií. Aby sme mohli kontrakt konkrétne charakterizovať, musíme poznať:

1. meno podkladového cenného papiera,
2. dohodnutú nákupnú cenu (realizačnú cenu),
3. dĺžku trvania kontraktu.

Cena call opcie je určená na trhu na princípe dopytu a ponuky. Realizačná cena je odvodená od aktuálnej spotovej ceny. Hodnota call opcie závisí od mnohých faktorov, ale najma od spotovej ceny podkladového aktíva (S), od realizačnej ceny (X) a od doby zostávajúcej do doby splatnosti (T). Nech C je cena call opcie, potom cenu opcie môžeme napísať ako funkciu $C = C(S, X, T)$.

Vnútorná hodnota call opcie je definovaná ako rozdiel medzi spotovou cenou a realizačnou cenou, alebo ako nula, podľa toho čo je väčšie:

$$\text{vnútorná hodnota} = \max(S - X; 0).$$

Všetky call opcie "v peniazoch" majú vnútornú hodnotu pozitivnu. Opcie obchodované na úrovni ich vnútornej hodnoty sa obchodujú na parite. Teoreticky by sa opcia nikdy nemala predávať pod paritou. Ak by sa tak stalo, investor, ktorý chce aktívum kúpiť, by zvolil lacnejšiu variantu a to tú, že by zakúpil call opciu, ktorú (ak by sa jednalo o americkú call opciu) by okamžite uplatnil a dosiahol by tak zisk. Preto cena call opcie sa musí rovnať, alebo prevyšovať jej vnútornú hodnotu:

$$C(S,X,T) > \max(S - X; 0).$$

Rozdiel medzi cenou call opcie a jej vnútornou hodnotou je nazvaný ako časová prémia. Ak je časová prémia nula, call opcia sa predáva za paritu.

Hodnota call opcie A, s rovnakou realizačnou cenou ako má call opcia B, rastie s rastúcou dobou do splatnosti:

$$C(S,X,T_1) \leq C(S,X,T_2), \text{ ak } T_1 < T_2.$$

Opčná prémia sa skladá už zo spomýnaných dvoch častí: z vnútornej hodnoty a časovej prémie. Vnútornú hodnotu opcie predstavuje zisk, ktorý by bol realizovaný, ak by sa opcia uplatnila okamžite. U call opcie udáva vnútornú hodnotu rozdiel: $S - X$. Ak má opcia vnútornú hodnotu (čo znamená, že rozdiel je kladný), potom je aj opcia zároveň pri peniazoch. V opačnom prípade, ak je rozdiel nulový alebo záporný, vnútorná hodnota je nulová a opcia je buď v peniazoh alebo mimo peňazí.

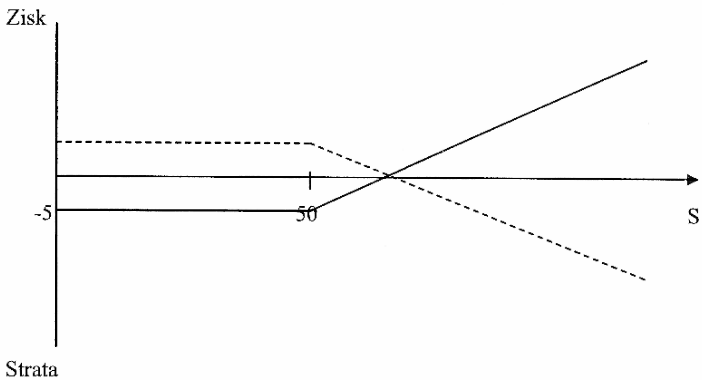
Časová hodnota opcie navyšuje jej vnútornú hodnotu, a to tým, že zohľadňuje možnosť opcie získať ešte väčšiu hodnotu, ako je momentálna vnútorná hodnota, počas doby do splatnosti. Preto, čím sa doba splatnosti blíži, časová prémia klesá k nule.

Investor pri zakúpení call opcie dúfa, že v deň splatnosti bude vnútorná hodnota opcie čo najväčšia. Keďže časová hodnota klesá k nule, investor môže profitovať jedine z vnútornej hodnoty opcie. Majiteľ call opcie sa behom doby do splatnosti môže rozhodnúť pre dve veci:

1. zrušiť danú pozíciu predajom call opcie za aktuálnu tržnú cenu,
2. alebo vyčkať do doby splatnosti a reagovať podľa vzniknutej situácie.

V prípade ak sa jedná o americkú call opciu, investor si môže opčné právo uplatniť okamžite.

Maximálna strata pre majiteľa opcie je limitovaná počiatočnou investíciou, avšak strata pre predávajúceho opciu je neobmedzená.



Obrázok č. 7.

Veľkosť obdržaného zisku pri držaní call opcie až do doby splatnosti závisí od spotovej ceny s deň splatnosti. Pevná čiara na obrázku č. 7 zobrazuje potencionálny zisk call opcie v dobe splatnosti, ktorej cena bola 5 jednotiek a realizačná cena je 50 jednotiek.

Možný zisk z predaja call opcie je zobrazený presným zrkadlovým obrazom stratégie nákupu call opcie a je zobrazený lámanou čiarou. Teda zisk (strata) kupujúceho sa rovná strate (zisku) vypisovateľa opcie.

3.5.1.2. Put opcie

Put opcia je kontrakt, ktorý dáva majiteľovi právo predať presne dané množstvo akcií špecifického cenného papiera za stanovenú realizačnú cenu v dohodnutej dobe. U európskej opcii sa opčné právo môže uplatniť jedine v deň splatnosti, kým u americkej opcie je to kedykoľvek do doby splatnosti. Vypisovateľ put opcie je povinný doručiť dané akcie, ak majiteľ put opcie si opčné právo uplatní.

Put opcie majú vnútornú hodnotu, ak realizačná cena je vyššia ako spotová cena a je daná rovnicou:

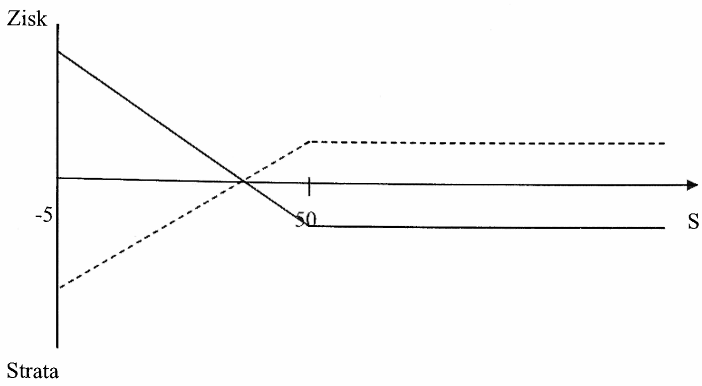
$$\text{vnútorná hodnota} = \max(X - S; 0).$$

Opcie s pozitívnou vnútornou hodnotou sú nazývané opcie „v peniazoch". Tak ako u call opcií, tak aj pri obchodovaní s put opciami pod paritou by existovali možnosti na arbitráž. Ak by napríklad americká put opcia s realizačnou cenou 50 jednotiek bola obchodovaná pod paritou, teda za menej než 5 jednotiek, investor by zakúpil put opciu a podkladové aktívum na spotovom trhu a okamžite by opciu uplatnil, čím by získal zisk vo výške rozdielu medzi paritou a cenou opcie.

Pre podkadové aktíva platiace dividendy platí, že skoré uplatnenie call alebo put opcií môže byť výhodné. Ak dividendy rastú, skoré uplatnenie call opcií sa stáva viac pravdepodobnejšie a skoré uplatnenie put opcie pred dátumom posledného dividendu je menej pravdepodobnejšie. U amerických call a put opcií rozhodovanie o uplatnení opčného práva závisí od pomeru medzi dividendami a príjmu z úrokov.

Obrázok č. 8 pevnou čiarou zobrazuje zisk z držania put opcie. Cena opcie je 5 jednotiek a 50 jednotiek je realizačná cena opcie. Zisk z predaja put opcie je daný zrkadlovou pozíciou ako u nákupu put opcie a je zobrazený prerušovanou čiarou.

Medzi významné faktory, ktoré ovplyvňujú cenu opcií patria spotová cena, realizačná cena, doba do splatnosti, dividendy a volatilita ceny podkladového aktíva a úrokové miery. Cena opcie rastie, ak doba do splatnosti rastie, alebo ak spotová cena spôsobuje, že opcia je hlbšie "v peniazoch".



