Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alica Lapšanská

Úlohy vícestupňového stochastického programování - dekompozice

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce:	RNDr. Vlasta Kaňková, CSc.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2014

Na tomto mieste by som chcela poďakovať všetkým, ktorí mi počas písania práce boli oporou. Hlavne ďakujem vedúcej mojej diplomovej práce RNDr. Vlaste Kaňkovej, CSc. za vedenie a pomoc pri jej vypracovaní.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 5.12.2014 Alica Lapšanská

Název práce: Úlohy vícestupňového stochastického programování - dekompozice

Autor: Alica Lapšanská

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc., pracoviště Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd ČR

Abstrakt: V práci je představena úloha vícestupňového stochastického programování a její aplikace na několik praktických problémů. Detailněji je rozebírán případ, kdy má náhodný prvek autoregresní vlastnost a množiny omezení jsou ve tvaru individuálních pravděpodobnostních omezení. Pro tyto úlohy jsou uvedeny podmínky, které musí dobře definovaný problém splňovat. Dále je řešena aproximace úlohy a rychlost její konvergence při empirickém odhadu distribuční funkce. Nakonec je vyřešen problém týkající se investování do finančních instrumentů, který je definován jako úloha dvoustupňového stochastického programování s pravděpodobnostným omezením a náhodným prvkem řídícím se autoregresní posloupností.

Klíčová slova: vícestupňové stochastické programování, autoregresné posloupnosti, individuální pravděpodobnostní omezení, empirické odhady, stabilita

Title: Multistage Stochastic Programming Problems - Decomposition

Author: Alica Lapšanská

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc., Institute of Information Theory and Automation, Czech Academy of Sciences

Abstract: The thesis deals with a multistage stochastic model and its application to a number of practical problems. Special attention is devoted to the case where a random element follows an autoregressive sequence and the constraint sets correspond to the individual probability constraints. For this case conditions under which is the problem well-defined are specified. Further, the approximation of the problem and its convergence rate under the empirical estimate of the distribution function is analyzed. Finally, an example of the investment in financial instruments is solved, which is defined as a two-stage stochastic programming problem with the probability constraint and a random element following an autoregressive sequence.

Keywords: multistage stochastic programming, autoregressive sequences, individual probability constraints, empirical estimates, stability

Názov práce: Úlohy viacstupňového stochastického programovania - dekompozícia

Autor: Alica Lapšanská

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedúci diplomovej práce: RNDr. Vlasta Kaňková, CSc., pracovisko Ústav teorie informace a automatizace, Akademie věd ČR

Abstrakt: V práci je predstavená úloha viacstupňového stochastického programovania a jej aplikácia na niekoľko praktických problémov. Bližšie je rozoberaný prípad, kedy má náhodný prvok autoregresnú vlastnosť a množiny obmedzení sú v tvare individuálnych pravdepodobnostných obmedzení. Pre tieto úlohy sú uvedené podmienky, ktoré musí dobre definovaný problém spĺňať. Ďalej je riešená aproximácia úlohy a rýchlosť jej konvergencie pri empirickom odhade distribučnej funkcie. Nakoniec je vyriešený problém týkajúci sa investovania do finančných inštrumentov, ktorý je definovaný ako úloha dvojstupňového stochastického programovania s pravdepodobnostným obmedzením a náhodným prvkom riadiacim sa autoregresnou postupnosťou.

Kľúčové slová: viacstupňové stochastické programovanie, autoregresné postupnosti, individuálne pravdepodobnostné obmedzenia, empirické odhady, stabilita

Obsah

Úvod

V bežnom živote sa často stretávame s prvkom neistoty. Napríklad roľník, ktorý na jar vysádza plodiny v tom čase nevie, aké budú poveternostné podmienky a teda, akú bude mať z nich úrodu. Rovnako investor, ktorý tvorí portfólio netuší, ako sa bude vyvíjať cena jednotlivých aktív a či bude jeho portfólio výnosné alebo stratové. Podobné problémy s vyskytujúcimi sa parametrami, ktoré v čase rozhodovania nepoznáme, rieši stochastické programovanie. V tejto práci sa zaoberáme viacstupňovými problémami, ktoré majú špeciálne vlastnosti.

Prvá kapitola je úvodom do problematiky, kde definujeme jednostupňovú úlohu stochastického programovania. Na príklade farmára ukazujeme výhody stochastickej optimalizácie a jej porovnanie s deterministickou. Zavádzame pojem lineárneho stochastického programovania s kompenzáciou a na konci kapitoly nájdeme jednoduchý trojstupňový príklad finančného plánovania.

V druhej kapitole je načrtnutý proces rozhodovania a dve možné definície viacstupňovej úlohy stochastického programovania. Uvádzame obecne nelineárny, ale aj lineárny prípad, pre ktorý je definované použitie scenárového prístupu. Na štyroch príkladoch demonštrujeme aplikáciu v rôznych oblastiach praxe.

Špeciálnym prípadom viacstupňovej úlohy stochastického programovania sa zaoberá tretia kapitola. Obmedzíme sa v nej na problémy, v ktorých má náhodný prvok autoregresnú vlastnosť a zároveň majú množiny prípustných riešení tvar individuálnych pravdepodobnostných obmedzení. Použitím znalostí z viackriteriálnej optimalizácie odvodíme vlastnosti, ktoré musí dobre definovaná úloha spĺňať a nakoniec sa venujeme aproximácii riešenia viacstupňovej stochastickej úlohy pomocou empirických odhadov.

Piata kapitola popisuje konkrétny dvojstupňový stochastický problém s individuálnym pravdepodobnostným obmedzením a náhodným prvkom, ktorý má autoregresnú vlastnosť. Tento problém je vyriešený pre konkrétne hodnoty parametrov.

Posledná kapitola obsahuje definície a tvrdenia známe z matematickej analýzy a teórie pravdepodobnosti.

Kapitola 1

Modely stochastického programovania

V tejto kapitole predstavíme stochastické programovanie (SP) a prípady, v ktorých je vhodné ho použiť. Definujeme úlohu stochastického programovania a uvedieme príklad z praxe.

1.1 Úvod do SP

V matematickom modelovaní finančných, ekonomických, ekologických, dopravných a iných komplexných systémov sa často stretávame s problémami, ktoré zahrňujú neisté údaje. Tradičné deterministické optimalizačné modely sú limitované v praktickej aplikácii pretože parametre modelu (výnos aktív portfólia, vodné prítoky, budúci dopyt, zásoby,...) nie sú úplne známe v čase, keď je potrebné urobiť rozhodnutie. Cieľom stochastického programovania je presne nájsť optimálne rozhodnutie za prítomnosti náhodných dát. Využitie nájde vo finančných problémoch (napr. výber portfólia, viď príklad 1.3.1, jeho rozšírenie v príklade 2.4.1 alebo numerická štúdia v kapitole 4), hydro-termálnom riadení a energetickom plánovaní (príklad 2.4.2), problémoch plánovaného tavenia (príklad 2.4.4), výrobnom plánovaní (príklad 2.4.3), prepravných problémoch a veľa ďalších.

1.1.1 Formulácia úlohy jednostupňového SP

Obecnú úlohu stochastického programovania, ako je uvedená napríklad v článku Dupačová (1995), môžeme definovať nasledovne

$$\min \ \mathsf{E}\, f_0(x, \omega)$$

$$\begin{aligned} \text{z.p. } & \mathsf{E}\, f_i(x,\omega) \le 0,\ i = 1,\ldots,k, \\ & \mathsf{E}\, f_i(x,\omega) = 0,\ i = k+1,\ldots,k+r, \\ & x \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde

ω je náhodný parameter z priestoru náhodných elementov Ω s pravdepodobnostným rozdelením P, ktoré je definované na sigma algebre generovanej priestorom Ω, a odpovedajúcou strednou hodnotou E,

$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je daná neprázdna uzavretá množina,

$f_0 : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$, $f_i : \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^1$, $i = 1,\ldots,k+r$, sú dané funkcie.

Táto definícia za ošetrenia *kauzálnosti* (tzn. že rozhodnutia závisia len na minulých pozorovaniach) pokrýva celé spektrum modelov stochastického programovania. Typicky sa predpokladá, že pravdepodobnostné rozdelenie P je známe a nezávislé na rozhodnutí x. Túto definíciu môžeme rozšíriť na dvoj- a viacstupňový problém, ktorým sa v práci budeme ďalej zaoberať.

Zdôvodnenie a jednoduchú formuláciu stochastického programovania si ukážeme na príklade z poľnohospodárstva, ktorý nájdeme v Birge a Louveaux (1997, str. 4-20).

1.1.2 Farmárov problém

Farmár špecializujúci sa na pestovanie obilia, kukurice a cukrovej repy na 500 akroch (A) pôdy sa chce behom zimy rozhodnúť, koľko pôdy vyčlení pre jednotlivé plodiny.

Na nakŕmenie dobytku potrebuje farmár najmenej 200 ton (T) pšenice a 240 T kukurice. V prípade nedostatku môže potrebné suroviny nakúpiť od veľkoobchodníka. Prebytočné suroviny farmár predá. Predajné ceny sú 170 Kč/T pšenice a 150 Kč/T kukurice. Nákupné ceny sú o 40% vyššie kvôli veľkoobchodníkovej marži a nákladom na dopravu.

Ďalšia výnosná plodina je cukrová repa, ktorá sa predáva za 36 Kč/T. Avšak Európska komisia zaviedla kvótu na jej produkciu. Akékoľvek množstvo prevyšujúce túto kvótu môže byť predávané len za 10 Kč/T. Farmárová kvóta na budúci rok je 6000 T.

Na základe minulých skúseností farmár vie, že priemerná úroda na jeho pozemku je zhruba 2,5 T/A pšenice, 3 T/A kukurice a 20 T/A cukrovej repy. Tabuľka 1.1 zhŕňa tieto údaje a náklady na pestovanie jednotlivých plodín.

	Pšenica	Kukurica	Cukrová repa
Úroda (T/A)	2,5	3	20
Náklady na pestovanie (Kč/A)	150	230	260
Predajná cena (Kč/T)	170	150	36 (pod 6000 T)
			10 (nad 6000 T)
Nákupná cena (Kč/T)	238	210	-
Minimálny požiadavok (T)	200	240	-
Celková dostupnosť pôdy: 500 A			

Tabuľka 1.1: Dáta pre farmárov problém.

Aby sme pomohli farmárovi rozhodnúť sa, pripravíme nasledujúci model. Nech

x_1 sú akre vyhradené pre pšenicu,

x_2 sú akre vyhradené pre kukuricu,

x_3 sú akre vyhradené pre cukrovú repu,

y_1 sú tony kupovanej pšenice,

y_2 sú tony kupovanej kukurice,

w_1 sú tony predávanej pšenice,

w_2 sú tony predávanej kukurice,

w_3 sú tony predávanej cukrovej repy za priaznivú cenu,

w_4 sú tony predávanej cukrovej repy za zníženú cenu.

Problém

$$\begin{aligned}
\min \Big\{ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 + 210y_2 - 170w_1 - \\
& - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \Big\} \\
\text{z.p. } & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500, \\
& 2{,}5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200, \quad 3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240, \\
& w_3 + w_4 \leq 20x_3, \quad w_3 \leq 6000, \\
& x_1,\, x_2,\, x_3,\, y_1,\, y_2,\, w_1,\, w_2,\, w_3,\, w_4 \geq 0,
\end{aligned}$$

je úloha lineárneho programovania. Po jej vyriešení dostaneme optimálne riešenie zobrazené v tabuľke 1.2.

Pestovanie	Pšenica	Kukurica	Cukrová repa
Plocha (A)	120	80	300
Úroda (T)	300	240	6000
Predaj (T)	100	-	6000
Nákup (T)	-	-	-
Celkový zisk: 118 600 Kč			

Tabuľka 1.2: Optimálne riešenie založené na očakávanej úrode.

Toto optimálne riešenie sa dá interpetovať nasledovne. Farmár vyhradí dostatok pôdy pre cukrovú repu aby dosiahol kvótu 6000 T. Potom vyhradí dostatok pôdy pre pšenicu a kukuricu na kŕmenie dobytku. Na zvyšnej pôde zasadí pšenicu, ktorú môže predať.

Podľa farmárových skúseností je však úroda počas rôznych rokov dosť odlišná a to hlavne kvôli meniacim sa poveternostným podmienkam. Nie je teda neobvyklé, aby bola úroda o 20% až 25% nad alebo pod priemerom. Možnosťou je predpokladať koreláciu medzi úrodou rôznych plodín, teda počas jedného roku je úroda nadpriemerná, priemerná alebo podpriemerná pre všetky tri plodiny. Označme úrodu nad/podpriemernou, ak je o 20% vyššia/nižšia ako priemerná úroda z tabuľky 1.1. Pre jednoduchosť predpokladajme, že počasie a úroda nemajú príznačný vplyv na ceny.

Je optimálne rozhodnutie citlivé na zmenu úrody?

Vyriešme úlohy založené na nadpriemernej a podpriemernej úrode. Výsledky sú v tabuľkách 1.3 a 1.4.

Pestovanie	Pšenica	Kukurica	Cukrová repa
Plocha (A)	183,33	66,67	250
Úroda (T)	550	240	6000
Predaj (T)	350	-	6000
Nákup (T)	-	-	-
Celkový zisk: 167 667 Kč			

Tabuľka 1.3: Optimálne riešenie založené na nadpriemernej úrode (+20%).

Pestovanie	Pšenica	Kukurica	Cukrová repa
Plocha (A)	100	25	375
Úroda (T)	200	60	6000
Predaj (T)	-	-	6000
Nákup (T)	-	180	-
Celkový zisk: 59 950 Kč			

Tabuľka 1.4: Optimálne riešenie založené na podpriemernej úrode (−20%).

Vidíme, že výsledky sa rôznia. Optimálna plocha vyhradená pre pšenicu sa pohybuje v rozmedzí 100 − 183,33 A, pre kukuricu 25 − 80 A a pre cukrovú repu 250 − 375 A. Celkový zisk sa pohybuje od 59 950 Kč do 167 667 Kč. Veľmi nápomocná by v tomto prípade bola dlhodobá predpoveď, avšak počasie nie je možné predpovedať presne na šesť mesiacov dopredu. Farmár sa teda musí rozhodnúť bez úplnej informácie o úrode.

Hlavným problémom je tu jednoznačne produkcia cukrovej repy. Pestovaním na veľkej ploche zaručíme využitie celej predajnej kvóty, ale tiež je pravdepodobné, že budeme musieť predávať za zníženú cenu. Naopak pestovaním na malej ploche sa vyhneme predaju za zníženú cenu, ale s veľkou pravdepodobnosťou nebudeme mať dostatok úrody na zaplnenie kvóty predaja za priaznivú cenu.

Uvedomme si, že nie je možné urobiť perfektné rozhodnutie, ktoré by bolo najlepšie za všetkých okolností. Môžeme ale posúdiť výhody a nevýhody každého rozhodnutia v každej situácii. Rozhodnutia o prerozdelení pôdy (x_1, x_2, x_3) sa musia urobiť teraz, ale predaje a nákupy $(w_i,\ i = 1{,}2{,}3{,}4,\ y_j,\ j = 1{,}2)$ závisia na úrode. Očíslujme tieto rozhodnutia podľa scenára indexom $s = 1{,}2{,}3$ odpovedajúcim nadpriemernej, priemernej a podpriemernej úrode v danom poradí. Dostávame tak novú množinu premenných tvaru $w_{is},\ i = 1{,}2{,}3{,}4,\ s = 1{,}2{,}3$ a $y_{js},\ j = 1{,}2,\ s = 1{,}2{,}3$. Napríklad w_{32} reprezentuje množstvo cukrovej repy predané za priaznivú cenu, ak je úroda priemerná.

Za predpokladu, že chce farmár maximalizovať zisk z dlhodobého hľadiska, je rozumné hľadať riešenie maximalizujúce očakávaný zisk. Ak majú všetky tri scenáre rovnakú pravdepodobnosť 1/3, je farmárov problém nasledovný

$$
\begin{aligned}
\min \Big\{ & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 - \\
& - \frac{1}{3}\sum_{s=1}^{3} (170w_{1s} - 238y_{1s} + 150w_{2s} - 210y_{2s} + 36w_{3s} + 10w_{4s}) \Big\} \\
\text{z.p. } & x_1 + x_2 + x_3 \le 500, \\
& 3x_1 + y_{11} - w_{11} \ge 200,\ \ 3{,}6x_2 + y_{21} - w_{21} \ge 240,\ \ w_{31} + w_{41} \le 24x_3, \\
& 2{,}5x_1 + y_{12} - w_{12} \ge 200,\ \ 3x_2 + y_{22} - w_{22} \ge 240,\ \ w_{32} + w_{41} \le 20x_3, \\
& 2x_1 + y_{13} - w_{13} \ge 200,\ \ 2{,}4x_2 + y_{23} - w_{23} \ge 240,\ \ w_{33} + w_{41} \le 16x_3, \\
& w_{3s} \le 6000,\ s = 1, 2, 3,\ \ x, y, w \ge 0.
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Tento model stochastického programovania explicitne popisuje premenné druhofázového rozhodnutia pre všetky možné scenáre. Optimálne riešenie úlohy (1.2) je v tabuľke 1.5. V prvom riadku sú veľkosti plôch, ktoré sa musia určiť pred tým, než poznáme počasie a úrodu plodín. Toto rozhodnutie je *prvá fáza.* Ostatné riadky popisujú úrodu, predaje a nákupy v troch scenároch. Nazývajú sa *druhá fáza.* V poslednom riadku je celkový očakávaný zisk.

Optimálne riešenie môžeme chápať tak, že najvýnosnejšie rozhodnutie pridelenia plochy pre cukrovú repu je také, ktoré sa stále vyhýba predaju za zníženú cenu. A to aj v prípade, že by nejaká časť kvóty ostala nevyužitá za priemernej alebo podpriemernej úrody. Ďalej plocha vyčlenená pre kukuricu je taká, aby bol splnený požiadavok na nakŕmenie dobytku v prípade priemernej úrody. Nakoniec zvyšná plocha, dostatočne veľká na to, aby pokryla minimálne požiadavky, je vyčlenená pšenici.

Vidíme, že za neurčitosti nie je možné nájsť riešenie ideálne za každých okolností. Avšak, ak chceme maximalizovať zisky z dlhodobého hľadiska a máme neúplnú informáciu, je výhodné použiť stochastický model.

		Pšenica	Kukurica	Cukrová repa
Prvá fáza	Plocha (A)	170	80	250
Nadpriemer ($s = 1$)	Úroda (T)	510	288	6000
	Predaj (T)	310	48	6000 (p. c.)
	Nákup (T)	-	-	-
Priemer ($s = 2$)	Úroda (T)	425	240	5000
	Predaj (T)	225	-	5000 (p. c.)
	Nákup (T)	-	-	-
Podpriemer ($s = 3$)	Úroda (T)	340	192	4000
	Predaj (T)	140	-	4000 (p. c.)
	Nákup (T)	-	48	-
Celkový zisk: 108 390 Kč				

p. c. = priaznivá cena

Tabuľka 1.5: Optimálne riešenie založené na stochastickom modeli (1.2).

$\triangle$

1.2 Lineárne SP s kompenzáciou

Na príklade 1.1.2 si môžeme ukázať obecnú formuláciu (lineárneho) dvoj-fázového stochastického problému. Majme množinu rozhodnutí $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^n$, ktoré sa majú prijať bez úplnej informácie o nejakej náhodnej udalosti. Tieto rozhodnutia sú *prvo-fázové rozhodnutia* reprezentované vektorom $x \in \mathcal{X}$. V príklade o farmárovi to sú rozhodnutia o tom, koľko akrov bude pridelených každej plodine. Neskôr získame plnú informáciu $\omega \in \Omega$, kde Ω je priestor všetkých náhodných elementov, na realizáciu náhodného prvku (náhodného vektoru prvkov) a prijmeme *druho-fázové* alebo *opravné opatrenia* $y = y(x, \omega)$. V príklade farmára je náhodný vektor množina úrodnosti a opravné opatrenia sú nákupné a predajné ceny produktov.

Podľa Birge a Louveaux (1997, str. 11) je lineárna úloha stochastického programovania s kompenzáciou tvaru

$$\begin{aligned} &\min \left\{c^{\mathsf{T}} x+\mathsf{E}_\omega\, Q(x, \omega)\right\} \\ &\text{z.p. } A x=b, \\ &\qquad x \geq 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

kde $Q(x,\omega) = \min \{q^{\mathsf{T}} y : Wy = h - Vx,\ y \geq 0\}$, E_ω označuje strednú hodnotu s ohľadom na ω a pomocou $\xi = \xi(\omega)$ označme vektor tvorený zložkami q^{T}, h^{T}, V a W, z ktorých niektoré môžu byť náhodné. Za predpokladu, že W je pevné (nenáhodné), hovoríme o *úlohe SP s pevnou kompenzáciou.*

V príklade o farmárovi je náhodný element diskrétna premenná s, ktorá nadobúda tri hodnoty. Náhodná je len matica V. Druho-fázový problém môže byť pre konkrétny scenár s zapísaný ako

$$\begin{aligned} Q(x, s)=\min &\left\{238 y_1+210 y_2-170 w_1-150 w_2-36 w_3-10 w_4\right\} \\ \text{z.p. } & v_1(s) x_1+y_1-w_1 \geq 200, \\ & v_2(s) x_2+y_2-w_2 \geq 240, \\ & w_3+w_4 \leq v_3(s) x_3, \\ & w_3 \leq 6000, \\ & x,\, y,\, w \geq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

kde $v_i(s)$ zastupuje úrodu plodiny i počas scenára s, $v(s) = (v_1(s), v_2(s), v_3(s))$. Pre objasnenie vzťahu medzi obecnou formuláciou (1.3) a príkladom (1.4) si všimnime, že v (1.4) možno povedať, že náhodný vektor $\xi = v(s)$ je tvorený troma výškami úrody a môže nadobúdať tri rôzne hodnoty pre $s = 1{,}2{,}3$.

