

Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Jan Němec

Dynamické strategie obchodování

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Rád bych na tomto místě velice poděkoval vedoucímu práce doc. RNDr. Petru Lachoutovi, Csc. za vstřícnost a ochotu zejména při výběru mé práce a dále za cenné připomínky. V neposlední řadě bych také rád poděkoval mé rodině za podporu při studiích.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejňováním.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, dne 4.12 2014

Jan Němec

Název práce: Dynamické strategie obchodování

Autor: Jan Němec

Katedra (ústav): Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Abstrakt: Obchodování s různými finančními instrumenty v reálném čase s sebou přináší zajímavé optimalizační úlohy. Cílem práce je se těmito optimalizačními úlohami zabývat. Práce se nejprve věnuje teorií užitkových funkcí, neboť ve většině případů bude cílem investora maximalizovat očekávaný užitek z konečného bohatství. Po úvodu do teorie portfolia je ukázáno, jak lze rozšířit statický model, resp. jak z něj lze udělat model vícestupňový. Vícestupňový model je podrobněji analyzován, a to včetně numerických metod pro jeho řešení. Na závěr textu je detailně rozebrána metoda simulací, která umožňuje analyzovat průběžnou obměnu portfolia. Tato metoda je aplikována na numerický příklad.

Klíčová slova: Dynamické programování, optimální investiční strategie, simulační metody.

Title: Dynamic trading strategies

Author: Jan Němec

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Petr Lachout, CSc.

Abstract: Trading various financial instruments in real time brings interesting optimization problems. The aim is to deal with these optimization tasks. Firstly, the work focuses on the theory of utility functions, because in most cases, the investor will aim to maximize the expected utility of final wealth. After an introduction to the portfolio theory it is shown how to extend a static model, respectively how it can be turned into a multistage model. The multistage model is analyzed in more detail, including numerical methods for solving multistage model. Simulation method that allows to analyze the ongoing change of the portfolio is discussed in detail at the end of the text. This method is applied to a numerical example.

Keywords: Dynamic programming, optimal investment strategy, simulation methods.

Obsah

Úvod	3
1 Užitékové funkce	5
1.1 Základní dělení užitékových funkcí	7
2 Základní teorie portfolia	7
2.1 Definice základních pojmů ve statickém modelu portfolia	8
2.2 Modelování výnosů aktiv	9
2.3 Investiční strategie	11
2.4 Obecná formulace konkrétních omezení	11
2.5 Statický model optimalizace portfolia	14
2.6 Řešení statického modelu pro konkrétní užitékové funkce	16
3 Přechod k víceústupňovým modelům	18
3.1 Vývoj portfolia v čase	19
3.2 Hledání optimální investiční strategie	20
3.3 Řešení víceústupňového modelu pro konkrétní užitékové funkce	23
3.4 Krátkozraké investiční strategie	24
3.4.1 Řešení víceústupňového modelu s mocninnou užitékovou funkcí .	25
3.4.2 Řešení víceústupňového modelu s logaritmickou užitékovou funkcí	26
3.4.3 Řešení víceústupňového modelu při exponenciální užitékové funkci	27
3.5 Víceústupňový model s průběžnou spotřebou	29
3.6 Řešení víceústupňového modelu s průběžnou spotřebou pro logaritmickou užitékovou funkcí	32
4 Numerické metody pro řešení víceústupňových modelů	34
4.1 Value iteration	35
5 Metoda simulací pro řešení víceústupňového modelu	36
5.1 Krok 1	36
5.2 Krok 2	39
5.3 Krok 3	39
6 Numerická studie	41
6.1 Data	41
6.2 Investor s konstantním parametrem relativní rizikové averze	43

6.3	Investor s konstantním parametrem absolutní rizikové averze	46
	Závěr	48

Úvod

Harry Markowitz bývá často označován za otce moderní teorie portfolia. V šedesátých letech způsobil převrat v moderní teorii portfolia. Markowitz přišel s myšlenkou, že každý investor se snaží maximalizovat výnos svého portfolia na hranici pro něj přijatelného rizika. K dosažení tohoto cíle je důležité určit, jak velké mají být investice do jednotlivých aktiv. Dále ukázal potřebu zajímat se o korelace mezi výnosy jednotlivých aktiv s cílem zajistit dostatečnou diverzifikaci portfolia. Přidáváním aktiv do portfolia, která nejsou dokonale korelovaná se stávajícími aktivy, se snižuje riziko celého portfolia. Tento model se stal základem moderní teorie portfolia. Bývá však často v určitých ohledech kritizován. Existuje mnoho různých teorií, které na tento model navazují.

Markowitzova teorie jednostupňového statického modelu portfolia byla rozšířena o modely víceúrovňové. Tyto modely byly představeny v sedmdesátých letech Samuelsonem a později Mossinem, kteří ukázali, že je lze řešit za pomoci dynamického programování. Potřeba řešit optimalizační úlohy, kde jsou některé parametry náhodné, v poslední době prudce vzrůstá. Teprve nedávno však počítačové technologie umožnily řešit rozsáhlé problémy. V reálném světě potřebuje investor průběžně měnit své portfolio v závislosti na nově získaných informacích. Z tohoto důvodu je rozumné se zabývat numerickými metodami, které umožňují řešit víceúrovňový model portfolia. Zejména je důležité se zabývat dynamikou výběru nejvhodnějšího portfolia pro konkrétního investora. Je tedy podstatné se zabývat úlohami, kdy lze např. v pravidelných časových intervalech měnit investitorovo portfolio.

Řešení problému víceúrovňového portfolia je možné považovat za základ celoživotního finančního plánu. Tato práce se věnuje zejména víceúrovňovým modelům optimalizace portfolia s diskretním časem a konečným časovým horizontem. Jednou z nevýhod tohoto přístupu může být omezení, že investor není schopen obměny svého portfolia v jakýkoli čas, pouze v přede dané časové okamžiky. Často tak není schopen ihned reagovat na nové, právě získané informace.

Text práce začíná teorií užitkových funkcí, neboť ve většině případů bude cílem investora maximalizovat očekávaný užitek z konečného bohatství. Dále pokračuje úvodem do teorie portfolia. A následně je ukázáno, jak lze rozšířit statický model, resp. jak z něj lze udělat model víceúrovňový. Víceúrovňový model je rozebírán nejen

pro nejrůznější užitkové funkce. Není opomenuta ani analýza numerických metod pro řešení vícestupňového modelu. Na závěr textu je detailně rozebrána metoda simulací, která umožňuje analyzovat průběžnou obměnu portfolia. Následně je provedena numerická studie pomocí této metody, která umožňuje snadno nahlédnout, jakým způsobem lze předchozí teorii použít.

1 Užítkové funkce

Užítkové funkce budeme v celém následujícím textu hojně používat, a proto zde uvedeme některé nejdůležitější výsledky této teorie. Teorie užítkových funkcí je vybudována na základě Bernoulli Neumannovy-Morgensternovy teorie očekávaného užítku. Užítkové funkce umožňují porovnávat investorovy subjektivní preference, např. porovnávat výhodnost různých portfolií. Užítkové funkce tedy slouží k přesnější formulaci investorova postoje k riziku. Tato sekce byla sestavena za pomoci [24, 19].

Definice 1. Funkci $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme užítkovou funkcí, pokud je spojitá a neklesající na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Křivka užítkové funkce, přesněji její tvar a zakřivení, odráží investorův postoj k riziku. Ve většině případů dává smysl uvažovat jen striktně konkávní užítkové funkce, viz. následující definice. Racionálně uvažující investor totiž preferuje větší bohatství před menším, pokud všechny ostatní podmínky zůstanou stejné.

Definice 2. Funkci $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme konkávní funkcí, pokud pro všechna $\alpha \in (0, 1)$ a $x_1, x_2 \in I$ platí.

$$U(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha U(x_1) + (1 - \alpha)U(x_2)$$

Tento předpoklad je zejména v praxi velmi realistický. Zkráceně to znamená, že se zvyšujícím se výnosem klesá investorův užitek z tohoto výnosu. Následující věta přesněji definuje vztah mezi striktně konkávní užítkovou funkcí a přístupem k riziku.

Definice 3. Opět máme užítkovou funkci $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Označme W hodnotu investorova bohatství. Dále nechť hra ω s rozdělením P je náhodná veličina, pro kterou existují střední hodnoty $\mathbb{E}U(W + \omega)$, $\mathbb{E}U(\omega)$.

- Investor je rizikově averzní na hladině W ,
pokud platí $\mathbb{E}U(W + \omega) < U(W + \mathbb{E}(\omega))$, $\forall \omega$.
- Investor vyhledává riziko na hladině W ,
pokud platí $\mathbb{E}U(W + \omega) > U(W + \mathbb{E}(\omega))$, $\forall \omega$.
- Investor je rizikově neutrální na hladině W ,
pokud platí $\mathbb{E}U(W + \omega) = U(W + \mathbb{E}(\omega))$, $\forall \omega$.

Výše uvedená definice popisuje pouze lokální postoj investora k riziku. Tuto definici je možné rozšířit následujícím způsobem.

Definice 4. • Investor je globálně rizikově averzní , pokud je rizikově averzní na všech hladinách W .

- Investor je globálně vyhledává riziko, pokud riziko vyhledává na všech hladinách W .
- Investor je globálně rizikově neutrální , pokud je rizikově neutrální na všech hladinách W .

Věta 5. *Nechť $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ investorova užitková funkce. Potom platí, že investorova užitková funkce*

- je striktně konkávní na intervalu I právě tehdy, když je investor globálně rizikově averzní.
- je striktně konvexní na intervalu I právě tehdy, když je investor globálně vyhledává riziko.
- je lineární na intervalu I právě tehdy, když je investor globálně rizikově neutrální.

Důkaz. Předpokládejme tedy, že U je striktně konkávní užitková funkce. Potom přímo z Jensenovy nerovnosti plyne $\mathbb{E}U(W + \omega) < U(\mathbb{E}(W + \omega))$, $\forall \omega, W$.

Pro opačnou implikaci předpokládejme globálně rizikově averzního investora. Dále předpokládejme hru, pro kterou platí $\omega = \alpha$ s pravděpodobností $1 - \alpha$ a $\omega = -(1 - \alpha)x$ s pravděpodobností α $\forall W, x$ a $\alpha \in (0, 1)$. Máme tedy $u(W) > \mathbb{E}U(W + \omega) = \alpha U(W - (1 - \alpha)x) + (1 - \alpha)U(W + \alpha x)$. Odsud plyne, že užitková funkce je striktně konkávní, neboť $W = \alpha(W - (1 - \alpha)x) + (1 - \alpha)(W + \alpha x)$.

Další dva body této věty lze dokázat obdobným způsobem. □

Dále je třeba nějakým způsobem měřit míru rizikové averze. Za tímto účelem definujeme koeficient absolutní rizikové averze $A(W) = -\frac{U''(W)}{U'(W)}$ a koeficient relativní rizikové averze $R(W) = -W\frac{U''(W)}{U'(W)}$.

Příklad 1. Uvažujme logaritmickou užitkovou funkci $U(W) = \log(W)$. Pro tuto užitkovou funkci zřejmě platí $A(W) = \frac{1}{W}$ a $R(W) = 1$. Toto znamená, že investor s větším bohatstvím bude do rizikových aktiv investovat větší prostředky, a to pouze proto, že absolutní hodnota jeho bohatství je větší. Zároveň investoři s libovolnou hodnotou W budou do rizikových aktiv investovat stejné procento svého bohatství.

1.1 Základní dělení užitkových funkcí

V této části uvedeme základní dělení užitkových funkcí, které budeme dále používat v textu.

1. (HARA) Jednou z nejdůležitějších tříd užitkových funkcí jsou tzv. hyperbolické HARA funkce, které mají tvar

$$U(W) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{aW}{1-\gamma} + b \right)^\gamma, \quad a > 0, \quad \frac{aW}{1-\gamma} + b > 0.$$

Pomocí parametrizace lze HARA užitkové funkce dále třídit na

- Lineární, tj. $U(W) = aW$, nastává pro $\gamma \rightarrow 1$.
 - Kvadratické, tj. $U(W) = -\frac{1}{2}(b - aW)^2$, nastává pro $\gamma = 2$.
 - Logaritmické, tj. $U(W) = \log(W + b)$, nastává pro $a = 1$ a $\gamma \rightarrow 0$.
 - Mocninné, tj. $U(W) = \frac{1}{1-\gamma}(W + b)^{1-\gamma}$, nastává pro $\gamma < 1$, $a = 1 - \gamma$.
 - Exponenciální, tj. $U(W) = -e^{-aW}$, nastává, pokud $\gamma \rightarrow -\infty$ a $b = 1$.
2. (CRRA) V tomto případě se jedná o užitkové funkce s konstantním koeficientem relativní rizikové averze. Zde uvedeme pouze dva příklady, a to užitkové funkce

- Logaritmické, tj. $U(W) = \log(W)$.
- Mocninné, tj. $U(W) = \frac{1}{1-\gamma}(W)^{1-\gamma}$, $\gamma > 0$.

V obou případech se jedná o speciální případ HARA logaritmických a mocninných užitkových funkcí, kdy $b = 1$. Pro další výklad uvedeme, že pro $\gamma \rightarrow 1$ mocninná užitková funkce odpovídá logaritmické užitkové funkci.

2 Základní teorie portfolia

V této kapitole uvedeme základní koncepty a definice potřebné k vybudování další teorie. Nejprve se budeme zabývat základními definicemi teorie portfolia. Pokud nebude uvedeno jinak, celý další výklad předpokládá následující podmínky finančních trhů a jednání investorů.

- Na trhu investují pouze malí investoři bez schopnosti výrazně ovlivnit ceny jednotlivých aktiv.

- Investoři se chovají racionálně ve smyslu výběru portfolia. Preferují vyšší výnosy a menší riziko.
- Obchoduje se na trhu nezatíženém daněmi, popřípadě transakčními náklady s libovolně dělitelnými a obchodovatelnými aktivy.
- Na trhu existuje neomezená možnost investice či půjčky za bezrizikovou úrokovou míru.

2.1 Definice základních pojmů ve statickém modelu portfolia

Portfolio můžeme definovat jako soubor finančních aktiv, přesněji dle následujících definic. Obdobné vztahy budou platit i pro vícestupňové modely.

Definice 6. Portfolio je vektor $x = (x_1, \dots, x_N)^\top$, kde x_i je část jednotkového bohatství investovaná do i -tého aktiva.

Definice 7. Portfolio je vektor $x^\$ = (x_1^\$, \dots, x_N^\$)^\top$, kde $x_i^\$$ je část celkového bohatství W_0 investovaná do i -tého aktiva vyjádřená v peněžních jednotkách.

