Str. 19

Sestrojíme -li libovolnou kružnici s průměrem AB a zvolíme libovolný bod C na této kružnici různý od bodů A a B, pak trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C. Tzv. Thaletova věta.

Str. 69-72

3. Čtyřúhelník a jeho úhlopříčka

3.1. Čtverec

(Viz příloha 10)

Vymezení: Bod, ve kterém úsečka protíná svislou nebo vodorovnou přímku mříže, nazveme bod mříže, jestliže se nejedná o mřížový bod.

V kolika bodech protíná mříž úhlopříčka čtverce n x n?

Tato úloha pro mě byla velmi jednoduchá. Udělala jsem si tři čtverce, které jsem si ani nemusela ohraničovat. Na čtverečkovaném papíře jsem je viděla. Vyvození obecného vzorce mi také nedělalo problémy. Všimla jsem si, že počet bodů protínajících mříže je o jednu menší, než jedna strana. Tak jsem došla k prvnímu tvrzení.

T1: Úhlopříčka čtverce n x n prochází n-1 mřížovými body, v žádném dalším bodě přímky mříže neprotíná.

3.2. Obdélník, jehož strany jsou nesoudělné:

(Viz příloha 10, 11.)

Mým dalším úkolem bylo řešit úlohu:

Zjistěte, v kolika bodech úhlopříčka protíná přímky mříže obdélníku n x m, kdy n a m jsou čísla nesoudělná. Danou úlohu řešíme pro případy n = 1, 2, 3, 4, 5, atd.

Tuto úlohu jsem řešila, abych lépe porozuměla úloze zadané dětem. Za prvé, abych věděla správné řešení, za druhé, abych dokázala porozumět tomu, co probíhá v hlavě dítěte.

Jak jsem řešila:

Úlohu jsem řešila pomocí náčrtků obdélníků na čtverečkovaný papír, kdy jsem postupovala od $n = 1$, $m = 2, 3, 4$, atd. Udělala jsem si tabulku, kdy n bylo jedna až sedm, m bylo dva až devět. Proč m až od dvou? Protože by mi to v tabulce v ničem nepomohlo, akorát by se mi opakovala stejná řešení.

Nejprve jsem řešila obdélníky, kdy n bylo jedna. Udělala jsem si dva obdélníky a hned jsem věděla, jak bude řada pokračovat. U obdélníku, kdy n bylo dva, jsem si udělala šest obdélníků, včetně těch soudělných. Když jsem si to uvědomila, škrtla jsem je a výsledek nezapsala do tabulky. Zjistila jsem, že

Úhlopříčka obdélníka 2 x m, kde m není násobek čísla 2, obsahuje m bodů mříže.

Dále jsem dělala obdélníky 3 x m, pro $m = 2, 4, 5, 7$. Nakreslila jsem si čtyři obdélníky. Po vyřešení těchto úloh jsem viděla, že hledaná řada čísel je 3, 5, 6, 8. Tedy jsou to čísla $m + 1$. Pro jistotu jsem si nakreslila obdélník ještě případ pro $n = 8$. Tvrzení se potvrdilo:

Úhlopříčka obdélníka 3 x m, kde m není násobek čísla 3, obsahuje $m + 1$ bodů mříže.

U $n = 4$ x m jsem si udělala tři obdélníky $m = 3, 5, 7$. Zde platí tvrzení:

Úhlopříčka obdélníka 3 x m, kde m není násobek čísla 3, obsahuje $m + 2$ bodů mříže.