1.3 Viacstupňové SP

V prípade viacstupňového programovania teda celkové rozhodnutie $\boldsymbol{x}$ z definície (1.1) pozostáva z niekoľkých podvektorov $\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^T$, ktoré odpovedajú rozhodnutiam vo fázach $1, \ldots, T$ rozhodovacieho procesu. Tieto rozhodnutia je možné a niekedy dokonca výhodné modelovať ako náhodné funkcie. Kauzalitu môžeme zapracovať do definície funkcií f_i alebo formulovať explicitne ako ďalšie obmedzenie.

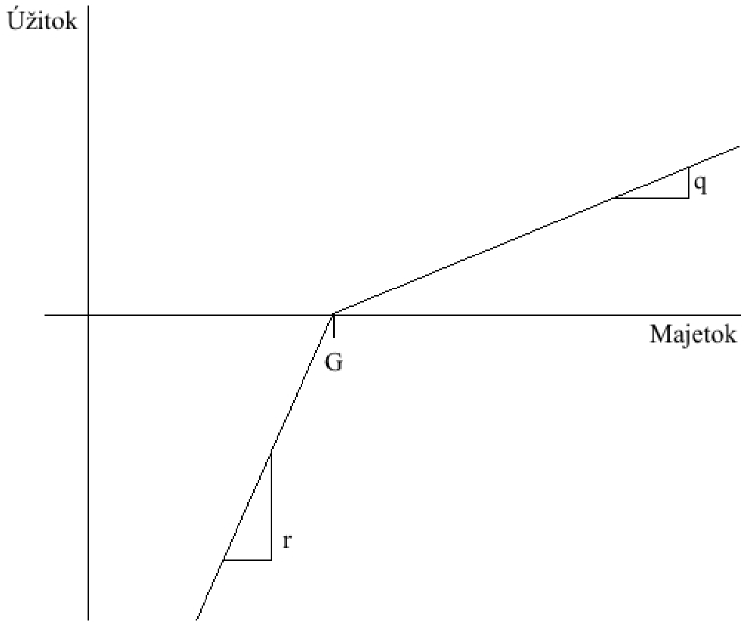
Na ilustráciu si uvedieme príklad, ktorý rieši diskrétny problém riadenia času vedúci na úlohu stochastického programovania, viď Birge a Louveaux (1997, str. 20-28).

1.3.1 Finančné plánovanie a riadenie

Pre svoje dieťa si želáme zaopatriť vysokoškolské štúdium o Y rokov odteraz. Súčasne máme b Kč na investovanie do niektorej z I investícií. Po Y rokoch by sme radi mali prostriedky presahujúce cieľ školného G Kč. Predpokladáme, že budeme môcť meniť naše investície každý v-ty rok, teda máme $T = Y/v$ investičných periód. Pre naše účely budeme ignorovať transakčné náklady a dane z príjmov, i keď reálne by ich uváženie bolo dôležité. Taktiež predpokladáme, že všetky údaje sú v korunách.

Popis matematického problému:

Predpokladajme, že prekročenie sumy G Kč po Y rokoch je ekvivalentné tomu, že naše príjmy sú vo výške $q\%$-ného prebytku, kým nesplnenie cieľu by viedlo k požičaniu si za cenu $r\%$ z chýbajúcej čiastky. To nás vedie ku konkávnej funkcii úžitku na obrázku 1.1.

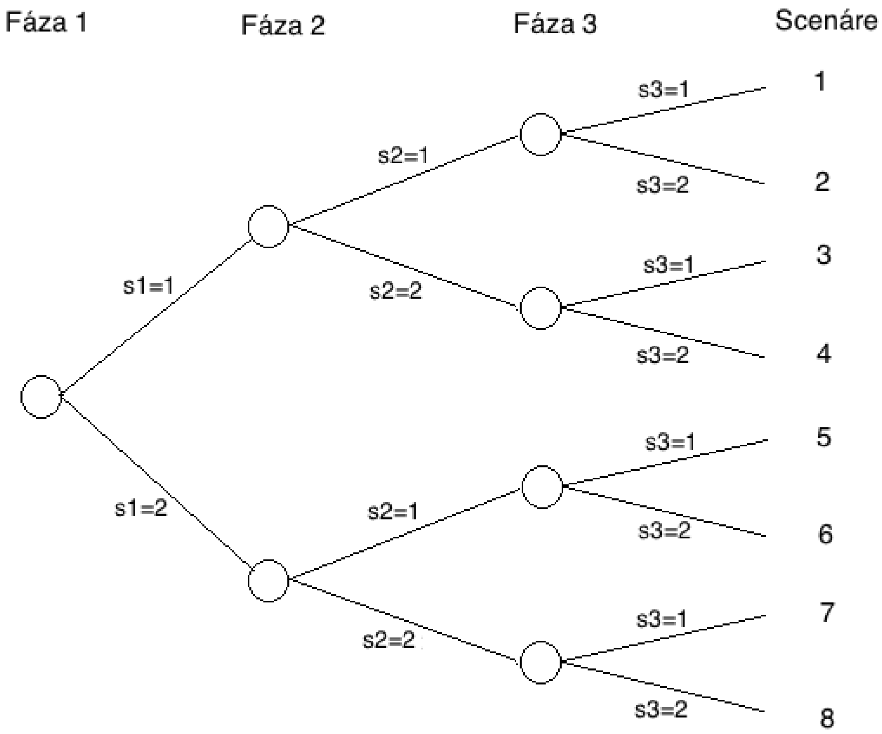


Obr. 1.1: Úžitková funkcia majetku v roku Y pre cieľ G.

Výrazná neistota v tomto modeli je výnos z každej investície i v každej periróde t. Túto náhodnosť definujeme pomocou premennej $\xi(i,t) = \xi(i,t,\omega)$, kde ω je základný náhodný element. Rozhodnutia o investíciách budú taktiež náhodné a popíšeme ich premennou $x(i,t) = x(i,t,\omega)$. Z náhodnosti výnosov a investícií je náš finálny majetok náhodná premenná.

Kľúčový bod tohto investičného modelu je nemožnosť úplne pozorovať náhodný element ω vo chvíli, keď robíme naše rozhodnutia $x(i,t,\omega)$. Pozorovateľné sú len výnosy, ktoré sa už uskutočnili. Hovoríme, že nemôžeme predpovedať všetky možné výsledky, teda naše rozhodnutia sú kauzálne (tj. nezávislé na budúcich výsledkoch). Pred prvou periodou to znamená, že musíme učiniť fixné investície $x(i,1)$ pre všetky $\omega \in \Omega$ (priestor všetkých náhodných elementov), ktoré prípadne nastanú.

Jednoduchý príklad:



Obr. 1.2: Strom scenárov pre tri periódy.

Na začiatok sa obmedzme na dve možné investície $I = 2$, do akcií ($i = 1$) a do dlhopisov ($i = 2$). Zvoľme dobu investície $Y = 9$ s možnosťou zmeny každé 3 roky, tj. $v = 3$ a $T = 3$. Predpokladajme, že počas troch rozhodovacích períód môže nastať osem scenárov. Tie odpovedajú dvom nezávislým rovnako pravdepodobným variantám výnosov za trojročnú periódu:

(1) 1,25 z akcií a 1,14 z dlhopisov,

(2) 1,06 z akcií a 1,12 z dlhopisov.

Jednotlivé scenáre označne $s = 1, \ldots, 8$. Každý scenár s má priradenú pravdepodobnosť $p(s) = 0{,}125$. Výnosy sú

$$\begin{aligned}\xi(1,t,s) = 1{,}25,\ \xi(2,t,s) = 1{,}14, \text{ pre } \ & t = 1,\ s = 1,2,3,4,\\ & t = 2,\ s = 1,2,5,6,\\ & t = 3,\ s = 1,3,5,7,\\ \xi(1,t,s) = 1{,}06,\ \xi(2,t,s) = 1{,}12, \text{ inak.} &\end{aligned}$$

Na každý scenár sa môžeme odkázať pomocou histórie výnosov, označme s_t pre fázy $t = 1,2,3$, $s = (s_1,s_2,s_3)$. Napríklad scenár 1 je reprezentovaný vektorom $(1,1,1)$, ako môžeme vidieť na grafe 1.2, kde sú zobrazené všetky scenáre.

Pre každý uzol danej stromovej štruktúry potrebujeme určiť rozhodnutie. Rozhodnutia vo fáze $t = 1$ označme $x(1,1)$ ako množstvo investované do akcií a $x(2,1)$ množstvo investované do dlhopisov. Vo fáze $t = 2$ máme rozhodnutia $x(i,2,s_1)$, kde $i = 1,2$ je typ inštrumentu, do ktorého investujeme a $s_1 = 1,2$ je výnos v prvej fáze. Podobne vo fáze $t = 3$ máme rozhodnutia $x(i,3,s_1,s_2)$.

Pre túto definíciu rozhodovacích premenných a konkávnu po častiach lineárnu úžitkovú funkciu z obrázku 1.1 definujeme nedostatkové a prebytkové premenné, $w(s_1,s_2,s_3)$ a $y(s_1,s_2,s_3)$, a môžeme zostaviť lineárny model, kde hľadáme

$$\max \sum_{s_T} \cdots \sum_{s_1} p(s_1, \ldots, s_T)\big(qy(s_1, \ldots, s_T) - rw(s_1, \ldots, s_T)\big).$$

Obmedzenie v prvej fáze vyžaduje investovať počiatočnú čiastku $\sum_i x(i,1) = b$. Obmedzenia pre fázy $t = 2, \ldots, T$ sú pre $\forall s_1, \ldots, s_{t-1}$

$$\sum_i \xi(i,t-1,s_1, \ldots, s_{t-1})x(i,t-1,s_1, \ldots, s_{t-2}) = \sum_i x(i,t,s_1, \ldots, s_{t-1})$$

a obmedzenia pre fázu T sú

$$\sum_i \xi(i,T,s_1, \ldots, s_T)x(i,T,s_1, \ldots, s_{T-1}) - y(s_1, \ldots, s_T) + w(s_1, \ldots, s_T) = G.$$

Ďalšie obmedzenia sú nezápornosť všetkých premenných.

Explicitný zápis a riešenie problému pre konkrétne zvolené hodnoty premenných G, q, r a b sú v Birge a Louveaux (1997, str. 23-25). Táto formulácia a tiež veľkosť stromu scenárov sa však so zvyšovaním časového horizontu T veľmi rýchlo zväčšuje a je náročná na výpočet.

V inom prístupe k tomuto problému berieme do úvahy všetky scenáre s bez popisu histórie procesu. Diskrétnu konečnú množinu náhodných elementov Ω nahradíme množinou scenárov S, ale pravdepodobnosti $p(s)$, výnosy $\xi(i,t,s)$ a investície $x(i,t,s)$ sú funkcie T-fázových scenárov, a nie iba histórie do fázy t.

Problém je, že keď rozdelíme scenáre, môžeme stratiť kauzalitu rozhodnutí, pretože teraz môžu obsahovať poznatky výsledkov až do konca horizontu. To zakážeme pridaním implicitných obmedzení do formulácie. Definujeme množiny scenárov pre každú periódu t, $S^t_{s_1,\ldots,s_{t-1}}$, pre scenáre s rovnakou množinou minulých výsledkov.

Obecná formulácia:

Obecná formulácia problému je

$$
\begin{aligned}
\max\ z = \sum_{s} & p(s)[qy(s) - rw(s)] \\
\text{z.p.}\ \sum_{i=1}^{I} & x(i,1,s) = b, \quad \forall s \in S, \\
\sum_{i=1}^{I} & \xi(i,t-1,s)x(i,t-1,s) = \sum_{i=1}^{I} x(i,t,s), \quad \forall s \in S,\ \forall t = 2,\ldots,T, \\
\sum_{i=1}^{I} & \xi(i,T,s)x(i,T,s) - y(s) + w(s) = G, \quad \forall s \in S, \\
& \left[\sum_{s' \in S^t_{J(s,t)}} p(s')\right] x(i,t,s) = \sum_{s' \in S^t_{J(s,t)}} p(s')x(i,t,s'), \\
& x(i,t,s) \geq 0,\ y(s) \geq 0, w(s) \geq 0, \\
& \qquad \forall i = 1,\ldots,I,\ \forall t = 1,\ldots,T,\ \forall s \in S,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

kde $J(s,t) = \{s_1,\ldots,s_{t-1}\}$ tak, že $s \in S^t_{s_1,\ldots,s_{t-1}}$. Kauzálne obmedzenia sú jediné, ktoré prepojujú rôzne scenáre. Bez týchto obmedzení by bol daný problém rozložený na oddelené úlohy (pre každé s) zachovávajúce štruktúru tohto problému. Matematická forma (1.5) s diskrétnym časovým prístupom k tomuto problému sa dá aplikovať na riadenie širokej škály elektrických, mechanických, chemických a ekonomických systémov.

$\triangle$

Kapitola 2

Viacstupňové stochastické programovanie

Pre definovanie (obecne nelineárnej) úlohy viacstupňového stochastického programovania existuje viacero spôsobov. V príklade 1.3.1 sme rozobrali scenárový prístup pre úlohu finančného plánovania. V tejto kapitole si predstavíme formulácie, ktoré nájdeme v Shapiro a kol. (2009, str. 63-69). Ďalšie podobné formulácie sú napríklad v knihách Prékopa (1995, str. 425-434), Birge a Louveaux (1997, str. 128-135) alebo v článkoch Dupačová (1995), Kaňková (2008) a.i.

$T-$stupňové stochastické programovanie je stochastické spracovanie dát $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_T\}$, ktorých realizácie sú trajektórie v priestore $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$[1], a spracovanie vektoru rozhodnutí $x = \{x_1, \dots, x_T\}$, ktorý je merateľnou funkciou ω. Náhodné dáta sú odhaľované postupne v čase počas T periód a naše rozhodnutia by mali byť prispôsobené tomuto procesu. Rozhodovací proces má podobu

$$\text{rozhodnutie } (x_1) \rightsquigarrow \text{pozorovanie } (\omega_1) \rightsquigarrow \text{rozhodnutie } (x_2) \rightsquigarrow \\ \cdots \rightsquigarrow \text{pozorovanie } (\omega_{T-1}) \rightsquigarrow \text{rozhodnutie } (x_T)$$

a celá postupnosť rozhodnutí a pozorovaní môže vyzerať nasledovne

$$\begin{aligned} &x_1,\ \omega_1,\ x_2(x_1,\omega_1),\ \omega_2, \dots,\ \omega_{T-1}, \\ &x_T(x_1, \dots, x_{T-1}, \omega_1, \dots, \omega_{T-1}) = x_T(x_1, \omega_1, \dots, \omega_{T-1}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

a ω_T, ak je po poslednom rozhodnutí x_T očakávaná ešte nejaká náhodná udalosť, ktorá prispieva k celkovému výsledku x.

[1]Priestor $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$ je definovaný ako Ω množina náhodných elementov, na nej definovaná sigma algebra Σ a pravdepodobnostná miera P definovaná na Σ.

Postupnosť elementov ω_t, $t = 1, \ldots, T-1$ je náhodný proces so známym pravdepodobnostným rozdelením. Označením $\omega_{[t-1]} := (\omega_1, \ldots, \omega_{t-1})$ budeme značiť históriu tohto procesu do času t. Vektor rozhodnutí x_t, ktorý volíme vo fáze t, môže závisieť na histórii $\omega_{[t-1]}$ známej v čase t, viď (2.1), ale nesmie byť závislý na budúcich výsledkoch pozorovaní. Toto je základný požiadavok - *kauzalita*. Postupnosť rozhodnutí je teda tiež náhodný proces.

2.1 Úloha viacstupňového SP

Obecnú formuláciu úlohy SP (1.1) je možné rozšíriť na úlohu $T-$stupňového stochastického programovania, $T > 1$. Pre ilustráciu si viacstupňové SP riadiace sa náhodným procesom elementov $\omega_1, \ldots, \omega_{T-1}$ môžeme znázorniť ako vnorený minimalizačný problém

$$\min_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \mathsf{E} \left\{ \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1, \omega_1)} \mathsf{E} \left\{ \ldots \mathsf{E} \left\{ \inf_{x_T \in \mathcal{X}_T(x_{[T-1]}, \omega_{[T-1]})} f(x_{[T]}, \omega_{[T-1]}) \right\} \right\} \right\} \tag{2.2}$$

kde definícia strednej hodnoty E bude upresnená v ďalšej sekcii 2.2. Ak za funkciu f vezmeme súčet funkcií $f(x_{[T]}, \omega_{[t-1]}) = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t, \omega_{t-1})$ dostaneme úlohu tvaru (viď Shapiro a kol. (2009, str. 64))

$$\begin{aligned} \min_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \Bigg\{ f_1(x_1) + \mathsf{E} \Bigg\{ & \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1, \omega_1)} f_2(x_2, \omega_1) + \\ & + \mathsf{E} \left\{ \cdots + \mathsf{E} \left\{ \inf_{x_T \in \mathcal{X}_T(x_{[T-1]}, \omega_{[T-1]})} f_T(x_T, \omega_{T-1}) \right\} \right\} \Bigg\} \Bigg\}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

kde

$x_t \in \mathbb{R}^n,\ t = 1, \ldots, T$ sú rozhodovacie premenné,

$f : \mathbb{R}^{nt} \times \Omega^{(t-1)} \to \mathbb{R}$ a $f_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$, $t = 2, \ldots, T$ sú spojité funkcie[2],

$\mathcal{X}_t : \mathbb{R}^{n(t-1)} \times \Omega^{(t-1)} \mapsto \mathbb{R}^n$, $t = 2, \ldots, T$ sú merateľné hodnotovo uzavreté multifunkcie (viď kap. 5),

a prvofázová funkcia $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a množina $\mathcal{X}_1 \subset \mathbb{R}^n$ sú pevne dané.

Viacstupňový problém (2.3) je *lineárny*, ak účelové funkcie a funkcie obmedzení sú lineárne. Typicky sú tvaru

[2] Výraz $\Omega^{(t-1)}$ značí karteziánsky súčin $(t-1)$ množín Ω, tj. $\Omega \times \ldots \times \Omega$.

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1) &:= c_1^{\mathsf{T}} x_1, \quad \mathcal{X}_1 := \{x_1 :\ A_1 x_1 = b_1,\ x_1 \geq 0\}, \\
f_t(x_t,\omega_{t-1}) &:= c_t^{\mathsf{T}} x_t, \quad \mathcal{X}_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}) := \{x_t :\ B_t x_{[t-1]} + A_t x_t = b_t,\ x_t \geq 0\}, \\
& \quad t = 2,\ldots,T.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Vektor prvofázových parametrov $\xi_0 := (c_1,A_1,b_1)$, ktorý pozostáva z prvkov vektorov c_1 a b_1 a prvkov matice A_1, je známy už na začiatku, a teda nenáhodný. Niektoré (alebo všetky) prvky vektorov $\xi_{t-1}(\omega_{[t-1]}) := (c_t,B_t,A_t,b_t) \in \mathbb{R}^s,\ t = 2,\ldots,T$ môžu byť náhodné a závisieť na náhodnom elemente ω_{t-1}.

2.2 Formulácia úlohy viacstupňového SP

Jeden možný prístup ako korektne formulovať viacstupňovú úlohu SP je uvažovať rozhodovacie premenné $x_t = x_t(\omega_{[t-1]})$, $t = 2,\ldots,T$, ako funkcie náhodného procesu elementov $\omega_{[t-1]}$ do času $t-1$, Shapiro a kol. (2009, str. 64). Postupnosť merateľných zobrazení

$$x_t : \Omega \times \ldots \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \quad t = 2,\ldots,T,$$

nazývame *uskutočniteľný postup*. Postup je *prípustný*, ak spĺňa prípustné obmedzenia

$$x_t \in \mathcal{X}_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}), \quad t = 2,\ldots,T.$$

Viacstupňový problém (2.2) potom môžeme zapísať v tvare

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1,x_2,\ldots,x_T} \quad & \mathsf{E}\, f(x_{[T]},\omega_{[T-1]}) \\
\text{z.p.} \quad & x_1 \in \mathcal{X}_1, \\
& x_t \in \mathcal{X}_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}), \quad t = 2,\ldots,T,
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

kde strednú hodnotu E berieme cez všetky $\omega_{[t-1]}$. Porovnaj s (1.1) a (1.5). Ak má proces $\omega_1,\ldots,\omega_{T-1}$ nekonečné množstvo realizácií, tak táto formulácia vedie na nekonečne dimenzionálny optimalizačný problém.