V následujícím textu budeme dle potřeby používat obě tyto definice. Dle užití symbolu $\$$ bude ihned jasné, jakou z definic momentálně používáme. Pod pojmem portfolio si tedy lze představit určitou skupinu aktiv, např. akcií, dluhopisů. Je dobré si uvědomit, že zřejmě platí $x_i = \frac{x_i^\$}{W_0}$, $i = 1, \dots, N$, a tedy výklad pomocí definice (6) lze snadno přepsat na výklad pomocí definice (7). Z tohoto důvodu budeme vždy uvádět výsledky jen pomocí jednoho zápisu. Celkově tedy musí platit $\sum_{i=1}^N x_i \leq 1$. Dále uvažujme bezrizikové aktivum x_f s předem známým konstantním výnosem r_f , poté musí platit $x_f + \sum_{i=1}^N x_i = 1$. Pod pojmem bezrizikové aktivum můžeme rozumět například pevně úročený účet v bance nebo dluhopis s předem známým fixním výnosem. Výnosy jednotlivých aktiv $r = (r_1, \dots, r_N)^\top$ definujme jako náhodné veličiny. Dále označme $R_i := 1 + r_i$, $\mu_i := 1 + \mathbb{E}(r_i)$ a $R_f = 1 + r_f$. Náhodnost výnosů $r = (r_1, \dots, r_N)^\top$ je odvozena od rizikovosti uvažovaných aktiv. Na druhou stranu budeme bezrizikový výnos r_f uvažovat jako pevnou hodnotu. Celkový očekávaný výnos portfolia je tedy roven

$$E = \sum_{i=1}^N x_i \mu_i. \quad (1)$$

Dále definujeme dosažené bohatství v čase jedna jako

$$W_1 = W_0 \left(\sum_{i=1}^N R_i x_i + R_f \left(1 - \sum_{i=1}^N x_i \right) \right).$$

Další důležitou charakteristikou portfolia je jeho kovarianční matice $V = (\sigma_{ij})$, kde

$$\sigma_{ij} = \text{cov}(r_i, r_j) = E_{SH}[(r_i - \mu_i)(r_j - \mu_j)], \quad (2)$$

$$\sigma_{ii} = E_{SH}(r_i - \mu_i)^2. \quad (3)$$

Speciálně platí $\sigma_i^2 := \sigma_{ii}$ a $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $i, j = 1, \dots, N$, neboť matice V je zřejmě symetrická. Předpokládejme, že matice V je pozitivně definitní. Poslední stěžejní vlastnost portfolia je jeho tzv. variance

$$\sigma^2 = x^T V x = \sum_{i=1}^N \sigma_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{i-1} x_i x_j \sigma_{ij}. \quad (4)$$

Předchozí definice byly zpracovány pomocí [26, 18].

2.2 Modelování výnosů aktiv

Nyní je třeba rozlišit dva základní přístupy, jak budeme modelovat výnosy jednotlivých aktiv.

1. Můžeme uvažovat model náhodné procházky, který předpokládá, že momentální cena aktiva v sobě obsahuje všechny informace o předcházejících hodnotách ceny aktiva. Dle zvoleného rozdělení výnosů aktiv lze pak model náhodné procházky rozdělit do následujících třech skupin, které se obvykle používají v praxi.

- Normální rozdělení

Toto rozdělení nebývá často používané v praxi, a to ze dvou důvodů. Pokud uvažujeme normální rozdělení výnosů, pak můžeme snadno obdržet negativní ceny aktiv. Navíc se jedná o symetrické rozdělení, což není v souladu s praxí, kdy se při modelování výnosů aktiv často setkáváme s tzv. těžkými chvosty.

- Logaritmicko-normální rozdělení

V tomto případě platí, že vektor $R_t = 1 + r_t$ má logaritmicko-normální rozdělení. To mimo jiné znamená, že logaritmus tohoto vektoru má normální rozdělení. Hlavní předností lognormálního rozdělení je, že existuje nulová pravděpodobnost záporných cen jednotlivých aktiv. V praxi se jedná o nejvíce používané rozdělení výnosů aktiv. V případě krátkých časových horizontů nemusí být tak atraktivní toto rozdělení použít, neboť rozdělení výnosů pak mají často malou šikmost.

- Diskrétní rozdělení s konečně mnoha stavy

Nechť r_t má diskrétní rozdělení s S stavy r_t^1, \dots, r_t^S , které nastávají s pravděpodobnostmi p_t^1, \dots, p_t^S . Celkově tedy platí

$$\begin{aligned} P_t(r_t = r_t^s) &= p_t^s, \quad s = 1, \dots, S \\ \sum_{s=1}^S p_t^s &= 1. \end{aligned}$$

Parametry tohoto rozdělení se většinou volí pomocí nejrůznějších simulací nebo analýzou historických výnosů.

2. Druhým přístupem, naprosto rozdílným od předchozího, je, že lze předpokládat určitou časovou závislost výnosů aktiv. Předpokládejme, že v čase t investor pozoruje tzv. informační vektor Z_t , pro který platí

$$Z_{t+1} = h(Z_t, \Psi_t),$$

kde $\Psi_0, \dots, \Psi_{T-1}$ jsou vzájemně nezávislé tzv. inovační vektory takové, že proces $\{Z_0, \dots, Z_{T-1}\}$ je markovský. Dále předpokládejme, že při dané hodnotě informačního vektoru $Z_t = z_t$ jsou vektory R_t a Ψ_t podmíněně nezávislé. V neposlední řadě pravděpodobnostní rozdělení $\mathbb{P}_t(r_t \leq \tilde{r}_t, \Psi_t \leq \psi_t \mid Z_t = z_t)$ je známé pro všechny hodnoty \tilde{r}_t, ψ_t a z_t .

V případě, že zvolíme model náhodné procházky, tedy časovou nezávislost výnosů, pak stav systému je dán bohatstvím W_t . Na druhé straně, pokud předpokládáme časovou závislost výnosů, pak je stav celého systému určen bohatstvím W_t a informačním vektorem Z_t , dohromady tedy (W_t, Z_t) . Cílem investora je maximalizovat očekávaný užitek z bohatství v čase T podmíněného pevně daným stavem portfolia v čase 0, tj. (w_0, z_0) . Tato sekce vychází zejména z [11, 35]

2.3 Investiční strategie

Následující definice jsou velice podstatné pro dobré pochopení další teorie.

Definice 8. Přípustná investiční strategie je posloupnost funkcí $\pi = \{\mu_0, \dots, \mu_{T-1}\}$, kde μ_t přiřazuje stavu (w_t, z_t) přípustné portfolio $x_t = \mu_t(W_t, Z_t)$.

Definice 9. Předpokládejme pevně danou investiční strategii π . Stav (w_t, z_t) je dosažitelný, jestliže sdružená pravděpodobnostní hustota (W_t, Z_t) je v tomto stavu nenulová.

Definice 10. Stavový prostor χ_t je množina všech dosažitelných stavů.

Za předpokladu pevně dané investiční strategie π je očekávaný užitek z konečného bohatství podmíněný počátečním bohatstvím w_0 a informačním vektorem z_0 dán vztahem

$$J_0^\pi(w_0, z_0) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi)]. \quad (5)$$

Závislost jednotlivých veličin na π nebudeme pro přehlednost značení uvádět. V případě, že to však bude nezbytné pro přesné pochopení výkladu, pak tuto závislost samozřejmě uvedeme. Dále střední hodnota ve vztahu (5) je brána přes sdruženou podmíněnou distribuční hustotu R_0, \dots, R_{T-1} , $\Psi_0, \dots, \Psi_{T-1}$ a x_0, \dots, x_{T-1} . Navíc předpokládáme pevně danou investiční strategii π a stav (w_0, z_0) . Toto také, pokud to nebude nezbytně nutné, nebudeme ve značení uvádět.

Definice 11. Optimální investiční strategie $\pi^* = \{\mu_0^*, \dots, \mu_{T-1}^*\}$, pokud existuje, dosahuje nejvyšších hodnot $J_0(w_0, z_0)$ mezi všemi přípustnými investičními strategiemi.

Předchozí definice sloužící jako základ k dalšímu výkladu byly převzaty z [35].

2.4 Obecná formulace konkrétních omezení

Různorodá omezení jsou přirozenou součástí nejrůznějších metod a přístupů tvorby portfolií. Je třeba si uvědomit, že příliš striktní omezení vedou k velmi omezeným možnostem výběru portfolia. Jejich původ lze například rozdělit do tří následujících skupin

- Omezení dané regulacemi
- Investiční strategie

- Daně, transakční náklady, účetnictví.

Nyní uvedeme dvě základní definice týkající se omezení portfolií.

Definice 12. Portfolio $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{N,t})^\top$ v čase t nazvěme přípustným, pokud splňuje všechny na něj kladené podmínky.

Definice 13. $P(W_t) \subseteq \mathbb{R}^N$ nazýváme množinou přípustných investic v čase t , pokud vektory v ní obsažené, splňují následující podmínku

$$P(W_t) = \{x_t \in \mathbb{R}^N : \Delta(W_t)\}, \quad (6)$$

kde $\Delta(W_t)$ je soubor omezení kladený na portfolio v čase t .

Tyto definice jsou samozřejmě platné i v statickém případě. Množina přípustných investic ve vztahu (6) je obecně definována v závislosti na W_t . Pokud nás zajímá závislost pouze na čase t , pak lze tuto množinu přepsat jako $P(t) = \{x_t \in \mathbb{R}^N : \Delta(t)\}$.

Převážně se budeme zabírat lineárními omezeními.¹ Lineární omezení umožňují rychlejší numerické výpočty. Obecně mají tato omezení v čase t tvar

$$P(W_t) = \{x_t : A(W_t)x_t \leq b(W_t)\}.$$

V tomto případě zřejmě platí $P(W_t) \subseteq \mathbb{R}^N$ a také, že tato množina je uzavřená a konvexní. Význam matice $A(W_t)$ a vektoru $b(W_t)$ včetně jejich rozměrů lze přesněji pochopit na následujícím příkladu.

Příklad 2. Předpokládejme, že $N = 3$ a $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b_t = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.6 \end{pmatrix}$. Takto definovaná omezení lze přepsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x_{1,t} + x_{2,t} + x_{3,t} &\leq 0.9 \\ x_{1,t} + x_{3,t} &\leq 0.6. \end{aligned}$$

První omezení znamená, že v čase t celkově můžeme do rizikových aktiv investovat maximálně 90% svého bohatství, zbytek připadá na bezrizikové aktivum. Druhé omezení pak znamená, že v součtu můžeme do prvního a třetího aktiva v čase t investovat maximálně 60% svého bohatství.

¹V praxi se však často lze setkat s omezeními, která již z podstaty věci nejsou lineární, např. hodnota v riziku, která se obvykle značí Var.

V praxi existuje mnoho nejrůznějších omezení, které lze uvažovat při tvorbě portfolia. Níže uvedeme jen ty nejčastěji používané. Mnoho dalších omezení ale z těchto uvedených již přímo vyplývají.

Omezení investic do jednotlivých aktiv

Omezení investic do jednotlivých aktiv v čase t lze formulovat v následujícím tvaru

$$L_t \leq x_t \leq U_t,$$

kde $L_t, U_t \in \mathbb{R}^N$. Speciálním případem omezení investic do jednotlivých aktiv jsou tzv. prodeje nakrátko, kdy x_t může nabývat i záporných hodnot. Takováto omezení mohou být třeba předepsány regulátorem trhu. Popř. si je investor může stanovit sám jako pojistku proti příliš velkým ztrátám.

Transakční náklady

Nyní se budeme věnovat transakčním nákladům. V čase t vlastní investor portfolio $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{N,t})^\top$ a může učinit rozhodnutí, zda-li snížit či zvýšit své investice v jednotlivých aktivech. Označme $x_t^+ = (x_{1,t}^+, \dots, x_{N,t}^+)^\top$ množství jednotlivých rizikových aktiv, které se investor v čase t rozhodl přikoupit, a $x_t^- = (x_{1,t}^-, \dots, x_{N,t}^-)^\top$ množství jednotlivých rizikových aktiv, které se investor v čase t rozhodl prodat. Velikost pozice v aktivu i v se tedy zvýší, popř. sníží o $x_{i,t}^+ - x_{i,t}^-$, tj.

$$x_{i,t+1} = R_{i,t+1} (x_{i,t} + x_{i,t}^+ - x_{i,t}^-)$$

Samozřejmě je třeba dodržet podmínku $\sum_{i=0}^N x_{i,t} = W_t$, tj. investorovi je dovoleno jen přesouvat prostředky v rámci svého portfolia neboli není mu dovoleno investovat další prostředky. Případné další nákupy jednotlivých aktiv lze realizovat jen do výše aktuálních volných finančních prostředků $x_{0,t}$.

Transakční náklady Tr budeme uvažovat v následujícím tvaru

$$Tr(x_t^+, x_t^-) = \sum_{i=1}^N \varrho_i^+ x_{i,t}^+ + \varrho_i^- x_{i,t}^-,$$

kde ϱ_i^+ a ϱ_i^- jsou procentuální transakční náklady při nákupu, resp. při prodeji aktiva i .

Jedná se tedy o transakční náklady lineárně závislé na objemu zobchodovaných

aktiv. Transakční náklady zdražují jakoukoliv přeměnu portfolia, a tudíž konstrukce portfolia se započítáním jakýchkoliv transakčních nákladů vede k jinému výsledku, než kdyby se o těchto nákladech vůbec neuvažovalo. Transakční náklady mají vliv na vývoj bezrizikového aktiva, platí tedy

$$x_{f,t+1} = r_{f,t} \left(x_{f,t} - \sum_{i=1}^N (x_{i,t}^+ - x_{i,t}^-) - Tr(x_t^+, x_t^-) \right).$$

Samozřejmě lze uvažovat i jiné transakční náklady než pouze lineární. Obvykle transakční náklady klesají při zvyšujícím se objemu obchodovaných aktiv.

Omezení investic do jednotlivých sektorů

Často bývá rozumné omezit investice do jednotlivých předem daných skupin aktiv. Muže se jednat např. o rozdělení mezi jednotlivá průmyslová odvětví. Takovát omezení lze zapsat v následujícím tvaru

$$L_{k,t} \leq \sum_{i=1}^N a_{k,i,t} x_{i,t} \leq U_{k,t}, \quad k = 1, \dots, K,$$

kde $a_{k,i,t}$ je konstanta, která v čase t představuje podíl i -tého aktiva v k -tém průmyslovém odvětví z celkového počtu K odvětví. $L_{k,t}$ a $U_{k,t}$ jsou omezení pro jednotlivá odvětví. Za předpokladu, že každé aktivum je zastoupeno jen v jednom odvětví, můžeme tato omezení zapsat ve tvaru

$$L_{k,t} \leq \sum_{i \in S_{k,t}} x_{i,t} \leq U_{k,t}, \quad k = 1, \dots, K,$$

kde $S_{k,t}$ jsou množiny obsahující aktiva k -tého odvětví v čase t .

2.5 Statický model optimalizace portfolia

V případě statického modelu existuje několik základních přístupů. Cílem je optimálně investovat počáteční bohatství W_0 mezi N rizikových aktiv a jedno bezrizikové aktivum. V tomto případě investor v čase $t = 0$ se jednorázově rozhodne o výběru svého portfolia s cílem dosáhnout co nejvýhodnější pozice v čase $t = 1$. Řešení statického modelu optimalizace portfolia je třeba pro analýzu vícestupňových modelů.

1. Tuto úlohu řešit pomocí rostoucí užitkové funkce U , tj.

$$\max_{x_0 \in P(w_0)} J(w_0, z_0) = \max_{x_0 \in P(w_0)} \mathbb{E}[U(W_1)], \quad (7)$$

kde $W_1 = w_0 \left(\sum_{i=1}^N R_i x_i + R_f \left(1 - \sum_{i=1}^N x_i \right) \right)$. Zde jsme označili W_1 velkým písmenem, neboť závisí na náhodných výnosech rizikových aktiv. Střední hodnota ve vztahu (7) je uvažována přes tyto rizikové výnosy. Na druhou stranu w_0 je značeno malým písmenem, neboť se jedná o pevně danou hodnotu. Pokud to bude třeba pro lepší pochopení, budeme tento způsob značení používat i dále v textu.