Obrázok č. 8

Ak by aktívum nemalo žiadnu volatilitu, bolo by bezrizikové. S rastom volatility aktíva, cena opcie na toto aktívum rastie. Je to preto, keďže investor si môže vybrať medzi dvoma variantami ako aktívum získať. Buď si zakúpi call opciu a očakáva, že sa cena na spotovom trhu bude pre neho vyvíjať pozitívne, alebo si aktívum zakúpi okamžite na spotovom trhu. Čím volatilita rastie, budúci cenový rozptyl spotovej ceny sa zväčšuje. Tým sa pravdepodobnosť veľkých ziskov ale aj veľkých strát zvyšuje. Ak je call opcia "v peniazoch", investor získa tým viac, čím vyššia spotová cena bude. V opačnom prípade call opcia nebude uplatnená. Preto majiteľ call opcie bude preferovať väčšiu volatilitu. Čím je volatilita podkladového aktíva call opcie do doby splatnosti väčšia, tým má opcia vyššiu hodnotu ako aktívum na spotovom trhu a jej cena rastie.

Ten istý systém platí aj pre put opcie. Čím väčší rozptyl budúcich spotových cien, tým väčšia šanca, že opcia bude "v peniazoch". Pretože pre majiteľov put opcií nie je nutné opciu uplatniť, ich potencionálne straty sú obmedzené. Preto by cena opcie s rastom volatility mala vzrásť.

S rastom úrokových mier ceny call opcií rastú. Ak úrokové miery rastú, náklady na zakúpenie podkladového aktíva hneď na spotovom trhu rastú a zakúpenie call opcie sa javí ako viac atraktívnejšie a tým hodnota opcie rastie.

Tento efekt sa dá vysvetliť aj následovne. Predpokladajme, že investor kúpil call opciu a investoval do fondov (na bezrizikovú mieru) so zámerom získať v dobe splatnosti hodnotu vo výške realizačnej ceny. Ak úrokové miery vzrastú, investor z fondov získa viac, čím sa nákup podkladového aktíva pomocou opcie zlacní. Rast úrokových mier má ten istý dopad ako pokles realizačnej ceny. Ceny put opcií sa budú vyvíjať opačne ako ceny call opcií pri zmenách úrokových mier.

4. Black-Scholesová rovnosť

Black-Scholesová rovnosť je metóda, ktorá sa používa na oceňovanie opcií. Pri odvodení rovnosti sa vychádza najprv zo stochastickej diferenciálnej rovnice

$$\frac{dx}{x} = \sigma dX + \mu dt, \tag{4.1}$$

ktorá popisuje ako sa cena podkladového aktíva (v tomto prípade u opcie) vyvíja v závislosti od náhodnej premennej (dX) a náhodnej časti (μdt), kde parameter μ predstavuje deterministický odklon, vyjadrujúci deterministickú mieru zmeny ceny aktíva.

Ako bola rovnica (4.1) zostavená? Zadajme, že $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ vyjadruje zmenu ceny podkladového aktíva v čase i. Túto zmenu Δx_i môžeme zapísať aj ako $\sigma \Delta X_i$ ($\Delta x_i = \sigma \Delta X_i$), kde rozptyl σ náhodnej premennej dX kontroluje veľkosť kroku cenovej zmeny za zvolené časové obdobie a ΔX_i je stochastická premenná, vyjadrujúca zmenu hodnoty podkladového aktíva v čase i. A pretože predpokladáme, že cenové zmeny sú i.i.d., rovnosť $\Delta x_i = \sigma \Delta X_i$ môžeme zjednodušiť na $\Delta x = \sigma \Delta X$ a zároveň, ak stanovíme predpoklad, že prírastok v x je tak malý, že môžeme napísať $\Delta x \to dx$ a $\Delta X \to dX$, potom dostávame stochastickú diferenciálnu rovnicu pre cenu podkladového aktíva

$$dx = \sigma dX. \tag{4.2}$$

Štandardná finančná teória stavia predpoklad, že dX je náhodná premenná s Gaussianovou pravdepodobnostnou distribučnou funkciou, s nulovou strednou hodnotou a smerodatnou odchýlkou $(dt)^{1/2}$. Takže stavia zároveň predpoklad, že dt predstavuje malú časovú zmenu, ktorá je súčasne natoľko dosatočne veľká, aby mohol platiť centrálny limitný teorém. To znamená, že časový interval reprezentujúci dt je postačujúci na $n \to \infty$ cenových zmien, tak že všetky n cenové zmeny sú vzájomne i.i.d. a majú konečný rozptyl. Ak by tieto predpoklady boli splnené, platil by centrálny limitný teorém a pravdepodobnostná distribučná funkcia cenových zmien by za obdobie dt bola skutočne Gaussianová. Ak by k cenovým zmenám dochádzalo spojite, potom by každé časové obdobie spĺňalo predpoklad nekonečných cenových zmien a teda Gaussianitu pravdepodobnostnej distribučnej funkcie. Avšak v skutočnosti vieme, že k cenovej zmene nemôže dôjsť v ešte kratšom období, ako predstavuje čas, potrebný na uskutočnenie obchodov. Tento čas je ale vždy konečný a niekedy aj pomerne dlhý. Preto môžeme na finančných trhoch zaevidovať reálne ne-Gaussianitu, čo je v rozpore s predpokladmi štandardnej finančnej teórie.

Na záver, v štandardnej finančnej teórii sa k stochastickej premennej pridáva ešte často deterministická odchýlka, a to kvôli zahrňovaniu prípadného trendu na trhu. Takže celková rovnosť predstavuje

$$dx = \sigma dX + \mu dt. \tag{4.3}$$

Jediným rozdielom medzi rovnicami (4.1) a (4.3) je premenná, ktorá sleduje náhodnú prechádzku $\sigma dX + \mu dt$. V prvom prípade, v prípade rovnice (4.1), od ktorej sa Black-Scholasová rovnosť odvodzuje, je stanovená premenná ako výnos ceny $(=\frac{dx}{x})$ a má viac vyhovujúce lognormálne rozdelenie. Premenná dx v rovnici (4.3) má normálne rozdelenie a vyjadruje len zmenu ceny. Tento rozdiel vyjadrenia je však zanedbateľný, pretože platí, že $dx \langle\langle x$ a premenná $\frac{dx}{x}$ sa tak správa podobne ako cenová zmena dx.

Rovnica (4.1) vyjadruje zmenu ceny opcie ako zlomok celkovej ceny. Samozrejme, táto rovnosť nezobrazuje úplnú skutočnosť na finančných trhoch, keďže cena opcií sa nemení spojito v každom momente a medzi cenami opcií sa vyskytne miestami aj dočasná korelácia.

Predpokladajme, že v čase t je súčasná hodnota opcie V (teda opčná prémia) a súčasná hodnota podkladového aktíva je x. V je funkciou hodnoty podkladového aktíva x a času t. Takže máme funkciu $V(x,t)$ so stochastickou premennou x, čo ale spôsobuje väčšie komplikácie pri jej derivácii. Zadaním času t môžeme len pravdepodobnostne určiť hodnotu x a teda celú hodnotu $V(x,t)$. Preto sa pri derivácii musíme zamerať aj na časti vyššieho stupňa u premennej dx a zistiť, ktoré sa pri malom časovom intervale dt dajú zanedbať. Na to použijeme Iteho lema, pomocou ktorého môžeme derivovať súčasnú hodnotu opcie $V(x,t)$ so stochastickou premennou x nasledovne

$$dV(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx^2. \tag{4.4}$$

To, aby sme deriváciu hodnoty opcie $V(x,t)$ mohli zapísať pomocou rovnice (4.4), teda použiť Iteho lema, musia byť splnené podmienky tohto lemata. A to podmienky, že ceny podkladového aktíva x sa vyvíjajú spojito a náhodne a takisto, že hodnota opcie nie je funkciou minulého vývoja ceny podkladového aktíva, ale iba funkciou aktuálnej spotovej ceny.

Hodnotu dx z rovnice (4.1) dosadíme do rovnice (4.4) a dostávame

$$dV(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x\sigma dX + x\mu dt) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x\sigma dX + x\mu dt)^2 . \tag{4.5}$$

Z poslednej zátvorky rovnice (4.5) určíme, ktoré časti nie sú zanedbateľné a musíme ich ešte zohľadniť. Zátvorka sa dá prepísať ako

$$(x\sigma dX + x\mu dt)^2 = x^2\sigma^2(dX)^2 + 2x^2\sigma\mu(dX)(dt) + x^2\mu^2(dt)^2 , \tag{4.6}$$

obsahujúca tri časti.

Zaoberať sa budeme len členmi stupňa dt. Pretože je dt veľmi malý časový úsek (hoci aj dostatočne veľký pre platnosť centrálneho limitného teorému), jeho vyššie stupne sú natoľko malé, že ich môžeme zanedbať a teda vynechať.