Iný spôsob je definovať rovnice odpovedajúcej úlohy dynamického programovania, Shapiro a kol. (2009, str. 64-65). Ide o rekurzívne ocenenie celkovej účelovej funkcie, ktoré zaručuje kauzalitu explicitným spôsobom. Pre obecnú účelovú funkciu f definujeme úlohu nasledujúcimi rovnicami

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \mathsf{E}\left[\mathcal{Q}_2(x_1,\omega_1)\right], \\
\mathcal{Q}_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}) = &\inf_{x_t} \mathsf{E}\left[\mathcal{Q}_{t+1}(x_{[t]},\omega_{[t]})|\omega_{[t-1]}\right], \\
&\text{z.p. } x_t \in \mathcal{X}_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}), \\
&\qquad t = 2,\dots,T-1, \\
\mathcal{Q}_T(x_{[T-1]},\omega_{[T-1]}) = &\inf_{x_T} f(x_{[T]},\omega_{[T-1]}), \\
&\text{z.p. } x_T \in \mathcal{X}_T(x_{[T-1]},\omega_{[T-1]}),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

kde $\mathsf{E}\left[\cdot|\omega_{[t-1]}\right]$ značí podmienenú strednú hodnotu. Pre voľbu funkcie $f(x_{[T]},\omega_{[t-1]}) = \sum_{t=1}^{T} f_t(x_t,\omega_{t-1})$ je úloha definovaná rovnicami

$$\begin{aligned}
&\min_{x_1 \in \mathcal{X}_1} \left\{ f_1(x_1) + \mathsf{E}\left[q_2(x_1,\omega_1)\right] \right\}, \\
q_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}) = &\inf_{x_t} \left\{ f_t(x_t,\omega_{t-1}) + \mathsf{E}\left[q_{t+1}(x_{[t]},\omega_{[t]})|\omega_{[t-1]}\right] \right\}, \\
&\text{z.p. } x_t \in \mathcal{X}_t(x_{[t-1]},\omega_{[t-1]}), \\
&\qquad t = 2,\dots,T-1, \\
q_T(x_{[T-1]},\omega_{[T-1]}) = &\inf_{x_T} f_T(x_T,\omega_{T-1}), \\
&\text{z.p. } x_T \in \mathcal{X}_T(x_{[T-1]},\omega_{[T-1]}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Postup $\bar{x}_t = \bar{x}_t(\omega_{[t-1]})$ je *optimálny* pre úlohu (2.6), ak pre $t = 1,\dots,T$ platí

$$\bar{x}_t \in \operatorname*{arg\,min}_{x_t \in \mathcal{X}_t(\bar{x}_{[t-1]},\omega_{[t-1]})} \mathsf{E}\left[\mathcal{Q}_{t+1}(x_{[t]},\omega_{[t]})|\omega_{[t-1]}\right]. \tag{2.8}$$

Pre úlohu (2.7) je optimálny, ak splňuje

$$\bar{x}_t \in \operatorname*{arg\,min}_{x_t \in \mathcal{X}_t(\bar{x}_{[t-1]},\omega_{[t-1]})} \left\{ f_t(x_t,\omega_{t-1}) + \mathsf{E}\left[q_{t+1}(x_{[t]},\omega_{[t]})|\omega_{[t-1]}\right] \right\}, \tag{2.9}$$

kde pre $t = T$ je výraz $\mathsf{E}\left[\mathcal{Q}_{t+1}(x_{[t]},\omega_{[t]})|\omega_{[t-1]}\right]$ v (2.8) nahradený $f_T(x_T,\omega_{T-1})$ a výraz $\mathsf{E}\left[q_{t+1}(x_{[t]},\omega_{[t]})|\omega_{[t-1]}\right]$ v (2.9) vynechaný. Pre $t = 1$ je množina $\mathcal{X}_1$ známa a nezávisí na žiadnych premenných a element ω_0 taktiež poznáme, tj. nie je náhodný. Vo formulácii dynamického programovania je problém zredukovaný na riešenie skupiny konečne dimenzionálnych úloh, indexovaných pomocou t a $\omega_{[t]}$. Za určitých podmienok sú obe úlohy (2.5) a (2.6) riešiteľné a ich riešenia sú navzájom zhodné. Tieto podmienky a dôkaz tohto tvrdenia nájdeme v Kuhn (2005, str. 14-25).

2.3 Lineárne viacstupňové SP

Nech $x_1,\dots,x_T$ sú vektory rozhodnutí, ktoré odpovedajú rozhodnutiam vo fázach $1,\dots,T$. Uvažujme nasledovný lineárny optimalizačný problém (Shapiro a kol. (2009, str. 65-67))

$$
\begin{array}{lllllll}
\min \Big\{ c_1^\mathsf{T} x_1 & + \; c_2^\mathsf{T} x_2 & + \; c_3^\mathsf{T} x_3 & + \; \cdots & + \; c_T^\mathsf{T} x_T \Big\} & & \\
\text{z.p. } A_1 x_1 & & & & & = b_1, & \\
B_2 x_1 & + \; A_2 x_2 & & & & = b_2, & \\
 & B_3 x_2 & + \; A_3 x_3 & & & = b_3, & (2.10) \\
 & & & \ddots & & \vdots & \\
 & & & B_T x_{T-1} & + \; A_T x_T & = b_T, & \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & x_3 \geq 0 & \cdots & x_T \geq 0. & &
\end{array}
$$

Funkcie $f_1,\dots,f_T$ a obmedzenia v množinách $\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_T$ sú lineárne a niektoré (alebo všetky) ich prvky môžu byť náhodné. Hodnoty náhodných elementov sa dozvedáme postupne v jednotlivých časových periódach. Tento proces môžeme znázorniť ako postupnosť akcií

$$
\begin{gathered}
\text{známy vektor } \xi_0 := (c_1, A_1, b_1), \\
\text{rozhodnutie } x_1, \\
\text{pozorovanie } \omega_1 \Rightarrow \xi_1(\omega_1) := (c_2, B_2, A_2, b_2), \\
\text{rozhodnutie } x_2, \\
\vdots \\
\text{pozorovanie } \omega_{T-1} \Rightarrow \xi_{T-1}(\omega_{T-1}) := (c_T, B_T, A_T, b_T), \\
\text{rozhodnutie } x_T.
\end{gathered}
$$

Dôležitá podmienka hore znázorneného procesu je kauzalita, tzn. že každý vektor rozhodnutí x_t môže závisieť na informáciách známych do času $t-1$, tj. $\omega_{[t-1]}$, ale nie na hodnotách pozorovaných vo vyšších fázach. To je základný rozdiel medzi viacstupňovými stochastickými a deterministickými problémami, v ktorých sa predpokladá, že poznáme hodnoty všetkých premenných na začiatku rozhodovacieho procesu.

Presná definícia tohto viacstupňového lineárneho stochastického problému odpovedajúca (2.7) má tvar

$$
\begin{gathered}
\min_{x_1} \Big\{ c_1^\mathsf{T} x_1 + \mathsf{E}\left[q_2(x_1,\omega_1)\right] : A_1 x_1 = b_1,\ x_1 \geq 0 \Big\}, \\
q_t(x_{t-1},\omega_{[t-1]}) = \inf_{x_t} \Big\{ c_t^\mathsf{T} x_t + \mathfrak{q}_{t+1}(x_t,\omega_{[t-1]}) : B_t x_{t-1} + A_t x_t = b_t,\ x_t \geq 0 \Big\},
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
& t = 2,\dots,T-1, && (2.11)\\
q_T(x_{T-1},\omega_{[T-1]}) &= \inf_{x_T} \left\{ c_T^\mathsf{T} x_T : B_T x_{T-1} + A_T x_T = b_T,\ x_T \geq 0 \right\},
\end{aligned}
$$

kde

$$
\mathsf{q}_{t+1}(x_t,\omega_{[t-1]}) := \mathsf{E}\left[q_{t+1}(x_t,\omega_{[t]}) | \omega_{[t-1]} \right],\ t = 2,\dots,T-1,
$$

a $x_t \in \mathbb{R}^n$, $t = 1,\dots,T$. Porovnaj s úlohou dvojstupňového SP (1.3), kde $T = 2$ a platí

$$
\begin{aligned}
c_1 &= c, & A_1 &= A, & b_1 &= b, & &\\
c_2 &= q, & A_2 &= W, & B_2 &= V, & b_2 &= h.
\end{aligned}
$$

Uskutočniteľný postup $\bar{x}_t = \bar{x}_t(\omega_{[t-1]})$ je *optimálny*, ak pre $t = 1,\dots,T$ platí

$$
\bar{x}_t \in \arg\min_{x_t} \left\{ c_t^\mathsf{T} x_t + \mathsf{q}_{t+1}(x_t,\omega_{[t-1]}) : A_t x_t = b_t - B_t \bar{x}_{t-1},\ x_t \geq 0 \right\}, \qquad (2.12)
$$

kde je vynechaný výraz q_{T+1} pre $t = T$ a $B_t \bar{x}_{t-1}$ pre $t = 1$. Množiny obmedzení v tomto prípade závisia iba na poslednom rozhodnutí x_{t-1} do času t a nie všetkých predošlých rozhodnutiach $x_{[t-1]}$.

Predpokladajme, že v danom probléme (2.10) existuje konečný počet scenárov, ozn. S. Každý scenár $s \in \{1,\dots,S\}$ je jednoznačne daný históriou realizácií náhodného elementu ω_t, $t = 1,\dots,T-1$, ozn. $s = \{s_1,\dots,s_{T-1}\}$. Tomuto scenáru odpovedá pravdepodobnosť p_s a postupnosť rozhodnutí $x(s) = \{x^1(s),\dots,x^T(s)\}$. Ak chceme nájsť optimálne hodnoty týchto rozhodnutí, musíme vyriešiť nasledujúcu úlohu, ktorá obsahuje veľmi dôležité kauzálne obmedzenia

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sum_{k=1}^{K} p_s \left[c_1^\mathsf{T} x_1(s) + c_2(s)^\mathsf{T} x_2(s) + c_3(s)^\mathsf{T} x_3(s) + \dots + c_T(s)^\mathsf{T} x_T(s) \right] \\
\text{z.p. } & A_1 x_1(s) = b_1(s), \\
& B_2(s) x_1(s) + A_2(s) x_2(s) = b_2(s), && (2.13)\\
& \vdots \\
& B_T(s) x_{T-1}(s) + A_T(s) x_T(s) = b_T(s), \\
& x_1(s),\dots,x_T(s) \geq 0, \qquad\qquad s = 1,\dots,S, \\
& x_t(s) = x_t(r), \forall s,r \text{ splňujúce } s_{[t-1]} = r_{[t-1]}, \quad t = 2,\dots,T, && (2.14)
\end{aligned}
$$

kde $s_{[t-1]} = \{s_1,\dots,s_{t-1}\}$ značí realizácie náhodného elementu pre konkrétny scenár s do času $t-1$. Obmedzenia (2.14) zaručujú kauzalitu, tzn. pre $\forall t$ rozhodnutie x_t závisí iba na realizáciách náhodného elementu do času $t-1$, ktoré poznáme v čase rozhodovania, a nezávisia na budúcich realizáciách. Porovnaj s kauzálnymi obmedzeniami v úlohe (1.5).

Uvažujme ale nasledovný lineárny optimalizačný problém zodpovedajúci úlohe (2.4), kde $B_t = (A_{t1}, \dots, A_{t,t-1})$, $t = 2, \dots, T$, Shapiro a kol. (2009, str. 68-69),

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\min \Big\{ c_1^\mathsf{T} x_1 & + & c_2^\mathsf{T} x_2 & + & c_3^\mathsf{T} x_3 & + & \cdots & + & c_T^\mathsf{T} x_T \Big\} & & \\
\text{z.p. } A_{11} x_1 & & & & & & & & & = b_1, & \\
A_{21} x_1 & + & A_{22} x_2 & & & & & & & = b_2, & \\
A_{31} x_1 & + & A_{32} x_2 & + & A_{33} x_3 & & & & & = b_3, & \\
 & & & & & & \ddots & & & \vdots & \\
A_{T1} x_1 & + & A_{T2} x_2 & + & \dots & + & A_{T,T-1} x_{T-1} & + & A_{TT} x_T & = b_T, & \\
x_1 \geq 0, & & x_2 \geq 0, & & x_3 \geq 0 & & \cdots & & x_T \geq 0. & &
\end{array}
\tag{2.15}
$$

V matici obmedzení problému (2.10), ktorý je špeciálny prípad (2.4) a teda aj (2.15), sme predpokladali nulovosť príslušných blokov $A_{t1}, \dots, A_{t,t-2}$, $t = 3, \dots, T$. To nám umožnilo vyjadriť optimálnu hodnotu q_t z (2.11) ako funkciu bezprostredne predchádzajúceho rozhodnutia x_t, než ako funkciu všetkých predošlých rozhodnutí $x_1, \dots, x_t$. V úlohe (2.15) však každá podúloha tvaru (2.11) závisí na celej histórii rozhodnutí $x_{[t-1]} := (x_1, \dots, x_{t-1})$. Úloha je potom v tvare

$$
\begin{aligned}
& \min_{x_1} \Big\{ c_1^\mathsf{T} x_1 + \mathsf{E}\left[q_2(x_1, \omega_1)\right] : A_{11} x_1 = b_1,\ x_1 \geq 0 \Big\}, \\
q_t(x_{[t-1]}, \omega_{[t-1]}) = {} & \inf_{x_t} \Big\{ c_t^\mathsf{T} x_t + \mathsf{E}\left[q_{t+1}(x_{[t]}, \omega_{[t]}) | \omega_{[t-1]} \right] : \\
& A_{t1} x_1 + \cdots + A_{t,t-1} x_{t-1} + A_{tt} x_t = b_t,\ x_t \geq 0 \Big\}, \\
& t = 2, \dots, T-1, \\
q_T(x_{[T-1]}, \omega_{[T-1]}) = {} & \inf_{x_T} \Big\{ c_T^\mathsf{T} x_T : A_{T1} x_1 + \cdots + A_{T,T-1} x_{T-1} + \\
& + \ A_{TT} x_T = b_T,\ x_T \geq 0 \Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

2.4 Aplikácia viacstupňového SP

Ako bolo spomenuté na začiatku práce, viacstupňové stochastické programovanie nájde uplatnenie v rôznych aplikáciách, napríklad finančné problémy, riadenie vodných tokov a nádrží, energetické plánovanie a plánovanie výroby, dopravné problémy, nutričné problémy atď. Uveďme si príklady možného použitia v praxi.

Prvú ukážku, kde sa rieši problém optimálneho výberu portfólia, vyberáme z knihy Shapiro a kol. (2009, str. 13-21) a je rozšírením príkladu 1.3.1 z kapitoly 1. Kým v príklade o finančnom plánovaní, kde chceme dieťaťu našetriť na jeho vysokoškolské štúdium sme predstavili scenárový prístup k problému investovania do finančných inštrumentov, v nasledujúcom príklade sa budeme týmto zaoberať komplexnejšie.

2.4.1 Výber portfólia

Chceme investovať počiatočný kapitál W_1 do n finančných inštrumentov tak, že čiastku x_i investujeme do $i-$teho inštrumentu, $i = 1,\ldots,n$. Nech každý inštrument má príslušnú mieru návratnosti R_i (na kus za jednu časovú periódu). Túto mieru návratnosti nepoznáme v čase, keď musíme urobiť naše rozhodnutie. Otázkou je, ako optimálne prerozdeliť náš počiatočný kapitál medzi jednotlivé inštrumenty. Celkový majetok z našej investície po jednej časovej perióde činí

$$W_2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, x_i,$$

kde $\xi_i := 1 + R_i$, $i = 1,\ldots,n$. Zároveň musí platiť rovnovážne obmedzenie $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq W_1$. Ak by sme ale uvažovali, že jedna z možných investícií je hotovosť, tak túto podmienku môžeme písať ako rovnosť $\sum_{i=1}^{n} x_i = W_1$. Jedným z možných prístupov k tomuto problému je maximalizácia očakávaných výnosov. To nás vedie k úlohe

$$\begin{aligned} \max\ & \mathsf{E}\, W_2 = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}(\xi_i) x_i \\ \text{z.p.}\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = W_1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Alternatívnym prístupom je maximalizácia očakávaného úžitku $U(W_2)$ z majetku W_2, ktorý je reprezentovaný konkávnou neklesajúcou funkciou U. Úloha je potom tvaru

$$\begin{aligned} \max\ & \mathsf{E}\, U(W_2) \\ \text{z.p.}\ & \sum_{i=1}^{n} x_i = W_1, \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ďalším možným prístupom je maximalizovanie očakávaných výnosov, zatiaľ čo kontrolujeme rizikovosť investície. Rizikovosť investície W je možné vyjadriť niekoľkými spôsobmi, napríklad meraním rozptylu $\mathrm{Var}(W)$. Tieto úlohy sú viac rozobraté v Shapiro a kol. (2009, 13-16).

Viacstupňová úloha:

Venujme sa teraz viacstupňovému prípadu výberu portfólia. Ten nastáva vtedy, keď povolíme prerozdelenie portfólia v časových periódach $t = 2, \ldots, T$, bez možnosti vloženia dodatočných finančných prostriedkov. V každej perióde t musíme rozhodnúť, ako prerozdelíme náš aktuálny majetok W_t medzi n inštrumentov. Nech $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})$ je počiatočné množstvo investované do jednotlivých inštrumentov. Pripomeňme, že musí platiť rovnovážna rovnica $\sum_{i=1}^{n} x_{i1} = W_1$ a nezápornosť investícií $x_{i1} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Predpokladajme, že príslušné miery návratnosti $R_{1t}, \ldots, R_{nt}$ pre periódy $t = 1, \ldots, T$, tvoria náhodný proces so známym rozdelením. Definujme náhodný proces $\xi_1, \ldots, \xi_T$, kde $\xi_t = (\xi_{1t}, \ldots, \xi_{nt})$ a $\xi_{it} := 1 + R_{it}$, $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$. Vo fáze $t = 2$ môžeme prerozdeliť portfólio určením čiastok $x_2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})$ investovaných do príslušných inštrumentov. V tom čase už poznáme aktuálne výnosy z prvej periódy a túto informáciu môžeme použiť k rozhodnutiu o prerozdelení majetku. Naše druho-fázové rozhodnutie je preto funkciou realizácií náhodného vektoru ξ_1, značíme $x_2 = x_2(\xi_1)$. Podobne v čase t je naše rozhodnutie $x_t = (x_{1t}, \ldots, x_{nt})$ funkciou známej informácie danej realizáciou procesu $\xi_{[t-1]} = (\xi_1, \ldots, \xi_{t-1})$ do času t, ozn. $x_t = x_t(\xi_{[t-1]})$. Postupnosť konkrétnych funkcií $x_t = x_t(\xi_{[t-1]})$, $t = 1, \ldots, T$, kde x_1 je konštanta[3], definuje uskutočniteľný postup rozhodovacieho procesu. Postup je prípustný, ak spĺňa obmedzenia na nezápornosť investícií $x_{it}(\xi_{[t-1]}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$ a rovnovážne obmedzenia

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} x_{it}(\xi_{[t-1]}).$$

Vo fázach $t = 2, \ldots, T$, závisí náš majetok W_t na realizáciách náhodného procesu a našich rozhodnutiach do času t. Môžeme ho vyjadriť ako súčet výnosov z jednotlivých investícií

$$W_t = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,t-1}\, x_{i,t-1}(\xi_{[t-1]}).$$

Nech je naším zámerom maximalizovanie očakávaného úžitku po poslednej fáze, tj. max $\mathsf{E}[U(W_{T+1})]$. Tento problém je viacstupňové SP s fázami $t = 1, \ldots, T$.

[3]Vo výraze $x_1(\xi_0)$ je $\xi_0 = 1$ a poznáme ho už na začiatku rozhodovacieho procesu, tj. v prvej fáze. Rozhodnutie x_1 nie je závislé na náhode.

Optimalizujeme cez všetky prípustné a uskutočniteľné postupy. Rovnice dynamického programovania (ako v (2.6)) zostrojíme nasledovným spôsobom. V poslednej fáze $t = T$ poznáme realizácie náhodného procesu $\xi_{[T-1]} = (\xi_1, \ldots, \xi_{T-1})$ a rozhodnutie x_{T-1}. Po učinení posledného rozhodnutia x_T sa dozvieme aj realizáciu ξ_T, pomocou ktorej vypočítame naše celkové výnosy z investície W_{T+1}. Problém, ktorý riešime má nasledovný tvar a jeho optimálna hodnota je závislá na $x_{[T]}$ a $\xi_{[T]}$. V poslednej fáze T riešime úlohu

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_T(x_{[T-1]}, \xi_{[T-1]}) = \max_{x_T \geq 0} & \; f(x_{[T]}, \xi_{[T]}) \\ \text{z.p. } W_T = & \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,T-1}\, x_{i,T-1}, \\ W_T = & \sum_{i=1}^{n} x_{i,T}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

kde $f(x_{[T]}, \xi_{[T]}) = \mathsf{E}[U(W_{T+1}) | \xi_{[T]}]$, $W_{T+1} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,T}\, x_{i,T}$. Vo fázach $t = 2, \ldots, T-1$ riešime problémy:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_t(x_{[t-1]}, \xi_{[t-1]}) = \max_{x_t \geq 0} & \; \mathsf{E}[\mathcal{Q}_{t+1}(x_{[t]}, \xi_{[t]}) | \xi_{[t-1]}] \\ \text{z.p. } W_t = & \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,t-1}\, x_{i,t-1}, \\ W_t = & \sum_{i=1}^{n} x_{i,t}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Nakoniec vo fáze $t = 1$ máme problém:

$$\begin{aligned} \max_{x_1 \geq 0} & \; \mathsf{E}[\mathcal{Q}_2(x_1, \xi_1)] \\ \text{z.p. } W_1 = & \sum_{i=1}^{n} x_{i,1}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Porovnajme túto definíciu s problémami z príkladu 1.3.1, kde

$$\begin{aligned} W_1 &= b, & x_{it} &= x(i,t,\cdot), \\ n &= I, & \xi_{it} &= \xi(i,t,\cdot). \end{aligned}$$

Rozdiel je v tom, že v úlohe (1.5) používame scenáre, na ktorých sú závislé jednotlivé premenné $x(i,t,\cdot)$ a hodnoty náhodných prvkov $\xi(i,t,\cdot)$. Navyše, kým úloha (2.18),(2.19),(2.20) má vnorený tvar, tak problém z príkladu 1.3.1 má tvar nevnorený (ako to je v (2.5)) a to vďaka tomu, že máme konečnú diskrétnu množinu scenárov. V nevnorenom tvare príkladu 1.3.1 je ale potrebné definovať kauzálne obmedzenia implicitne.

Voľba úžitkovej funkcie:

Za úžitkovú funkciu môžeme zvoliť napríklad funkciu

$$U(W) := \begin{cases} (1+q)(W-a), & W \geq a, \\ (1+r)(W-a), & W < a, \end{cases} \tag{2.21}$$

kde

$q > 0$ je úroková miera, za ktorú môžeme investovať majetok $W-a$, pre $W > a$,

$r > q$ je úroková miera, za ktorú si môžeme požičiať, pre $W < a$,

$a > 0$ je čiastka, ktorú musíme zaplatiť po návrate investície.

Porovnaj s účelovou funkciou problému (1.5).