2. Další z možností je aplikovat přístup dle Markowitz. Úlohu základního Markowitzova modelu můžeme definovat jako

$$\min_x x^\top V x = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij} \quad (8)$$

za podmínek

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \mu_i x_i \geq E, \sum_{i=1}^N x_i = w_0, x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \right\}, \quad E \in \mathbb{R},$$

kde E je předem zadaný a požadovaný výnos portfolia. Konstantu E je možné měnit a získat tak výsledky pro všechny požadované výnosy portfolia, tj. tzv. eficientní množinu. Zjednodušeně to znamená, že menší riziko může být dosaženo jen pokud obětujeme část výnosu. Tento přístup lze označit za základ moderní teorie portfolia.

3. Pokud chceme uvažovat i investorův postoj k riziku pomocí koeficientu rizikové averze λ , pak lze předchozí přístup modifikovat následujícím způsobem

$$\max_x \mu^\top x - \frac{\lambda}{2} x^\top V x \quad (9)$$

za podmínek

$$x \in \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i = w_0, x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \right\}.$$

4. Alternativně lze uvažovat tzv. pravděpodobnostní omezení; v tomto případě

omezení, že celková hodnota portfolia neklesne s pravděpodobností $1 - \alpha$ neklesne pod předem danou mez w_{mez} , tj.

$$\max_x \sum_{i=1}^N x_i \mu_i$$

za podmínek

$x \in$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N x_i = W_0, \mathbb{P}_t \left\{ \sum_{i=1}^N x_i (1 + \mu_i) \geq w_{mez} \right\} \geq 1 - \alpha, x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, N \right\}.$$

Výše uvedené modely lze řešit např. pomocí metod nelineárního programování.

2.6 Řešení statického modelu pro konkrétní užitkové funkce

Neboť další postupy budou rozvíjet především přístup pomocí užitkových funkcí, věnujme se konkrétněji případu 1., resp. vyjádření jeho řešení v explicitním tvaru za následujících podmínek týkající se zvolené užitkové funkce, což popisuje následující věta. Následující věta byla vytvořena na základě výkladu v [4].

Věta 14. *Nechť pro zvolenou užitkovou funkci platí*

$$-\frac{U'(W)}{U''(W)} = aW + b, \quad \forall W, \quad (10)$$

kde a a b jsou reálné konstanty a nechť zároveň platí, že tato užitková funkce je konkávní.² Pokud není užitková funkce v nějaké části definičního oboru definována, pak se musíme ujistit, že všechny možné konečné hodnoty bohatství spadají do definičního oboru této funkce. Za těchto podmínek lze optimální portfolio vyjádřit ve tvaru

$$x_i^* = \alpha_i (aR_f w_0 + b), \quad i = 1, \dots, N, \quad \forall w_0, \quad (11)$$

kde α_i , $i = 1, \dots, N$ jsou opět reálné konstanty. Navíc platí

$$-\frac{J'(w_0, z_0)}{J''(w_0, z_0)} = aw_0 + \frac{b}{R_f}, \quad \forall w_0, \quad (12)$$

²Lze snadno ukázat, že pro vhodnou volbu parametrů splňují podmínku (10) nejruznější užitkové funkce. Například exponenciální, logaritmičká nebo mocninná.

kde $J(w_0, z_0) = \max_{x_i} \mathbb{E}[U(W_1)]$.

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že optimální portfolio lze vyjádřit ve tvaru

$$x_i^* = \alpha_i(w_0)(aR_f w_0 + b), \quad i = 1, \dots, N,$$

kde $\alpha_i(w_0)$, $i = 1, \dots, N$ jsou diferencovatelné funkce. Pokud zderivujeme vztah $\mathbb{E}[U(W_1)]$ dle x_i , $i = 1, \dots, N$, pak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{E}[U(W_1)]}{dx_i} &= \mathbb{E} \left[U' \left(R_f w_0 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) x_j \right) (R_i - R_f) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[U' \left(R_f w_0 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j(w_0) (aR_f w_0 + b) \right) (R_i - R_f) \right] \\ &= 0, \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{13}$$

Předchozí vztah ještě zderivujeme dle w_0 , pro $i = 1, \dots, N$, to lze zapsat pomocí následujícího maticového zápisu

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\begin{pmatrix} (R_1 - R_f)^2 & \cdots & (R_1 - R_f)(R_N - R_f) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (R_N - R_f)(R_1 - R_f) & \cdots & (R_N - R_f)^2 \end{pmatrix} U''(W_1) (aR_f w_0 + b) \right] \cdot \\ &\begin{pmatrix} \frac{d\alpha_1(w_0)}{dw_0} \\ \vdots \\ \frac{d\alpha_n(w_0)}{dw_0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbb{E}[U''(W_1) (R_1 - R_f) R_f (1 + \sum_{i=1}^n (R_i - R_f) \alpha_i(W_0) b)] \\ \vdots \\ \mathbb{E}[U''(W_1) (R_n - R_f) R_f (1 + \sum_{i=1}^n (R_i - R_f) \alpha_i(W_0) b)] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Dle vztahu (11) dostáváme

$$U''(W_1) = - \frac{U'(W_1)}{(aR_f w_0 + b) \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j(w_0) a \right)}.$$

Pokud budeme dosazovat do (14) za použití vztahu (13), pak dostáváme, že pravá strana vztahu (14) je rovna nulovému vektoru. Navíc, až na degenerativní případy, lze ukázat, že matice ve vztahu (14) není singulární. Pokud tedy předpokládáme, že

tato matice opravdu není singulární, pak z toho plyne, že

$$\frac{d\alpha_i(w_0)}{dw_0} = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

a tedy $\alpha_i(w_0) = \alpha_i$ jsou nějaké reálné konstanty, čímž je dokázán vztah (11).

Nyní dokážeme vztah (12). Postupně dostáváme

$$J(w_0, z_0) = \mathbb{E} \left[\left(U \left(R_f \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right) w_0 \right) + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j b \right) \right]$$

$$J'(w_0, z_0) = \mathbb{E} \left[U'(w_0) R_f \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right) \right]$$

$$J''(w_0, z_0) = \mathbb{E} \left[U''(w_0) R_f^2 \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right)^2 \right],$$

a tedy

$$\begin{aligned} -\frac{J'(w_0, z_0)}{J''(w_0, z_0)} &= -\frac{\mathbb{E} \left[U'(w_0) R_f \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right) \right]}{\mathbb{E} \left[U''(w_0) R_f^2 \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right)^2 \right]} \\ &= -\frac{\mathbb{E} \left[U'(w_0) R_f \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right) \right]}{\frac{\mathbb{E} \left[U'(w_0) R_f \left(1 + \sum_{j=1}^N (R_j - R_f) \alpha_j a \right) \right] R_f}{a R_f w_0 + b}} \\ &= a w_0 + \frac{b}{R_f}, \end{aligned}$$

což je námi požadovaný vztah (12). □

3 Přejít k vícestupňovým modelům

Jednou z hlavních nevýhod statického modelu portfolia je, že neumožňuje průběžnou obměnu portfolia. Další podstatnou nevýhodou je, že tento přístup předpokládá, že všechny parametry jsou po celou dobu plánovacího horizontu neměnné. Nejenom v době krize, kdy na trzích dochází k prudkým změnám, je tento předpoklad velice velmi omezující. Statický přístup umožňuje na rozdíl od dynamického přístupu snadnou implementaci. Tato výhoda se však se stále větší výpočetní silou přestává být

tak důležitá.

3.1 Vývoj portfolia v čase

Nyní definujeme vývoj portfolia v čase. Časový horizont uvažujme jako množinu diskrétních bodů $\{0, 1, 2, \dots, T\}$, kde čas T označuje konec tohoto časového horizontu. Je to právě možnost průběžného přesouvání prostředků mezi rizikovými aktivy $x_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$ a bezrizikovým aktivem $x_{f,t}$ v čase t , která je velice atraktivní. Pro jednoduchost předpokládejme, že dané transakce lze provádět v libovolných množstvích. Změny v portfoliu lze realizovat v časech $t = 1, 2, \dots, T - 1$. V čase T se tedy už žádná změna nerealizuje. Počáteční portfolio, ze kterého vycházíme, je samozřejmě vytvořeno v čase $t = 0$. Pro počáteční bohatství $x_0 = (x_{1,0}, \dots, x_{N,0})^\top$ platí $\sum_{i=1}^N x_{i,0} \leq 1$; po započítání bezrizikového aktiva je tento součet roven jedné, tj. $x_{f,0} + \sum_{i=1}^N x_{i,0} = 1$.

Označme celkové bohatství v čase t jako W_t , pak platí

$$W_{t+1} = W_t \left(\sum_{i=1}^N R_{i,t} x_{i,t} + R_{f,t} \left(1 - \sum_{i=1}^N x_{i,t} \right) \right), \quad (15)$$

$$= W_t (R_t^\top x_t + R_{f,t} (1 - e^\top x_t)) \quad (16)$$

$$= W_t (x_t^\top R_t^e + R_{f,t}), \quad (17)$$

kde $R_t = (R_{1,t}, \dots, R_{N,t})^\top = (1 + r_{1,t}, \dots, 1 + r_{N,t})^\top$, e je vektor samých jedniček a $R_t^e = (R_{1,t} - R_{f,t}, \dots, R_{N,t} - R_{f,t})^\top$ je výnos překračující výnos bezrizikového aktiva, tzv. nadvýnos. Přičemž $r_{i,t}$ reprezentují výnosy aktiva i od času t do času $t + 1$. Bezrizikový výnos $r_{f,t}$ opět budeme považovat za pevnou hodnotu. Dále $R_f = (R_{f,t}, \dots, R_{f,t})^\top = (1 + r_{f,t}, \dots, 1 + r_{f,t})^\top$. Ve vícestupňových modelech bývá někdy užitečné uvažovat i investorovu průběžnou spotřebu C_t , popř. nějaký externí kapitál K_t , kterým investor může investor portfolio průběžně doplňovat. Pro časový vývoj W_t pak platí

$$W_{t+1} = (W_t + K_t - C_t) \left(\sum_{i=1}^N R_{i,t} x_{i,t} + R_{f,t} \left(1 - \sum_{i=1}^N x_{i,t} \right) \right). \quad (18)$$

Prozatím jsme neučinili žádný předpoklad týkající se dynamiky výnosů jednotlivých aktiv. Rozdělení $r_{i,t}$ se může v průběhu času měnit. Obdobně bezrizikový výnos $r_{i,f}$ se také v průběhu času může měnit. Ve vícestupňovém modelu toto může ovlivnit způsob, jakým investor rozdělí své bohatství mezi všechny aktiva, včetně

bezrizikového.

V čase t tedy investor zná hodnoty svého momentálního bohatství W_t , hodnotu externího kapitálu K_t a v neposlední řadě hodnotu bezrizikového výnosu z času t do času $t + 1$, tj. $R_{f,t}$. Dále investor zná podmíněná pravděpodobnostní rozdělení $F_{R_{f,t}} | Z_t$ a $F_{K_{f,t}} | Z_t$ pro $t = t + 1, \dots, T - 1$. Navíc investor zná podmíněné pravděpodobnostní rozdělení $F_{R_{i,t}} | Z_t$, $t = t + 1, \dots, T - 1$. V čase t obsahuje informační vektor Z_t všechny realizace hodnoty externího kapitálu a bezrizikového výnosu až do času t a také všechny realizace výnosů rizikových aktiv až do času $t - 1$. Dále může informační vektor obsahovat další stavové proměnné, které ovlivňují rozdělení budoucích externích kapitálů nebo rizikových a bezrizikových výnosů. Na základě těchto informací pak investor volí v čase t hodnotu investic do jednotlivých aktiv $x_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$. Nebo např. hodnotu spotřeby C_t , což bude detailněji rozebráno v sekci (3.5).

3.2 Hledání optimální investiční strategie

Nyní se budeme zabývat hledáním optimální investiční strategie. Níže uvedená sekce byla zpracována pomocí [35]. V praxi existují dva základní přístupy, viz. níže.

- **Value Iteration**

Použití dynamického programování při řešení vícestupňových úloh volby optimálních portfolií zažívá zejména v poslední době prudký vývoj. Celkovou úlohu za pomoci lze formulovat následujícím způsobem

$$J_T(w_T, z_T) = U_T(w_T) \tag{19}$$

$$J_t(w_t, z_t) = \max_{x_t \in P(W_t)} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})], \tag{20}$$

kde $0 \leq t \leq T$ a funkce $J_t(W_t, Z_t)$ je tzv. hodnotová funkce. Vztah (20) je tzv. Bellmanova rovnice. Rekurzivní vztah pro W_t je definován dle (15). Zde je dobré připomenout, že podmíněná střední hodnota ve vztahu (20) je uvažována přes R_0, \dots, R_{T-1} a $\Psi_0, \dots, \Psi_{T-1}$ při daných w_t a z_t . Symbolem $\mathbb{E}_t[X]$ budeme ve většině případů značit podmíněnou střední hodnotu náhodné veličiny X pro pevně dané hodnoty $W_t = w_t$ a $Z_t = z_t$.

Tuto úlohu lze řešit rekurzivně pomocí tzv. DP algoritmu. DP algoritmus začíná v čase T a pokračuje zpětně až do času 0. Požíváme zde tzv. princip optimality, který říká, že pokud chceme docílit optimálního výsledku v čase $T - 2$, pak již výsledek

v čase $T - 1$ musí být optimální. Na tomto je založen princip dynamického programování. Celkovou úlohu rozdělíme na části, které by měly být optimálním řešením těchto menších úloh. Cílem je dopracovat se k $J_0(W_0, Z_0)$. Pro nalezení optimální investiční strategie je nutno použít tento algoritmus ve všech bodech (w_t, z_t) stavového prostoru χ_t . Výpočet strategie v těchto bodech nám pak umožní se dopracovat k $J_t(w_t, z_t)$.

- **Policy iteration**

Tento přístup je zcela odlišný od přístupu value iteration uvedeného v sekci (3.2). Přístup funguje na postupném zlepšování zvolené počáteční investiční strategie $\pi^0 = \{\mu_0^0, \dots, \mu_{T-1}^0\}$. Cílem je tedy nějakým způsobem vytvářet nové investiční strategie $\pi^1, \pi^2, \pi^3, \dots$ až do doby, než se postupně dostaneme k optimální investiční strategii $\pi^* = \{\mu_0^*, \dots, \mu_{T-1}^*\}$. V případě, že již máme j -tou investiční strategii, pak $j + 1$ -ní investiční strategie se dá vypočítat ze vztahu

$$\mu_t^{j+1}(w_t, z_t) = \max_{x_t \in P(W_t)} \mathbb{E}_t \left(J_{t+1}^{\pi^j}(W_t, Z_t) \right), \quad t = 0, \dots, T - 1.$$

Tento algoritmus konverguje maximálně po T iteracích, avšak na rozdíl od value iteration je výpočetně náročnější, neboť zbytečně počítá některé neužitečné výrazy. Opět podmíněná střední hodnota ve vztahu (20) je brána přes R_0, \dots, R_{T-1} a $\Psi_0, \dots, \Psi_{T-1}$ při daných w_t a z_t . Tohoto odlišného přístupu lze však výhodně využít při numerickém řešení víceúrovňových modelů.

Pro snadnější pochopení nyní uvedeme řešení pomocí zpětné rekurse v případě binomického modelu. Tento příklad byl vypracován s pomocí [34]. Pro jednoduchost uvažujeme pouze případ s jedním rizikovým a jedním bezrizikovým aktivem.