Pro obdélníky $n = 5$ x m jsem také udělala tři. Věděla jsem, jak pokračují čísla v tabulce v řádku $n = 5$, všimla jsem si, že se posouvají po úhlopříčce, ve sloupci se posouvají o jednu, stejně tak jako v řádku. Pokud ovšem mezi nimi nebylo soudělné číslo. Místo něho tam byl křížek, kdybych si tam to číslo domyslela, vycházelo by to o jednu. Nicméně na obecný vzorec, pro všechna nesoudělná n krát m, jsem nemohla přijít. Nejvíce mě mátlo 1 x m, kdy počet protnutých bodů bylo m mínus jedna. Vůbec jsem si s tím nevěděla rady, proto jsem se zeptala svého přítele, jestli by mi pomohl. Odpověděl mi, že matematice vůbec nerozumí, načež jsem mu odpověděla, že to nevadí, třeba ho napadne něco, čím mi pomůže. Vysvětlovala jsem mu, na co všechno jsem přišla, jak to funguje v mé tabulce. Řekl mi, že vůbec netuší, o čem mluvím. Nakonec mi pomohl jen posloucháním mých myšlenek. Jak jsem o tom mluvila nahlas, došlo mi to. Vždyť je to vždycky mínus dva. Měla jsem obrovskou radost. Došla jsem tedy k dalšímu tvrzení.

T2: Úhlopříčka obdélníku n x m, kde n, m jsou čísla nesoudělná, obsahuje $m + n - 2$ bodů mříže.

		m							
		2	3	4	5	6	7	8	9
	1	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	x	3	x	5	x	7	x	9
n	3	3	x	5	6	x	8	9	x
	4	x	5	x	7	x	9	x	11
	5	5	6	7	x	9	10	11	12
	6	x	x	x	9	x	11	x	x
	7	7	8	9	10	11	12	13	14

3.3. Čtyřúhelník, jehož strany mohou být soudělné.

(Viz příloha 12 – 16)

Dalším úkolem bylo vyřešit následující úlohu.

Zjistěte, v kolika bodech úhlopříčka protíná přímky mříže obdélníku *n x m*, kdy *n* a *m* mohou být čísla soudělná. Danou úlohu řešíme pro případy *n* = 1, 2, 3, 4, 5, atd.

Řešení:

Řešení této úlohy pro mě bylo těžké. Dokázala jsem přijít na posloupnost řady protnutých bodů mříže u obdélníku 2 x *n*, i na tvrzení (pro nesoudělné strany 2 x *n* byl počet bodů mříže *n*, pro soudělné strany 2 x *n* byl počet bodů mříže *n* – 1), pak následovaly obdélníky 3 x *n* a tvrzení. Pro nesoudělné strany 3 x *n* byl počet bodů mříže *n* + 1, pro soudělné strany 3 x *n* byl počet bodů mříže *n* – 1. Tvrzení mi přišlo divné a nedávalo mi smysl při porovnání s tvrzením pro obdélníky 2 x *n*. Nicméně jsem to ten den vzdala, že se na to podívám jindy. Druhý den jsem se k tomu vrátila a dodělala jsem obrázky pro strany 4 x *n*, ale nemohla jsem vymyslet tvrzení. Opět jsem od toho odešla s tím, že mě časem něco napadne. Vrátila jsem se k tomu za další dva dny. Koukala jsem na to bez nápadu, neviděla jsem ani ta tvrzení, na která jsem přišla v jednodušší úloze, kdy byla dána podmínka, že *n* musí být nesoudělná. Když jsem se na ta tvrzení podívala, došlo mi to. Původní tvrzení jsem v tom novém opět viděla, dokonce jsem přišla na to, jak to funguje u soudělných stran (u *m* x *n* je počet bodů mříže *n*-1). U stran obdélníku, které nejsou násobkem *m*, ale dané číslo *m* je jejich násobkem, jsou ještě další podmínky, na které jsem nepřišla. Myslela jsem, že bych si potřebovala udělat více izolovaných modelů, abych odkryla vazbu.

Zjistila jsem, že k porozumění nebylo potřeba tvorby více izolovaných modelů, ale jiný záznam bodů mříže. Pan profesor Hejný mi ukázal záznam jednotlivých bodů mříže, kdy se odlišně značily body na svislých a vodorovných liniích. (Viz příloha 17.) Došla jsem tedy k následujícímu tvrzení.

T3: Úhlopříčka obdélníku n x m obsahuje $m + n - 2 - M$ bodů mříže, kde M je největší společný dělitel n, m.