Iná možná voľba úžitkovej funkcie je napríklad logaritmická $U(W) := \ln(W)$, ktorá je definovaná pre $W > 0$. Ak v úlohe (2.18) vezmeme za úžitkovú funkciu práve logaritmickú a $a,w > 0$, tak si prípustné množiny problému (2.18) pre $W_T = w$ a $W_T = aw$ navzájom odpovedajú spôsobom $x_{T-1} \leftrightarrow a\, x_{T-1}$. Z toho plynie pre logaritmické úžitkové funkcie nasledujúci vzťah medzi optimálnymi hodnotami problému

$$\mathcal{Q}_T(a\, x_{[T-1]}, \xi_{[T-1]}) = \mathcal{Q}_T(x_{[T-1]}, \xi_{[T-1]}) + \ln(a), \tag{2.22}$$

viď Shapiro a kol. (2009, str. 18).

Náš zámer nemusí byť vždy iba maximalizovanie úžitku. Ako sme pri jednostupňovej úlohe spomenuli, tak sa môžeme snažiť maximalizovať očakávané výnosy s ohľadom na podstupované riziko. Napríklad práca Pflug a Pichler (2011) sa zaoberá definovaním priemernej hodnoty v riziku AVaR a jej použitím vo viacstupňovej stochastickej optimalizácii.

△

V ďalšom príklade zostrojíme model plánovania energetickej výroby v hydrotermálnom systéme. Čerpáme zo štúdie Nowak a Römisch (2000), kde nájdeme aj aplikáciu a výpočet pre reálne data. Na rozdiel od predošlého príkladu zadefinujeme úlohu energetického plánovania v nevnorenom tvare, kde kauzalitu zabezpečíme implicitými obmedzeniami. Ich definíciu rozšírime zo scenárového prístupu v úlohe (1.5) pomocou pojmu sigma algebry.

2.4.2 Energetické plánovanie

Uvažujme systém výroby elektrickej energie, ktorý zahŕňa tepelné jednotky (spaľovanie uhlia a zemného plynu), čerpacie vodné akumulačné elektrárne a zmluvy o dodaní energie. Popíšeme model pre optimalizovanie týždenných nákladov na výrobu elektrickej energie za neistého odberu. Zavedieme nasledovné značenie

- T je počet časových intervalov v uvažovanom horizonte prevádzky,
- I je počet tepelných jednotiek v systéme, kde sú zarátané aj zmluvy o dodaní ako špeciálne tepelné jednotky,
- J je počet čerpacích vodných akumulačných jednotiek v systéme,
- $u_i^t \in \{0,1\}$ je rozhodnutie o vypnutí ($u_i^t = 0$) či zapnutí ($u_i^t = 1$) tepelnej jednotky i vo fáze t, $i = 1,\ldots,I$, $t = 1,\ldots,T$,
- p_i^t je rozhodnutie o úrovni produkcie tepelnej jednotky i vo fáze t, $i = 1,\ldots,I$, $t = 1,\ldots,T$,
- s_j^t je rozhodnutie o úrovni výroby čerpacej vodnej akumulačnej jednotky j vo fáze t, $j = 1,\ldots,J$, $t = 1,\ldots,T$,
- w_j^t je rozhodnutie o úrovni čerpania čerpacej vodnej akumulačnej jednotky j vo fáze t, $j = 1,\ldots,J$, $t = 1,\ldots,T$,
- ℓ_j^t je úroveň (alebo objem) zásobníka v hornej nádrži jednotky j na konci fázy t, $j = 1,\ldots,J$, $t = 1,\ldots,T$.

Všetky zavedené premenné sú obmedzené (zhora aj zdola) konečnými medzami, ktoré reprezentujú limity výstupov jednotiek a kapacity nádrží uvažovaného výrobného systému

$$\begin{aligned}&p_i^{min} \cdot u_i^t \le p_i^t \le p_i^{max} \cdot u_i^t, \quad u_i^t \in \{0,1\}, \, i = 1,\ldots,I,\\ &0 \le s_j^t \le s_j^{max}, \quad 0 \le w_j^t \le w_j^{max}, \quad 0 \le \ell_j^t \le \ell_j^{max}, \quad j = 1,\ldots,J,\\ &t = 1,\ldots,T.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Dynamika úrovne zásobníka, ktorá je meraná v množstve elektrickej energie, je zachytená v nasledujúcich rovniciach

$$\begin{aligned}&\ell_j^t = \ell_j^{t-1} - s_j^t + \eta_j w_j^t, \quad t = 1,\ldots,T,\\ &\ell_j^0 = \ell_j^{in}, \quad \ell_j^T = \ell_j^{end}, \quad j = 1,\ldots,J,\end{aligned} \tag{2.24}$$

kde

ℓ_j^{in} je počiatočná úroveň hornej nádrže jednotky j, $j = 1,\dots,J$,

ℓ_j^{end} je konečná úroveň hornej nádrže jednotky j, $j = 1,\dots,J$,

η_j je efektivita čerpania jednotky j, $j = 1,\dots,J$, ktorá je definovaná ako podiel výroby a čerpacieho zaťaženia, ktoré odpovedá rovnakému množstvu vody.

Tieto podmienky zaisťujú, že v horných nádržiach nedochádza k žiadnemu dopúšťaniu či vypúšťaniu vody, tj. jednotky pracujú s konštantným množstvom vody. Ďalšie obmedzenia sa týkajú minimálneho času zapnutia a vypnutia tepelných jednotiek. Zavádzané sú z dôvodu, aby sa predišlo tepelnému preťaženiu a vysokým nákladom na údržbu kvôli nadmernému chodu

$$\begin{aligned} &u_i^{t-1} - u_i^t \leq 1 - u_i^\tau, \quad \tau = t+1,\dots,\min\{t+\tau_i-1, T\},\\ &t = 1,\dots,T, \end{aligned} \tag{2.25}$$

kde τ_i je minimálny čas vypnutia jednotky i. Analogické obmedzenia môžeme zaviesť pre minimálny čas zapnutia jednotiek v systéme. Ďalšie obmedzenia zaisťujú, že výstupný výkon je väčší alebo rovný dopytu po elektrickej energii v každej fáze

$$\sum_{i=1}^{I} p_i^t + \sum_{j=1}^{J}(s_j^t - w_j^t) \geq d^t, \quad t = 1,\dots,T, \tag{2.26}$$

kde d^t je dopyt po elektrickej energii vo fáze t. Posledné obmedzenia sa vzťahujú k tvorbe rezerv na kompenzáciu nečakaných udalostí (napr. náhly nárast alebo pokles dopytu, výpadky jednotiek) v určených krátkych časových periódach

$$\sum_{i=1}^{I}(p_i^{max} \cdot u_i^t - p_i^t) \geq r^t, \quad t = 1,\dots,T, \tag{2.27}$$

kde $r^t > 0$ je vytváraná rezerva vo fáze t. Predpokladáme, že rezerva r^t je úmerná dopytu d^t. Účelovú funkciu tvoria celkové náklady na prevádzku tepelných jednotiek

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{t=1}^{T}[C_i(p_i^t, u_i^t) + S_i^t(u_i)], \tag{2.28}$$

kde C_i sú náklady na pohonné látky potrebné ku chodu tepelnej jednotky i počas fázy t a S_i^t sú náklady na spustenie vypnutej jednotky v tejto fáze. Predpokladáme, že C_i sú rastúce po častiach lineárne konvexné funkcie tvaru

$$C_i(p,u) = \max_{\ell=1,\dots,L}\{a_{i\ell}p + b_{i\ell}u\},$$

kde $a_{i\ell}$ a $b_{i\ell}$ sú pevné koeficienty nákladov. Náklady na spustenie $S_i^t(u_i)$ môžu byť rôzne, od maximálnych pre studený štart, po oveľa menšie, keď je jednotka i stále relatívne blízko prevádzkovej teplote.

$$S_i^t(u_i) = \max_{\tau=0\dots,\tau_i^c} c_i^\tau \left(u_i^t - \sum_{k=1}^{\tau} u_i^{t-k} \right),$$

kde $c_i^0 = 0$ a c_i^τ, $\tau = 0, \dots, \tau_i^c$, sú pevné zväčšujúce sa koeficienty nákladov, τ_i^c je čas, ktorý je potrebný na schladenie jednotky i a $c_i^{\tau_i^c}$ sú maximálne náklady na studený štart. Úlohou je teda minimalizovať účelovú funkciu (2.28) za podmienok (2.23)-(2.27). Tento problém je optimalizácia zmiešaných celých čísel s lineárnymi obmedzeniami, IT binárnymi a $(I+2J)T$ spojitými rozhodovacími premennými.

Zavedenie náhody:

Dopyt po elektrickej energii $\{d^t\}_{t=1}^T$, okrem d^1, nepoznáme predom. Je to teda náhodný proces definovaný na nejakom pravdepodobnostnom priestore $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Nech $\{\mathcal{F}_t\}_{t=1}^T$ je filtrácia generovaná procesom dopytu, tj. $\mathcal{F}_t$ je sigma algebra generovaná náhodným procesom $d^1, \dots, d^t$ do času t. Potom platí

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_T \subseteq \mathcal{F}.$$

Postupnosť rozhodnutí $(u, p, s, w) = \{(u^t, p^t, s^t, w^t)\}_{t=1}^T$ tvorí taktiež náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Predpokladáme, že tento proces je prispôsobený uvažovanej filtrácii sigma algebry, a teda spĺňa predpoklad kauzality, tj. (u^t, p^t, s^t, w^t) závisí iba na dopytoch $d^1, \dots, d^t$ známych do času t. To znamená, že (u^t, p^t, s^t, w^t) je $\mathcal{F}_t-$merateľný. Dostávame sa k formulácii úlohy riešeného problému, ktorá má tvar

$$\begin{aligned} &\min\ \mathsf{E}\left\{ \sum_{i=1}^{I} \sum_{t=1}^{T} [C_i(p_i^t, u_i^t) + S_i^t(u_i)] \right\} \\ &\text{z.p. } (u, p, s, w) \text{ spĺňa obmedzenia (2.23)-(2.27) } \mathsf{P}-\text{skoro isto}, \\ &\qquad (u^t, p^t, s^t, w^t) \text{ je } \mathcal{F}_t - \text{merateľný}, \ t = 1, \dots, T. \end{aligned} \tag{2.29}$$

$\triangle$

Modelovanie plánovania výroby a využitia kapacít pri neistom dopyte si predstavíme v nasledujúcom príklade, viď Escudero a kol. (1993). Využijeme scenárový prístup a ukážeme inú možnosť definovania kauzálnych obmedzení než v úlohe (1.5).

2.4.3 Plánovanie výroby

Továreň vlastní R strojov a vyrába J rôznych produktov. Pre jednoduchosť predpokladajme, že všetky produkty sú vyrábané na rovnakej sade strojov. Výroba a využitie kapacít továrne sa riadi plánom na T mesiacov, ktorý môže byť na začiatku každého mesiaca upravený. K tomu môžeme použiť dovtedy známe informácie. Ak na pokrytie dopytu nestačí výroba továrne, môže použiť zásoby od obchodníka. Výroba je vždy ukončená v perióde, v ktorej začala. Naším cieľom je minimalizovať celkové náklady na uskladnenie našich a používanie obchodníkových zásob.

Deterministický model:

Úlohu zadefinujme v nasledujúcom tvare

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \left[h_j^t I_j^t + p_j^t y_j^t\right] \\ \text{z.p. } & I_j^{t-1} - I_j^t + x_j^t + y_j^t = d_j^t, \quad j = 1, \ldots, J, \\ & \sum_{j=1}^{J} a_{rj} x_j^t \leq K_r^t, \quad r = 1, \ldots, R, \\ & x_j^t,\ I_j^t,\ y_j^t \geq 0, \quad j = 1, \ldots, J, \quad t = 1, \ldots, T, \end{aligned} \tag{2.30}$$

kde

- h_j^t sú náklady na uskladnenie jednej jednotky produktu j v perióde t,
- p_j^t sú náklady na zakúpenie jednej jednotky produktu j v perióde t od obchodníka,
- a_{rj} je potrebná kapacita stroja r na výrobu jednej jednotky produktu j,
- K_r^t je dostupná kapacita stroja r v perióde t,
- x_j^t je objem výroby produktu j v perióde t,
- I_j^t je počet nepredaných produktov j na konci periódy t, kde I_j^0 je počiatočná zásoba produktu j,
- y_j^t je množstvo produktov j zakúpených od obchodníka v perióde t,
- d_j^t je dopyt po produkte j v perióde t.

Tento model predpokladá iba kapacitné obmedzenia a neobmedzuje množstvo dostupných materiálov na výrobu produktov. Tieto obmedzenia je možné do modelu zahrnúť.

Stochastický model:

Dopyt po produktoch $\{d_j^t,\ j = 1,\ldots,J\}_{t=1}^T$ nepoznáme predom, a teda je to náhodný proces. Predpokladajme, že existuje konečná množina scenárov S, ktorej prvky (scenáre) určujú dopyt po produktoch v každej perióde. Zavedieme nasledujúce značenie

$d_j^t(s)$ je dopyt po produkte j v perióde t pre scenár $s \in S$,

$x_j^t(s)$ je objem výroby produktu j v perióde t pre scenár s,

$I_j^t(s)$ je počet nepredaných produktov j na konci periódy t pre scenár s, kde I_j^0 je počiatočná zásoba produktu j,

$y_j^t(s)$ je množstvo produktov j zakúpených od obchodníka v perióde t pre scenár s,

w_s je pravdepodobnosť scenára s, $\sum_{s\in S} w_s = 1$.

Ďalej definujeme obmedzenia uskutočniteľnosti alebo kauzálne obmedzenia, viď (2.2),

$$\begin{aligned} x =& (x_j^t(s),\ s \in S, j = 1,\ldots,J, t = 1,\ldots,T) \in \mathcal{N}_x,\\ I =& (I_j^t(s),\ s \in S, j = 1,\ldots,J, t = 1,\ldots,T) \in \mathcal{N}_I,\\ y =& (y_j^t(s),\ s \in S, j = 1,\ldots,J, t = 1,\ldots,T) \in \mathcal{N}_y, \end{aligned} \tag{2.31}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_x =& \{x_j^t(s) :\ x_j^t(s) = x_j^t(s'), \forall s, s' \in S, \text{ktoré sú identické do periódy } t,\ \forall j,t\},\\ \mathcal{N}_I =& \{I_j^t(s) :\ I_j^t(s) = I_j^t(s'), \forall s, s' \in S, \text{ktoré sú identické do periódy } t,\ \forall j,t\},\\ \mathcal{N}_y =& \{y_j^t(s) :\ y_j^t(s) = y_j^t(s'), \forall s, s' \in S, \text{ktoré sú identické do periódy } t,\ \forall j,t\}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Stochastický model plánovania výroby s náhodným dopytom a konečnou množinou scenárov má tvar

$$\begin{aligned} \min\ & \sum_{s\in S} w_s \left\{ \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T \left[h_j^t I_j^t(s) + p_j^t y_j^t(s) \right] \right\}\\ \text{z.p. } & I_j^{t-1}(s) - I_j^t(s) + x_j^t(s) + y_j^t(s) = d_j^t(s), \quad j = 1,\ldots,J,\\ & \sum_{j=1}^J a_{rj} x_j^t(s) \le K_r^t, \quad r = 1,\ldots,R,\\ & x_j^t(s),\ I_j^t(s),\ y_j^t(s) \ge 0, \quad j = 1,\ldots,J, \quad t = 1,\ldots,T, \quad s \in S,\\ & x \in \mathcal{N}_x,\ I \in \mathcal{N}_I,\ y \in \mathcal{N}_y. \end{aligned} \tag{2.33}$$

$\triangle$

Posledný príklad, ktorý si uvedieme, je z oblasti taviarenskej výroby zliatín. Môžeme ho nájsť v publikácii Dupačová a kol. (2002, str. 154-157) a viac je o ňom pojednané v Dupačová a Popela (2005). Úlohu zostrojíme pre scenárový prístup, kde množiny obmedzení budú podobne ako v úlohe (2.10) špeciálny prípad, tj. obmedzenia v čase t závisia iba na scenári z fázy $t-1$ a nie na celej histórii scenárov z fáz $1,\ldots,t-1$.

2.4.4 Optimalizácia výdavkov na tavenie zliatín

Riadenie tavenia je jedným z krokov pri výrobe železných a oceľových dielov. Tento krok výroby môže byť úplne oddelený od ostatných zlievarenských optimalizačných problémov, čo zjednodušuje tvorbu modelu a jeho riešenie. Jeho dôležitosť spočíva v tom, že taviarne majú obvykle vysoké prevádzkové náklady (z ktorých najväčšiu časť tvoria náklady na materiálové vstupy), a teda aj malým percentom úspor môžeme ušetriť významné množstvo peňazí.

Vyrábané zliatiny a materiálové vstupy pozostávajú z určitých základných prvkov (železo, uhlík atď.). Proces výroby pozostáva z niekoľkých fáz (napr. nahrievanie, zlievanie). V každej z nich je tavenina v peci obohacovaná o určitý materiál a nová zmes je opäť roztavená. Pri každej zmene zloženia taveniny musíme rátať s náhodnými stratami prvkov v tavenine, pretože počas jej ohrevu sa v dôsledku rôznych vplyvov (napr. oxidácie) náhodne mení ich množstvo. Tieto straty sú ovplyvnené zložením tavnej zmesi a v našom zjednodušenom prípade budeme predpokladať, že sú jedinými náhodnými premennými. Dostupné historické záznamy o tavení môžeme využiť na zostavenie možných scenárov.

Cieľom je optimalizovať množstvo materiálových vstupov tak, aby sme dosiahli čo najnižšie náklady pri splnení hlavného požiadavku na predpísané zloženie výstupnej zliatiny. Ukážeme si základnú lineárnu úlohu tohto problému, ktorá je založená na scenárovom prístupe

$$
\begin{aligned}
&\min \left\{ \sum_{j\in J_1} c_j x_j(1) + \sum_{t=2}^{T} \sum_{s_t\in S_t} p_{s_t} \left[\sum_{j\in J_t} c_j x_j(s_t) \right] \right\} \\
&\text{z.p.} \sum_{\ell=1}^{m_{t-1}} \tau_{i\ell}(s_t) \left[h_\ell(a(s_t)) + \sum_{j\in J_{t-1}} a_{\ell j} x_j(a(s_t)) \right] = h_i(s_t), \\
&\qquad\qquad i = 1,\ldots,m_{t-1},\ s_t \in S_t,\ t = 2,\ldots,T, \qquad (2.34) \\
&L_{i,t-1} \le \sum_{s_t\in S_t} p_{s_t} h_i(s_t) \le U_{i,t-1}, \quad i = 1,\ldots,m_t,\ t = 2,\ldots,T,
\end{aligned}
$$

$$L_{iT} \le h_i(s_T) + \sum_{j \in J_T} a_{ij} x_j(s_T) \le U_{iT}, \quad i = 1,\ldots,m_T,$$

$$x_j(1) \ge 0, \quad j \in J_1,$$

$$x_j(s_t) \ge 0, \quad s_t \in S_t,\ j \in J_t,\ t = 2,\ldots,T,$$

kde

T je počet fáz taviaceho procesu,

J_t je množina indexov materiálových vstupov využívaných vo fáze t,

m_t je počet uvažovaných prvkov v zliatine vo fáze t,

$c_j \ge 0$ sú známe jednotkové náklady na materiálový vstup j,

$L_{it}, U_{it} \ge 0$ je predpísaná dolná a horná cieľová medza množstva prvku i v tavnej zmesi vo fáze t,

$a_{ij} \ge 0$ je množstvo prvku i v jednotkovom množstve materiálového vstupu j, $\sum_i a_{ij} \le 1\ \forall j$,

S_t je konečná množina scenárov vo fáze t,

$s_t \in S_t$ je scenár vo fáze t,

$a(s_t) \in S_{t-1}$ je predok scenáru $s_t \in S_t$,

$p_{s_t} \ge 0$ je pravdepodobnosť scenáru s_t,

$x_j(1) \ge 0$ je množstvo materiálového vstupu j použitého na začiatku taviaceho procesu (prvofázová rozhodovacia premenná),

$x_j(s_t)$ je množstvo materiálového vstupu j pridávané do zmesi vo fáze t pre scenár s_t (rozhodovacia premenná vo fáze t),

$\tau_{i\ell}(s_t) \in \langle 0,1 \rangle$ je zúžitkovanie prvku i v súvislosti s množstvom prvku ℓ obsiahnutého v tavenine vo fáze t pre scenár s_t,

$h_i(s_t)$ je množstvo prvku i obsiahnuté v tavenine vo fáze t pre scenár s_t pred prijatím rozhodnutia v danej fáze.

Často uvažovaný prípad $\tau_{i\ell}(s_t) = 0$, $i \ne \ell$, znamená, že neberieme do úvahy interakcie náhodných strát. V úlohe (2.34) hovoria prvé obmedzenia o tom, že množstvá jednotlivých prvkov obsiahnutých v zmesi pred prijatím rozhodnutia vo fáze t musia byť zhodné s množstvami týchto prvkov v zmesi po učinení rozhodnutia vo fáze $t-1$, $t = 2, \ldots . T$. Druhé obmedzenia vyžadujú, aby počas celého taviaceho procesu boli splnené dané medze pre priemerné zloženie zmesi. Tretie obmedzenia sa vzťahujú na zloženie výsledného produktu, ktoré musí spĺňať predpísané medze pre všetky uvažované scenáre. Ďalšie obmedzenia zaručujú nezápornosť pridávaných množstiev vstupných materiálov.

Aby bol tento model realistickejší, je potrebné zadefinovať nejaké prídavné obmedzenia, týkajúce sa napr. používanej technológie, alebo zaviesť náhodu aj do zloženia vstupných materiálov atď. Poznamenajme, že fázy procesu sú dané modelovaným výrobným procesom a nie sú voľbou tvorcu modelu. Zároveň je treba mať na zreteli, že plnú pec nemožno zväčšiť alebo vyprázdniť v priebehu procesu, a teda nemôžeme predpokladať jej relatívne kompletné využitie. Prípustnosť prvofázového rozhodnutia musí byť preto analyzovaná.