Příklad 3. Předpokládejme tedy binomický model s parametry $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ se dvěma periodami, jedním bezrizikovým aktivem a pouze jedním rizikovým aktivem s počáteční hodnotou $S_0 = 4$. Dále máme $R_f = \frac{5}{4}$ a počáteční bohatství $W_0 = 4$. Cílem je maximalizovat užitek při použití logaritmické užitkové funkce. Přímou dostáváme $S_1(T) = d \cdot S_0 = 2$, $S_1(H) = u \cdot S_0 = 8$, $S_2(TT) = d^2 \cdot S_0 = 1$, $S_2(TH) = S_2(TH) = d \cdot u \cdot S_0 = 4$ a $S_2(HH) = u^2 \cdot S_0 = 16$. Stav T označuje situaci, kdy se hodnota rizikového aktiva sníží, a nastává s pravděpodobností $\frac{1}{3}$. Obdobně stav H označuje situaci, kdy se hodnota rizikového aktiva zvýší, a nastává s pravděpodobností $\frac{2}{3}$. Zbývá označit Δ_0 jako počet jednotek rizikového aktiva v čase 0. $\Delta_1(T)$ jako počet jednotek bezrizikového aktiva čase 1, pokud nastal stav T . Značení platí analogicky i pro $\Delta_1(H)$.

Dále

$$\begin{aligned}
W_1(T) &= W_0 \left(\frac{S_1(T) \Delta_0}{W_0} + R_f \left(1 - \frac{S_0 \Delta_0}{W_0} \right) \right) = -3\Delta_0 + 5 \\
W_1(H) &= W_0 \left(\frac{S_1(H) \Delta_0}{W_0} + R_f \left(1 - \frac{S_0 \Delta_0}{W_0} \right) \right) = 3\Delta_0 + 5 \\
W_2(TT) &= W_1(T) \left(\frac{S_2(TT) \Delta_1(T)}{W_1(T)} + R_f \left(1 - \frac{S_1(T) \Delta_1(T)}{W_1(T)} \right) \right) = \\
&\quad -\frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \\
W_2(TH) &= W_1(T) \left(\frac{S_2(TH) \Delta_1(T)}{W_1(T)} + R_f \left(1 - \frac{S_1(T) \Delta_1(T)}{W_1(T)} \right) \right) = \\
&\quad \frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \\
W_2(HT) &= W_1(H) \left(\frac{S_2(HT) \Delta_1(H)}{W_1(H)} + R_f \left(1 - \frac{S_1(H) \Delta_1(H)}{W_1(H)} \right) \right) = \\
&\quad -6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4} \\
W_2(HH) &= W_1(H) \left(\frac{S_2(HH) \Delta_1(H)}{W_1(H)} + R_f \left(1 - \frac{S_1(H) \Delta_1(H)}{W_1(H)} \right) \right) = \\
&\quad 6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4},
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\log(W_2)] &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 \log(W_2(TT)) + \frac{1}{3} \frac{2}{3} \log(W_2(TH)) + \\
&\quad \frac{2}{3} \frac{1}{3} \log(W_2(HT)) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \log(W_2(HH)) = \\
&= \frac{1}{9} \log\left(-\frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right) + \frac{2}{9} \log\left(\frac{3}{2}\Delta_1(T) - \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right) + \\
&\quad + \frac{2}{9} \log\left(-6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right) + \frac{4}{9} \log\left(6\Delta_1(H) + \frac{15}{4}\Delta_0 + \frac{25}{4}\right).
\end{aligned}$$

Označme nyní $E[\log(W_2)]$ jako $f(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H))$ a chtějme ji maximalizovat. Potom

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\Delta_0}(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H)) &= -\frac{5}{12W_2(TT)} - \frac{5}{6W_2(TH)} + \frac{5}{6W_2(HT)} + \frac{5}{3W_2(HH)} \\ \frac{df}{d\Delta_1(T)}(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H)) &= -\frac{1}{6W_2(TT)} + \frac{1}{3W_2(TH)} \\ \frac{df}{d\Delta_1(H)}(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H)) &= -\frac{4}{3W_2(HT)} + \frac{8}{3W_2(HH)}\end{aligned}$$

Položíme $\frac{df}{d\Delta_1(T)}(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H))$ rovno nule, pak $2W_2(TT) = W_2(TH)$. Položíme $\frac{df}{d\Delta_1(H)}(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H))$ rovno nule, pak $2W_2(HT) = W_2(HH)$. Vztahy $2W_2(TT) = W_2(TH)$ a $2W_2(HT) = W_2(HH)$ dosadíme do dostaneme rovnice $\frac{df}{d\Delta_0}(\Delta_0, \Delta_1(T), \Delta_1(H)) = 0$ a dostaneme $2W_2(TT) = W_2(HT)$. Máme tedy soustavu třech rovnic $2W_2(TT) = W_2(TH)$, $2W_2(HT) = W_2(HH)$ a $2W_2(TT) = W_2(HT)$ s třemi neznámými Δ_0 , $\Delta_1(T)$ a $\Delta_1(H)$. Tato soustava se dá také zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{9}{2}\Delta_1(T) + \frac{15}{4}\Delta_0 - \frac{25}{4} &= 0 \\ 18\Delta_1(H) - \frac{15}{4}\Delta_0 - \frac{25}{4} &= 0 \\ 3\Delta_1(T) - 6\Delta_1(H) + \frac{45}{4}\Delta_0 - \frac{25}{4} &= 0\end{aligned}$$

Po vyřešení těchto rovnic dostáváme $\Delta_0 = \frac{5}{9}$, $\Delta_1(T) = \frac{25}{27}$ a $\Delta_1(H) = \frac{25}{54}$.

3.3 Řešení vícestupňového modelu pro konkrétní užitkové funkce

Zde plynule navážeme na větu (14) a na výklad z [4] a opět budeme předpokládat užitkové funkce, pro které platí

$$\frac{U'(W)}{U''(W)} = aW + b, \forall W.$$

V tomto případě výsledky věty 14. zobecníme pro vícestupňové modely. Cílem je maximalizovat konečný očekávaný užitek, tj. $\mathbb{E}[U(W_T)]$. V tomto případě aplikujeme tzv. DP algoritmus, dostáváme

$$J_T(w_T, z_T) = U_T(W_T)$$

$$J_t(w_t, z_t) = \max_{x_t} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})].$$

Dle věty (14) dostáváme, že

$$x_{T-1}^*(W_{T-1}) = \alpha_{T-1} (aR_{f,T-1}W_{T-1} + b),$$

kde α_{N-1} je N -dimenzionální vektor reálných konstant. Dále dle druhé části věty (14) dostáváme

$$-\frac{J'_{T-1}(W)}{J''_{T-1}(W)} = aW + \frac{b}{R_{f,T-1}}.$$

Pokud budeme postupovat analogicky, dostaneme obecně

$$x_t^*(W_t) = \alpha_t \left(aR_{f,t}W_t + \frac{b}{R_{f,T-1} \cdots R_{f,t+1}} \right)$$

a

$$-\frac{J'_t(W)}{J''_t(W)} = aW + \frac{b}{R_{f,T-1} \cdots R_{f,t}}, \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Ukázali jsme, že za určitých podmínek na zvolenou užitkovou funkci lze celý problém značně zjednodušit. Nyní se ještě budeme věnovat třem konkrétním příkladům, které umožňují přesné řešení vícestupňového modelu. Za tímto účelem ještě uvedeme následující definice.

3.4 Krátkozraké investiční strategie

Tato sekce, která vychází zejména z [35] umožňuje pochopit rozdíl mezi tzv. myopickými strategiemi a částečně myopickými strategiemi, což je důležité zejména při způsobu řešení vícestupňových modelů. Tyto termíny byly poprvé definovány Mosinem v sedmdesátých letech minulého století.

Definice 15. Investiční strategii nazýváme myopickou (krátkozrakou), pokud se investor v čase t chová, jako kdyby čas $t+1$ byl horizont T .

Definice 16. Investiční strategii nazýváme částečně myopickou (částečně krátkozrakou), pokud se investor v čase t chová, jako kdyby čas $t+1$ byl horizont T a navíc za podmínky, že v časech $t+1, \dots, T-1$ by všechno své bohatství investoval do bezrizikového aktiva.

Nyní se budeme zabývat případy, kdy se investor řídí užitkovou funkcí s konstantním koeficientem rizikové averze. Jedná se o případ mocninné a logaritmické užitkové funkce.

3.4.1 Řešení vícestupňového modelu s mocninnou užitkovou funkcí

V tomto případě použijeme mocninnou užitkovou funkci. Tedy tato užitková funkce má v čase T tvar

$$U_T(w_T) = \frac{w_T^{1-\gamma}}{1-\gamma},$$

kde γ je koeficient rizikové averze. Dále předpokládejme, že

$$J_{t+1}(w_{t+1}, z_{t+1}) = \frac{w_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} C_{t+1}(z_{t+1}),$$

kde $C_{t+1}(z_{t+1})$ je kladná rekurzivně definovaná funkce, pro kterou platí $C_T(z_T) = 1$. Dále platí

$$J_t(w_t, z_t) = \max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})], \quad (21)$$

$$= \max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_t \left[\frac{W_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma} C_{t+1}(Z_{t+1}) \right] \quad (22)$$

$$= \max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_t \left[\frac{(W_t (R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t)))^{1-\gamma}}{1-\gamma} C_{t+1}(Z_{t+1}) \right] \quad (23)$$

$$= \max_{x_t \in P(w_t)} \left[\frac{w_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \mathbb{E}_t \left[(R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t))^{1-\gamma} C_{t+1}(Z_{t+1}) \right] \right] \quad (24)$$

Pro pochopení poslední rovnosti je lepší detailněji rozepsat poslední dva vztahy. Řádek (23) lze podrobněji rozepsat jako

$$\max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_{R_t, \Psi_t} \left[\frac{(W_t (R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t)))^{1-\gamma}}{1-\gamma} C_{t+1}(Z_{t+1}) \mid W_t = w_t, Z_t = z_t \right]$$

a řádek (24) jako

$$\max_{x_t \in P(w_t)} \left[\frac{w_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \mathbb{E}_{R_t, \Psi_t} \left[(R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t))^{1-\gamma} C_{t+1}(Z_{t+1}) \mid Z_t = z_t \right] \right].$$

Předpokládejme nyní množinu přípustných investic ve tvaru $P(w_t) = P(t)$, tj. odstranili jsme závislost na w_t a připouštíme pouze závislost na čase t . Protože v sekci 2.2. jsme předpokládali podmíněnou nezávislost vektorů R_t a Ψ_t při dané hodnotě informačního vektoru $Z_t = z_t$, lze vztah (24) přepsat v následujícím tvaru

$$J_t(W_t, Z_t) = \frac{w_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} \max_{x_t \in P(t)} \left[\mathbb{E}_{R_t} \left[(R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t))^{1-\gamma} \right] \right] \mathbb{E}_{\Psi_t} [C_{t+1}(z_{t+1})],$$

kde výraz $\max_{x_t \in P(t)} \left[\mathbb{E}_{R_t} \left[(R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t))^{1-\gamma} \right] \right] \mathbb{E}_{\Psi_t} [C_{t+1}(z_{t+1})]$ lze označit jako $C_t(z_t)$. Celkově tedy dostáváme, že

$$J_t(w_t, z_t) = \frac{w_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} C_t(z_t).$$

3.4.2 Řešení vícestupňového modelu s logaritmickou užítkovou funkcí

Tento případ je obdobný jako v sekci (3.4.1). Zde ale použijeme logaritmickou užítkovou funkci, v čase T tedy platí

$$U_T(w_T) = \log(w_T)$$

Dále předpokládejme, že

$$J_{t+1}(w_{t+1}, z_{t+1}) = \log(w_{t+1}) + C_{t+1}(z_{t+1}),$$

kde $C_{t+1}(z_{t+1})$ je rekurzivně definovaná funkce, pro kterou platí $C_T(z_T) = 0$. Dostáváme tedy

$$J_t(w_t, z_t) = \max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(w_{t+1}, z_{t+1})], \quad (25)$$

$$= \max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_t [\log(W_{t+1}) + C_{t+1}(Z_{t+1})] \quad (26)$$

$$= \max_{x_t \in P(w_t)} \mathbb{E}_t [\log(W_t (R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t))) + C_{t+1}(Z_{t+1})] \quad (27)$$

$$= \max_{x_t \in P(w_t)} [\log(w_t) + \mathbb{E}_t [\log(R_t^\top x_t + R_f (1 - e^\top x_t)) + C_{t+1}(z_{t+1})]] \quad (28)$$

V případě potřeby lze předchozí vztahy podrobněji rozepsat jako v sekci 3.4.1. Předpokládejme nyní množinu přípustných investic ve tvaru $P(W_t) = P(t)$, tj. odstranili jsme závislost omezení na W_t a opět připouštíme pouze závislost na čase t . Pak lze

vztah (28) přepsat v následujícím tvaru

$$J_t(w_t, z_t) = \log(w_t) + \max_{x_t \in P(t)} \mathbb{E}_t [\log(R_t^\top x_t + R_f(1 - e^\top x_t))] + \mathbb{E}_t [C_{t+1}(z_{t+1})],$$

kde výraz $\max_{x_t \in P(t)} \mathbb{E}_t [\log(R_t^\top x_t + R_f(1 - e^\top x_t)) + C_{t+1}(z_{t+1})]$ lze označit jako $C_t(z_t)$. Celkově tedy dostáváme, že

$$J_t(w_t, z_t) = \log(w_t) + C_t(z_t), \quad t = 0, \dots, T-1,$$

což bylo naším cílem.

V obou předchozích případech, tj. v případě vícestupňového modelu s logaritmické a mocninnou užitkovou funkcí, jsme ukázali, že optimální investiční strategie je myopická, neboť investor se v čase t chová, jakoby čas $t+1$ byl čas T . V čase t tedy investor pozoruje informační vektor a řeší problém s užitkovou funkcí $\log(w_{t+1})$ nebo $\frac{w_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$. Celkově jsme tedy ukázali, že v těchto případech lze řešení vícestupňového modelu získat pomocí vyřešení T statických modelů. V čase t vždy řešíme statický problém s jednotkovým počátečním bohatstvím, informačním vektorem z_t a užitkovou funkcí $\log(w_{t+1})$ nebo $\frac{w_{t+1}^{1-\gamma}}{1-\gamma}$.

3.4.3 Řešení vícestupňového modelu při exponenciální užitkové funkci

Tento případ musíme odlišit od (3.4.1) a (3.4.2). Exponenciální užitková funkce má konstantní parametr absolutní rizikové averze, zatímco v předchozích případech měla užitková funkce konstantní parametr relativní rizikové averze. V čase T tedy platí

$$U_T(w_T) = -e^{-\gamma w_T}.$$

Dále předpokládejme, že

$$J_{t+1}(w_{t+1}, z_{t+1}) = -e^{-\gamma R_f^{T-t-1} w_{t+1}} + C_{t+1}(z_{t+1}),$$

kde $C_{t+1}(z_{t+1}) > 0$ a $C_T(z_T) = 1$. Při použití definice (7) dostáváme

$$J_t(w_t, z_t) = \max_{x_t^s \in P(w_t)} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})], \quad (29)$$

$$= \max_{x_t^s \in P(w_t)} \mathbb{E}_t \left[-e^{-\gamma R_f^{T-t-1} (R_f W_t + (R_t - R_f e^\top)^\top x_t^s)} C_{t+1}(Z_{t+1}) \right] \quad (30)$$

$$= \max_{x_t^s \in P(w_t)} \left[-e^{-\gamma R_f^{T-t} w_t} \mathbb{E}_t \left[-e^{-\gamma R_f^{T-t-1} (R_t - R_f e^\top)^\top x_t^s} C_{t+1}(Z_{t+1}) \right] \right]. \quad (31)$$

Opět lze v případě potřeby lze předchozí vztahy podrobněji rozepsat jako v sekci 3.4.1. Předpokládejme nyní množinu přípustných investic ve tvaru $P(W_t) = P(t)$. Dle předpokladu $C_{t+1}(z_{t+1}) > 0$, a tedy $C_t(z_t) > 0$. Vztah (31) lze vyjádřit ve tvaru

$$J_t(w_t, z_t) = -e^{-\gamma R_f^{T-t} w_t} c_t(z_t),$$

kde $c_t(z_t) = \max_{x_t^s \in P(t)} \left[\mathbb{E}_t \left[-e^{-\gamma R_f^{T-t-1} (R_t - R_f e^\top)^\top x_t^s} C_{t+1}(Z_{t+1}) \right] \right]$. Celkově tedy

$$c_t(z_t) = \max_{x_t^s \in P(t)} \left[\mathbb{E}_t \left[-e^{-\gamma R_f^{T-t-1} (R_t - R_f e^\top)^\top x_t^s} \right] \right] \mathbb{E}_t [C_{t+1}(z_{t+1})].$$

V tomto případě je optimální investiční strategie částečně myopická.