Prvá časť sa dá upraviť ešte ďalej. Keďže podľa štandardnej finančnej teórie vychádzame z toho, že stochastická časť dX sleduje náhodnú prechádzku, má Gaussianovú PDF s nulovou strednou hodnotou a smerodatnou odchýlkou $(dt)^{1/2}$, jej rozptyl, vyjadrený ako

$$\sigma^2 = E\left[(dX - E[(dX)])^2\right] = E\left[(dX)^2\right], \tag{4.7}$$

sa rovná hodnote dt. Preto môžeme napísať $(dX)^2 = dt$ a prvá časť rovnosti (4.6) má tvar $x^2\sigma^2 dt$.

Druhá časť rovnosti (4.6) obsahuje parameter $(dX)(dt)$, ktorý môžeme vyjadriť aj ako $(dt)^{1/2}(dt)$, čo prekračuje stupeň dt a tým pádom môžeme celú druhú časť vynechať.

Posledná tretia časť je vynechaná tiež, keďže je vyššieho stupňa ako dt.

Z rovnosti (4.6) tak dostávame upravenú rovnosť

$$(x\sigma dX + x\mu dt)^2 = x^2\sigma^2 dt . \tag{4.8}$$

Dosadením rovnosti (4.8) do rovnice (4.5) získame

$$dV(x,t) = \frac{\partial V}{\partial x}(x\sigma dX + x\mu dt) + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x^2\sigma^2 dt) \tag{4.9}$$

a úpravou vyjadríme na

$$dV(x,t)=\left[\sigma x\frac{\partial V}{\partial x}\right]dX+\left[\mu x\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right]dt\,. \tag{4.10}$$

Ešte stále však máme stochastickú rovnicu vyjadrujúcu cenu opcie $V(x,t)$ v závislosti od času a od aktuálnej spotovej ceny podkladového aktíva.

Na to, aby sme mohli odvodiť cenu opcie univerzálne, použijeme stratégiu držania opcie a podkladového aktíva súčasne, za účelom zaistenia sa proti riziku. Ideálne je zaistenie také, ktoré minimalizuje riziko, alebo ho dokonca eliminuje na nulu. Práve z predpokladu dokonalého zaistenia, nesiaceho so sebou nulové riziko, budeme vychádzať ďalej.

Predpokladajme, že vlastníme portfólio zložené z opcie a z aktíva, rovnakého akým je podkladové aktívum u opcie. Veľkosť tohto vlastneného aktíva nám udáva parameter Δ. Hodnota takéhoto portfólia, vytvoreného za účelom dokonalého zaistenia sa proti výkyvom cien aktíva a to predajom call opcie a zakúpením podkladového aktíva, potom je

$$\Pi(x,t)=V(x,t)-\Delta(x,t)x(t)\,. \tag{4.11}$$

Táto rovnosť (4.11) nám ukazuje už spomýnanú závislosť ceny opcie V od spotovej ceny podkladového aktíva x a od času t, závislosť ceny aktíva x od času t (v každom časovom okamihu sa cena aktíva môže pohybovať) a závislosť množstva aktíva taktiež od ceny aktíva x a času t (v každom časovom okamihu sa zmenou ceny aktíva mení aj optimálne držané množstvo aktíva, tak aby spolu s držanou opciou nevznikol priestor na riziko).

Ako sa so zmenou času mení cena aktíva x a cena opcie V, tak sa mení aj hodnota portfólia. Jeho zmenu medzi časom $t \to t+dt$ vyjadruje rovnica

$$d\Pi = dV - \Delta dx\,. \tag{4.12}$$

V rovnici (4.12) zostáva množstvo držaného aktíva Δ fixné (hoci má na ňho vplyv ako aj cena x, tak aj čas t) z dôvodu, že nevieme, kam sa cena aktíva za obdobie $t \to t+dt$ posunie. Množstvo držaného aktíva meníme podľa toho, ako sa mení v čase cena aktíva, ale upraviť toto množstvo môžeme až po určitej dobe, kedy budeme vedieť, že k cenovej zmene došlo a taktiež aj presne k akej.

V rovnici (4.12) substituujeme veľkosť dV z rovnice (4.10)

$$d\Pi=\left[\sigma x\frac{\partial V}{\partial x}\right]dX+\left[\mu x\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial t}\right]dt-\Delta dx\,, \tag{4.13}$$

a z rovnice (4.1) dosadíme do rovnice (4.13) hodnotu dx

$$d\Pi = \left[\sigma x \frac{\partial V}{\partial x}\right] dX + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] dt - \Delta x\left[\sigma dX + \mu dt\right]. \tag{4.14}$$

Po úprave dostávame

$$d\Pi = \sigma x \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right] dX + \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right] dt. \tag{4.15}$$

Hoci je rovnica (4.15) stále stochastická, môžeme ju zbaviť stochastického elementu $\sigma x \left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right] dX$ a to tak, že v každom okamihu času t ustrážime, aby platilo

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{4.16}$$

Práve časť $\left[\frac{\partial V}{\partial x} - \Delta\right]$ rovnice (4.15) je veľmi dôležitá, pretože kontroluje stochastický element v zmene hodnoty portfólia $d\Pi$ a tým aj vo veľkosti rizika, ktoré portfólio nesie.

Budeme predpokladať, že podmienka (4.16) platí v každom časovom okamihu t a rovnica (4.15) sa potom mení na

$$d\Pi = \left[\mu x \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu \Delta x\right] dt. \tag{4.17}$$

Substitúciou podmienky (4.16) do zvyšku rovnice (4.17)

$$d\Pi = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right] dt, \tag{4.18}$$

dochádza k prechodu od stochastickej rovnice (4.15) k upravenej, už deterministickej rovnici (4.18), ktorá vyjadruje zmenu hodnoty portfólia v každom čase t. Determinizmus sme dosiahli odstránením náhodného parametra dX, ktorý vstupoval v rovnici (4.15) tiež do vyjadrenia zmeny hodnoty portfólia. Odstránením časti dX z rovnice sme eliminovali riziko portfólia, a v našom prípade sme dosiahli portfólio, vykazujúce nulové riziko.

Ďalej predpokladajme, že namiesto zakúpenia buď opcie alebo podkladového aktíva, uskutočníme inú bezrizikovú operáciu - umiestnime všetky finančné prostriedky v hodnote Π do banky a to na obdobie $t \to t + dt$ a za garantovaný fixný úrok r. Portfólio sa nám v banke za obdobie $t \to t + dt$ zhodnotí na čiastku $d\Pi = r\Pi dt$. Keďže predpokladáme, že na finančnom trhu nie je možná situácia arbitráže, potom výsledky obidvoch investičných možností sa musia rovnať. Preto platí rovnosť

$$r\Pi dt = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt. \tag{4.19}$$

Rovnosť (4.19) upravíme dosadením (4.11) za hodnotu portfólia Π a následne dosadením podmienky (4.16) za hodnotu Δ. Dostávame tak

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right]dt = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt. \tag{4.20}$$

Predpokladáme, že do úvahy berieme vždy len nenulový časový interval dt, čím sa rovnosť (4.20) mení na

$$r\left[V - x\frac{\partial V}{\partial x}\right] = \left[\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right]. \tag{4.21}$$

Tento tvar je pre vyjadrenie ceny opcie V výhodnejší, pretože nezahrňuje v sebe žiaden časový interval dt, iba čas t. Tak môžeme cenu opcie určiť v každom okamihu času t.

Ak na jednu stranu rovnosti (4.21) postavíme nulu, dostávame

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + rx\frac{\partial V}{\partial x} - rV = 0, \tag{4.22}$$

čo predstavuje Black-Scholesovú rovnosť. Na základe tejto rovnosti, pokiaľ sú splnené všetky jej zahrnuté predpoklady, potom pre každý finančný derivát , ktorého cena závisí len od aktuálnej ceny podkladového aktíva x a od času t a je zaplatená vždy na začiatku kontraktu, musí splňovať rovnosť (4.22).

V Black-Scholesovej rovnosti môžeme vidieť, že nezahrňuje rušivý faktor (odchýlku) μ. To môžeme interpretovať aj ako fakt, že pri dvoch osobách s odlišným predpokladom o časti μ, dospejú aj napriek tomu k rovnakej cene finančného derivátu.

Aby sme mohli rovnicu (4.22) vyriešiť a určiť teda cenu opcie V, musíme poznať ešte hraničné podmienky. Tie sa líšia od seba podľa toho, o aký typ opcie ide.