$\triangle$

Kapitola 3

Špeciálny prípad viacstupňového stochastického programovania

V tejto kapitole pracujeme s trocha upraveným rekurzívnym modelom (2.6), ktorý si zadefinujeme nižšie. Zaveďme nasledovné značenie (Kaňková (2008))

ω je náhodný element z priestoru $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$,

$\xi_t(\omega),\ t = 1,\ldots,T$ je $s-$rozmerný náhodný vektor,

$F^{\xi_t}(z_t),\ z_t \in \mathbb{R}^s,\ t = 1,\ldots,T$ je distribučná funkcia náhodného vektoru ξ_t a $\mathsf{P}_{F^{\xi_t}}$ je odpovedajúca pravdepodobnostná miera,

$F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(z_t|z_{[t-1]}),\ z_t \in \mathbb{R}^s,\ z_{[t-1]} \in \mathbb{R}^{(t-1)s},\ t = 2,\ldots,T$ je podmienená distribučná funkcia ξ_t pri $\xi_{[t-1]}$ a $\mathsf{P}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}$ je odpovedajúca podmienená pravdepodobnostná miera, kde $\xi_{[t]} = (\xi_1,\ldots,\xi_t)$, $z_{[t]} = (z_1,\ldots,z_t)$,

$x_t \in \mathbb{R}^n,\ t = 1,\ldots,T$ sú rozhodovacie premenné, $x_{[t]} = (x_1,\ldots,x_t)$,

$\mathcal{X}, \mathcal{X}_1 \subset \mathbb{R}^n$ sú neprázdne množiny, $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X}_{[t]} = \mathcal{X} \times \ldots \times \mathcal{X}$, $t = 1,\ldots,T$,

$Z_F^t \subset \mathbb{R}^s$ je nosič odpovedajúci funkcii F^{ξ_t}, $Z_F^{[t]} = Z_F^1 \times \ldots \times Z_F^t$, $t = 1,\ldots,T$,

$f : \mathbb{R}^{nt} \times \mathbb{R}^{st} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia,

$\mathcal{X}_F^t : \mathbb{R}^{n(t-1)} \times \mathbb{R}^{st} \mapsto \mathcal{X},\ t = 2,\ldots,T$ sú merateľné hodnotovo uzavreté multifunkcie (viď kap. 5).

$T-$stupňovú nelineárnu úlohu stochastického programovania si zadefinujeme v nasledujúcom tvare

$$\varphi_T(F) = \inf \left\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \left[\mathcal{Q}_F^2(x_1,\xi_1) \right] : x_1 \in \mathcal{X}_1 \right\}, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) = \inf\ &\Big\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}\left[\mathcal{Q}_F^{t+1}(x_{[t]},\xi_{[t]})|z_{[t-1]}\right]: \\ &x_t \in \mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]})\Big\}, \quad t = 2,\dots,T-1, \qquad (3.2)\\ \mathcal{Q}_F^T(x_{[T-1]},z_{[T-1]}) = \inf\ &\Big\{ f(x_{[T]},z_{[T-1]}) : x_T \in \mathcal{X}_F^T(x_{[T-1]},z_{[T-1]})\Big\},\end{aligned}$$

kde

$\mathsf{E}_{F^{\xi_1}}$ značí strednú hodnotu odpovedajúcu $F^{\xi_1}(\cdot)$ a $\mathsf{E}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}\left[\cdot|z_{[t-1]}\right]$ značí podmienenú strednú hodnotu odpovedajúcu $F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(\cdot|z_{[t-1]})$,

$\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},\xi_{[t-1]})$, $t = 2,\dots,T$ závisia na podmienenej pravdepodobnostnej miere

$$\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},\xi_{[t-1]}) = \mathcal{X}^t_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}(x_{[t-1]},\xi_{[t-1]})$$

(porovnaj s definíciou množín obmedzení v úlohe (2.2), kde je množina $\mathcal{X}_t(x_{[t-1]},\xi_{[t-1]})$ v čase t už deterministická).

Z tohto zápisu vidíme, že náhodný element je úplne určený systémom podmienených distribučných funkcií

$$F = \left\{F^{\xi_1}(z_1),\ F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(z_t|z_{[t-1]}),\ t = 2,\dots,T\right\}. \qquad (3.3)$$

Problém (3.1) je jednostupňová úloha SP a problémy (3.2) sú parametrické jednostupňové úlohy SP. Teda aby bola viastupňová úloha SP (3.1),(3.2) dobre definovaná, musia byť optimálne hodnoty vnorených úloh (3.2) konečné skoro iste[1]. Tým pádom je nutné, aby boli množiny obmedzení neprázdne s.i. Ďalej si zaveďme špeciálnu vlastnosť postupnosti náhodných vektorov $\{\xi_t\}_{t=1}^T$ a individuálne pravdepodobnostné obmedzenia.

3.1 Autoregresná vlastnosť náhodného vektora

Uvažujme špeciálny prípad, kedy má postupnosť náhodných vektorov autoregresnú vlastnosť

$$\xi_t = \phi(\xi_{t-1}) + \mathcal{E}_t, \quad t = 1,\dots,T, \qquad (3.4)$$

kde ξ_0 a $\mathcal{E}_t, t = 1,\dots,T$, sú nezávislé a navyše sú $\mathcal{E}_t, t = 1,\dots,T$ rovnako rozdelené, $\phi(z)$ je $s-$rozmerná Lipschitzovská vektorová funkcia definovaná na $\mathbb{R}^s$, $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_s)$. Predpokladajme, že realizáciu ξ_0 poznáme a pomocou $F^{\mathcal{E}}$ označme distribučnú funkciu $\mathcal{E}_1$.

[1] Jav A nastáva skoro iste práve vtedy, keď $P(A) = 1$. Ďalej budeme značiť skratkou s.i.

Uľahčenie riešenia úloh viacstupňového SP pre náhodný parameter s autoregresnou vlastnosťou demonštrujme na zjednodušenom lineárnom prípade, v ktorom načrtneme aj iný prístup k ich riešeniu rozoberaný v článku Shapiro (2011, str. 63).

3.1.1 Lineárna viacstupňová úloha SP a autoregresná postupnosť

Uvažujme lineárnu úlohu viacstupňového SP definovanú rovnicami (2.2),(2.4) a predpokladajme, že všetky parametre procesu $\xi_{t-1}(\omega) := (c_t, B_t, A_t, b_t)$ okrem b_t sú pre jednotlivé fázy $t = 2, \ldots, T$ nezávislé (špeciálne deterministické). Nech b_t, $t = 2, \ldots, T$, tvorí autoregresnú postupnosť prvého radu, tj. $b_t = \phi(b_{t-1}) + \mathcal{E}_t$, kde ϕ a $\mathcal{E}_t, t = 2, \ldots, T$, definujeme ako v kapitole 3.1. Špeciálne

$$\phi(b_{t-1}) = \Phi b_{t-1}$$

pre vhodnú deterministickú maticu Φ. Potom môžeme podmienky prípustnosti z (2.4) zapísať v tvare

$$b_t - \Phi b_{t-1} = \mathcal{E}_t, \quad B_t x_{t-1} - \Phi b_{t-1} + A_t x_t = \mathcal{E}_t, \quad x_t \geq 0, \quad t = 2, \ldots, T.$$

Dosadením týchto obmedzení do úloh (2.11) alebo (3.1),(3.2) vidíme, že sú určené distribučnou funkciou $F^{\mathcal{E}}$. Iný možný prístup k problému uvedený v Shapiro (2011, str. 63) je nahradiť x_t vektorom (x_t, b_t) a proces ξ_{t-1} procesom $(c_t, B_t, A_t, \mathcal{E}_t)$, $t = 2, \ldots, T$ a tým úlohu transformovať na fázovo nezávislý prípad. Je nutné podotknúť, že v tejto úlohe sa nevyskytujú pravdepodobnostné obmedzenia, ktoré zavedieme v ďalšej sekcii.

$\triangle$

3.2 Individuálne pravdepodobnostné obmedzenia

Multifunkcie $\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]})$, $t = 2, \ldots, T$ budeme uvažovať v špeciálnom prípade *individuálnych pravdepodobnostých obmedzení*, tj. existujú funkcie $g_i^t(x_{[t]})$, $i = 1, \ldots, s$, $t = 2, \ldots, T$ definované na $\mathbb{R}^{nt}$ a konštanty $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$, $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1, \ldots, s$ také, že

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) &:= \mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}; \alpha) \\ &= \bigcap_{i=1}^{s} \left\{ x_t \in \mathcal{X} : \mathsf{P}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}} \left[g_i^t(x_{[t]}) \leq \xi_{it} | z_{[t-1]} \right] \geq \alpha_i \right\}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $\xi_t = (\xi_{1t}, \ldots, \xi_{st})$.

Ak definujeme kvantily pre $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1, \ldots, s$, $t = 2, \ldots, T$ nasledovne

$$\begin{aligned} u_{F_i^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}(\alpha_i|z_{[t-1]}) &= \sup\left\{ z_{it} \in \mathbb{R} : \mathsf{P}_{F_i^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}\left[z_{it} \leq \xi_{it}|z_{[t-1]} \right] \geq \alpha_i \right\}, \\ u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i) &= \sup\left\{ z_i \in \mathbb{R} : \mathsf{P}_{F_i^{\mathcal{E}}}\left[z_i \leq \mathcal{E}_i \right] \geq \alpha_i \right\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

kde $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_s)$, tak za platnosti predpokladu (3.4) dostaneme

$$u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i) = u_{F_i^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}(\alpha_i|z_{[t-1]}) - \phi_i(z_{t-1}),$$

kde $F_i^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}$ a $F_i^{\mathcal{E}}$, $i = 1, \ldots, s$ sú jednorozmerné marginálne distribučné funkcie odpovedajúce $F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}$ a $F^{\mathcal{E}}$. Z toho a (3.5) plynie

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) &= \bigcap_{i=1}^{s} \left\{ x_t \in \mathcal{X} : g_i^t(x_{[t]}) \leq u_{F_i^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}(\alpha_i|z_{[t-1]}) \right\} \\ &= \bigcap_{i=1}^{s} \left\{ x_t \in \mathcal{X} : g_i^t(x_{[t]}) \leq u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i) + \phi_i(z_{t-1}) \right\}. \end{aligned}$$

Ak pre $i = 1, \ldots, s$, $t = 2, \ldots, T$ platí $g_i^t(x_{[t]}) = \sum_{j=1}^{t} g_{ij}(x_j)$, tak definujme

$$\begin{aligned} h_i^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) &= h_i^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}, u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i)) \\ &:= u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i) + \phi_i(z_{t-1}) - \sum_{j=1}^{t-1} g_{ij}(x_j). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Potom

$$\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) = \bigcap_{i=1}^{s} \left\{ x_t \in \mathcal{X} : g_{it}(x_t) \leq h_i^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) \right\}.$$

Multifunkcie $\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]})$, $t = 2, \ldots, T$, sú teda za splnenia predpokladov určené systémom algebraických nerovností. Vzhľadom k tomu, že množiny obmedzení $\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]})$ sú určené kvantilmi $u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i)$, $i = 1, \ldots, s$, môžu vzniknúť problémy v situáciách, kedy nemáme úplnú informáciu o distribučnej funkcii $F^{\mathcal{E}}$. Účelové funkcie (3.2) rozloženého problému (3.1),(3.2) závisia pre každé $\xi_{[t-1]}$ na podmienenej distribučnej funkcii $F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}$, ktorá je pre každú hodnotu $\xi_{[t-1]} = z_{[t-1]}$ určená distribučnou funkciou $F^{\mathcal{E}}$, $t = 2, \ldots, T$. Odtiaľ plynie, že rozložená úloha je pre všetky hodnoty parametrov a každé t úplne určená distribučnou funkciou $F^{\mathcal{E}}$. Teda systém F je určený distribučnými funkciami F^{ξ_0}, $F^{\mathcal{E}}$. Ak je navyše ξ_0 známe, tak je systém F určený pomocou $F^{\mathcal{E}}$.

K odvodeniu vlastností, ktoré musí úloha (3.1),(3.2) za splnenia podmienok (3.4) a (3.5) splňovať, aby bola dobre definovaná, použijeme znalosti z deterministickej viackriteriálnej optimalizácie, ktoré nájdeme napríklad v Kaňková (2007b, str. 72-73).

3.3 Deterministické viackriteriálne programovanie

Deterministická úloha viackriteriálneho programovania môže byť zavedená ako nasledujúci problém (Geoffrion (1968))

$$\begin{aligned} &\min\ h_i^*(v),\ i = 1,\dots,s \\ &\text{z.p. } v \in \mathcal{X}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

kde h_i^*, $i = 1,\dots,s$ sú funkcie definované na $\mathbb{R}^n$ a $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna množina. Nasledujúce tvrdenia a definície čerpáme z Geoffrion (1968).

Definícia 3.1. *Vektor v^* je* eficientné riešenie *úlohy* (3.8) $\Leftrightarrow$ *neexistuje $v \in \mathcal{X}$, pre ktoré platí $h_i^*(v) \leq h_i^*(v^*)$, $i = 1,\dots,s$ a aspoň pre jedno i_0 je $h_{i_0}^*(v) < h_{i_0}^*(v^*)$. Množinu eficientných bodov úlohy* (3.8) *označíme $\mathcal{X}_E$.*

Definícia 3.2. *Vektor v^* je* (properly) riadne eficientné riešenie *úlohy* (3.8) $\Leftrightarrow$ *existuje konštanta $M > 0$, že pre každé $i \in \{1,\dots,s\}$, $v \in \mathcal{X}$ splňujúce $h_i^*(v) < h_i^*(v^*)$ existuje j splňujúce $h_j^*(v^*) < h_j^*(v)$ a*

$$\frac{h_i^*(v^*) - h_i^*(v)}{h_j^*(v) - h_j^*(v^*)} \leq M.$$

Množinu riadne eficientných bodov úlohy (3.8) *označíme $\mathcal{X}_{PE}$.*

Pre ďalšie tvrdenie si definujme množiny

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^s : \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_s),\ \lambda_i \in \langle 0,1 \rangle,\ i = 1,\dots,s,\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\},$$
$$\Lambda_+ = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^s : \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_s),\ \lambda_i \in (0,1 \rangle,\ i = 1,\dots,s,\ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Tvrdenie 3.1. *Nech $\mathcal{X}$ je konvexná množina a h_i^*, $i = 1,\dots,s$ sú konvexné funkcie na $\mathcal{X}$. Potom je v^* riadne eficientné riešenie úlohy* (3.8) $\Leftrightarrow$ *v^* je optimálne riešenie úlohy*

$$\begin{aligned} &\min\ h^{*,\lambda}(v) \\ &z.p.\ v \in \mathcal{X},\ \lambda \in \Lambda_+, \end{aligned}$$

kde

$$h^{*,\lambda}(v) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i h_i^*(v). \tag{3.9}$$

Ak označíme symbolmi $h^*(\mathcal{X}_E)$, $h^*(\mathcal{X}_{PE}) \subset \mathbb{R}^s$ obraz $\mathcal{X}_E$, $\mathcal{X}_{PE} \subset \mathbb{R}^n$ získaný pomocou vektorovej funkcie $h^* = (h_1^*, \ldots, h_s^*)$, tak platí podľa Geoffrion (1968)

$$\begin{aligned} &\mathcal{X} \text{ uzavretá, konvexná a } h_i^*,\ i = 1, \ldots, s \text{ spojité, konvexné na } \mathcal{X} \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow h^*(\mathcal{X}_{PE}) \subset h^*(\mathcal{X}_E) \subset \bar{h}^*(\mathcal{X}_{PE}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

kde $\bar{h}^*(\mathcal{X}_{PE})$ značí uzáver množiny $h^*(\mathcal{X}_{PE})$. Na záver si uvedieme nasledujúcu lemmu.

Lemma 3.2. *Nech $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna množina, h_i^*, $i = 1, \ldots, s$ funkcie definované na $\mathbb{R}^n$ a $h^{*,\lambda}$ definované vzťahom* (3.9)*. Potom platia nasledujúce vzťahy.*

(1) *Ak h_i^*, $i = 1, \ldots, s$ sú Lipschitzovské funkcie na $\mathcal{X}$ s konštantou L_i $\Rightarrow$ $h^{*,\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$ je Lipschitzovská funkcia na $\mathcal{X}$ s konštantou nie väčšou ako $\sum_{i=1}^s L_i$.*

(2) *Ak h_i^*, $i = 1, \ldots, s$ sú obmedzené funkcie na $\mathcal{X}$, tj. $|h_i^*(v)| \leq K$, $v \in \mathcal{X}$, $i = 1, \ldots, s$, $K > 0 \Rightarrow$ pre každé v je $h^{*,\lambda}$ Lipschitzovská funkcia na Λ s konštantou nie väčšou ako sK.*

3.4 Vlastnosti dvojstupňového SP

Aby bola úloha SP dobre definovaná, musí mať vlastnosti, ktoré sme si načrtli v úvode kapitoly 3. Zaoberajme sa najprv dvojstupňovým prípadom, kde v úlohe (3.1),(3.2) vezmeme $T = 2$. Označme

$$\begin{gathered} \xi = \xi_1, \qquad x = x_1, \qquad y = x_2, \\ \mathcal{Q}(x, \xi) = \mathcal{Q}_F^2(x_1, z_1), \quad \mathcal{X}_2(x, \xi) = \mathcal{X}_F^2(x_1, \xi_1). \end{gathered}$$

Dostávame dvojstupňový stochastický problém tvaru

$$\begin{aligned} \varphi_2(F) &= \inf_{x \in \mathcal{X}_1} \mathsf{E}_{F^\xi}\left[\mathcal{Q}(x, \xi)\right], \\ \mathcal{Q}(x, \xi) &= \inf_{y \in \mathcal{X}_2(x, \xi)} f(x, y, \xi), \end{aligned} \tag{3.11}$$

kde

$$\mathcal{X}_2(x, \xi) = \bigcap_{i=1}^{s} \left\{y \in \mathcal{X} : g_{i2}(y) \leq \xi_i - g_{i1}(x)\right\}. \tag{3.12}$$

Táto úloha je dobre definovaná, ak spĺňa

(1) $\mathcal{Q}(x, \xi) \in (-\infty, \infty)$ s.i. pre každé $x \in \mathcal{X}_1$,

(2) existuje konečná $\mathsf{E}_{F^\xi}\left[\mathcal{Q}(x, \xi)\right]$ pre každé $x \in \mathcal{X}_1$.

Aby boli tieto podmienky splnené, tak musí byť množina $\mathcal{X}_2(x, \xi)$ neprázdna s.i. pre každé $x \in \mathcal{X}_1$, $\xi \in Z_{F^\xi}$ (pozri napr. Birge a Louveaux (1997, str. 83-137) alebo Kaňková (2007b), kde sú uvedené postačujúce predpoklady pre lineárnu aj nelineárnu úlohu SP s kompenzáciou).

Zo vzťahu (3.12) plynie

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x, \xi) \neq \emptyset \ \text{ pre } \ x \in \mathbb{R}^n, \xi \in \mathbb{R}^s & \\ \Rightarrow \mathcal{X}(x',\xi') \neq \emptyset \ \text{ pre každé } \ x', \xi' \ \text{ splňujúce} & \\ \xi_i' - g_{i1}(x') \geq \xi_i - g_{i1}(x), \quad i = 1, \dots, s. & \end{aligned}$$

Teda ak definujeme

$$\mathcal{Z}(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi}) = \arg \min_{x,\ \xi} \Big\{ \xi_i - g_{i1}(x),\ i = 1, \dots, s : x \in \mathcal{X}_1,\ \xi \in Z_{F^\xi} \Big\},$$

tak platí

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x, \xi) \neq \emptyset \ \text{ pre } \ (x, \xi) \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi}) \\ \Rightarrow \mathcal{X}(x, \xi) \neq \emptyset \ \text{ pre } \ x \in \mathcal{X}_1,\ \xi \in Z_{F^\xi}. \end{aligned}$$

Množinu $\mathcal{Z}(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi})$ však často vieme určiť iba približne. Skúsme preto použiť teóriu eficientných bodov a označme $\mathcal{Z}_E(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi})$, $\mathcal{Z}_{PE}(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi}) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$ množiny eficientných a riadne eficientných bodov (x, ξ) problému

$$\begin{aligned} & \min \ \xi_i - g_{i1}(x),\ i = 1, \dots, s \\ & \text{z.p. } x \in \mathcal{X}_1,\ \xi \in Z_{F^\xi}. \end{aligned}$$

Potom platí

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x, \xi) \neq \emptyset \ \text{ pre } \ (x, \xi) \in \mathcal{Z}_E(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi}) \\ \Rightarrow \mathcal{X}(x, \xi) \neq \emptyset \ \text{ pre } \ x \in \mathcal{X}_1,\ \xi \in Z_{F^\xi}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ak pre $x \in \mathcal{X}_1$, $\xi \in Z_{F^\xi}$, $\lambda \in \Lambda$ definujeme funkciu

$$G^\lambda(x, \xi) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \big(\xi_i - g_{i1}(x) \big)$$

a ak $\mathcal{X}_1$, Z_{F^ξ} sú konvexné množiny, g_{i1}, $i = 1, \dots, s$ sú konkávne funkcie na $\mathcal{X}_1$, tak podľa tvrdenia 3.1 platí nasledujúca ekvivalencia

$$\begin{aligned} (x, \xi) \ \text{ je riešenie úlohy } \ \min \big\{ G^\lambda(x, \xi) : x \in \mathcal{X}_1,\ \xi \in Z_{F^\xi} \big\} \ \text{ pre nejaké } \ \lambda \in \Lambda_+ \\ \Leftrightarrow (x, \xi) \in \mathcal{Z}_{PE}(\mathcal{X}_1, Z_{F^\xi}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Spojitosť medzi (3.13) a (3.14) získame využitím vzťahu (3.10). K tomuto účelu definujme množiny

$$\mathcal{X}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}}) = \arg\min_{x,\,\xi} \Big\{ G^{\lambda}(x,\,\xi) : x \in \mathcal{X}_1, \xi \in Z_{F^{\xi}},\ \lambda \in \Lambda_+ \Big\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}}) = \Big\{ & u \in \mathbb{R}^s : u_i = \xi_i - g_{i1}(x), \quad i = 1,\ldots,s \\ & \text{pre nejaké } \ (x,\,\xi) \in \mathcal{Z}_{PE}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}}) \Big\}\end{aligned}$$

a $\bar{\mathcal{X}}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$, $\bar{\mathcal{H}}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$ ako uzávery množín $\mathcal{X}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$, $\mathcal{H}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$. Zjavne platí $\bar{\mathcal{X}}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}}) = \bar{\mathcal{Z}}_{PE}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$, kde $\bar{\mathcal{Z}}_{PE}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$ je uzáver $\mathcal{Z}_{PE}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$. Navyše, ak sú $\mathcal{X}_1$, $Z_{F^{\xi}}$ kompaktné, konvexné množiny a g_{i1} spojitá, konkávna funkcia na $\mathcal{X}_1$, tak každé $u \in \bar{\mathcal{H}}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}})$ môžeme zapísať v tvare

$$\begin{aligned}& u_i = \xi_i - g_{i1}(x), \quad i = 1,\ldots,s \ \text{ pre nejaké } \ x \in \mathcal{X}_1, \xi \in Z_{F^{\xi}}, \\ & (x,\,\xi) \in \bar{\mathcal{X}}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}}).\end{aligned}$$

Tým je dokázané nasledujúce tvrdenie, pozri Kaňková (2007b, str. 73-75).