Příklad 4. Uvažujme případ, kdy má investor k dispozici pouze jedno bezrizikové aktivum s výnosem $r_{f,t} = 0.05$ za jednu periodu a jedno rizikové aktivum s výnosem $r_t = \mu + \sigma \epsilon_t$, kde $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Změny portfolia jsou možné v časech $t = 0, \dots, T$. Investor se řídí exponenciální užitkovou funkcí $U(W) = -e^{-\gamma W}$. Cílem investora je maximalizovat očekávaný užitek v čase T . Zřejmě platí

$$W_{t+1} = W_t(1 + r_t) + (W_t - x_t)(1 + r_{f,t}) = W_t R_{f,t} + x_t(R_t - R_{f,t}).$$

Nyní ukážeme, že hodnotová funkce má tvar

$$J_t(W_t) = -a_t e^{-b_t W_t}.$$

Pro $t = T$ zřejmě platí $a_T = 1$ a $b_T = \gamma$. Dále dostáváme, že

$$\begin{aligned} J_t(W_t) &= \max_{x_t} \mathbb{E}_t \left[-a_t e^{-b_t(W_t R_{f,t} + x_t(R_t - R_{f,t}))} \right] \\ &= \max_{x_t} \mathbb{E}_t \left[-a_t e^{-b_t(W_t R_{f,t} + x_t(\mu + \sigma \epsilon_t - R_{f,t}))} \right] \\ &= \max_{x_t} -a_t e^{-b_t(W_t R_{f,t} + x_t(\mu - R_{f,t}) - \frac{1}{2} \sigma^2 b_t x_t^2)}, \end{aligned}$$

a tedy musí při maximalizaci musí platit

$$-b_t(\mu - R_{f,t}) + \sigma^2 b_t^2 x_t^* = 0,$$

z čehož vyplývá

$$x_t^*(W_t) = \frac{\mu - R_{f,t}}{\sigma^2 b_t}. \quad (32)$$

Pravá strana předchozího vztahu nezávisí na W_t . A platí

$$J_t^*(W_t) = -a_t e^{-b_t W_t R_{f,t} - \frac{1}{2} \frac{(\mu - R_{f,t})^2}{\sigma^2}},$$

z čehož vyplývá, že $a_t = a_{t+1} e^{\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mu - R_{f,t})^2}{\sigma^2}\right)}$, $b_t = b_{t+1} R_{f,t}$. Navíc máme koncové podmínky $a_T = 1$ a $b_T = \gamma$ a po vyřešení těchto rekurzivních rovnic dostáváme

$$a_t = \gamma e^{\left(-\frac{(T-t)(\mu - R_{f,t})^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad b_t = R_{f,t}^{T-t}.$$

Po dosazení do vztahu (32) dostaneme konečný výsledek ve tvaru

$$x_t^*(W_t) = \frac{\mu - R_{f,t}}{\sigma^2 \gamma (R_{f,t})^{T-t}}.$$

Tento příklad je zpracován na základě [25].

3.5 Vícestupňový model s průběžnou spotřebou

Nyní se budeme zabývat rozšířením základního modelu při započítání průběžné spotřeby, jak jsme již uvedli ve vztahu (18). Následující dvě sekce vycházejí z [29]. Předpokládejme, že investor chce maximalizovat očekávaný užitek z jeho průběžné spotřeby C_0, \dots, C_{T-1} a očekávaný užitek z koncové hodnoty bohatství W_T . Na rozdíl od bohatství W_t nepředpokládáme, že hodnota spotřeby C_t má nějakou časovou závislost. Celková investorova užitková funkce má tvar $\Upsilon(C_0, C_1, \dots, C_{T-1}, W_T)$. Před-

pokládejme navíc, že funkce Υ je konkávní, rostoucí a časově separabilní. Celkově tedy chceme maximalizovat

$$\mathbb{E}_0 [\Upsilon (C_0, C_1, \dots, C_{T-1}, W_T)] = \mathbb{E}_0 \left[\sum_{t=0}^{T-1} V (C_t) + U (W_T) \right].$$

Rovnost ve výše uvedeném vztahu je dána časovou separabilitou celkové užitkové funkce Υ . Opět předpokládáme, že užitkové funkce U a V jsou konkávní rostoucí funkce. Nyní definujeme funkce tzv. hodnotící funkce J , pomocí kterých je celý problém definován.

$$J_T (W_T, Z_T) = U_T (W_T) \quad (33)$$

$$J_t (W_t, Z_t) = \max_{C_t, x_{i,t}, t, t+1, \dots, T, i=1, \dots, N} \mathbb{E}_t \left[\sum_{s=t}^{T-1} V (C_s) + U (W_T) \right]. \quad (34)$$

Je dobré si uvědomit, že J je funkce momentálního bohatství a všech informací až do času t . Takto definovaný problém budeme řešit zpětnou indukcí. Nejprve se posuneme z času T do času $T - 1$, kdy platí

$$\begin{aligned} J_{T-1} (W_{T-1}, Z_{T-1}) &= \max_{C_{T-1}, x_{i,T-1}, i=1, \dots, N} \mathbb{E}_t [V (C_{T-1}) + U (W_T)] \\ &= \max_{C_{T-1}, x_{i,T-1}, i=1, \dots, N} V (C_{T-1}) + \mathbb{E}_{T-1} [U (W_T)]. \end{aligned} \quad (35)$$

Předchozí vztah popisuje jednostupňový model. Nejdříve je třeba tento vztah zderivovat dle C_{T-1} a $x_{i,T-1}$, $i = 1, \dots, N$, tj.

$$\frac{\partial V (C_{T-1})}{\partial C_{T-1}} - \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U (W_T)}{\partial W_{T-1}} R_{T-1} \right] = 0 \quad (36)$$

$$\mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U (W_T)}{\partial W_T} (R_{i,T-1} - R_{f,T-1}) \right] = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (37)$$

Při derivaci druhého vztahu jsme aplikovali řetězkové pravidlo. Použili jsme označení $R_{T-1} = \sum_{i=1}^N R_{i,T-1} x_{i,T-1} + R_{f,T-1} \left(1 - \sum_{i=1}^N x_{i,T-1} \right)$. Pomocí vztahu (37) lze vztah (36) přepsat jako

$$\frac{\partial V (C_{T-1})}{\partial C_{T-1}} = R_{f,T-1} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U (W_T)}{\partial W_T} \right]. \quad (38)$$

A za využití rovnic (37) a (38) lze obdržet optimální hodnoty C_{T-1}^* a $x_{i,T-1}^*$, $i = 1, \dots, N$, které nyní můžeme dosadit do vztahu (35). Pokud po tomto dosazení vztah (35) zderivujeme, pak dostaneme

$$\frac{\partial J_{T-1}(W_{T-1}, Z_{T-1})}{\partial W_{T-1}} = \frac{\partial V(C_{T-1})}{\partial C_{T-1}^*} \frac{\partial (C_{T-1}^*)}{\partial W_{T-1}} + \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U(W_T)}{\partial W_T} \left(\frac{\partial W_T}{\partial W_{T-1}} \right) \right].$$

Pomocí (37) a (38) lze předchozí vztah zjednodušit až na

$$\frac{\partial J_{T-1}(W_{T-1}, Z_{T-1})}{\partial W_{T-1}} = R_{f,T-1} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U(W_T)}{\partial W_T} \right] = \frac{\partial V(C_{T-1}^*)}{\partial C_{T-1}^*}.$$

Představme si nyní, že již máme optimální spotřebu a váhy portfolia v čase $T-1$ a nyní to stejné chceme i v čase $T-2$. Využijeme principu optimality, který říká, že pokud chceme docílit optimálního výsledku v čase $T-2$, pak již výsledek v čase $T-1$ musí být optimální. Dle tohoto principu pak platí

$$J_{T-2}(W_{T-2}, Z_{T-2}) = \max_{C_{T-2}, x_{i,T-2}} V(C_{T-2}) + \mathbb{E}_{T-2} [V(C_{T-1}) + U(W_T)] \quad (39)$$

$$= \max_{C_{T-2}, x_{i,T-2}} V(C_{T-2}) \quad (40)$$

$$+ \mathbb{E}_{T-2} \left[\max_{C_{T-1}, x_{i,T-1}} \mathbb{E}_{T-2} (V(C_{T-1}) + U(W_T)) \right] \quad (41)$$

$$= \max_{C_{T-2}, x_{i,T-2}} V(C_{T-2}) + \mathbb{E}_{T-2} [J_{T-1}(W_{T-1}, Z_{T-1})] \quad (42)$$

Speciálně rovnici (42) pak nazýváme tzv. Bellmanovou rovnicí. Optimální podmínky pro tuto rovnici mají tvar

$$\frac{\partial V(C_{T-2}^*)}{\partial C_{T-2}^*} = \frac{\partial J(W_{T-2}, Z_{T-2})}{\partial W_{T-2}} \quad (43)$$

a

$$\mathbb{E}_{T-2} \left[R_{i,T-2} \frac{\partial J(W_{T-1}, Z_{T-1})}{\partial W_{T-1}} \right] = R_{f,T-2} \mathbb{E}_{T-2} \left[\frac{\partial J(W_{T-1}, Z_{T-1})}{\partial W_{T-1}} \right], i = 1, \dots, N. \quad (44)$$

Celkově pro čas t platí

$$J_t(W_t, Z_t) = \max_{C_t, x_{i,t}} V(C_t) + \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})] \quad (45)$$

a pro optimální podmínky v tomto čase platí

$$\frac{\partial V(C_t^*)}{\partial C_t^*} = \frac{\partial J(W_t, Z_t)}{\partial W_t} \quad (46)$$

a

$$\mathbb{E}_t \left[R_{i,t} \frac{\partial J(W_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial W_{t+1}} \right] = R_{f,t} \mathbb{E}_t \left[\frac{\partial J(W_{t+1}, Z_{t+1})}{\partial W_{t+1}} \right], i = 1, \dots, N. \quad (47)$$

Toto lze odvodit za pomoci jistého vzoru, který vznikl v jednotlivých vzorcích pro postupně klesající čas. Nyní krátce zopakujeme, jaké je třeba učinit kroky, abychom se dostali k finálnímu řešení.

1. Určit tvar $J_T(W_T, Z_T)$.
2. Výpočet C_{T-1}^* a x_{T-1} .
3. Určit tvar $J_{T-1}(W_{T-1}, Z_{T-1})$ za pomoci výsledků z předchozích kroků.
4. Opakovat kroky 2. a 3., dokud nedosáhneme času 0.

Předchozí teorii lze například aplikovat pro konkrétní užitkovou funkci, kdy lze optimální investiční strategii vyjádřit v uzavřeném tvaru.

3.6 Řešení vícestupňového modelu s průběžnou spotřebou pro logaritmickou užitkovou funkci

Jedná se o vícestupňový model s průběžnou spotřebou, nulovým externím kapitálem a logaritmickou užitkovou funkcí. Konkrétně $V(C_t) = \delta^t \log(C_t)$, $U(W_T) = \delta^T \log(W_T)$. Přičemž $\delta = \frac{1}{1+i}$, kde i je investorova osobní úroková míra neboli investorovo subjektivní vnímání času. V tomto konkrétním případě má vztah (36) tvar

$$\begin{aligned} \delta^{T-1} \frac{1}{C_{T-1}} &= \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\delta^T R_{T-1}}{W_T} \right] \\ &= \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\delta^T R_{T-1}}{(W_{T-1} - C_{T-1}) R_{T-1}} \right] \\ &= \frac{\delta^T}{W_{T-1} - C_{T-1}}. \end{aligned}$$

Odtud snadno vyplývá, že

$$C_{T-1}^* = \frac{1}{1+\delta} W_{T-1}.$$

Obdobně pro vztah (37) platí

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U(W_T, Z_T)}{\partial x_{i,T-1}} R_{i,T-1} \right] &= \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U(W_T, Z_T)}{\partial x_{i,T-1}} R_{f,T-1} \right], \quad i = 1, \dots, n. \\ \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\delta^T R_{i,T-1}}{(W_{T-1} - C_{T-1}) R_{T-1}} \right] &= \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\delta^T R_{f,T-1}}{(W_{T-1} - C_{T-1}) R_{T-1}} \right] \\ \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{R_{i,T-1}}{R_{T-1}} \right] &= R_{f,T-1} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{1}{R_{T-1}} \right] = 1.\end{aligned}$$

Je třeba si povšimnout, že předchozí vztah nezávisí na W_{T-1}, C_{T-1} , což je zcela v souladu s předchozím výkladem, zejména pak s (3.4.2). Poslední rovnost platí za pomoci (38), tj.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(C_{T-1}, Z_{T-1})}{\partial C_{T-1}} &= R_{f,T-1} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\partial U(W_T, Z_T)}{\partial W_T} \right] \\ \frac{\delta^{T-1}}{C_{T-1}^*} &= R_{f,T-1} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{\delta^T}{W_T} \right] \\ 1 &= R_{f,T-1} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{1}{R_{T-1}} \right].\end{aligned}$$

Dále označme $R_t^* = R_{f,t} + \sum_{i=1}^N x_{i,t}^* (R_{i,t} - R_{f,t})$, kde $x_{i,t}^*$ jsou již optimálně zvolené hodnoty optimálně zvolené hodnoty značíme jako C_{T-1}^* . Dle (35) platí

$$\begin{aligned}J(W_{T-1}, Z_{T-1}) &= \delta^{T-1} \log(C_{T-1}^*) + \delta^T \mathbb{E}_{T-1} [\log(R_{T-1}^* (W_{T-1} - C_{T-1}^*))] \\ &= \delta^{T-1} [(1 + \delta) \log(W_{T-1}) + H_{T-1}],\end{aligned}$$

kde $H_{T-1} = -\log(1 + \delta) + \delta \log\left(\frac{1}{1+\delta}\right) + \delta \mathbb{E}_{T-1} (\log(R_{T-1}^*))$. Zřejmě platí, že H_{T-1} nezávisí na W_{T-1} . Předchozí výpočet lze nyní aplikovat pro $T - 2$. Postupně tedy dostáváme, že vztah (42) má tvar

$$J(W_{T-2}, Z_{T-2}) = \max_{C_{T-2}, x_{T-2} \in P(W_{T-2})} \delta^{T-2} \log(C_{T-2}) + \mathbb{E}_{T-2} [(1 + \delta) \log(W_{T-1}) + H_{T-1}].$$

Obdobně vztah (43) má tvar

$$C_{T-1}^* = \frac{1}{1 + \delta + \delta^2} W_{T-2}$$

a pro vztah (44) platí

$$\mathbb{E}_{T-2} \left[\frac{R_{i,T-2}}{R_{T-2}^*} \right] = R_{f,T-2} \mathbb{E}_{T-1} \left[\frac{1}{R_{T-2}^*} \right] = 1, \quad i = 1, \dots, N.$$

Opět vznikl určitý vzor ve vztazích pro postupně snižující se čas. Dle tohoto vzoru dostáváme analogie vztahů (46) a (47) pro čas t

$$C_t^* = \frac{1}{1 + \delta + \dots + \delta^{T-t}} W_t$$

a

$$\mathbb{E}_{T-2} \left[\frac{R_{i,t}}{R_t^*} \right] = R_{f,t} \mathbb{E}_t \left[\frac{1}{R_t^*} \right] = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Předchozí vztah ukazuje, že v tomto případě potřebujeme k získání optimálního portfolia jen pravděpodobnostní rozdělení výnosů o jeden krok dopředu, což je zcela v souladu s předchozím výkladem, zejména pak s (3.4.2).