Pre európsku call opciu platia nasledujúce hraničné podmienky

$$V(x,T) = \max(x - X, 0), \tag{4.23}$$

$$V(0,t) = 0, \tag{4.24}$$

$$V(x,t) \overset{x\to\infty}{\to} x. \tag{4.25}$$

Ak by pre aktuálnu hodnotu podkladového aktíva platilo $x = 0$, potom by cena európskej call opcie v každom okamihu času t bola tiež nulová, ako ukazuje podmienka (4.24). Ale takisto aj podmienka (4.23), kde je pri $x = 0$ maximum z dvoch možností $(-X,0)$ nula, takže z podmienky (4.23) vyplýva, že cena európskej call opcie je nielen nulová počas trvania doby do splatnosti t, ale aj v dobe splatnosti T. Posledná podmienka (4.25) znázorňuje situáciu, kedy ak na trhu sledujeme rast hodnoty podkladového aktíva smerom $x \to \infty$, potom cena európskej call opcie sa blíži k aktuálnej hodnote podkladového aktíva x. Je to z dôvodu, že pri rastúcej tendencii hodnoty podkladového aktíva je väčšia snaha o uzamknutie si ceny u budúcej kúpe a cena európskej call opcie môže porásť až k hodnote x. Táto hodnota sa však už ďalej neprekročí, pretože v prípade ak by $V \rangle x$, investor uprednostní zakúpenie podkladového aktíva okamžite na spotovom trhu, keďže ide o lacnejšiu variantu.

Pre európsku put opciu platia tieto hraničné podmienky

$$V(x,T) = \max(X - x, 0), \tag{4.26}$$

$$V(0,t) = Xe^{-r(T-t)}, \tag{4.27}$$

$$V(x,t) \overset{x\to\infty}{\to} 0. \tag{4.28}$$

Ak by u put opcie pre aktuálnu hodnotu podkladového aktíva platilo $x = 0$, cena európskej put opcie počas doby do splatnosti t by sa rovnala diskontovanej uplatňovacej cene X, ako ukazuje podmienka (4.27). Navyše, v dobe splatnosti T by bol diskontný faktor rovný jednej a cena európskej put opcie by bola X. Túto cenu európskej put opcie v čase splatnosti T vyjadruje aj podmienka (4.26), z ktorej ak dosadíme $x = 0$, dostaneme ako maximálnu hodnotu X a teda cenu európskej put opcie v dobe splatnosti T. Podmienka (4.28) predstavuje situáciu, v ktorej hodnota podkladového aktíva sa na spotovom trhu vyvíja smerom $x \to \infty$ a následne na to sa cena európskej put opcie približuje nule. Je to z dôvodu toho, že ak vieme, že cena podkladového aktíva bude do budúcna rásť, potom strácame ochotu uzamknúť si predajnú cenu podkladového aktíva k budúcemu dátumu a cena európskej put opcie klesá smerom k nule.

4.1. Cena opcie

Pri vyjadrení ceny opcie sa používajú hodnoty

$$d_1 = \frac{\ln(x/X) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{4.29}$$

$$d_2 = \frac{\ln(x/X) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{4.30}$$

Tieto rovnice, tým že v sebe zahrňajú aj čas t, sú použité na určenie ceny amerických opcií, pretože v ich prípade môže dôjsť k ich uplatneniu kedykoľvek behom doby do platnosti. V prípade, že ide o európske opcie, ktoré sa môžu uplatniť len v dobe splatnosti T, v rovniciach (4.29) a (4.30) je t rovné nule.

Hodnoty d_1 a d_2 sú následne dosadené do rovníc podľa typu opcie:

Call opcia

$$V(x,t) = x\Phi[d_1] - Xe^{-r(T-t)}\Phi[d_2] \tag{4.31}$$

Put opcia

$$V(x,t) = Xe^{-r(T-t)}\Phi[-d_2] - x\Phi[-d_1]. \tag{4.32}$$

Opäť, ak sa jedná o opciu európsku, potom pre čas t v zátvorke $(T-t)$ platí, že $t = 0$. Ak by t nadobúdalo hodnotu z intervalu $t \in \langle 0, T)$, potom by sa jednalo o americkú opciu, ktorá sa môže majiteľom uplatniť kedykoľvek behom svojej doby do splatnosti.

Funkcia $\Phi[z]$ reprezentuje kumulatívnu distribučnú funkciu pre štandardnú normálnu náhodnú premennú. Funkciu môžeme rozpísať ako

$$\Phi[z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \tag{4.33}$$

Definičný obor tejto kumulatívnej distribučnej funkcie predstavujú už spomýnané hodnoty d_1 a d_2. Obor hodnôt je rozpísaný v tabuľke pre túto funkciu a hodnoty $\Phi[d_1]$ a $\Phi[d_2]$ vyjadrujú pravdepodobnosť, podľa ktorej bude opcia uplatnená. Preto ich hodnota leží medzi 0 a 1 a po vynásobení $\times 100$ dostávame hodnotu v percentách.

Hodnota $\Phi[d_1]$ vyjadruje pravdepodobnosť uplatnenia opcie vzhľadom k aktuálnej spotovej cene podkladového aktíva x. S rastom ceny podkladového aktíva rastie opčná prémia call opcie (pretože rastie vnútorná hodnota call opcie, daná rozdielom $S - X$), čo zvyšuje pravdepodobnosť uplatnenia opcie a hodnota $\Phi[d_1]$ sa teda zvyšuje. S väčšou hodnotou $\Phi[d_1]$ sa potom zvyšuje cena call opcie. Vyplýva to z rovnice (4.31). U put opcii dochádza naopak s rastom ceny podkladového aktíva k poklese opčnej prémie (pretože klesá vnútorná hodnota put opcie, daná rozdielom $X - S$) a pravdepodobnosť na uplatnenie tejto opcie potom klesá, takže hodnota $\Phi[d_1]$ klesá tiež. Rovnica (4.32) na vyjadrenie hodnoty put opcie obsahuje parameter $\Phi[-d_1]$, ktorý môžeme vyjadriť aj ako $\Phi[-d_1] = 1 - \Phi[d_1]$. Potom rovnica (4.32) má nový tvar

$$V(x,t) = Xe^{-r(T-t)}\Phi[-d_2] - x(1 - \Phi[d_1]) \tag{4.34}$$

a s poklesom časti $\Phi[d_1]$ klesá aj celá hodnota put opcie.

Hodnota $\Phi[d_2]$ vyjadruje pravdepodobnosť uplatnenia opcie vzhľadom k jej uplatňovacej cene X.

Európska call opcia

Z podmienky (4.16), u ktorej sme stanovili predpokad, že platí v každom časovom okamihu t, nám pre európsku call opciu vyplýva

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x} = \Phi[d_1]. \tag{4.35}$$

U zaisťovacej stratégii pri kúpe európskej call opcie musí teda v každom momente platiť, aby množstvo vlastneného podkladového aktíva bolo rovné veľkosti $\Phi[d_1]$.

Európska put opcia

Pri vlastnení európskej put opcie nám z podmienky (4.16) vyplýva rovnosť

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial x} = -\Phi[-d_1] = -(1 - \Phi[d_1]) = \Phi[d_1] - 1, \tag{4.36}$$

podľa ktorej by sa v každom čase t malo množstvo vlastneného podkladového akíva rovnať veľkosti $\Phi[d_1] - 1$.

Hoci Black-Scholesová rovnosť ukazuje, ako dosiahnúť dokonalé zaistenie sa proti riziku, teda docieliť nulové riziko, v reálnom svete však stanovené prepoklady, na ktorých rovnosť stojí, neplatia úplne.

Je prakticky nemožné zabezpečiť spojité zaistenie sa a navyše, existujú nemalé transakčné náklady, spojené s úpravou portfólia. Obzvlášť, ak má ísť o zaistenie spojité. Pretože s rastom počtu zaisťovacích akcií sa transakčné náklady zvyšujú a tak vzniká trade-off medzi počtom uskutočnených operácií, a následne veľkosťou rizika, a transakčnými nákladmi. V tomto modeli sa však vychádza z toho, že transakčné náklady neexistujú.

Zároveň, z reálnych pozorovaní sa ukazuje, že hodnoty premennej $\frac{dx}{x}$ nesledujú pri svojom vývoji náhodnú prechádzku a pozorovania vykazujú dokonca nezanedbateľný stupeň vyššej dočasnej korelácie (Johnson a spol., 2003).

5. *Riziko vypisovateľa opcií v reálnom svete*

Pri kúpe opcie má kupujúci stratu, vyplývajúcu z opcie, limitovanú. V prípade nepriaznivého vývoja ceny podkladového aktíva pre uplatnenie opcie, majiteľ opciu neuplatní a jeho strata predstavuje výšku ceny opcie, ale dosahuje zisk na spotovom trhu.

Opačná pozícia plynie pre vypisovateľa opcie. V prípade opačného vývoja ceny podkladového aktíva na spotovom trhu, ako predpokladal kupujúci opcie, opcia ostane neuplatnená a predajca opcie obdrží zisk v hodnote ceny opcie. V opačnom prípade vývoja cien na spotovom trhu, predajca môže utrpieť nelimitovanú stratu. A to, ak je cenová strata pre vypisovateľa opcie medzi operáciou, uskutočnenou na základe opcie a tou istou operáciou, uskutočnenou na spotovom trhu, väčšia ako zisk z predaja opcie.