Tvrdenie 3.3. *Ak sú $\mathcal{X}_1$, $Z_{F^{\xi}}$ uzavreté, ohraničené konvexné množiny a g_{i1}, $i = 1,\ldots,s$ spojité konkávne funkcie na $\mathcal{X}_1$, potom platí*

$$\begin{aligned}& \mathcal{X}(x,\,\xi) \neq \emptyset \ \ \textit{pre každé} \ \ (x,\,\xi) \in \bar{\mathcal{X}}^{\lambda}(\mathcal{X}_1, Z_{F^{\xi}}) \\ \Rightarrow\ & \mathcal{X}(x,\,\xi) \neq \emptyset \ \ \textit{pre každé} \ \ x \in \mathcal{X}_1,\ \xi \in Z_{F^{\xi}}.\end{aligned}$$

Podľa lemmy 3.2 je možné ľavú stranu implikácie z tvrdenia 3.3 overiť aspoň približne.

3.5 Vlastnosti viacstupňového SP

Vráťme sa k viacstupňovému problému (3.1),(3.2) a zobecnime vlastnosti dobre definovanej úlohy z dvojstupňového prípadu (kapitola 3.4) na viacstupňový. Je potrebné aby boli splnené tvrdenia z nasledujúcich sekcií, ktoré aj s dôkazmi nájdeme v Kaňková (2008, str. 164-166).

3.5.1 Množiny obmedzení

Nech platí (3.4) a (3.5). Pre $t = 2,\ldots,T$ definujme deterministickú viackriteriálnu úlohu

$$\begin{aligned}& \min\ h_i^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}),\ i = 1,\ldots,s \\ & \text{z.p. } x_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]},\ z_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]},\end{aligned} \tag{3.15}$$

kde $h_i^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]})$ definované ako v (3.7). Pre $x_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]}$, $z_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]}$, $\lambda \in \Lambda$ definujme

$$
\begin{aligned}
G^{t,\lambda}(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \; h_i^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]}), \\
\mathcal{X}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]}) &= \underset{x_{[t-1]},\; z_{[t-1]}}{\arg\min} \Big\{ G^{t,\lambda}(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) : x_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]}, \\
&\qquad\qquad z_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]},\ \lambda \in \Lambda_+ \Big\}.
\end{aligned}
$$

Ak definujeme pre $u = (u_1, \ldots ,u_s) \in \mathbb{R}^s$ množinu

$$
\mathcal{X}_{F,h}^t(u) = \Big\{ x_t \in \mathcal{X} : g_{it}^t(x_t) \le u_i,\ i = 1, \ldots ,s \Big\},
$$

potom pre $x_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]}$, $z_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]}$ platí

$$
\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) = \mathcal{X}_{F,h}^t\big(h(x_{[t-1]},z_{[t-1]})\big).
$$

Nakoniec definujme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]}) = \Big\{ & u \in \mathbb{R}^s : u_i = h_i^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]}),\ i = 1, \ldots ,s \\
& \text{pre nejaké } \ (x_{[t-1]},z_{[t-1]}) \in \mathcal{X}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]}) \Big\}
\end{aligned}
$$

a symbolmi $\bar{\mathcal{X}}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$, $\bar{\mathcal{H}}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$ označme uzávery množín $\mathcal{X}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$, $\mathcal{H}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$. Rozšírením výsledkov z kapitoly 3.4 (tvrdenie 3.3) podľa postupu uvedeného v Kaňková (2008, str. 164) dostávame nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie 3.4. *Nech* $\alpha = (\alpha_1, \ldots ,\alpha_s)$, $\alpha_i \in (0,1)$. *Ak pre* $t \in \{2, \ldots ,T\}$ *platí*

(1) $\mathcal{X}$, Z_F^{t-1} *sú neprázdne konvexné kompaktné množiny,*

(2) a) ϕ_i, $i = 1, \ldots ,s$ *sú konvexné funkcie na* Z_F^{t-1},

b) g_{ij}^t, $i = 1, \ldots ,s$, $j = 1, \ldots ,t-1$ *sú konkávne funkcie na* $\mathcal{X}_{[t-1]}$,

c) $h_i^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]})$, $i = 1, \ldots ,s$ *sú definované ako v* (3.7),

(3) $\bar{\mathcal{X}}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$ *je uzáver množiny* $\mathcal{X}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$,

potom $\quad \mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) \neq \emptyset \quad$ *pre každé* $\ (x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) \in \bar{\mathcal{X}}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$

$$
\Rightarrow \mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) \neq \emptyset \quad \textit{pre každé } \ x_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]},\ z_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]}.
$$

3.5.2 Účelové funkcie

Nasledujúcu lemmu a jej dôkaz nájdeme v Kaňková (2008, str. 166).

Lemma 3.5. *Nech platí predpoklad* (3.4), $t \in \{2, \ldots, T\}$. *Ak*

(1) $P_{F^{\mathcal{E}}}(\cdot)$ *je absolutne spojitá vzhľadom na Lebesgueovu mieru v* $\mathbb{R}^s$ *a* $f^{\mathcal{E}}(\cdot)$ *je odpovedajúca hustota,*

(2) $\mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t]})$ *je Lipschitzovská funkcia na* $\mathcal{X}_{[t-1]} \times Z_F^{[t]}$ *(vzhľadom na* $\mathcal{L}_1$ *normu) a existuje konečná* $\mathsf{E}_{F^{\mathcal{E}}}[\mathcal{E}]$,

potom je

$$\mathsf{E}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}\left[\mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]}, \xi_{[t]})|z_{[t-1]}\right]$$

Lipschitzovská funkcia na $Z_{F^{z_1}}$ *vzhľadom na* $\mathcal{L}_1$ *normu.*

Dôkaz: Vidíme, že platí $F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(z_t|z_{[t-1]}) = F^{\mathcal{E}}(z_t - \phi(z_{t-1}))$ a teda

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}\left[\mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]}, \xi_{[t]})|z_{[t-1]}\right] \\
&= \int\limits_{Z_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}} \mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t]})\, dF^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(z_t|z_{[t-1]}) \\
&= \int\limits_{Z_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}}} \mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t]}) f^{\mathcal{E}}(z_t - \phi(z_{[t-1]}))\, dz_t \\
&= \int\limits_{Z_{F^{\mathcal{E}}}} \mathcal{Q}_F^t\big(x_{[t-1]}, (z_{[t-1]}, u + \phi(z_{t-1}))\big) f^{\mathcal{E}}(u)\, du,
\end{aligned}$$

kde $z_{[t]} = (z_{[t-1]}, z_t)$. Z predpokladu (2) je $\mathcal{Q}_F^t(x_{[t-1]}, (z_{[t-1]}, u + \phi(z_{t-1})))$ Lipschitzovská na $\mathcal{X}_{[t-1]} \times Z_F^{[t]}$ (vzhľadom na $\mathcal{L}_1$ normu). Odtiaľ dostaneme tvrdenie Lemmy 3.5.

□

3.6 Aproximácia riešenia úlohy viacstupňového SP

Ak nahradíme systém (3.3) iným systémom

$$G = \left\{G^{\xi_1}(z_1),\, G^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(z_t|z_{[t-1]}),\, t = 2, \ldots, T\right\}, \tag{3.16}$$

dostaneme nový viacstupňový stochastický problém. Ak postupnosť náhodných vektorov určená systémom G spĺňa vlastnosť (3.4), tak distribučnú funkciu $\mathcal{E}_1$ z tejto definície označme ako $G^{\mathcal{E}}$. Optimálnu hodnotu nového problému označme symbolom $\varphi_T(G)$. Predpokladajme, že pre $t = 2,\ldots,T$ existujú multifunkcie $\mathcal{X}_t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]})$ definované na $\mathbb{R}^{(t-1)n} \times \mathbb{R}^{ts}$ splňujúce

$$\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) = \mathcal{X}_t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) \quad \text{nezávisle na systéme } F. \tag{3.17}$$

Navyše predpokladajme

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}, \\ &\mathcal{X}_t(x_{[t-1]}, z_{[t-1]}) \subset \mathcal{X}, \quad x_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]}, \quad z_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]}, \quad t = 2,\ldots,T. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Zo vzťahu medzi úlohou (3.1),(3.2) a (3.16), (3.17) a z trojuholníkovej nerovnosti dostávame pre každé $x_1 \in \mathcal{X}_1$ (Kaňková a Šmíd (2004, str. 14-15))

$$\begin{aligned} &\left| \mathsf{E}_{F^{\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^2(x_1,\xi_1) - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}}\, \mathcal{Q}_G^2(x_1,\xi_1) \right| \leq \\ &\leq \left| \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) \right| \\ &+ \Bigg| \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \inf_{x_3 \in \mathcal{X}_3(x_{[2]},z_{[2]})} \mathsf{E}_{F^{\xi_3|\xi_{[2]}}}\, \mathcal{Q}_F^4(x_{[3]},\xi_{[3]}) - \\ &\quad - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{G^{\xi_2|\xi_1}} \inf_{x_3 \in \mathcal{X}_3(x_{[2]},z_{[2]})} \mathsf{E}_{F^{\xi_3|\xi_{[2]}}}\, \mathcal{Q}_F^4(x_{[3]},\xi_{[3]}) \Bigg| \\ &\vdots \\ &+ \Bigg| \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1,z_1)} \ldots \inf_{x_{T-2} \in \mathcal{X}_{T-2}(x_{[T-3]},z_{[T-3]})} \mathsf{E}_{G^{\xi_{T-2}|\xi_{[T-3]}}} \\ &\quad \inf_{x_{T-1} \in \mathcal{X}_{T-1}(x_{[T-2]},z_{[T-2]})} \mathsf{E}_{F^{\xi_{T-1}|\xi_{[T-2]}}}\, \mathcal{Q}_F^T(x_{[T-1]},\xi_{[T-1]}) - \\ &\quad - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1,z_1)} \ldots \inf_{x_{T-2} \in \mathcal{X}_{T-2}(x_{[T-3]},z_{[T-3]})} \mathsf{E}_{G^{\xi_{T-2}|\xi_{[T-3]}}} \\ &\quad \inf_{x_{T-1} \in \mathcal{X}_{T-1}(x_{[T-2]},z_{[T-2]})} \mathsf{E}_{G^{\xi_{T-1}|\xi_{[T-2]}}}\, \mathcal{Q}_G^T(x_{[T-1]},\xi_{[T-1]}) \Bigg| . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pre prvý člen pravej strany nerovnosti (3.19) platí $(\forall x_1 \in \mathcal{X}_1)$

$$\begin{aligned} &\left| \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_3|\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) \right| \\ &= \left| \mathsf{E}_{F^{\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^2(x_1,\xi_1) - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}}\, \mathcal{Q}_F^2(x_1,\xi_1) \right| . \end{aligned}$$

Použitím trojuholníkovej nerovnosti na druhý člen pravej strany nerovnosti (3.19) dostaneme ($\forall x_1 \in \mathcal{X}_1$)

$$\begin{aligned}
&\Big| \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \inf_{x_3 \in \mathcal{X}_{[3]}(x_{[2]},z_{[2]})} \mathsf{E}_{F^{\xi_3|\xi_{[2]}}} \mathcal{Q}_F^4(x_{[3]},\xi_{[3]}) - \\
&\quad - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{G^{\xi_2|\xi_1}} \inf_{x_3 \in \mathcal{X}_{[3]}(x_{[2]},z_{[2]})} \mathsf{E}_{F^{\xi_3|\xi_{[2]}}} \mathcal{Q}_F^4(x_{[3]},\xi_{[3]}) \Big| \\
&= \Big| \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{G^{\xi_2|\xi_1}} \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) \Big| \\
&\le \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \Big| \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) - \inf_{x_2 \in \mathcal{X}_{[2]}(x_1,z_1)} \mathsf{E}_{G^{\xi_2|\xi_1}} \mathcal{Q}_F^3(x_{[2]},\xi_{[2]}) \Big| .
\end{aligned}$$

Rovnaký postup môžeme aplikovať aj na ostatné členy pravej strany nerovnosti (3.19). Na vyšetrenie stability úlohy (3.1),(3.2) vzhľadom k systému F, teda na preskúmanie veľkosti výrazu

$$|\varphi_T(F) - \varphi_T(G)| ,$$

si vhodne zadefinujme vzdialenosť d_s na priestore $s-$rozmerných distribučných funkcií a reálnu funkciu $H_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$ nasledujúcim spôsobom

(1) $\forall x_1 \in \mathcal{X}_1$

$$\Big| \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \mathcal{Q}_F^2(x_1,\xi_1) - \mathsf{E}_{G^{\xi_1}} \mathcal{Q}_G^2(x_1,\xi_1) \Big| \le H_1\big(d_s(F^{\xi_1},G^{\xi_1})\big),$$

(2) $\forall t = 2,\dots,T-1, \quad \forall x_{[t]} \in \mathcal{X}_{[t]},\ z_{[t]} \in Z_F^{[t]}$

$$\begin{aligned}
&\Big| \mathsf{E}_{F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}} \big[\mathcal{Q}_F^{t+1}(x_{[t]},\xi_{[t]})|z_{[t-1]}\big] - \mathsf{E}_{G^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}} \big[\mathcal{Q}_F^{t+1}(x_{[t]},\xi_{[t]})|z_{[t-1]}\big] \Big| \\
&\le H_1\Big(d_s\big(F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(\cdot|z_{[t-1]}),G^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(\cdot|z_{[t-1]})\big)\Big).
\end{aligned}$$

Ak teda platí (3.4), potom sú výrazy $d_s(F^{\xi_2},G^{\xi_2})$ a $d_s\big(F^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(\cdot|z_{[t-1]}), G^{\xi_t|\xi_{[t-1]}}(\cdot|z_{[t-1]})\big)$, $t = 2,\dots,T-1$ určené odpovedajúcimi $s-$rozmernými distribučnými funkciami $F^{\mathcal{E}}$, $G^{\mathcal{E}}$.

3.6.1 Jednostupňový stochastický problém

Na uvedenie výsledkov získaných pre jednostupňové SP, viď Kaňková (2008, str. 158-160), zaveďme nasledujúce značenie

$f(x,z)$ je funkcia definovaná na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$,

$\xi := \xi(\omega) = (\xi_1,\dots,\xi_s)$, $\eta := \eta(\omega) = (\eta_1,\dots,\eta_s)$ sú $s-$rozmerné náhodné vektory definované na $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$,

F, P_F, Z_F (resp. G, P_G, Z_G) sú distribučná funkcia, pravdepodobnostná miera a nosič odpovedajúce ξ (resp. η),

F_i, G_i, $i = 1, \ldots, s$ sú jednorozmerné marginálne distribučné funkcie odpovedajúce F a G,

$\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdna množina,

$\mathcal{X}_F$, $\mathcal{X}_G \subset \mathbb{R}^n$ sú neprázdne množiny obecne závislé na F a G.

Jednostupňovú úlohu SP (tj. (3.1) pre $T = 1$) máme v tvare

$$\varphi(F) = \varphi_1(F) = \inf \Big\{ \mathsf{E}_F f(x, \xi) : x \in \mathcal{X} \Big\}.$$

Zaveďme *Wassersteinovu metriku* $d^s_{W_1}(F, G) := d^s_{W_1}(\mathsf{P}_F, \mathsf{P}_G)$, pozri Kaňková (2007a, str. 105-106) a Vallender (1974). Najskôr definujme množinu

$$\mathcal{M}.(\mathbb{R}^s) = \left\{ \mathsf{P} \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^s) : \int\limits_{\mathbb{R}^s} \| z \| \; \mathsf{P}(dz) < \infty \right\},$$

kde $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^s)$ je množina všetkých Borelovských pravdepodobnostných mier na $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$ a $\| \cdot \|$ je vhodná norma na $\mathbb{R}^s$. Potom Wassersteinovu metriku definujeme vzťahom

$$d^s_{W_1}(F, G) = \inf \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s} \| z - \bar{z} \| \; \kappa(dz \times d\bar{z}) : \right. \\ \left. \kappa \in D(\mathsf{P}_F, \mathsf{P}_G), \; \mathsf{P}_F, \mathsf{P}_G \in \mathcal{M}.(\mathbb{R}^s) \right\},$$

kde $D(\mathsf{P}_F, \mathsf{P}_G)$ je množina pravdepodobnostných mier na $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s)$, ktorých marginálne rozdelenia sú miery P_F a P_G. Znakom $\| \cdot \|^s_i$, $i = 1{,}2$ značíme normu odpovedajúcu priestoru $\mathcal{L}_i$, $i = 1{,}2$ v $\mathbb{R}^s$. Ak je Wassersteinova metrika určená normou $\| \cdot \|^s_1$, tak značíme $\mathcal{M}.(\mathbb{R}^s) := \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^s)$. Nasledujúce tvrdenie plynie z Vallender (1974) a nájdeme ho aj v Kaňková (2008, str. 158).

Tvrdenie 3.6. *Nech $P_F, P_G \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^s)$. Ak je pre každé $x \in \mathcal{X}$ funkcia $f(x, z)$ Lipschitzovská v $z \in \mathbb{R}^s$ (vzhľadom na $\mathcal{L}_1$ normu) s konštantou L nezávislou na $x \in \mathcal{X}$ a navyše pre každé $x \in \mathcal{X}$ existujú konečné $E_F f(x, \xi)$, $E_G f(x, \eta)$, potom pre každé $x \in \mathcal{X}$ platí*

$$\big| E_F f(x, \xi) - E_G f(x, \eta) \big| \leq L \sum_{i=1}^{s} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F_i(z_i) - G_i(z_i)| \; dz_i.$$

Lemma z článku Kaňková (2008, str. 158), ktorú si predstavíme, plynie z trojuholníkovej nerovnosti.

Lemma 3.7. *Nech sú množiny $\mathcal{X}_F$, $\mathcal{X}_G$, $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ neprázdne kompaktné, $\mathcal{X}_F$, $\mathcal{X}_G \subset \mathcal{X}$, a funkcia f je rovnomerne spojitá na $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^s$. Ak sú naviac pre každé $x \in \mathcal{X}$ konečné $\mathsf{E}_F\, f(x,\, \xi)$, $\mathsf{E}_G\, f(x,\, \eta)$, potom*

$$\begin{aligned} &\left| \inf_{x \in \mathcal{X}_F} \mathsf{E}_F\, f(x,\, \xi) - \inf_{x \in \mathcal{X}_G} \mathsf{E}_G\, f(x,\, \eta) \right| \leq \\ \leq &\left| \inf_{x \in \mathcal{X}_F} \mathsf{E}_F\, f(x,\, \xi) - \inf_{x \in \mathcal{X}_F} \mathsf{E}_G\, f(x,\, \eta) \right| + \left| \inf_{x \in \mathcal{X}_F} \mathsf{E}_G\, f(x,\, \xi) - \inf_{x \in \mathcal{X}_G} \mathsf{E}_G\, f(x,\, \eta) \right|. \end{aligned}$$

Tvrdenie 3.6 môžeme evidentne použiť na skúmanie empirických odhadov. Označme pomocou F^N empirickú distribučnú funkciu určenú náhodnou postupnosťou $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ odpovedajúcou distribučnej funkcii F. Ďalej zaveďme kvantily podobne ako v definícii (3.6)

$$u_{F_i}(\alpha_i) = \sup \Big\{ z_i \in \mathbb{R} : \mathsf{P}_{F_i}\left[z_i \leq \xi_i \right] \geq \alpha_i \Big\}, \quad \alpha_i \in (0{,}1),\ i = 1, \ldots, s$$

a definujme predpoklad

$$\begin{aligned} &\exists \text{ konštanty } \vartheta_i,\ i = 1, \ldots, s \text{ a okolia } U_i\big(u_{F_i}(\alpha_i)\big) \text{ kvantilov } u_{F_i}(\alpha_i) \\ &\quad \text{také, že } f_i(z_i) > \vartheta_i \text{ pre } z_i \in U_i\big(u_{F_i}(\alpha_i)\big). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Potom platí implikácia uvedená v Kaňková (2008, str. 159)

$$\begin{aligned} (3.20) \quad \Rightarrow \quad &\mathsf{P}\left\{ N^{\beta} \left| u_{F_i}(\alpha_i) - u_{F_i^N}(\alpha_i) \right| > k \right\} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0 \\ &\text{pre každé } \ k > 0, \quad \beta \in \left(0,\, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Ďalšie tvrdenie z Kaňková (2008, str. 159) hovorí o rýchlosti konvergencie empirického odhadu distribučnej funkcie v $\mathcal{L}_1$ norme. Pre dvojstupňový lineárny prípad sa vlastnosťami konvergencie aproximovaných úloh zaoberá Birge a Louveaux (1997, str. 323-329).