4 Numerické metody pro řešení vícestupňových modelů

V této sekci se budeme zabývat případy, kdy problém popsáný vztahy

$$J_T(w_T, z_T) = U_T(w_T) \tag{48}$$

$$J_t(w_t, z_t) = \max_{x_t \in P(W_t)} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})] \tag{49}$$

nelze řešit přímým výpočtem. Jedná se o postup rozpracovaný v [35]. Navzdory tomu, že jsme již uvedli příklady, kdy je přímý výpočet možný, je nutné se věnovat i příkladům, kdy to možné není. Pak nutné aplikovat nejrůznější numerické metody. Hlavním problémem je najít řešení s rozumnými nároky na výpočetní sílu a kvalitu výsledku. Samozřejmě platí, že čím větší nároky na přesnost výpočtu, tím je třeba zajistit větší výpočetní schopnost a naopak.

Jedním ze způsobů, jak vyřešit tento problém, je pokusit se najít dostatečně kvalitní suboptimální strategii $\hat{\pi} = \{\hat{\mu}_0, \dots, \hat{\mu}_{T-1}\}$ s rozumnými nároky na výpočetní schopnosti. Toho lze docílit v několika krocích, kterými se nyní budeme zabývat.

4.1 Value iteration

Tento algoritmus funguje následujícím způsobem. Cílem je získat aproximované $\hat{J}_t(w_t, z_t)$. Nejprve máme $\hat{J}_T(w_T, z_T) = J_T(w_T, z_T) = U_T(w_T)$. Pro získání ostatních aproximovaných $\hat{J}_t(w_t, z_t)$ aplikujeme následující postup.

- **Diskretizace stavového prostoru**

V tomto kroku je třeba vybrat konečnou podmnožinu $\hat{\chi}_t$ stavového prostoru χ_t . Jak již jsem zmínili, za větší přesnost výsledku je třeba zaplatit v podobě větší výpočetní schopnosti. Nejjednodušší přístup aproximace stavového prostoru je pomocí kartézského součinu následujícím způsobem

$$\hat{\chi}_t = \hat{W}_t \times \hat{Z}_{1,t} \times \cdots \times \hat{Z}_{L,t},$$

kde $\hat{W}_t = \{w_t^1, \dots, w_t^M\}$ a $\hat{Z}_{k,t} = \{z_{k,t}^1, \dots, z_{k,t}^H\}$. Celkově tedy stavový prostor aproximujeme MH^L body. Pokud je diskretizace dostatečně jemná, pak nám to umožňuje najít kvalitnější optimální řešení.

Největší problém diskretizace stavového prostoru pomocí kartézského součinu je prudký nárůst všech bodů tohoto součinu v případě, že začneme navyšovat počet stavových proměnných. Logickým krokem je tedy výběr diskretizačních bodů stavového prostoru dle nějakých předem určených pravidel. Podstatné je umístit co nejvíce bodů tam, kde se s velkou pravděpodobností bude odehrávat něco podstatného.

- **Výběr portfolia**

Dalším krokem je nyní vybrat portfolio \hat{x}_t^* , které pro každý stav $\hat{\chi}_t$ maximalizuje nebo alespoň přibližně maximalizuje (49). Jedním ze způsobů, jak toto učinit je hodnotící funkci $J_{t+1}(w_{t+1}, z_{t+1})$ nahradit přibližnou hodnotící funkcí $\hat{J}_{t+1}(w_{t+1}, z_{t+1})$, a tedy

$$\hat{x}_t^* = \max_{x_t \in P(W_t)} \mathbb{E}_t \left[\hat{J}_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1}) \right]$$

- **Policy evaluation**

V tomto bodě je naším cílem spočítat nebo aproximovat hodnotící funkci ve tvaru

$$\bar{J}_t(\hat{w}_t, \hat{z}_t) = \mathbb{E}_t [U_T(W_T^{\bar{\pi}_t})], \quad (50)$$

kde $\bar{\pi}_t = \{\bar{\mu}_t, \bar{\pi}_{t+1}\}$. Na tomto místě předpokládáme, že $\hat{\pi}_{t+1} = \{\hat{\mu}_{t+1}, \dots, \hat{\mu}_{T-1}\}$ je již spočítána pro časy $t = t + 1, \dots, T - 1$. Toto je třeba učinit pro každý stav ve

zvoleném stavovém prostoru $\hat{\chi}_t$. Při rozumném zadání prakticky není možné spočítat pravou stranu (50).

- **Konstrukce hodnotící funkce**

Nyní můžeme sestavit $\hat{J}_t(w_t, z_t)$ pro celý stavový prostor χ_t . Toho lze docílit např. pomocí interpolace v nejrůznějších variantách.

5 Metoda simulací pro řešení vícestupňového modelu

Nyní popíšeme metodu dle článku [7]. Tato metoda umožňuje pomocí simulací a dynamického programování řešit vícestupňové modely portfolia. Mezi největší výhody tohoto přístupu jednoznačně patří možnost uvažování nejrůznějších podmínek. Je možné uvažovat velké množství aktiv a stavových proměnných. Je namístě zdůraznit, že není třeba uvažovat konkrétní rozdělení výnosů aktiv. Rovněž vývoj stavových proměnných nemusí být nutně stacionární. Tuto metodu lze popsat v následujících třech krocích. Celkově se tedy jedná o metodu, která má velký potenciál při využití v praxi. Je dobré si uvědomit, že tato metoda spadá pod přístup policy iteration, který je obecně formulován v sekci (3.2). Tato sekce i sekce na ní navazující, tj. vše až do konce práce, byla sestavena zejména pomocí [7, 23, 8, 9, 28, 22].

5.1 Krok 1

Vyjdeme z Bellmanovy rovnice (20) a nebudeme uvažovat žádné dodatečné podmínky $P(W_t)$, tj.

$$J_t(W_t, Z_t) = \max_{x_t} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1})] \quad (51)$$

$$= \max_{x_t} \mathbb{E}_t [J_{t+1}(W_t(x_t^\top R_{t+1}^e + R_f), Z_{t+1})], \quad (52)$$

kde jsme za výraz W_{t+1} dosadili dle vztahu (17). Dle Taylorova rozvoje druhého stupně pro $J_{t+1}(W_t(x_t^\top R_{t+1}^e + R_f), Z_{t+1})$ přibližně platí

$$\begin{aligned} J_{t+1}(W_t(x_t^\top R_{t+1}^e + R_f), Z_{t+1}) &\approx J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) \\ &\quad + \partial_1 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1})(W_t x_t^\top R_{t+1}^e) \\ &\quad + \frac{1}{2} \partial_1^2 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1})(W_t x_t^\top R_{t+1}^e)^2, \end{aligned}$$

kde symbol ∂_1 značí parciální derivaci dle první proměnné. Aby byla existence Taylova rozvoje přijatelná, předkládáme existenci derivací v předchozím vztahu a také, že existuje $J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1})$. Pro x_t které maximalizuje (52) musí platit

$$\begin{aligned} W_t \mathbb{E}_t [\partial_1 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e] + W_t^2 \mathbb{E}_t [\partial_1^2 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e) R_{t+1}^e] &= 0 \\ W_t \mathbb{E}_t [\partial_1 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e] + W_t^2 \mathbb{E}_t [\partial_1^2 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) (R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top}) x_t] &= 0, \end{aligned}$$

a tedy

$$x_t \approx - \{W_t \mathbb{E}_t [\partial_1^2 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) (R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top})]\}^{-1} \times \mathbb{E}_t [\partial_1 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e].$$

Předchozí vztah lze zkráceně zapsat jako

$$x_t \approx - \{W_t \mathbb{E}_t [B_{t+1}]\}^{-1} \times \mathbb{E}_t [A_{t+1}], \quad (53)$$

kde

$$\begin{aligned} A_{t+1} &= \partial_1 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e, \\ B_{t+1} &= \partial_1^2 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top}. \end{aligned}$$

Nejdůležitější je si uvědomit, že vztah (53) obsahuje dvě podmíněné střední hodnoty.

Tuto metodu simulací lze použít i pro Taylorův rozvoj vyššího stupně, neboť Taylorův rozvoj druhého stupně nemusí často poskytovat dostatečně přesné výsledky. Tento případ může nastat např. když investorova užitková funkce je zcela odlišná od kvadratické užitkové funkce nebo např. rozdělení výnosů je odlišné od normálního. Uvedeme tedy ještě výsledky pro Taylorův polynom čtvrtého stupně. Samozřejmě lze použít i rozvoje vyšších stupňů, dle numerických studií však přesnost výsledků již není podstatným způsobem vyšší. Taylorův polynom čtvrtého stupně je schopen zachytit špičatost a šikmost výnosů a jejich vliv na ostatní investorovy parametry.

$$\begin{aligned}
J_{t+1} (W_t (R_t^{e\top} x_t + R_f), Z_{t+1}) &\approx J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) \\
&+ \partial_1 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (W_t x_t^\top R_{t+1}^{e\top}) \\
&+ \frac{1}{2} \partial_1^2 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (W_t x_t^\top R_{t+1}^{e\top})^2 \\
&+ \frac{1}{6} \partial_1^3 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (W_t x_t^\top R_{t+1}^{e\top})^3 \\
&+ \frac{1}{24} \partial_1^4 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (W_t x_t^\top R_{t+1}^{e\top})^4,
\end{aligned}$$

I zde předpokládáme listenci derivací v předchozím vztahu a také existenci $J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1})$. Podmínku pro maximum lze tedy zapsat v následujícím tvaru

$$\begin{aligned}
&W_t \mathbb{E}_t [\partial_1 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e] + \\
&W_t^2 \mathbb{E}_t [\partial_1^2 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e) R_{t+1}^e] + \\
&\frac{1}{2} W_t^3 \mathbb{E}_t [\partial_1^3 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e)^2 R_{t+1}^e] + \\
&\frac{1}{6} W_t^4 \mathbb{E}_t [\partial_1^4 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e)^3 R_{t+1}^e] = 0,
\end{aligned}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
x_t &\approx - \{W_t^2 \mathbb{E}_t [\partial_1^2 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^{e\top}]\}^{-1} \times \{W_t \mathbb{E}_t [\partial_1 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e] + \\
&\frac{1}{2} W_t^3 \mathbb{E}_t [\partial_1^3 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e)^2 R_{t+1}^e] \\
&+ \frac{1}{6} W_t^4 \mathbb{E}_t [\partial_1^4 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e)^3 R_{t+1}^e]\}.
\end{aligned}$$

Předchozí vztah lze opět zapsat ve zkráceném tvaru, a to následujícím způsobem

$$x_t \approx - \{W_t \mathbb{E}_t [B_{t+1}]\}^{-1} \times \mathbb{E}_t [A_{t+1}] + \frac{W_t^2}{2} \mathbb{E}_t [C_{t+1} (x_t)] + \frac{W_t^3}{6} \mathbb{E}_t [D_{t+1} (x_t)], \quad (54)$$

kde opět

$$\begin{aligned}
A_{t+1} &= \partial_1 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e, \\
B_{t+1} &= \partial_1 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e
\end{aligned}$$

a oproti rozvoji pomocí Taylorova polynomu druhého řádu dostáváme navíc

$$\begin{aligned} C_{t+1}(x_t) &= \partial_1^3 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e)^2 R_{t+1}^e, \\ D_{t+1}(x_t) &= \partial_1^4 J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) (x_t^\top R_{t+1}^e)^3 R_{t+1}^e. \end{aligned}$$

Vztah (54) je vyjádřen v implicitním tvaru. Je tedy nejdříve získat odhad pomocí (53). Pro získání výsledku (54) použijeme tento odhad a úlohu řešíme iteračně.

5.2 Krok 2

Nyní je potřeba simulovat M nezávislých vektorů $(R_s^e, Z_s)_{s=1}^T$, např. pomocí modelů VAR. Samozřejmě k simulaci těchto M nezávislých vektorů lze aplikovat i mnoho jiných metod. Číslo M je nutné volit poměrně vysoké.

5.3 Krok 3

Budeme nyní rekurzivně počítat optimální váhy portfolia pro každý čas t a simulaci m . Předpokládejme, že optimální portfolio bylo již v časech $s = t + 1, \dots, T - 1$ vypočítáno. Toto optimální portfolio označme jako \hat{x}_s . Hodnotu bohatství v čase T lze vyjádřit jako

$$\hat{W}_T = W_{t+1} \prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f). \quad (55)$$

Vztah (55) je pak možné přepsat jako

$$\hat{W}_T = W_t R_f \prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f). \quad (56)$$

Ve vztahu (56) jsme za W_{t+1} dosadili $W_t R_f$, neboť přesně okolo tohoto členu jsme rozvíjeli Taylorův polynom v kroku 1. Předpokládejme, že v první periodě se bohatství zúročí pomocí R_f a dále je tento úrok dán pomocí x_s^* , tedy

$$\begin{aligned} J_{t+1}(W_{t+1}, Z_{t+1}) &= J_{t+1}(W_t R_f, Z_{t+1}) \\ &= \mathbb{E}_{t+1} \left[U \left(W_t R_f \prod_{s=t+1}^{T-1} (x_s^{*\top} R_{s+1}^e + R_f) \right) \right]. \end{aligned}$$

Dle kroku 1 platí

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t [A_{t+1}] &= \mathbb{E}_t [\partial_1 J_{t+1} (W_t R_f, Z_{t+1}) R_{t+1}^e] \\
&= \mathbb{E}_t \left[\mathbb{E}_{t+1} \left[\partial_1 U \left(W_t R_f \prod_{s=t+1}^{T-1} (x_s^{*\top} R_{s+1}^e + R_f) \right) \prod_{s=t+1}^{T-1} (x_s^{*\top} R_{s+1}^e + R_f) R_{t+1}^e \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_t \left[\partial_1 U \left(\hat{W}_T \right) \prod_{s=t+1}^{T-1} (x_s^{*\top} R_{s+1}^e + R_f) R_{t+1}^e \right].
\end{aligned}$$

Obdobně

$$\mathbb{E}_t [B_{t+1}] = \mathbb{E}_t \left[\partial^2 U \left(\hat{W}_T \right) \left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (x_s^{*\top} R_{s+1}^e + R_f) \right)^2 R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top} \right].$$

Nyní stačí předchozí vztahy dosadit do (53). Pomocí tohoto vztahu vypočítáme optimální portfolio pro každý čas t a každý nasimulovaný vektor m . Máme tedy M realizací vektoru A_{t+1} a matice B_{t+1} . Dále nechť

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & Z_t^1 & (Z_t^1)^2 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & Z_t^M & (Z_t^M)^2 \end{pmatrix}$$

je matice všech realizací stavové proměnné Z_t . Kvůli jednoduchosti přístupu byl jako báze byl použit kvadratický polynom. Toto lze použít, pokud uvažujeme pouze jednu stavovou proměnnou. V případě více stavových proměnných, např. dvou, je potřeba do matice X_t zařadit např. i vzájemné součiny jednotlivých stavových proměnných. Nyní popíšeme podstatu tohoto kroku. Předpokládejme vztah ve tvaru

$$y_{t+1}^m = X_t^m \beta + \varepsilon^m, \tag{57}$$

kde X_t^m je m -tý řádek matice X_t , ε^m jsou stejně rozdělené, vzájemně nezávislé veličiny a y_{t+1} jsou jednotlivé prvky A_{t+1} a B_{t+1} . Cílem je odhad β . Pro získání $\mathbb{E}_t [A_{t+1}]$ je potřeba regresi popsanou vztahem (57) řešit n krát a pro $\mathbb{E}_t [B_{t+1}]$ pak n^2 krát. Celkově pak dostaneme pro jednotlivé simulace m vztah

$$\hat{x}_t^m = - \left(\hat{B}_{t+1|t}^m W_t^m \right)^{-1} \hat{A}_{t+1|t}^m,$$

kde $\hat{A}_{t+1|t}^m$ je odhad $\mathbb{E}_t [A_{t+1}]$ a $\hat{B}_{t+1|t}^m$ je odhad $\mathbb{E}_t [B_{t+1}]$ pro jednotlivé simulace m .