Proti strate, vyplývajúcej z predaja opcií, sa ich vypisovatelia často zaisťujú metódou short-sellingu. Ide o kroky, ktoré môžu uskutočniť kedykoľvek v priebehu doby do splatnosti opcie, v prípade, že pozorujú nepriaznivý vývoj, plynúci z vypísania opcií. Touto metódou si vypisovateľ opcií zapožičia určité množstvo podkladového aktíva, rovnakého ako u predanej opcie a predá ho na spotovom trhu. S tým, že najneskôr v dobe splatnosti opcie nakúpi rovnaké množstvo späť a vráti ho. Takto sa môže strata výrazne znížiť.

V prípade existencie podmienok, potrebných pre Black-Scholesovú rovnosť, nemôže nastať situácia arbitráže a investori čelia nulovému riziku. Avšak pri nedokonalosti týchto predpokladov existuje nenulové riziko. Vyvstáva preto otázka, aké riziko vlastne pre vypisovateľa opcií existuje a do akej veľkej miery je ho možné eliminovať.

V čase doby splatnosti T opcie môžeme zapísať zmenu bohatstva ΔW vypisovateľa opcií ako:

$$\Delta W = \text{zisk z predaja opcie} - \text{výsledok uplatnenia opcie} + \text{zisk zo zaistenia}.$$

Cena opcie predstavuje jej hodnotu $V(x,t)$, ktorú obdrží predajca od kupujúceho a to v čase $t = 0$. Počas doby $t = 0 \rightarrow T$ môže predajca uložiť túto sumu na bezrizikovú úrokovú mieru r a na konci obdobia dosiahne zisk z predaja opcie v hodnote

$$V_0(x_0, X, T)[1+r]^T . \tag{5.1}$$

Výsledok uplatnenia opcie predstavuje hodnotu

$$V_T(x_T, X) = X - x_T, \tag{5.2}$$

ktorú majiteľ opcie obdrží ešte navyše od vypisovateľa opcie, pretože nepoužije v čase T spotový trh na uskutočnenie operácie s podkladovým aktívom, ale uplatní opciu voči jej vypisovateľovi.

Zisk zo zaistenia predstavuje zisk alebo stratu realizovanú z držania Φ_t množstva podkladového aktíva v čase t. Ak vypisovateľ nepredpokladá spojitosť medzi vývojom cien v minulosti a v súčasnosti, potom na rozhodovanie o množstve zvoleného podkladového aktíva Φ_t má vplyv len aktuálna cena a čas, teda $\Phi_t(x_t)$. Keď v čase $t-\tau$ vlastní vypisovateľ podkladové aktívum o množstve $\Phi_{t-\tau}$, potom za časový úsek $t-\tau \to t$ profituje o hodnotu

$$\Phi_{t-\tau}[x_t - x_{t-\tau}]. \tag{5.3}$$

Zároveň by však kapitál, zakotvený v podkladovom aktive, mohol vyniesť bezrizikovú úrokovú mieru r a teda priniesť za obdobie $t-\tau \to t$ hodnotu

$$\Phi_{t-\tau} x_{t-\tau}[1+r]^{\tau}. \tag{5.4}$$

Ak od hodnoty (5.4) odpočítame veľkosť kapitálu, na ktorý sa úrok viaže, dostaneme náklady príležitosti

$$\Phi_{t-\tau} x_{t-\tau}[1+r]^{\tau} - \Phi_{t-\tau} x_{t-\tau}. \tag{5.5}$$

Dostávame tak celkový zisk zo zaistenia za obdobie $t-\tau \to t$

$$\Phi_{t-\tau}\left[(x_t - x_{t-\tau}) - x_{t-\tau}\left((1+r)^{\tau} - 1\right)\right] = \Phi_{t-\tau}\left[x_t - (1+r)^{\tau} x_{t-\tau}\right]. \tag{5.6}$$

Ak sa pohybujeme v diskrétnom čase, môžeme čas t zadefinovať ako

$$t = i\tau,\ i = 1, 2, 3\ldots,\ \tau > 0. \tag{5.7}$$

Potom na konci každého obdobia $t = i\tau$ uloží vypisovateľ opcií zisk zo zaistenia za obdobie $t-\tau \to t$, vyjadrený hodnotou (5.6), do banky na bezrizikovú úrokovú mieru r, a to do konca obdobia splatnosti opcií T. Tak sa obdrží zisk zo zaistenia vo výške

$$\sum_{i=1}^{T/\tau} \Phi_{(i-1)\tau}\left(x_{i\tau} - (1+r)^{\tau} x_{(i-1)\tau}\right)(1+r)^{T-i\tau}. \tag{5.8}$$

Ak časový úsek od vypísania opcií do ich doby splatnosti T rozdelíme na malé časové úseky o dĺžke τ a uskutočňujeme zaistenie v každom čase $i\tau$, môže nastať aj situácia, kedy nebude množstvo podkladového aktíva potrebné meniť. Môže teda platiť $\Phi_{(i-1)\tau} = \Phi_{i\tau}$.

Zmena bohatstva ΔW vypisovateľa opcií v čase ich splatnosti T potom za predpokladu nulových transakčných nákladov je

$$\Delta W = V_0(1+r)^T - V_T + \sum_{i=1}^{T/\tau} \Phi_{(i-1)\tau}\left(x_{i\tau} - (1+r)^\tau x_{(i-1)\tau}\right)(1+r)^{T-i\tau}. \tag{5.9}$$

Ak by sme zabezpečili spojité zaisťovanie sa, teda dosiahli limitu $\tau \to 0$, potom by hodnota zmeny bohatstva ΔW vyjadrená rovnicou (5.9) nadobudla tvar

$$\Delta W = V_0 e^{rT} - V_T + \int_0^T \Phi_t\left(\frac{dx_t}{dt} - rx_t\right)e^{r(T-t)}dt. \tag{5.10}$$

Túto hodnotu dostaneme len v prípade dokonalého spojitého zaisťovania sa. Čo však v skutočnosti nekorešponduje so skutočnosťou. Preto sa už ďalej spojitým zaisťovaním zaoberať nebudeme.

Ak vychádzame z predpokladu, že ceny podkladového aktíva sa vyvíjajú náhodne, potom pri zužovaní časových intervalov τ dochádza k rastu pravdepodobnosti, že zmena bohatstva je nulová, $p(\Delta W)$ pre hodnotu $\Delta W = 0$ rastie, a zároveň sa zmenšuje rozptyl $\sigma^2_{\Delta W}$ u tejto pravdepodobnostnej distribučnej funkcie. Zmenšuje sa až limitne k nule, teda $\sigma^2_{\Delta W} \to 0$, ak $\tau \to 0$, a hodnotu $\sigma^2_{\Delta W}$ môžeme zrovnať s hodnotou τ.

Pri zmenšovaní časového úseku $\tau \to 0$ dosahuje smerodatná odchýlka limitu $\sigma_{\Delta W} = \sqrt{\tau} \to 0$, čo vedie k Black-Scholasovému výsledku. Teda k záveru, že pri spojitom zaisťovaní sa proti riziku dochádza k úplnému odstráneniu všetkého rizika, ktoré z náhodného vývoja cien podkladového aktíva vyplýva.

Pri zaujatí viac realistického predpokladu a to, že nielen cena podkladového aktíva, ale aj rozptyl cenových zmien sa vyvíja náhodne, sa pozoruje, že smerodatná odchýlka zmeny bohatstva $\sigma_{\Delta W}$ nenadobúda hodnoty $\sqrt{\tau}$, ale väčšie. A súčasne pri spojitom zaisťovaní, teda ak $\tau = 0$, sa objavuje, že $\sigma_{\Delta W}$ nie je nulová (Johnson a spol., 2003).

Dostávame teda výsledok, podľa ktorého neexistuje dokonalé zaistenie, aj keď je uskutočňované v každom momente.

Jedným z takýchto modelov, popisujúcich stochastickú volatilitu, je napríklad Hull-Whiteov model pohybov cien podkladového aktíva. Prechod k zahrňutiu stochastickej volatility je krokom k zdokonaľovaniu náhodnej prechádzky u vývoja ceny podkladového aktíva, a to v zmysle väčšieho priblíženia sa realite, hoci ešte stále ani tento model nezachycuje všetky možné náležitosti, ktoré sa popri pohybe cien môžu vyskytnúť.