Tvrdenie 3.8. *Nech $k > 0$, $\mathsf{P}_F \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^s)$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ je nezávislá postupnosť $s-$rozmerných náhodných vektorov so spoločnou distribučnou funkciou F. Ak*

(1) *F^N je určená postupnosťou $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, $N = 1{,}2, \ldots$,*

(2) P_{F_i}, $i = 1,\dots,s$ *sú absolútne spojité vzhľadom na Lebesgueovu mieru na* $\mathbb{R}^1$, *kde hustota* f_i *odpovedá* F_i,

(3) *existujú konštanty* C_1, $C_2 > 0$ *a* $K > 0$ *také, že platí*

$$f_i(z_i) \leq C_1 e^{-C_2|z_i|}, \quad z_i \in (-\infty,\ -K) \cup (K,\ \infty), \quad i = 1,\dots,s,$$

potom pre $i \in \{1,\dots,s\}$, $k > 0$ *a* $\beta \in \left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ *platí*

$$\mathsf{P}\left\{ N^\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|F_i(z_i) - F_i^N(z_i)\right| dz_i > k \right\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Tvrdenie 3.8 podľa predpokladu (3) platí pre rozdelenia s exponenciálnymi chvostami. Zjemnením podmienok ho rozšírime na väčšiu množinu rozdelení. Zaveďme formuláciu z článku Houda a Kaňková (2012, str. 56-57), kde je aj dokázaná. Tvrdenie 3.8 je potom špeciálny prípad nasledujúceho tvrdenia.

Tvrdenie 3.9. *Nech* $k > 0$, $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ *je nezávislá postupnosť* $s-$*rozmerných náhodných vektorov so spoločnou distribučnou funkciou* F *a nech platí*

(1) F^N *je určená postupnosťou* $\{\xi_i\}_{i=1}^N$, $N = 1,2,\dots,$

(2) P_{F_i}, $i = 1,\dots,s$ *sú absolútne spojité vzhľadom na Lebesgueovu mieru na* $\mathbb{R}^1$, *kde hustota* f_i *odpovedá* F_i.

Ak pre $i \in \{1,\dots,s\}$ *existuje* $\beta > 0$ *a* $R := R(N) > 0$ *definované na* $\mathbb{N}$ *splňujúce* $R(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ *a navyše*

$$N^\beta \int\limits_{-\infty}^{-R(N)} F_i(z_i)\ dz_i \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0, \qquad N^\beta \int\limits_{R(N)}^{+\infty} [1 - F_i(z_i)]\ dz_i \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

$$2NF_i\big(-R(N)\big) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0, \qquad 2N\big[1 - F_i\big(R(N)\big)\big] \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0,$$

$$\left(\frac{12N^\beta R(N)}{t} + 1\right) e^{-2N\left(\frac{t}{12R(N)N^\beta}\right)^2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Potom platí

$$\mathsf{P}\left\{ N^\beta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|F_i(z_i) - F_i^N(z_i)\right| dz_i > k \right\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Predpoklady tohto tvrdenia splňujú rozdelenia s exponenciálnymi chvostami, ale napríklad aj logaritmicko-normálne, Weibullovo alebo Paretovo rozdelenie, pozri Houda a Kaňková (2012, str. 58-60).

Logaritmicko-normálne rozdelenie:

Nech $m \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Logaritmicko-normálne (log-normálne) rozdelenie $\mathsf{LN}(m, b)$ s parametrami m, b určujúcimi logaritmus jeho strednej hodnoty a smerodatnej odchylky má hustotu

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, b\, z} \exp\left\{-\frac{(\ln(z) - m)^2}{2\, b^2}\right\}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

a distribučnú funkciu tvaru

$$F(z) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(z) - m}{b}\right), & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

kde $\Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$ je distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia. Stredná hodnota μ a rozptyl σ^2 log-normálneho rozdelenia sú rovné

$$\mu = \exp\left\{m + \frac{b^2}{2}\right\}, \qquad \sigma^2 = \mu^2 \left(e^{b^2} - 1\right).$$

Weibullovo rozdelenie:

Nech $a, b > 0$. Weibullovo rozdelenie $\mathsf{Weibull}(a, b)$ s parametrami a, b určujúcimi jeho tvar a mierku má hustotu tvaru

$$f(z) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{z}{b}\right)^{a-1} \exp\left\{-\left(\frac{z}{b}\right)^a\right\}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$$

distribučnú funkciu tvaru

$$F(z) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z}{b}\right)^a\right\}, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0 \end{cases}$$

a strednú hodnotu μ a rozptyl σ^2 rovné

$$\mu = b\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right), \qquad \sigma^2 = b^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{a}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{a}\right)\right],$$

kde Γ je gama funkcia definovaná ako $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty z^{a-1}\, e^{-z}\, dz$, $a > 0$, pozri napríklad Anděl (2011, str. 22-27).

Ak vezmeme $R(N) = N^\gamma$, $\gamma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\beta > 0$ a $\gamma + \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, tak tieto rozdelenia splňujú predpoklady tvrdenia 3.9. V článku Houda a Kaňková (2012, str. 58-59) je dokázaná platnosť pre Weibullovo rozdelenie. Pre Paretovo rozdelenie však bude miera konvergencie β o niečo horšia.

Paretovo rozdelenie:

Nech $a, b > 0$. Paretovo rozdelenie $\mathsf{Pareto}(a, b)$ s parametrami a, b určujúcimi jeho tvar a mierku má hustotu tvaru

$$f(z) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{b}{z}\right)^{a+1}, & z \geq b, \\ 0, & z < b, \end{cases}$$

distribučnú funkciu tvaru

$$F(z) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{b}{z}\right)^{a}, & z \geq b, \\ 0, & z < b \end{cases}$$

a strednú hodnotu μ a rozptyl σ^2 rovné

$$\mu = \begin{cases} \frac{a\,b}{a-1}, & a > 1, \\ +\infty, & a \leq 1, \end{cases} \qquad \sigma^2 = \begin{cases} \frac{a\,b^2}{(a-1)^2\,(a-2)}, & a > 2, \\ +\infty, & a \in (1, 2\rangle. \end{cases}$$

Vidíme, že na rozdiel od predošlých dvoch rozdelení, ktoré majú momenty všetkých radov konečné, pre Paretovo rozdelenie sú $\mathsf{E}_{\mathsf{Pareto}}\, \xi^r$ konečné iba pre $r < a$. Podľa Houda a Kaňková (2012, str. 60) teda miera konvergencie β nezávisí len na existencii konečnej momentovej vytvorujúcej funkcie, ale aj na existencii konečných momentov. Nasledujúca veta plynie z tvrdení 3.6 a 3.9, pozri Houda a Kaňková (2012, str. 57-63).

Veta 3.10. *Nech $\mathsf{P}_F \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^s)$, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ je nezávislá postupnosť $s-$rozmerných náhodných vektorov so spoločnou distribučnou funkciou F. Ak*

(1) *F^N je určená postupnosťou $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$, $N = 1,2,\ldots,$*

(2) *P_{F_i}, $i = 1,\ldots,s$ sú absolútne spojité vzhľadom na Lebesgueovu mieru na $\mathbb{R}^1$, kde hustota f_i odpovedá F_i,*

(3) *$f(x,\, z)$ je rovnomerne spojitá funkcia na $\mathcal{X} \times \mathbb{R}^s$,*

(4) *pre každé $x \in \mathcal{X}$ je funkcia $f(x,\, z)$ Lipschitzovská v $z \in \mathbb{R}^s$ (vzhľadom na $\mathcal{L}_1$ normu) s konštantou L nezávislou na $x \in \mathcal{X}$ a navyše pre každé $x \in \mathcal{X}$ existuje konečná $\mathsf{E}_F\, f(x,\, \xi)$,*

(5) *pre $r > 2$ platí $\mathsf{E}_{F_i}\, |\xi_i|^r < \infty$, $i = 1,\ldots,s$,*

(6) *konštanty β, $\gamma > 0$ splňujú nerovnosti*

$$0 < \beta + \gamma < \frac{1}{2}, \qquad \gamma > \frac{1}{r}, \qquad \beta + (1-r)\gamma < 0,$$

potom platí

$$\mathsf{P}\left\{N^{\beta}\left|\varphi(F) - \varphi(F^N)\right| > k\right\} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

3.6.2 Viacstupňový stochastický problém

Aby sme mohli študovať empirické odhady $\varphi_T(F^N)$, $N = 1,2,\ldots$ optimálnej hodnoty $\varphi_T(F)$ viacstupňovej úlohy SP (3.1),(3.2), tak zaveďme nasledujúce značenie. Nech $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ je nezávislá postupnosť $s-$rozmerných náhodných vektorov so spoločnou distribučnou funkciou $F^{\mathcal{E}}$. Symbolom $F^{\mathcal{E}N}$ označíme empirickú distribučnú funkciu určenú $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{N}$ a odpovedajúce jednorozmerné marginálne empirické distribučné funkcie označme $F_i^{\mathcal{E}N}$, $i = 1,\ldots,s$, $N = 1,2,\ldots$ Pre neprázdne množiny $X,\, X' \in \mathbb{R}^n$ definujeme ich *Hausdorffovu vzdialenosť* $\Delta_n[X,\, X']$ nasledovne

$$\begin{aligned} \Delta_n\Big[X,\, X'\Big] &= \max\Big\{\delta_n(X,\, X'),\, \delta_n(X',\, X)\Big\}, \\ \delta_n(X,\, X') &= \sup_{x\in X}\ \inf_{x'\in X'} \parallel x - x' \parallel, \end{aligned} \tag{3.22}$$

kde $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ je Euklidovská norma v $\mathbb{R}^n$ (pozri kap. 5).

Rozšírme výsledky z článku Kaňková (2008, str. 162-163), kde je empirický odhad $\varphi_T(F^N)$ optimálnej hodnoty úlohy (3.1),(3.2), ktorá spĺňa predpoklady (3.4) a (3.5), skúmaný pod podmienkou, že rozdelenie $F^{\mathcal{E}}$ má exponenciálne chvosty, tj. jeho marginálne hustoty spĺňajú predpoklad (3) z tvrdenia 3.8.

Veta 3.11. *Nech $k > 0$ a ďalej nech sú splnené predpoklady* (3.4), (3.5), $t \in \{2,\ldots,T\}$, $\mathcal{X}_{[t-1]}$, $Z_F^{[t-1]}$ *sú neprázdne konvexné uzavreté množiny. Nech naviac distribučná funkcia $F^{\mathcal{E}}$ určuje systém F, $\alpha_i \in (0,1)$, $i = 1,\ldots,s$, $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$. Ak*

(1) a) *ϕ_i, $i = 1,\ldots,s$ sú konvexné spojité Lipschitzovské funkcie na $Z_F^{[t-1]}$,*

b) *g_{ij}^t, $i = 1,\ldots,s$, $j = 1,\ldots,t-1$ sú konkávne spojité Lipschitzovské funkcie na $\mathcal{X}_{[t-1]}$,*

c) *$h_i^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]})$, $i = 1,\ldots,s$ sú definované ako v* (3.7),

(2) *aspoň jeden z nasledujúcich predpokladov je splnený*

a) *$\mathcal{X}_{F,h}^t(u)$ je neprázdna množina pre každé $u \in \bar{\mathcal{H}}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$ a množina $\mathcal{H}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$ je kompaktná,*

b) *$\mathcal{X}$, Z_F^{t-1}, $t = 2,\ldots,T$ sú neprázdne konvexné kompaktné množiny a naviac $\mathcal{X}_F^t(x_{[t-1]},z_{[t-1]})$ je neprázdna množina pre každé $(x_{[t-1]},z_{[t-1]}) \in \bar{\mathcal{X}}_F^{t,\lambda}(\mathcal{X}_{[t-1]},Z_F^{[t-1]})$,*

(3) *$f(x_{[T]},z_{[T-1]})$ je Lipschitzovská na $\mathcal{X}_{[T]}$, $Z_F^{[T-1]}$,*

(4) *existuje konštanta* $C_{t-1} > 0$, *že pre každé* $x^i_{[t-1]} \in \mathcal{X}_{[t-1]}$, $z^i_{[t-1]} \in Z_F^{[t-1]}$, $i = 1{,}2$ *a* $u_{F^{\mathcal{E}N}}(\alpha) \in U\big(u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha)\big)$ *platí*

$$\Delta_s\Big[\mathcal{X}_F^t\big(x^1_{[t-1]}, z^1_{[t-1]}, u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha)\big),\ \mathcal{X}_{F^N}^t\big(x^2_{[t-1]}, z^2_{[t-1]}, u_{F^{\mathcal{E}N}}(\alpha)\big)\Big]$$
$$\le C_{t-1} \parallel h^t\big(x^1_{[t-1]}, z^1_{[t-1]}, u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha)\big) - h^t\big(x^2_{[t-1]}, z^2_{[t-1]}, u_{F^{\mathcal{E}N}}(\alpha)\big) \parallel,$$

kde $h^t = (h_1^t, \ldots, h_s^t)$, $U\big(u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha)\big)$ *je okolie kvantilov* $u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha)$, $u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha) = (u_{F_1^{\mathcal{E}}}(\alpha_1), \ldots, u_{F_s^{\mathcal{E}}}(\alpha_s))$, $u_{F^{\mathcal{E}N}}(\alpha) = (u_{F_1^{\mathcal{E}N}}(\alpha_1), \ldots, u_{F_s^{\mathcal{E}N}}(\alpha_s))$ *a* $\parallel \cdot \parallel = \parallel \cdot \parallel_2$ *je Euklidovská norma v* $\mathbb{R}^s$,

(5) $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je nezávislá postupnosť* $s-$*rozmerných náhodných vektorov so spoločnou distribučnou funkciou* $F^{\mathcal{E}}$,

(6) $\mathsf{P}_{F_i^{\mathcal{E}}}$, $i = 1, \ldots, s$ *sú absolútne spojité vzhľadom na Lebesgueovu mieru na* $\mathbb{R}^1$, *kde hustota* $f_i^{\mathcal{E}}$ *odpovedá* $F_i^{\mathcal{E}}$,

(7) a) *pre* $r > 2$ *platí* $E_{F_i^{\mathcal{E}}}|\mathcal{E}_i|^r < \infty$, $i = 1, \ldots, s$, *kde* $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_s)$,

b) *konštanty* β, $\gamma > 0$ *splňujú nerovnosti*

$$0 < \beta + \gamma < \frac{1}{2}, \qquad \gamma > \frac{1}{r}, \qquad \beta + (1 - r)\gamma < 0,$$

(8) *je splnený predpoklad* (3.20),

potom platí

$$\mathsf{P}\Big\{N^{\beta}\left|\varphi_T(F) - \varphi_T(F^N)\right| > k\Big\} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

Dôkaz: Ak existuje konečná $\mathsf{E}_{F^{\mathcal{E}}}\,\mathcal{E}$, tak za platnosti predpokladov (1) – (4) vety 3.11 existujú konštanty $C_{W_1}^i$, C_K^i, $i = 1, \ldots, s$ také, že platí

$$\left|\varphi_T(F) - \varphi_T(F^N)\right|$$
$$\le \sum_{i=1}^{s} C_{W_1}^i \int_{\mathbb{R}} \left|F_i^{\mathcal{E}}(z_i) - F_i^{\mathcal{E}N}(z_i)\right| dz_i + \sum_{i=1}^{s} C_K^i \left|u_{F_i^{\mathcal{E}}}(\alpha_i) - u_{F_i^{\mathcal{E}N}}(\alpha_i)\right|.$$

Dôkaz tohto tvrdenia nájdeme v Kaňková (2008, str. 167-168). Vidíme, že veta 3.11 plynie z tvrdenia 3.9 a vzťahu (3.21).

□

Vidíme, že rýchlosť konvergencie $\beta := \beta(r)$ z viet 3.10 a 3.11 obecne závisí na existencii konečných absolútnych momentov spôsobom

$$\beta(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \frac{1}{2}, \qquad \beta(r) \xrightarrow[r \to 2^+]{} 0.$$

Iný prístup, ktorý je založený na teórii $\mathcal{L}_p$ priestorov, $p \in \langle 1, +\infty)$, a filtráciách sigma algebry (filtrácie využívame v príklade 2.4.2 o energetickom plánovaní) môžeme nájsť napríklad v článku Küchler (2008), kde sú uvedené výsledky pre lineárnu úlohu SP tvaru (2.10).

Kapitola 4

Aplikácia na dvojstupňovú úlohu SP s pravdepodobnostnými obmedzeniami

Aplikujme teoretické výsledky z kapitoly 3 na dvojstupňovú úlohu SP s autoregresnou náhodnou zložkou a individuálnymi pravdepodobnostnými obmedzeniami. Na to použijeme úlohu výberu portfólia, ktorého konštrukciu sme rozoberali v príkladoch 1.3.1 a 2.4.1, ktorú rozšírime o pravdepodobnostné obmedzenie.

4.1 Definovanie úlohy

Podnikateľ chce za Y rokov zakúpiť automobil v hodnote a. Súčasne má našetrený kapitál W_1 a ten chce investovať do niektorých z n investícií. Čiastku x_{i1} investuje do $i-$tej investície a pomocou $x_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})$ označíme celkovú investíciu. Tá musí spĺňať vzťah $\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \leq W_1$. Po $v-$tom roku má celkový majetok hodnotu W_2 a podnikateľ má možnosť svoje prostriedky preinvestovať. Toto rozhodnutie označme pomocou $x_2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})$. Zároveň musí spĺňať podmienku $\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \leq W_2$.

Nech R_{it} je miera návratnosti $i-$tej investície v perióde t, $i = 1, \ldots, n$, $t = 1, \ldots, T$, kde $T = Y/v = 2$ je počet periód. Ak definujeme $\xi_{it} = 1 + R_{it}$, $t = 1{,}2$, potom celkový majetok po prvej a druhej perióde musí splňovať nasledujúcu podmienku

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} \xi_{it} \, x_{it}, \quad t = 1{,}2.$$

Miery návratnosti R_{it}, $i = 1, \ldots, n$, $t = 1{,}2$ jednotlivých inštrumentov sú náhodné veličiny a teda i vektory ξ_1, ξ_2 a hodnoty majetku W_2, W_3, ktoré na nich závisia, sú náhodné.

Cieľom je maximalizovať očakávaný úžitok[1], kde úžitkovú funkciu definujeme rovnicou (2.21), ktorú pre pripomenutie uvedieme znova

$$U(W) := \begin{cases} (1+q)(W-a), & W \geq a, \\ (1+r)(W-a), & W < a, \end{cases}$$

kde

$q > 0$ je úroková miera, za ktorú môže podnikateľ investovať majetok $(W-a)$ ak je $W \geq a$,

$r > q$ je úroková miera, za ktorú si podnikateľ môže požičiať ak $W < a$,

$a > 0$ je čiastka, za ktorú podnikateľ kúpi automobil po návrate investície.

Označme $NU(W) := -U(W)$. Úloha je teda nájsť riešenie problému

$$\begin{aligned} \varphi(F') &= \min_{x_1} \left\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \left[\mathcal{Q}_2(x_1, \xi_1) \right] : x_1 \in \mathcal{X}_1 \right\}, \\ \mathcal{Q}_2(x_1, z_1) &= \min_{x_2} \left\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \left[NU(W_3) | z_1 \right] : x_2 \in \mathcal{X}_2(x_1, z_1) \right\}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_1 &= \left\{ x_1 \geq 0 : \sum_{i=1}^n x_{i1} \leq W_1 \right\}, \\ \mathcal{X}_2(x_1, z_1) &= \left\{ x_2 \geq 0 : \sum_{i=1}^n x_{i2} \leq \sum_{i=1}^n z_{i1}\, x_{i1} (= W_2) \right\}, \\ W_3 &= \sum_{i=1}^n \xi_{i2}\, x_{i2} \end{aligned}$$

a $F' = \left\{ F^{\xi_1}(z_1),\ F^{\xi_2|\xi_1}(z_2|z_1) \right\}$. Porovnaj s problémom (3.1),(3.2) a (3.3) pre $T = 2$, kde funkcia $f(x_{[2]}, z_1) = \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \left[NU(W_3) | z_1 \right]$ a $n = s$. Rozdiel je v tom, že po poslednom (druhom) rozhodnutí pozorujeme realizáciu náhodného vektoru ξ_2, ktorá prispieva k celkovej hodnote majetku po investícii. Celá postupnosť rozhodnutí a pozorovaní vyzerá nasledovne

$$\text{rozhodnutie } (x_1) \rightsquigarrow \text{pozorovanie } (R_1) \rightsquigarrow \text{rozhodnutie } (x_2) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \text{pozorovanie } (R_2).$$

Tento proces môžeme znázorniť ako postupnosť akcií

[1]Aby sme dodržali minimalizačný tvar úlohy používaný v kapitole 3, tak budeme minimalizovať zápornú hodnotu očakávaného úžitku.

$$
\begin{gathered}
\text{známa hodnota } W_1,\\
\text{rozhodnutie } x_1,\\
\text{pozorovanie } R_1 \Rightarrow \xi_1(R_1) \Rightarrow W_2(x_1,\, \xi_1),\\
\text{rozhodnutie } x_2,\\
\text{pozorovanie } R_2 \Rightarrow \xi_2(R_2) \Rightarrow W_3(x_{[2]}, \xi_{[2]}).
\end{gathered}
$$

Pozri aj (2.1), kde $\omega_t = R_t$, $t = 1{,}2$ a celkový výsledok $x = W_3$. Riešime teda úlohu

$$
\varphi(F') = \min_{x_1} \left\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \left[\mathcal{Q}_2(x_1, \xi_1) \right] : \; x_1 \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \leq W_1 \right\},
$$

$$
\mathcal{Q}_2(x_1, z_1) = \min_{x_2} \left\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \left[(1 + \mathbb{1}_{[W_3 \geq a]}\, q + \mathbb{1}_{[W_3 < a]}\, r)(a - W_3) \Big| \, z_1 \right] : \right.
$$

$$
\left. x_2 \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \leq \sum_{i=1}^{n} z_{i1}\, x_{i1}, \quad W_3 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i2}\, x_{i2} \right\},
$$

kde $\mathbb{1}_{[A]} := \begin{cases} 1, & \text{platí jav } A, \\ 0, & \text{neplatí jav } A. \end{cases}$

4.1.1 Autoregresná vlastnosť a pravdepodobnostné obmedzenia

Uvažujme, že podnikateľ po každom $v-$tom roku vykazuje zisk η nezávislý na výnosoch z investícií (tj. nezávislý na systéme F'), kde $\{\eta_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ tvorí náhodnú autoregresnú postupnosť prvého radu. Potom

$$
\eta_t = \phi(\eta_{t-1}) + \mathcal{E}_t, \tag{4.1}
$$

kde η_1, $\mathcal{E}_t$, $t = 2, \ldots$ sú nezávislé a $\mathcal{E}_t$, $t = 2, \ldots$ sú rovnako rozdelené náhodné veličiny. ϕ je Lipschitzovská vektorová funkcia definovaná na $\mathbb{R}$. Distribučnú funkciu odpovedajúcu $\mathcal{E}_1$ označme symbolom $F^{\mathcal{E}}$ a realizáciu η_1 poznáme.