6 Numerická studie

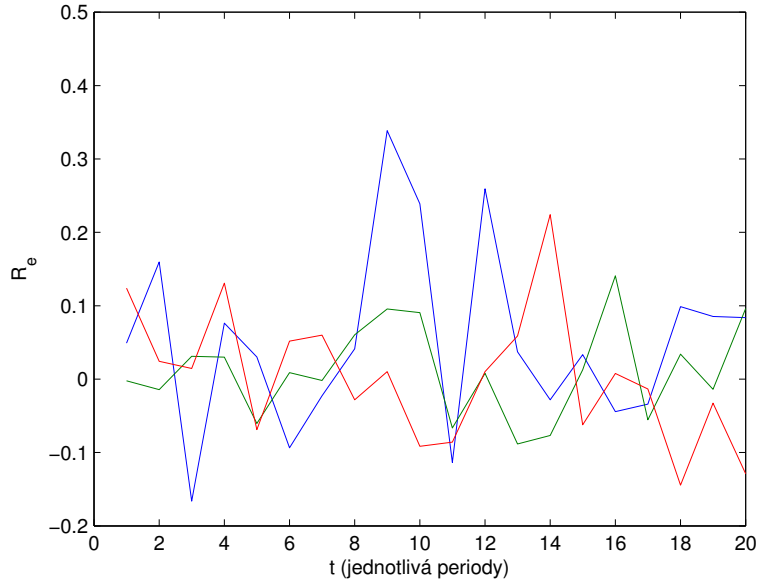
V této části práce se budeme zabývat numerickou studií pro výpočet optimálního portfolia a jeho postupné obměny v čase pomocí metody simulací popsané v předchozí sekci. Použijeme stejná data jako v [7]. Budeme tedy uvažovat pouze jedno rizikové a jedno bezrizikové aktivum. Výpočty provedeme nejprve pro investora s konstantním parametrem relativní rizikové averze a poté i pro investora s konstantním parametrem absolutní rizikové averze. Výpočty jsou provedeny v programu Matlab R2012a za pomoci funkcí uvedených v apendixu.

6.1 Data

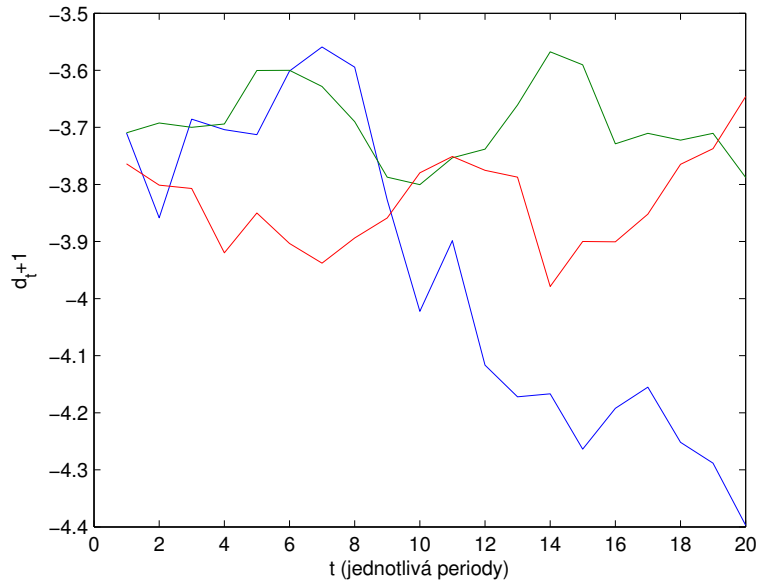
Pro potřeby této studie použijeme stejná data jako Brandt a kol. uvedené v [7]. To znamená, že budeme čtvrtletně po dobu pěti let budeme generovat data následujícím způsobem pomocí VAR(1) modelu

$$\begin{bmatrix} r_{t+1}^e \\ d_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.227 \\ -0.155 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.060 \\ 0.958 \end{bmatrix} d_t + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+1} \\ \varepsilon_{2,t+2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t+1} \\ \varepsilon_{2,t+2} \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.06 & -0.0051 \\ -0.0051 & 0.0049 \end{bmatrix} \right).$$

r_t^e je tzv. logaritmický nadvýnos a d_t je logaritmický dividendový výnos daného indexu. Tento model je kalibrován za pomoci CRSP indexu (Centre for Research of Security Prices), a to od ledna 1986 do prosince 1995. Zároveň R_t^e , který budeme potřebovat pro výpočty, obdržíme dle vztahu $R_t^e = R_f (e^{r_t^e} - 1)$. Dále předpokládejme, že bezrizikové aktivum ročně vynáší 5%, z čehož vyplývá $R_f = 1.05^{0.25}$. V tomto případě je d_t jediná stavová proměnná Z_t . Zároveň předpokládejme, že d_t je stacionární proces, a tedy musí platit $d_0 = \frac{-0.155}{1-0.958}$. Dle VAR(1) modelu budeme generovat 10000 simulací. Pro ilustraci nyní v následující grafech ukážeme postupně tři simulace r_{t+1}^e a d_{t+1} . V tomto případě je d_{t+1} jediná uvažovaná stavová proměnná Z_t . Povšimněme si negativních korelací. V praxi to znamená, že vzrůstající výnos většinou znamená pokles dividendového výnosu a následně zhoršení podmínek pro investora v budoucnosti.



Obrázek 1: Vývoj tří simulací r_t^e v čase.



Obrázek 2: Vývoj tří simulací d_{t+1} v čase.

Dle barevného značení jednotlivých křivek v předchozích dvou grafech je jasné patrné, která trajektorie nadvýnosů r_t^e odpovídá které trajektorii dividendového výnosu d_{t+1} .

6.2 Investor s konstantním parametrem relativní rizikové averze

Nejprve uvedeme příklad pro investora s konstantním parametrem relativní rizikové averze. Je dobré si uvědomit, že zde investor neřeší pouze nejistotu ohledně budoucí úrokové míry. Zároveň si také není jist, jaký bude budoucí dividendový výnos. Hodnota budoucího dividendového výnosu totiž zcela zásadním způsobem ovlivní investorovy investice. Váhy portfolia budeme počítat pomocí funkce `Portf_CRAA`, která je uvedena v appendixu této práce.

Předpokládejme nyní investora s mocninnou užitkovou funkcí, tj.

$$U(W) = \frac{W^{1-\gamma}}{1-\gamma}.$$

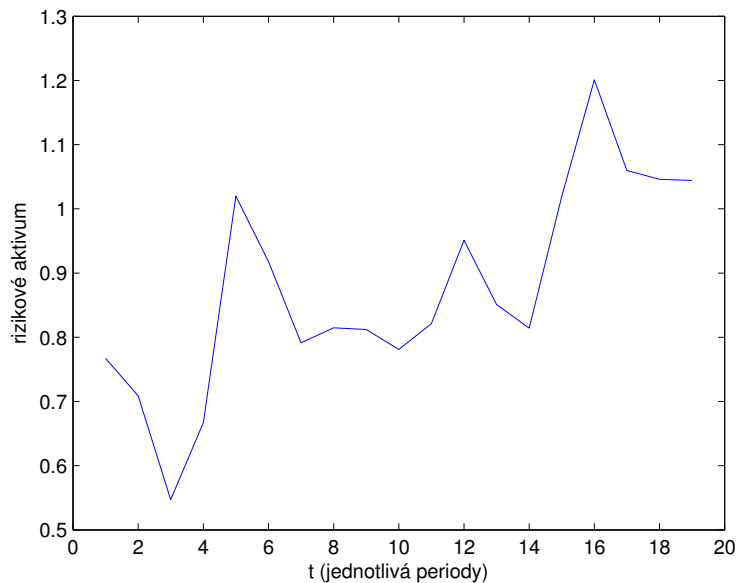
Dále

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t[A_{t+1}] &= \frac{1}{(W_t R_f)^\gamma} \mathbb{E}_t \left[\left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right)^{1-\gamma} R_{t+1}^e \right] \\ \mathbb{E}_t[B_{t+1}] &= -\gamma \frac{1}{(W_t R_f)^{1+\gamma}} \mathbb{E}_t \left[\left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right) R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top} \right].\end{aligned}$$

V tomto případě má vztah (53) tvar

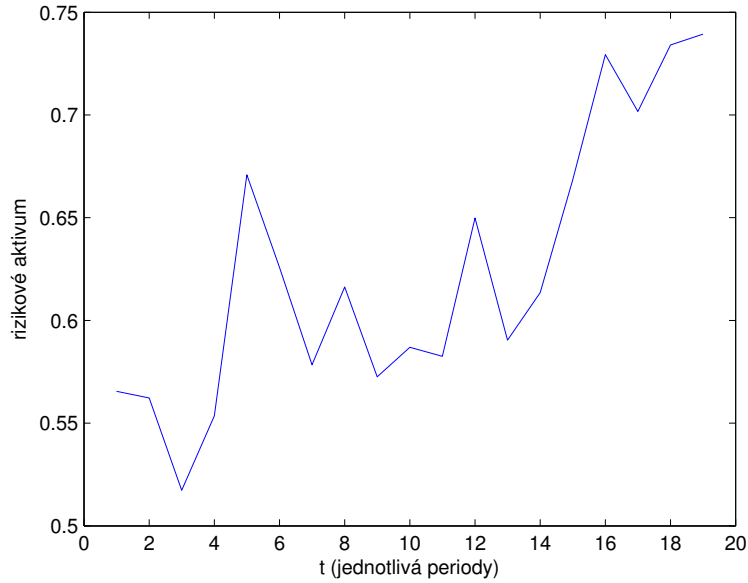
$$\begin{aligned}x_t &\approx \frac{R_f}{\gamma} \left\{ \mathbb{E}_t \left[\left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right)^{1-\gamma} R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top} \right] \right\}^{-1} \\ &\quad \times \mathbb{E}_t \left[\left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right)^{1-\gamma} R_{t+1}^e \right].\end{aligned}$$

Použijeme nyní algoritmus popsany v sekci (5). Pomocí tohoto algoritmu vykreslíme křivku proporce rizikového aktiva během časového horizontu.



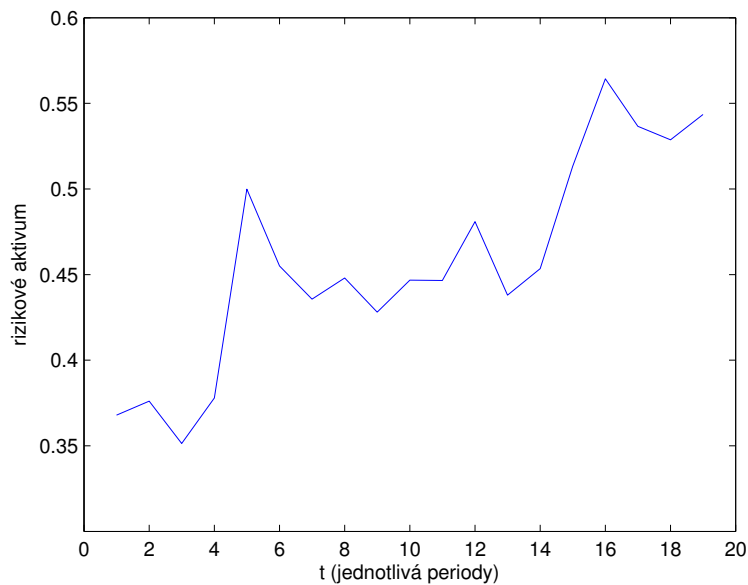
Obrázek 3: Proporce rizikového aktiva v čase pro investora s mocninnou užítkovou funkcí a parametrem rizikové averze $\gamma = 2$.

Předchozí graf ukazuje, že investor pro některé periody chce investovat do rizikového aktiva více než jedno své bohatství. Jedná se o tzv. prodej na krátko. Často různé regulace tyto prodeje na krátko zakazují. Zákaz prodejů na krátko provedeme snadno, neboť se jedná o speciální případ omezení investic do jednotlivých aktiv, která jsou podrobněji rozebrána v sekci (2.4). Následující graf tedy opakuje předchozí případ při zakázání prodejů na krátko. Zákaz prodejů nakrátko jsme provedli již během jednotlivých iterací.



Obrázek 4: Proporce rizikového aktiva v čase pro investora s mocninnou užítkovou funkcí a parametrem rizikové averze $\gamma = 2$ při zakázání prodejů nakrátko.

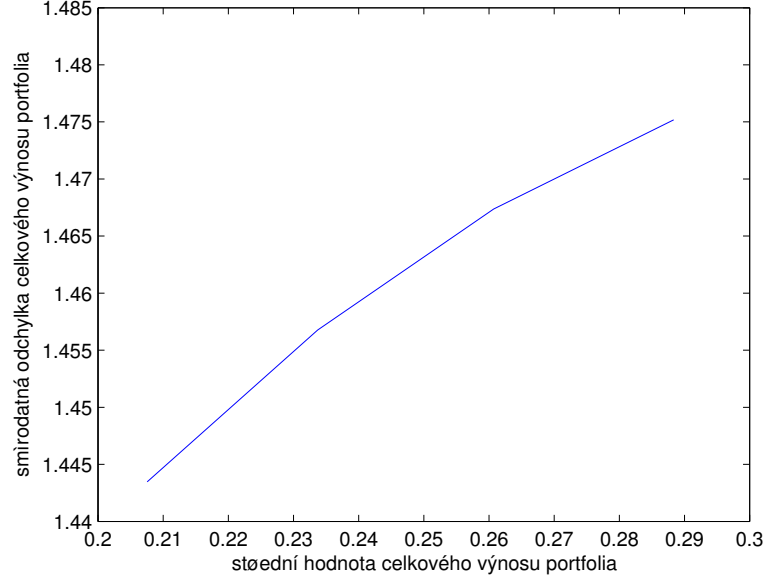
Nyní se pokusíme zvýšit parametr rizikové averze na hodnotu $\gamma = 5$.



Obrázek 5: Proporce rizikového aktiva v čase pro investora s mocninnou užítkovou funkcí a parametrem rizikové averze $\gamma = 5$ při zakázání prodejů nakrátko.

Předchozí graf ukazuje, že se zvyšujícím se parametrem rizikové averze klesá investorova chuť investovat do rizikového aktiva. Nyní je čas povšimnout si vztahu mezi portfoliem, které si investor zvolil, a časovým horizontem, který má k dispozici.