Keďže pri prechode k stochastickej volatilite sa pri spojitom zaisťovaní pomocou Black-Scholasovej delty objavuje nenulová smerodatná odchýlka zmeny bohatstva, $\sigma_{\Delta W} \neq 0$, značí to, že vypisovateľ opcií neustále čelí riziku, i keď najmenšiemu možnému. Zabezpečiť si nulové riziko nie je teda možné samotným zapožičaním si určitého množstva podkladového aktíva Φ_t v každom čase t, ale je potrebné hľadať ďalšie možnosti znižujúce riziko investora. Jednou z týchto možností by mohli byť ďalšie dodatočné operácie s finančnými derivátmi a ich prípadná prepojenosť.

5.1. Stanovenie ceny opcie v reálnom svete

Pre stanovenie ceny opcie budeme vychádzať z rovnice (5.9), určujúcej zmenu bohatstva u vypisovateľa opcií. Pre nízkosť úrokových mier stanovíme predpoklad, že $r = 0$. Takže zjednotíme súčasnú hodnotu s budúcou.

Po stanovení $r = 0$ a prechodu $i \to i+1$, namiesto pôvodného $i-1 \to i$, čím ide len o formálnu zmenu, sa rovnica (5.9) mení na

$$\Delta W = V_0 - V_T + \sum_{i=0}^{T/\tau-1} \Phi_{i\tau}\left(x_{(i+1)\tau} - x_{i\tau}\right). \tag{5.11}$$

Vyjadríme ďalej strednú hodnotu zmeny bohatstva ΔW v čase $t = 0$ vzhľadom ku všetkým možným cenovým hodnotám podkladového aktíva počas trvania života opcie. Ak nejaký člen je závislý od ceny podkladového aktíva v určitom čase, tieto časy označíme u strednej hodnoty tohto člena vpravo dole.

Strednú hodnotu $E[\Delta W]_{x_0,\ldots,x_T}$ dostaneme, ak spriemerujeme všetky členy rovnice (5.11). Pre zjednodušenie budeme používať namiesto $i\tau$ označenie t. Potom dostávame

$$E[\Delta W]_{x_0,\ldots,x_T} = V_0[x_0, X, T] - E[V_T[x_T, T]]_{x_T} + \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E[\Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t} \quad . \tag{5.12}$$

Prvá časť rovnice (5.12), zisk z predaja opcie $V_0[x_0, X, T]$, je časovo závislá len od ceny podkladového aktíva x_0 v čase $t = 0$, ktorá je pri predaji opcie známa. Preto nemusíme hľadať jej strednú hodnotu.

Druhá časť rovnice predstavuje strednú hodnotu výsledku uplatnenia opcie, $E[V_T[x_T, T]]_{x_T}$, výsledok, ktorý závisí od ceny podkladového aktíva len v čase $t = T$. Preto môžeme ostatné časy, $x_0, \ldots, x_{T-\tau}$, vypustiť.

Posledná časť rovnice predstavuje strednú hodnotu zisku zo zaistenia, $\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E[\Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t}$, zisk, ktorý závisí od ceny podkladového aktíva v dvoch momentoch, a to v časoch $t+\tau$ a t. Poslednú časť môžeme preto napísať ako

$$\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E[\Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)]_{x_0,\ldots,x_T} = \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \int_0^{\infty} \Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t) p[x_T, x_{T-\tau}, \ldots, x_\tau / x_0] dx_T dx_{T-\tau} \ldots dx_\tau$$

$$= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \int_0^{\infty} \Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t) p[x_{t+\tau}/x_t, x_0] p[x_t/x_0] dx_{t+\tau} dx_t$$

$$= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right]\left(x_{t+\tau} - x_t\right)\right]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t} . \tag{5.13}$$

Upraviť túto časť ešte môžeme, ak strednú hodnotu ceny podkladového aktíva v čase $t+\tau$, $E\left[x_{t+\tau}\right]_{x_{t+\tau}/x_t}$, vyjadríme ako cenu podkladového aktíva v čase t, plus odchýlka μ_t. Teda

$$E\left[x_{t+\tau}\right]_{x_{t+\tau}/x_t} = \int_0^\infty x_{t+\tau}\, p\left[x_{t+\tau}/x_t\right] dx_{t+\tau} = x_t + \mu_t . \tag{5.14}$$

Potom pri rozpísaní časti (5.13) dostávame

$$\begin{aligned}\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right]\left(x_{t+\tau} - x_t\right)\right]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t} &= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right] E\left[x_{t+\tau}\right]_{x_{t+\tau}/x_t}\right]_{x_t} - \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right] x_t\right]_{x_t} \\ &= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right]\left(x_t + \mu_t\right)\right]_{x_t} - \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right] x_t\right]_{x_t} \\ &= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right]\mu_t\right]_{x_t} .\end{aligned} \tag{5.15}$$

Stredná hodnota zmeny bohatstva ΔW v čase $t = 0$ po úpravách teda je

$$E\left[\Delta W\right]_{x_0,\dots,x_T} = V_0\left[x_0, X, T\right] - E\left[V_T\left[x_T, T\right]\right]_{x_T} + \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[\Phi_t\left[x_t\right]\mu_t\right]_{x_t} . \tag{5.16}$$

Pre ďalší postup predpokladajme, že cenové zmeny podkladového aktíva pri plynutí času majú nulovú strednú hodnotu, teda $E\left[\mu_t\right] = 0$, čím sa posledný člen rovnice (5.16) rovná nule.

Keď vychádzame z princípu nulovej arbiráže, kedy ani pre vypisovateľa a rovnako ani pre majiteľa opcie neexistuje príležitosť zisku, musí platiť, že $E\left[\Delta W\right]_{x_1,\dots,x_T} = 0$. Zároveň platí rovnosť

$$V_0\left[x_0, X, T\right] = E\left[V_T\left[x_T, X\right]\right]_{x_T} = \int_0^\infty V_T\left[x_T, X\right] p\left[x_T/x_0\right] dx_T , \tag{5.17}$$

čo predstavuje reálnu cenu opcie v čase $t = 0$.

5.1.1. Meranie rizika

To, o koľko sa môže vypisovateľovi opcií jeho bohatstvo znížiť, ukazuje smerodatná odchýlka zmeny bohatstva ΔW. Tá však predstavuje zároveň aj možnosť zvýšenia bohatstva až do veľkosti smerodatnej odchýlky, čo ale zanedbáme, pretože sa momentálne zaoberáme len spôsobom dokonalého zaistenia sa a nie možnosťami na špekulácie s cieľom dosiahnutia čo najväčšieho zisku.

Rozptyl zmeny bohatstva, $\mathrm{var}(\Delta W)$, z ktorého sa následne vyjadrí smerodatná odchýlka, vyjadríme ako rozdiel: $E\left[(\Delta W)^2\right]_{x_0,\ldots,x_T} - \left(E[(\Delta W)]_{x_0,\ldots,x_T}\right)^2$. Keďže však vychádzame z predpokladu nulovej arbitráže, položili sme teda základ, že $E[\Delta W]_{x_0,\ldots,x_T} = 0$, rozptyl $\mathrm{var}(\Delta W)$ sa mení na

$$\mathrm{var}(\Delta W) = E\left[(\Delta W)^2\right]_{x_0,\ldots,x_T} = E\left[\left(V_0[x_0, X, T] - V_T[x_T, X] + \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)\right)^2\right]_{x_0,\ldots,x_T}.$$

(5.18)

Poslednú časť rovnice (5.18) postupne upravujeme ďalej po častiach:

1. $E\left[(V_0[x_0, X, T])^2\right]_{x_0,\ldots,x_T}$

$$= (V_0[x_0, X, T])^2.$$

A podľa rovnosti (5.17) platí, že

$$(V_0[x_0, X, T])^2 = \left(E[V_T[x_T, X]]_{x_T}\right)^2. \qquad (5.19)$$

2. $E\left[(V_T[x_T, X])^2\right]_{x_0,\ldots,x_T}$

$$= E\left[(V_T[x_T, X])^2\right]_{x_T}. \qquad (5.20)$$

3. $E\left[\left(\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)\right)^2\right]_{x_0,\ldots,x_T}$

$$= \sum_{t/\tau,t'/\tau=0}^{T/\tau-1} E[\Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)\Phi_{t'}[x_{t'}](x_{t'+\tau} - x_{t'})]_{x_0,\ldots,x_T} = \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[(\Phi_t[x_t])^2 (x_{t+\tau} - x_t)^2\right]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t}$$
$$+ \sum_{t/\tau \neq t'/\tau}^{T/\tau-1} E[\Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)\Phi_{t'}[x_{t'}](x_{t'+\tau} - x_{t'})]_{x_0,\ldots,x_T}. \qquad (5.21)$$

Prvá časť súčtu obsahuje členy, pre ktoré $t = t'$ a druhá časť členy, pre ktoré platí $t \neq t'$. Ak stanovíme predpoklad, že cenové zmeny $\Delta x_{t,t-\tau} = x_t - x_{t-\tau}$ a $\Delta x_{t' \neq t, t'-\tau} = x_{t'} - x_{t'-\tau}$ sú nekorelované, potom druhý člen môžeme položiť ako rovný nule.

$$\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[(\Phi_t[x_t])^2 (x_{t+\tau} - x_t)^2\right]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t} = \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[(\Phi_t[x_t])^2 \int_0^\infty \left(x_{t+\tau} - E[x_{t+\tau}]_{x_{t+\tau}/x_t}\right)^2 p[x_{t+\tau}/x_t] dx_{t+\tau}\right]_{x_t},$$

z rovnice (5.14) a z predpokladu, že $E[\mu_t] = 0$ ďalej vyplýva

$$= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[(\Phi_t[x_t])^2 \int_0^{\infty} (x_{t+\tau} - x_t)^2 \, p[x_{t+\tau}/x_t] dx_{t+\tau} \right]_{x_t} \tag{5.22}$$

$$= \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[(\Phi_t[x_t])^2 \sigma_{t+\tau,t}^2 \right]_{x_t} . \tag{5.23}$$

Výraz $\sigma_{t+\tau,t}^2$ z rovnice (5.23) vyjadruje integrál z rovnice (5.22), ktorý predstavuje rozptyl distribúcie ceny podkladového aktíva v časovom intervale $(t, t+\tau)$.

4. $E[-2V_0[x_0, X, T]V_T[x_T, X]]_{x_0,\dots,x_T}$

Platnosťou rovnosti (5.17) dostávame

$$= -2E[V_T[x_T, X]V_T[x_T, X]]_{x_T} = -2\left(E[V_T[x_T, X]]_{x_T}\right)^2 . \tag{5.24}$$

5. $E\left[2V_0[x_0, X, T] \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t) \right]_{x_0,\dots,x_T}$

$$= 2V_0[x_0, X, T] \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E[\Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t)]_{x_{t+\tau}/x_t, x_t} = 0. \tag{5.25}$$

Rovnosť nule vyplýva z rovnosti (5.15) a z predpokladu, že $E[\mu_t] = 0$.

6. $E\left[-2V_T[x_T, X] \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \Phi_t[x_t](x_{t+\tau} - x_t) \right]_{x_0,\dots,x_T}$

$$= -2 \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[V_T[x_T, X]\Phi_t[x_t] \int_0^{\infty} (x_{t+\tau} - x_t) p[x_{t+\tau}/x_t, x_T] dx_{t+\tau} \right]_{x_T/x_t, x_t} \tag{5.26}$$

$$= -2 \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[V_T[x_T, X]\Phi_t[x_t] E[\Delta x_{t+\tau,t}]_{x_t \to x_T} \right]_{x_T/x_t, x_t} \tag{5.27}$$

Výraz $E[\Delta x_{t+\tau,t}]_{x_t \to x_T}$ vyjadruje integrál z rovnosti (5.26) a predstavuje priemernú cenovú zmenu podkladového aktíva v priebehu časového intervalu τ a za obdobie od t do T.

Celkový rozptyl zmeny bohatstva vypisovateľa opcií dostaneme ak sčítame časti (5.19), (5.20), (5.23), (5.24) a (5.27) a dostávame

$$\operatorname{var}(\Delta W) = E\left[(V_T[x_T, X])^2\right]_{x_T} + \left(E[V_T[x_T, X]]_{x_T}\right)^2 + \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[(\Phi_t[x_t])^2 \sigma_{t+\tau,t}^2\right]_{x_t}$$

$$- 2\left(E[V_T[x_T, X]]_{x_T}\right)^2 - 2 \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} E\left[V_T[x_T, X]\Phi_t[x_t] E[\Delta x_{t+\tau,t}]_{x_t \to x_T}\right]_{x_T/x_t, x_t} .$$

Úpravou získame rozptyl o veľkosti

$$\operatorname{var}(\Delta W)=E\left[\left(V_T[x_T,X]\right)^2\right]_{x_T}-\left(E\left[V_T[x_T,X]\right]_{x_T}\right)^2$$

$$+\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1}\left(E\left[\left(\Phi_t[x_t]\right)^2\sigma^2_{t+\tau,t}\right]_{x_t}-2E\left[V_T[x_T,X]\Phi_t[x_t]E\left[\Delta x_{t+\tau,t}\right]_{x_t\to x_T}\right]_{x_T/x_t,x_t}\right),$$

(5.28)

ktorý môžeme ešte prepísať pomocou integrálov na

$$\operatorname{var}(\Delta W)=\int_0^{\infty}\left(V_T[x_T,X]\right)^2p[x_T/x_0]dx_T-\left(\int_0^{\infty}V_T[x_T,X]p[x_T/x_0]dx_T\right)^2$$

$$+\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1}\int_0^{\infty}\left(\Phi_t[x_t]\right)^2\sigma^2_{t+\tau,t}p[x_t/x_0]dx_t-2\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}V_T[x_T,X]\Phi_t[x_t]E\left[\Delta x_{t+\tau,t}\right]_{x_t\to x_T}p[x_T/x_t]dx_T\right)p[x_t/x_0$$

(5.29)

Rovnicu (5.29) môžeme ďalej zjednodušiť, ak položíme predpoklad, že cenové zmeny podkladového aktíva $\Delta x_{t,t-\tau}=x_t-x_{t-\tau}$ sú nezávislé a identicky rozdelené (tzv. i.i.d.). Potom platí, že

$$\sigma^2_{t+\tau,t}=\sigma^2\tau \text{ a } E\left[\Delta x_{t+\tau,t}\right]_{x_t\to x_T}=\frac{x_T-x_t}{T-t}\tau, \tag{5.30}$$

kde σ^2 reprezentuje rozptyl cenových zmien $\Delta x_{t,t-1}=x_t-x_{t-1}$.

Rozptyl zmeny bohatstva $\operatorname{var}(\Delta W)$ závisí od množstva podkladového aktíva $\Phi_t[x_t]$, určeného na operáciu zaistenia sa proti riziku. S optimálnym množstvom podkladového aktíva $\Phi^*_t[x_t]$ minimalizujeme rozptyl $\operatorname{var}(\Delta W)$, a preto hodnotu $\Phi^*_t[x_t]$ dostaneme deriváciou

$$\frac{\partial\operatorname{var}(\Delta W)}{\partial\Phi_t[x_t]}=0. \tag{5.31}$$

$$\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1}\int_0^{\infty}2\sigma^2_{t+\tau,t}\Phi_t[x_t]p[x_t/x_0]dx_t-2\sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}V_T[x_T,X]E\left[\Delta x_{t+\tau,t}\right]_{x_t\to x_T}p[x_T/x_t]dx_T\right)p[x_t/x_0]dx_t=0$$

(5.32)

Keďže je funkcia $\operatorname{var}(\Delta W)$ vo svojej premennej $\Phi_t[x_t]$ rastúca parabola (Johnson a spol., 2003), má jediný extrém a tým je globálne minimum. Preto optimálne množstvo podkladového aktíva $\Phi^*_t[x_t]$ dostaneme hneď, vyjadrením z rovnice (5.32)

$$\Phi^*_t[x_t]=\frac{1}{\sigma^2_{t+\tau,t}}\int_0^{\infty}V_T[x_T,X]E\left[\Delta x_{t+\tau,t}\right]_{x_t\to x_T}p[x_T/x_t]dx_T. \tag{5.33}$$

Pretože, ako je napísané v časti 4., z používania viac realistikého predpokladu o tom, že aj rozptyl cenových zmien sa vyvíja tiež náhodne, ukazuje sa, že rozptyl $\mathrm{var}(\Delta W)$ nie je nulový. To potom znamená, že funkcia $\mathrm{var}(\Delta W)$ (5.29) o premennej $\Phi_t[x_t]$ nenadobúda hodnotu nula a leží niekde nad osou $y = 0$.

Pri použití optimálneho množstva podkladového aktíva nadobúda rozptyl hodnotu

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}^*(\Delta W) = & \int_0^\infty (V_T[x_T, X])^2 p[x_T/x_0]dx_T - \left(\int_0^\infty V_T[x_T, X]p[x_T/x_0]dx_T \right)^2 \\
& + \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \int_0^\infty (\Phi_t^*[x_t])^2 \sigma_{t+\tau,t}^2 p[x_t/x_0]dx_t - \Phi_t^*[x_t] \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \int_0^\infty 2\sigma_{t+\tau,t}^2 \Phi_t^*[x_t]p[x_t/x_0]dx_t \\
= & \int_0^\infty (V_T[x_T, X])^2 p[x_T/x_0]dx_T - \left(\int_0^\infty V_T[x_T, X]p[x_T/x_0]dx_T \right)^2 \\
& - \sum_{t/\tau=0}^{T/\tau-1} \int_0^\infty \sigma_{t+\tau,t}^2 (\Phi_t^*[x_t])^2 p[x_t/x_0]dx_t\,.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

Ale keďže leží funkcia (5.29) v polrovine nad osou $y = 0$, nie je ani pri držaní optimálneho množstva podkladového aktíva možné dosiahnuť nulové riziko, iba riziko minimálne. A to i v prípade spojitého zaitenia sa, teda ak $\tau = 0$. Toto minimálne riziko je označované ako reziduálne riziko ($\mathrm{var}^*(\Delta W)$) a vyjadruje ho rovnica (5.34).