Z předchozích grafů je patrné, že investor s delším časovým horizontem je ochoten do rizikového aktiva investovat větší část svého bohatství. Nyní pro ilustraci ještě vykreslíme investorovu eficientní hranici pro $\gamma = 1, \dots, 4$.



Obrázek 6: Eficientní hranice pro investora s mocninovou užítkovou funkcí

6.3 Investor s konstantním parametrem absolutní rizikové averze

Opět nejprve uvedeme příklad pro investora s konstantním parametrem absolutní rizikové averze. Váhy portfolia budeme počítat pomocí funkce `Portf_CARA`, která je opět uvedena v apendixu této práce. Tato sekce bere v úvahu problém, kdy řešení vícestupňového modelu portfolia nelze nalézt pomocí opakovaně řešených statických problémů. Předpokládejme nyní investora s mocninovou užítkovou funkcí, tj.

$$U(W) = -e^{-\gamma W}$$

Dále

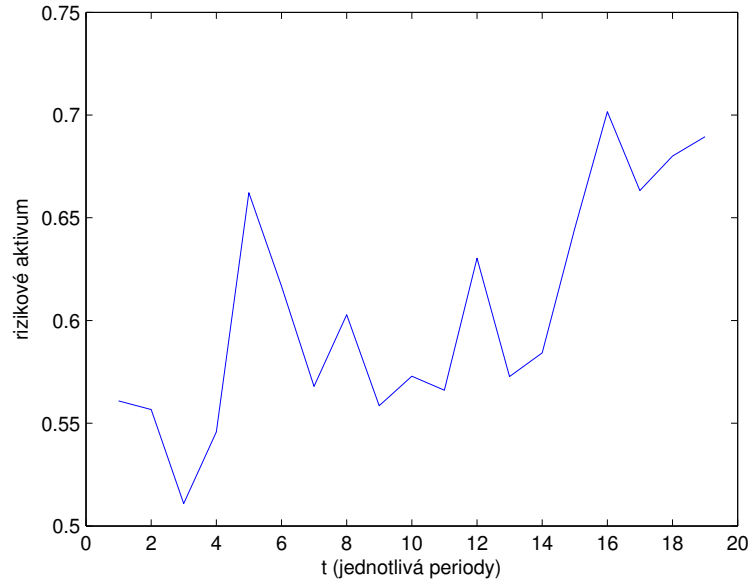
$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[A_{t+1}] &= \gamma \mathbb{E}_t \left[e^{-\gamma \left(W_t R_f \left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right)_{t+1} \right)} \left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right) R_{t+1}^e \right] \\ \mathbb{E}_t[B_{t+1}] &= -\gamma^2 \mathbb{E}_t \left[e^{-\gamma \left(W_t R_f \left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right)_{t+1} \right)} \left(\prod_{s=t+1}^{T-1} (\hat{x}_s^\top R_{s+1}^e + R_f) \right)^2 R_{t+1}^e R_{t+1}^{e\top} \right]. \end{aligned}$$

V tomto případě je třeba pro W_t sestavit aproximaci, podobně jako bylo uvedeno

v sekci (4.1). V čase t má mřížka tvar

$$W_1 R_f^{t-1} (1 - i)^{t-1}, W_1 R_f^{t-1} (1 - i + inc)^{t-1}, \dots, W_1 R_f^{t-1} (1 + i)^{t-1}.$$

Další postup lze nahlédnout přímo ve funkci `Portf_CARA` v appendixu této práce. Pro tento případ dostáváme následující graf, kde jsme zvolili $\gamma = 2$, $W_1 = 1$, $i = 0.01$ a $inc = 0.01$.



Obrázek 7: Proporce rizikového aktiva v čase pro investora s exponenciální užitkovou funkcí

Obdobně jako v případě investora s konstantním parametrem relativní rizikové averze, trajektorie proporce rizikového aktiva bude nabývat menších hodnot se zvyšujícím se parametrem rizikové averze γ .

Závěr

Na tomto místě zrekapitulujeme nejdůležitější body této práce. Cílem práce bylo zabývat se metodami dynamického programování, které slouží k hledání optimální obchodní strategie, sestavení optimálního portfolia a navržení optimální strategie jeho postupné obměny.

Text práce je poměrně ucelený teoretický i praktický výklad teorie portfolia, která je nahlížena z hlediska dynamického programování. Je dobře vysvětlen přechod od statických teorie portfolia k víceúrovňovým modelům a také, jak lze v některých případech využít statický model k řešení víceúrovňových modelů. Nejenže se práce zabývá mnoha problémy, kdy lze nalézt analytické řešení. Není zapomenuto ani na případy, kdy se nelze vyhnout aplikaci nejrůznějších numerických metod. Dále je např. rozpracován problém víceúrovňových modelů portfolia při zahrnutí průběžné spotřeby.

Na konci práce je uvedena numerická studie, která ukazuje pomocí metody simulací umožňuje řešit problém postupné obměny portfolia. Tato studie je zpracována pro investora s konstantním parametrem relativní i absolutní rizikové averze.

Víceúrovňové modely teorie portfolia řešené pomocí metod dynamického programování mají před sebou určitě velkou budoucnost. Toto bude umožněno s vzrůstající výpočetní schopností počítačových technologií. Schopnost nalezení optimální strategie postupné obměny portfolia jistě je a bude velice atraktivní.

Seznam použité literatury

- [1] Bansal R., Dahlquist M., Harvey C.R., Dynamic Trading Strategies and Portfolio Choice, A Research Report from Stockholm Institute for Financial Research, (2004).
- [2] Barberis N., Investing for the Long Run when Returns Are Predictable, The Journal of Finance, Vol. Lv, No. 1, (2000).
- [3] Bertocchi M., Consigli G., Dempster M. A. H, Stochastic Optimization Methods in Finance and Energy - New Financial Products and Energy Market Strategies, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, ISSN 0884-8289, (2011).
- [4] Betserkas D.P., Dynamic Programming and Optimal Control, Volume I, Third Edition, Athena scientific, ISBN 1-8865529-26-4, (2005).
- [5] Bodnar T., Parolya N., Schmid W., A Closed-Form Solution of the Multi-Period Portfolio Choice Problem for a Quadratic Utility Function, Department of Statistics, European University Viadrina, (2012).
- [6] Brandt M. W., Portfolio Choice Problems, Fuqua School of Business, Duke University and NBER, (2004).
- [7] Brandt M. W., Goyal A., Santa-Clara P., Stroud J. R., A Simulation Approach to Dynamic Portfolio Choice with an Application to Learning about Return Predictability, Fuqua School of Business, Duke University and NBER, Oxford University Press, (2005).
- [8] Brandt M. W., Binsbergen J. H., Solving dynamic portfolio choice problems by recursing on optimized portfolio weights or on the value function?, Springer Science+Business Media B.V., (2006).
- [9] Cai Y., Dynamic Programming and its Application in Economics and Finance, Stanford University, PhD Thesis, (2009).
- [10] Campbell J. Y., Viceira L. M., Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors, (2001).
- [11] Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay A. C., The Econometrics of Financial Markets, Princeton University Press, ISBN-10: 0691043019, (1996).

- [12] Calafiore G. C., Multi-period portfolio optimization with linear control policies, *Automatica* 44, Dipartimento di Automatica e Informatica, (2008).
- [13] Cornuejols G., Tütüncü R., *Optimization Methods in Finance*, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, (2005).
- [14] Dempster M. A. H., Thompson G. W. P., *Dynamic Portfolio Replication Using Stochastic Programming*, RiskLab Cambridge, Centre for Financial Research, (2001).
- [15] Dempster M. A. H., Madan D. B., Cont R., *Quantitative Fund Management*, Taylor & Francis Group, LLC, ISBN 13: 978-1-4200-8191-6, (2009).
- [16] Duffie D., *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press, 3rd edition, ISBN 0-691-09022-X, (2001).
- [17] Dupačová J., *Portfolio optimization via stochastic programming: Methods of output analysis*, *Mathematical Methods of Operations Research*, Springer-Verlag, (1999).
- [18] Dupačová J., Hurt J., Štěpán J., *Stochastic Modeling in Economics and Finance*, Kluwer Academic Publishers, ISBN: 1-4020-0840, (2003).
- [19] Föllmer, H., Schied, A. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.*, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, ISBN: 3-11-018346-3, (2006).
- [20] Gibson R., *Selected Topics in Asset Pricing and Portfolio Management - Teaching Notes*, University of Geneva, (2013).
- [21] Gutkowska A. B., *Essays on the Dynamic Portfolio Choice*, Erasmus University Rotterdam, Diploma Thesis, (2006).
- [22] Haugh M. B., Kogan L., Wu Z., *Portfolio Optimization with Position Constraints: an Approximate Dynamic Programming Approach*
- [23] Infanger G., *Dynamic Asset Allocation Strategies Using a Stochastic Dynamic Programming Approach*, Stanford University.
- [24] Ingersoll, J. E. Jr., *Theory of Financial Decision Making*, Yale University, Rowman & Littlefield Publishers, ISBN-10: 0847673596, (1987).

- [25] Kogan L., Examples of Dynamic Programming Problems, M.I.T. Sloan School of Management, Lecture Notes, (2010).
- [26] Markowitz H. M., Todd G. P., Sharpe W. F., Mean - Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets.
- [27] Milne F., Finance Theory and Asset Pricing, Vienna Institute for Advanced Studies, Oxford University Press, 2 edition, ISBN-10: 0199261075, (2013).
- [28] Nijssen J. M., Dynamic Portfolio Choice - A Simulation Approach with an Application to Multiple Assets, Diploma Thesis, (2010).
- [29] Pennacchi G., Theory of Asset Pricing, Prentice Hall, 1 edition, ISBN-10: 032112720X , (2007).
- [30] Pliska S. R., Introduction to Mathematical Finance - Discrete Time Models, Blackwell Publishers Inc, ISBN 1-55786-945-6, (1997).
- [31] Quek G., Atkinson C., Dynamic Portfolio Optimization in Discrete-Time with Transaction Costs, Applied Mathematical Finance, Vol. 19, No. 3, (2012).
- [32] Runggaldier W. J., Portfolio Optimization in discrete time, Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Universita di Padova, Padova.
- [33] Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A., Lectures on Stochastic Programming - Modelling and Theory, Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society, (2009).
- [34] Shreve S., Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model , Springer; 2004 edition (July 29, 2005), ISBN-10: 0387249680.
- [35] Wang A. C., Approximate Value Iteration Approaches to Constrained Dynamic Portfolio Problems, Massachusetts Institute of Technology, PhD Thesis, (2004).
- [36] Yu L-Y., Ji X-D., Wang S-Y., Stochastic Programming Models in Financial Optimization: A Survey, AMO - Advanced Modeling and Optimization, Volume 5, Number 1, (2003).
- [37] Ziemba W. T., Arrow K. J. Constantinides G. C., Markowitz H. M., Merton R. C., Myers S. C., Samuelson P.A., Sharpe W. F., Handbook of Asset and liability Management volume 1: Theory and Methodology, Elsevier B.V., ISBN-10: 0-444-50875-9, (2006).

- [38] Ziemba W. T, Arrow K. J. Constantinides G. C., Markowitz H. M., Merton R. C., Myers S. C., Samuelson P.A., Sharpe W. F., Handbook of Asset and liability Management volume 2: Applications and Case Studies, Elsevier B.V., ISBN: 978-0-444-52802-5 (2007).

Appendix

```

function vahy = Portf_CRAA(R_e, z, gamma, r_f)
% Vypocet optimální vahy portfolia pro investora s
% konstantním parametrem relativní rizikové averze
% pomocí BGSS metody s taylorovým polynomem 2. st.
% R_e – M simulaci
% Z – M simulaci
% gamma – parametr rizikové averze
% r_f – bezrizikový vynos

[M,T] = size(R_e);
x = zeros(M,T-1);

t=T-1;
X = [ones(M,1), z(:,t), z(:,t).^2];
a = robustfit(X, R_e(:,t+1), 'huber', 1.345);
a = a(2:end);
aodh = X*a;
b = robustfit(X, R_e(:,t+1).^2, 'huber', 1.345);
b = b(2:end);
bodh = X*b;
x(:,t) = r_f/gamma * aodh./bodh;
x(:,t) = max(0, min(x(:,t), 1)); % zákaz prodeje na kratko

for t=T-2:-1:1
X = [ones(M,1), z(:,t), z(:,t).^2];
c = prod(x(:,t+1:T-1).*R_e(:,t+2:T)+r_f,2).^(1-gamma);
a = robustfit(X, R_e(:,t+1).*c, 'huber', 1.345);
a = a(2:end); aodh = X*a;

```



```

b = robustfit(X, R_e(:,t+1).^2.*c, 'huber', 1.345);
b = b(2:end);
bodh = X*b;
x(:,t) = r_f/gamma * aodh./bodh;
x(:,t) = max(0, min(x(:,t), 1)); % zákaz prodeje na kratko
end

vahy = x;
end

function vahy = Portf_CARA(R_e, z, gamma, r_f, W_1, i, inc);
% Vypocet optimalni vahy portfolia pro investora s
% konstantnim parametrem absolutni rizikove averze
% R_e - M simulaci
% Z - M simulaci
% gamma - parametr rizikove averze
% r_f - bezrizikovy vynos
% W_1 - pocatecni hodnota bohatstvi
% i, inc - parametry pro aproximaci mrizky

[M,T] = size(R_e);

mrizka=zeros(T-1, 2*i/inc+1);
mr = W_1*((r_f*(1-i)):inc:(r_f*(1+i)));
for t=1:T-1
mrizka(t,:)=(mr.^(t-1));
end

x = zeros(M,T-1,2*i/inc+1);
c = zeros(M,T-1,2*i/inc+1);

t=T-1;
X = [ones(M,1), z(:,t), z(:,t).^2];
a = robustfit(X, R_e(:,t+1), 'huber', 1.345);
a = a(2:end);
aodh = X*a;

```

```

b = robustfit(X, R_e(:, t+1).^2, 'huber', 1.345);
b = b(2:end);
bodh = X*b;
for j = 1:(2*i/inc+1)
x(:, t, j) = 1./(gamma*mrizka(t, j)).*aodh./bodh;
x(:, t, j) = max(0, min(x(:, t, j), 1)); % zakaz prodeju na kratko
end

for j=1:(2*i/inc+1)
c(:, t, j) = (x(:, t, j).*R_e(:, t+1)+r_f);
end

for t=T-2:-1:1
X = [ones(M, 1), z(:, t), z(:, t).^2];
mr_f_r = mrizka(t, :).*r_f;
codh = (interp1(mrizka(t+1, :)', squeeze(c(:, t+1, :))', mr_f_r'))';
for j=1:(2*i/inc+1)
a = robustfit(X, exp(-gamma*mrizka(t, j))*...
codh(:, j)).*R_e(:, t+1).*codh(:, j), 'huber', 1.345);
a = a(2:end);
aodh = X*a;
b = robustfit(X, exp(-gamma*mrizka(t, j))*...
codh(:, j)).*R_e(:, t+1).^2.*(codh(:, j).^2), 'huber', 1.345);
b = b(2:end);
bodh = X*b; x(:, t, j) = 1/(gamma*mrizka(t, j)) * aodh./bodh;
x(:, t, j) = max(0, min(x(:, t, j), 1)); % zakaz prodeju na kratko
end
for j=1:(2*i/inc+1)
c(:, t, j)=codh(:, j).*(x(:, t, j).*R_e(:, t+1)+r_f);
end
end
vahy = x;

```