6. Záver

Na vývoj finančných trhov má vplyv obrovské množstvo faktorov. Aktéri, ktorí na finančných trhoch pôsobia, sa v prvom rade snažia o predikciu budúcej spotovej ceny aktív, na základe čoho uskutočňujú svoje ďalšie operácie. Popri obchodovaniu na finančných trhoch sa zároveň zaujímajú aj o veľkosť rizika, ktoré z ich držaného portfólia vyplýva. Štandardným spôsobom merania rizika vo financiách je rozptyl cenových zmien. I keď sa riziko dá merať aj v inej forme, napríklad metódou VaR, vychádza sa vždy aj z pozorovaného rozptylu.

Postupom času sa vytvárali inštrumenty, používané na zaistenie sa proti riziku. Dnes túto skupinu nástrojov nazývame ako finančné deriváty. Avšak to, že vývoj na finančných trhoch sa nedá jednoznačne predvídať a v skutočnosti neexistujú ani podmienky dokonalej konkurencie, s ktorými sa jednoduchšie dajú odvodiť závery, vytvára priestor na to, aby sa finančné deriváty využívali aj na špekulatívne účely. Pomocou nich, poprípade ich vzájomnou kombináciou, sa zároveň hľadajú možnosti na vytvorenie zisku.

Dôležité pre investorov je určenie, respektíve dohodnutie, tej správnej ceny vo finančnom deriváte. Na určenie týchto cien sa však používajú aj očakávania, ktoré sa ale napokon môžu od skutočnosti výrazne líšiť. Preto zostáva aj naďalej otvorená otázka, či je vôbec možné vývoj na finančných trhoch určiť dopredu, za súčasných existujúcich podmienok, alebo sa môžeme snažiť len o čo najpribližnejšie odhadnutie budúcnosti.
Opcie predstavujú finančný derivát, u ktorého je okrem dohodnutej realizačnej ceny stanovená aj cena opcie. Keďže opcia poskytuje držiteľovi právo na uskutočnenie výmenného obchodu, investori sú za toto privilégium ochotní zaplatiť, čo túto cenu opcie predstavuje.

Na určenie optimálnej ceny opcie bolo vyvinutých viacero modelov, z ktorých najznámejšie používaný je Black-Scholesov model určenia ceny opcie. Tento model vo svojom závere stanovuje rovnosť, ktorú musí optimálna cena opcie spĺňať. Ide o cenu opcie, ktorá nevytvára žiadne arbitrážne príležitosti. Zároveň sa z nej môže vychádzať pri stanovení zaistenia sa proti riziku. V tomto modeli sa dá dospieť k dokonalému zaisteniu.

Táto rovnosť je však postavená na nereálnych predpokladoch, takže dosiahnuté výsledky nezodpovedajú verne všetkým skutočnostiam na trhu. Možnosťou, ako sa niektorým nereálnym predpokladom pri stanovení Black-Scholasovej rovnosti vyhnúť a tým pádom dospieť k reálnejšej cene opcie, je vychádzať z určenia zmeny bohatstva vypisovateľa opcií a následne z určenia strednej hodnoty tejto zmeny bohatstva. Takto sa dostaneme k reálnej cene opcie. Zároveň môžeme pomocou rozptylu zmeny bohatstva vyjadriť riziko, ktoré z pozície vypisovateľa opcií vzniká.

Pri metóde stanovenia ceny opcie pomocou zmeny bohatstva vypisovateľa opcií dochádza k záveru, že riziko vypisovateľa sa nedá eliminovať úplne, čo je v rozpore so záverom Black-Scholasovej metódy určenia ceny opcie.

7. Použitá literatúra

Baz, J., Chacko, G.: *Financial derivatives: pricing, applications and mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge 2004

Blake, D.: *Analýza finančních trhů.* Grada Publishing, Praha 1995

Campbell, J., MacKinlay, A., Lo, A.: *The econometrics of financial markets.* Princeton University Press, 1997

Deutsch, H., Eller, R.: *Derivatives and internal models.* Macmillan, Houndmills 1999

Dvořák, P.: *Deriváty.* Oeconomica, Praha 2003

Hull, J.: *Options, futures and other derivative securities.* Prentice-Hall, New Jersey 1989

Johnson, N., Jefferies, P., Hui, M.: *Financial market complexity.* Oxford University Press, Oxford 2003

Pilbeam, K.: *Finance and financial markets.* Macmillan, Houndmills 1998

Ritchken, P.: *Derivative markets: theory, strategy and applications.* Harper Collins College Publishers, New York 1996

Sengupta, A.: *Pricing derivatives.* McGraw-Hill, New York 2005

Wilmott, P.: *Derivatives: the theory and practice of financial engineering.* Wiley, New York 1988

Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J.: *The mathematics of financial derivatives.* Cambridge University Press, Cambridge 1995

Winstone, D.: *Financial derivatives.* Chapman and Hall, London 1995

Ziegler, K.: *Finanční řízení bank*. Bankovní institut, Praha 1997

Konzultant: prof. RNDr. Jiří Hlaváček, CSc.
Študent: Viera Koľová
E-mail: kolovav@post.cz

Téza diplomovej práce

Mikroekonomické modelovanie rozhodovacích procesov na finančných trhoch – obchodovanie s derivátmi

Cieľ: Začiatok tejto diplomovej práce by mal byť venovaný charakteristike a základným mechanizmom fungovania najbežnejších finančnýh derivátov, obchodovateľných tak ako na burze, tak aj mimo nej. Následne na to sa má v práci popísať aktuálna situácia na českých finančných trhoch z hľadiska využívania týchto finančných inštrumentov.

Ťažisko práce by malo spočívať v namodelovaní možných situácií, na riešenie ktorých je možné finančné deriváty, ako spôsob riešenia, aplikovať. Následne by sa v práci malo venovať tomu, aká kombinácia finančných inštrumentov predstavuje optimálne riešenie pre subjekt, ktorý sa v danej situácii na finančnom trhu ocitne.

Vo svojom závere by sa malo uskutočniť vyhodnotenie týchto experimentov, a to hlavne z dôvodu možného zistenia rôznych trendov v daných pozorovaniach.
Metodologickým prístupom, zvoleným v tejto práci, by mala byť modelová situácia. Bude využitý model minimalizácie rizika zániku pri dvoch, respektíve pri viacerých typoch ohrozenia, napríklad krátkodové verzus dlhodobé ohrozenia. Vychádzať by sa teda malo z matematických metód, ktorými by sa situácie čo najvýstižnejšie zadefinovali a záverečné výsledky by sa dali aplikovať na deskripciu ekonomického správania sa na trhu s derivátmi.

Hypotézy: V práci by mal byť vytvorený priestor na preskúmanie toho, či situácie, ošetrené finančnými derivátmi, nezahŕňajú v sebe potenciálne ďalšie ukryté riziko, respektíve možné finančné špekulácie. Zároveň vyvstáva aj otázka, či používanie zložitejších derivátov, vzniknutých kombináciami bežných derivátov, zvyšuje, alebo naopak znižuje prítomnosť možných rizík, prípadne možností na ďalšie finančné špekulácie. Využitie analýzy citlivosti modelu minimalizácie rizika zániku pri viacerých typoch ohrozenia umožní mikroekonomický popis správania sa subjektu a možno aj náčrt funkcie dopytu po niektorých typoch derivátov.

Predpokladaná štruktúra práce:

1. Popis derivátov na českom finančnom trhu.
2. Všeobecný model rozhodovateľa minimalizujúceho pravdepodobnosť ekonomického zániku.
3. Formulácia možných rozhodovacích situácií.
4. Vyhodnotenie simulačých experimentov.

Literatúra:

Hull, J.: *Options, futures and other derivative securities.* Prentice-Hall, New Jersey 1989

Winstone, D.: *Financial derivatives.* Chapman and Hall, London 1995

Ziegler, K.: *Finanční řízení bank.* Bankovní institut, Praha 1997

Hlaváček, J.: *Petrohradský paradox a kardinální funkce užitku (with Hlaváček, M.).* Politická ekonomie 2004/1