Po $v-$tom roku chce podnikateľ okrem hodnoty majetku W_2 zároveň investovať aj čiastku, ktorá nebude väčšia, ako vykazovaný zisk η_2, ktorý v čase investície nebude poznať. Proces teraz môžeme znázorniť ako postupnosť akcií

$$
\begin{gathered}
\text{známa hodnota } W_1 \text{ a } \eta_1,\\
\text{rozhodnutie } x_1,\\
\text{pozorovanie } R_1 \Rightarrow \xi_1(R_1) \Rightarrow W_2(x_1,\, \xi_1),\\
\text{rozhodnutie } x_2,\\
\text{pozorovanie } \eta_2,\\
\text{pozorovanie } R_2 \Rightarrow \xi_2(R_2) \Rightarrow W_3(x_{[2]}, \xi_{[2]}).
\end{gathered}
$$

V prípade, že by podnikateľ doinvestoval sumu väčšiu ako neskôr vykázaný zisk, bude musieť zvyšné prostriedky poskytnúť z jeho súkromných finančných zdrojov. Nesplnenie tohto obmedzenia teda nie je nutné penalizovať a postačí, aby bolo splnené s istou pravdepodobnosťou. Podnikateľ požaduje, aby s pravdepodobnosťou $\alpha \in (0{,}1)$ doinvestovaná čiastka neprekročila η_2. Obmedzenia v druhej perióde sú preto pravdepodobnostné a majú nasledovný tvar

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_2(x_1, z_1, \eta_1) &:= \mathcal{X}_2(x_1, z_1, \eta_1; \alpha)\\ &= \left\{ x_2 \geq 0 : \mathsf{P}_{F^{\eta_2|\eta_1}} \left[\sum_{i=1}^{n} x_{i2} \leq \sum_{i=1}^{n} z_{i1}\, x_{i1} + \eta_2 \;\middle|\; z_1, \eta_1 \right] \geq \alpha \right\},\end{aligned}$$

kde $F^{\eta_2|\eta_1}(\bar{z}_2|\bar{z}_1)$ je podmienená distribučná funkcia náhodnej veličiny η_2 pri η_1, ktorých realizácie značíme pomocou $\bar{z}_2$, $\bar{z}_1 \in \mathbb{R}$. Podľa úvah zo sekcie 3.2 a definovaním kvantilov pomocou (3.6) dostávame množinu

$$\mathcal{X}_2(x_1, z_1, \eta_1) = \left\{ x_2 \geq 0 : \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \leq \sum_{i=1}^{n} z_{i1}\, x_{i1} + \phi(\eta_1) + u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha) \right\}$$

určenú kvantilom $u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha)$. V tomto prípade optimalizujeme úlohu

$$\begin{aligned}\varphi(F) &= \min_{x_1} \left\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_1}} \left[\mathcal{Q}_2(x_1, \xi_1, \eta_1) \right] : \; x_1 \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \leq W_1 \right\},\\ \mathcal{Q}_2(x_1, z_1, \eta_1) &= \min_{x_2} \Bigg\{ \mathsf{E}_{F^{\xi_2|\xi_1}} \left[(1 + \mathbb{1}_{[W_3 \geq a]}\, q + \mathbb{1}_{[W_3 < a]}\, r)(a - W_3) \middle| \, z_1, \eta_1 \right] :\\ &\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \leq \sum_{i=1}^{n} z_{i1}\, x_{i1} + \phi(\eta_1) + u_{F^{\mathcal{E}}}(\alpha),\\ &\qquad W_3 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i2}\, x_{i2}, \quad x_2 \geq 0 \Bigg\},\end{aligned}$$

kde $F = \left\{ F^{\xi_1}(z_1),\, F^{\xi_2|\xi_1}(z_2|z_1),\, F^{\eta_1}(\bar{z}_1),\, F^{\eta_2|\eta_1}(\bar{z}_2|\bar{z}_1) \right\}$ je určený systémom F' a distribučnou funkciou $F^{\mathcal{E}}$, ktorá je so systémom F' nezávislá.

4.1.2 Zavedenie scenárov

Príklad obmedzme na dve možné investície $n = 2$ (do akcií ξ_{1t} a do dlhopisov ξ_{2t}, $t = 1{,}2$). Zvoľme dobu investície $Y = 2$ s možnosťou zmeny a doinvestovania po roku, tj. $v = 1$. Nech má systém F' konečnú množinu scenárov S, ktoré odpovedajú štyrom nezávislým rovnako pravdepodobným variantám ročných výnosov

(1) $\xi_{1t} = 1{,}28$ z akcií a $\xi_{2t} = 1{,}14$ z dlhopisov,

(2) $\xi_{1t} = 1{,}28$ z akcií a $\xi_{2t} = 1{,}06$ z dlhopisov,

(3) $\xi_{1t} = 0{,}92$ z akcií a $\xi_{2t} = 1{,}14$ z dlhopisov,

(4) $\xi_{1t} = 0{,}92$ z akcií a $\xi_{2t} = 1{,}06$ z dlhopisov.

S teda obsahuje 16 možných scenárov, na ktoré sa môžeme odkázať pomocou histórie výnosov $s_t \in \{1{,}2{,}3{,}4\}$, $t = 1{,}2$. Každý scenár $s = (s_1, s_2)$ má priradenú pravdepodobnosť

$$p(s) = p(s_1, s_2) = p(s_1)\, p(s_2) = 0{,}0625,$$
$$p(s_1) = p(s_2) = \frac{1}{4}.$$

Výnosy po prvom roku závisia na s_1, ozn. $\xi_1(s_1)$, a výnosy po druhom roku sú závislé na s_1 aj s_2, ozn. $\xi_2(s_1, s_2)$. Rozhodnutia v prvej perióde označme x_{11} ako množstvo investované do akcií a x_{21} ako množstvo investované do dlhopisov. Rozhodnutia v druhej perióde závisia na výnosoch s_1 a teda v prípade s_1 označme $x_{12}(s_1)$ ako množstvo investované do akcií a $x_{22}(s_1)$ ako množstvo investované do dlhopisov. Ukážku stromu scenárov sme uviedli v príklade 1.3.1 o finančnom plánovaní na obrázku 1.2.

Úloha pre tento prípad výnosov je tvaru

$$\begin{aligned}
\varphi(F) &= \min_{x_1} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{s_1=1}^{4} \mathcal{Q}_2(x_1, s_1, \eta_1) :\; x_1 \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \leq W_1 \right\}, \\
\mathcal{Q}_2(x_1, s_1, \eta_1) &= \min_{x_2} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{s_2=1}^{4} (1 + \mathbb{1}_{[W_3 \geq a]}\, q + \mathbb{1}_{[W_3 < a]}\, r)(a - W_3) : \right. \\
&\qquad \sum_{i=1}^{n} x_{i2}(s_1) \leq \sum_{i=1}^{n} \xi_{i1}(s_1)\, x_{i1} + \phi(\eta_1) + u_{F^{\varepsilon}}(\alpha), \\
&\qquad \left. W_3 = \sum_{i=1}^{n} \xi_{i2}(s_1, s_2)\, x_{i2}(s_1), \quad x_2(s_1) \geq 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Vidíme, že pri znalosti systému F' je systém F určený distribučnou funkciou $F^{\mathcal{E}}$. Ak túto distribučnú funkciu poznáme, tak vieme problém (4.2) vyriešiť. Vzťah optimálnych hodnôt pri nahradení distribučnej funkcie $F^{\mathcal{E}}$ jej empirickým odhadom $F^{\mathcal{E}N}$ sme za splnenia určitých predpokladov odvodili vo vete 3.11. Ďalej sa pozrieme na optimálne hodnoty úlohy (4.2) pre dve voľby rozdelenia $F^{\mathcal{E}}$.

4.2 Optimálna hodnota

Nech je podnikateľov počiatočný kapitál $W_1 = 300$ tisíc korún, cena automobilu, ktorý chce o dva roky zakúpiť je $a = 550$ tisíc a jeho zisk vykázaný v tomto roku je $\eta_1 = 100$ tisíc. Úroková miera, za ktorú môže podnikateľ investovať prebytočný majetok je $q = 0{,}03$ a úroková miera, za ktorú si podnikateľ môže požičať chýbajúce financie je $r = 0{,}05$. Nech je funkcia ϕ z definície (4.1) tvaru $\phi(\eta) = 0{,}8\,\eta + 100$ a $\alpha = 0{,}95$.

Pre dve voľby $F^{\mathcal{E}}$ dostávame nasledujúce hodnoty kvantilov (podľa definície (3.6))

- $u_{\mathsf{N}(0,100)}(0{,}95) \doteq -16{,}4485$,
- $u_{\mathsf{Pareto}(2{,}018;1)}(0{,}95) \doteq 0.0257$.

Optimálne hodnoty a rozhodnutia pre úlohu (4.2) sú zobrazené v tabuľke 4.1.

		Normálne rozdelenie		Paretovo rozdelenie	
		Akcie	Dlhopisy	Akcie	Dlhopisy
Prvá fáza	Investície	25,234	274,766	14,354	285,646
Druhá fáza	Výnosy (1)	47,139	461,945	0	524,035
	Výnosy (2)	24,079	463,024	85,207	415,977
	Výnosy (3)	90,909	409,091	0	518,868
	Výnosy (4)	478,019	0	496,016	0
Optimálna hodnota:		7.726		−11.087	

Tabuľka 4.1: Optimálne riešenie založené na stochastickom modeli (4.2) pre $F^{\mathcal{E}} = \mathsf{N}(0, 100)$ a $F^{\mathcal{E}} = \mathsf{Pareto}(2{,}018; 1)$.

Vidíme, že pre obe rozdelenia je v prvej fáze do dlhopisov investovaná podstatne väčšia čiastka. V druhej fáze by mal podnikateľ opäť investovať väčšiu časť majetku do dlhopisov (konkrétne množstvo závisí na tom, aké boli výnosy ξ_1) až na prípad, kedy pre výnosy ξ_1 nastane štvrtý scenár, tj. $s_1 = 4$. V tom prípade sa môže pokúsiť získať požadovanú čiastku na automobil ($a = 550$) investíciou do rizikovejších, ale výnosnejších akcií. Pre normálne rozdelenie náhodného prvku $\mathcal{E}$, ktorého 95%−ný kvantil je (podľa vzťahu (3.6)) záporný, po dvoch rokoch nedosiahnu očakávané výnosy požadovanú sumu na kúpu automobilu a podnikateľ si bude nútený chýbajúcu čiastku požičať za úrokovú mieru 0,05. Ak majú reziduá autoregresnej postupnosti, ktorou sa riadi podnikateľov ročný zisk, Paretovo rozdelenie, tak za určených podmienok bude môcť po prvom roku okrem aktuálneho majetku doinvestovať dostatočne veľkú sumu nato, aby mu celkový očakávaný výnos postačoval na kúpu automobilu. Zvyšný majetok, by mohol ďalej investovať za úrokovú mieru 0,03. Uvedomme si, že v úlohe nie sú zohľadnené poplatky za nákup a predaj jednotlivých aktív, ktoré by reálne na výsledok mali vplyv.

Výpočty optimálnych hodnôt boli robené v nástroji GAMS a použitý skript nájdeme v prílohe tejto práce. Na zapísanie problému (4.2) v tvare lineárneho programovania sme použili ďalších 16 premenných $y(s_1,s_2)$, $s_1, s_2 \in \{1,2,3,4\}$, ktoré zastupujú prebytok konečného majetku a 16 premenných $w(s_1,s_2)$ zastupujúcich nedostatok konečného majetku. Pozri príklad 1.3.1. Úloha má teda tvar

$$
\begin{aligned}
\min\ & \frac{1}{16}\sum_{s_1=1}^{4}\sum_{s_2=1}^{4}\big(1{,}05\, w(s_1,s_2) - 1{,}03\, y(s_1,s_2)\big) \\
\text{z.p. } & x_{11} + x_{21} \le W_1, \\
& x_{12}(s_1) + x_{22}(s_1) \le \xi_{11}(s_1)\, x_{11} + \xi_{21}(s_1)\, x_{21} + 180 + u_{F^\varepsilon}(0{,}95), \\
& \xi_{12}(s_1,s_2)\, x_{12}(s_1) + \xi_{22}(s_1,s_2)\, x_{22}(s_1) - y(s_1,s_2) + w(s_1,s_2) = 550, \\
& x_1, x_2(s_1), y(s_1,s_2), w(s_1,s_2) \ge 0, \\
& s_1, s_2 \in \{1{,}2{,}3{,}4\}.
\end{aligned}
$$

Kapitola 5

Dodatok

V tejto kapitole zhrnieme niektoré definície a poznatky z matematickej analýzy, štatistiky a teórie pravdepodobnosti, ktoré sú využívané v tejto práci. Pozri napríklad Shapiro a kol. (2009, str. 333-406) a Anděl (2011).

5.1 Matematická analýza

Nech $\mathbb{R}^n$ je $n-$rozmerný vektorový priestor, kde $x = (x_1, \ldots ,x_n)^\mathsf{T}$ je stĺpcový vektor, so skalárnym súčinom

$$x^\mathsf{T} y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Znakom $\| \cdot \|_\cdot^n$ označme normu definovanú na priestore $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{L}_1$ normu definujeme ako $\| x \|_1^n = \sum_{i=1}^n |x_i|$, kde $| \cdot |$ značí absolútnu hodnotu. Eklidovskú normu, ktorej niekedy hovoríme $\mathcal{L}_2$ norma, definujeme ako $\| x \|_2^n = \sqrt{x^\mathsf{T} x}$. V ďalšom texte budeme používať Euklidovskú normu a vynecháme značenie $n \in \mathbb{N}$, ktoré závisí na priestore, na ktorom je definovaná, tj. $\| \cdot \| := \| \cdot \|_2^n$. Rovnaké vzťahy je možné definovať i pre $\mathcal{L}_1$ normu.

Vzdialenosť medzi bodom $x \in \mathbb{R}^n$ a množinou $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme ako

$$\mathrm{dist}(x,A) := \begin{cases} \inf\limits_{y \in A} \| x - y \|, & A \neq \emptyset, \\ +\infty, & A = \emptyset. \end{cases}$$

Znakom $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ označme rozšírené reálne čísla. Nech $e > 0$, potom množinu $U(y) = \{x \in \mathbb{R} : y - e < x < y + e\}$ nazývame *okolie bodu* $y \in \mathbb{R}$. *Uzáver množiny* $A \subset \mathbb{R}^n$ definujeme ako

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{R}^n : U(x) \cap A \neq \emptyset \text{ pre všetky } U(x)\}.$$

Množina A je *konvexná*, ak pre každé dva body $x, y \in A$ je úsečka, ktorá ich spojuje, obsiahnutá v množine A, tj.

$$\{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in \langle 0,1 \rangle\} \subseteq A.$$

Množina A je *kompaktná*, ak pre ľubovoľný systém $\{A_i\}_{i\in I}$ otvorených podmnožín A taký, že $A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$, existuje konečná podmnožina $J \subset I$ taká, že $A \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$.

Funkciu $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazveme *Lipschitzovská* na množine $A \subset \mathbb{R}^n$, ak existuje konštanta $L \geq 0$, že platí

$$\| g(x) - g(y) \| \leq L \| x - y \| , \quad \forall x,y \in A.$$

Uvedomme si, že kým norma na ľavej strane nerovnosti je definovaná na priestore $\mathbb{R}^m$, tak norma na pravej strane nerovnosti je definovaná na priestore $\mathbb{R}^n$. Funkcia g je *rovnomerne spojitá* na A, ak pre každé $\mathcal{E} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pre $x, y \in A$ splňujúce $\| x - y \| < \delta$ platí

$$\| g(x) - g(y) \| < \mathcal{E}.$$

Funkcia g je *konvexná* na A, ak platí

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y), \quad \forall x, y \in A, \forall \lambda \in \langle 0,1 \rangle.$$

Funkcia g je *konkávna* na A, ak je funkcia $-g$ konvexná na A.

5.2 Pravdepodobnostné priestory

Nech je Ω abstraktná množina. Výrazom $\mathcal{P}(\Omega)$ označme množinu všetkých podmnožín množiny Ω. Povieme, že množina $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ je *sigma algebra*, ak spĺňa:

(1) je uzavretá vzhľadom k štandardným množinovým operáciám, tj. prienik $A \cap B \in \mathcal{F}$, zjednotenie $A \cup B \in \mathcal{F}$ a rozdiel $A \setminus B \in \mathcal{F}$, ak $A, B \in \mathcal{F}$,

(2) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$, kde $\emptyset$ je prázdna množina,

(3) ak $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, potom $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{F}$.

Potom $(\Omega, \mathcal{F})$ nazývame *merateľný priestor*. Množina $A \subset \Omega$ je $\mathcal{F}-$merateľná, ak $A \in \mathcal{F}$. Povieme, že sigma algebra $\mathcal{F}$ je *generovaná* svojou pomnožinou $\mathcal{G}$, ak každá $\mathcal{F}-$merateľná množina môže byť získaná z množín patriacich do $\mathcal{G}$ pomocou štandardných množinových operácií alebo spočetného zjednotenia. To znamená, že $\mathcal{F}$ je generovaná pomocou $\mathcal{G}$, ak $\mathcal{F}$ je najmenšia sigma algebra obsahujúca $\mathcal{G}$. Sigma algebru generovanú množinou otvorených (alebo uzavretých) podmnožín konečne-dimenzionálneho priestoru $\mathbb{R}^m$ nazveme *Borelovská*, ozn. $\mathcal{B}$. Prvky tejto sigma algebry nazývame *Borelovské množiny*. Pre uvažovanú množinu $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ označíme znakom $\mathcal{B}(\Theta)$ sigma algebru Borelovských podmnožín Θ.

Funkciu $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ nazveme *miera* na $(\Omega, \mathcal{F})$, ak platí

(1) $\mathsf{P}(\emptyset) = 0$,

(2) $\forall A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ po dvoch disjunktné ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$):

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathsf{P}(A_i).$$

Mieru P nazveme *pravdepodobnostná miera*, ak $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. Priestor $(\Omega, \mathcal{F})$ s pravdepodobnostnou mierou nazveme *pravdepodobnostný priestor* a značíme $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Mieru λ v $\mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$, ktorá každému intervalu v $\mathbb{R}^s$ priradí jeho objem a je invariantná voči posunutiu, tj. pre $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s), a \in \mathbb{R}^s :\ \lambda(A+a) = \lambda(A)$, rozšírenú na systém Lebesgueovsky merateľných množín

$$\mathfrak{L}^s = \{A \cup N : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s), N \in \mathcal{N}(\lambda)\},$$

kde $\mathcal{N}(\lambda)$ je množina všetkých zanedbateľných množín N, nazveme *Lebesgueova miera* v $\mathbb{R}^s$. Množina $N \subset \mathbb{R}^s$ je zanedbateľná, ak existuje $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^s)$, že $N \subset A$ a $\lambda(A) = 0$. Miera P je *absolutne spojitá* vzhľadom na Lebesgueovu mieru v $\mathbb{R}^s$ λ, ak platí

$$A \in \mathcal{F},\ \lambda(A) = 0\ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A) = 0.$$

Potom existuje funkcia f, ktorá je merateľná (viď nižšie) a platí rovnosť

$$\mathsf{P}(A) = \int_A f\ d\lambda, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Nech $\mathcal{G}$ je zobrazenie z Ω do množiny $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (podmnožiny množiny $\mathbb{R}^n$), tj. $\mathcal{G}$ priradí každému $\omega \in \Omega$ podmnožinu $\mathcal{G}(\omega) \subset \mathbb{R}^n$, ktorá môže byť aj prázdna. Potom $\mathcal{G} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ nazveme *multifunkcia*. Povieme, že $\mathcal{G}$ je *hodnotovo uzavretá*, ak $\mathcal{G}(\omega)$ je uzavretá podmnožina $\mathbb{R}^n$ pre $\forall\omega \in \Omega$. Hodnotovo uzavretá multifunkcia $\mathcal{G}$ je *merateľná*, ak pre $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ uzavretú množinu je jej inverzné zobrazenie $\mathcal{G}^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega : \mathcal{G}(\omega) \cap A \neq \emptyset\}$ $\mathcal{F}-$merateľné.

Tvrdenie 5.1. *Hodnotovo uzavretá multifunkcia $\mathcal{G} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ je merateľná, ak je funkcia $d(\omega) := dist(x,\mathcal{G}(\omega))$ (s hodnotami v $\bar{\mathbb{R}}$) merateľná pre $\forall x \in \mathbb{R}^n$.*

Dôkaz: Nájdeme v Shapiro a kol. (2009, str. 365).

□

Poznámka 5.1. Predpokladajme, že Ω je Borerovská podmnožina $\mathbb{R}^m$ a $\mathcal{B}(\Omega)$ je jej Borelovská sigma algebra. Ďalej predpokladajme, že multifunkcia $\mathcal{G} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ je *uzavretá*. To znamená, že ak $\omega_k \to \omega$, $x_k \in \mathcal{G}(\omega_k)$ a $x_k \to x$, $k \to \infty$, potom $x \in \mathcal{G}(\omega)$. Uzavretá multifunkcia je hodnotovo uzavretá. Z toho vyplýva, že pre $\forall(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ je úrovňová množina $\{\omega \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\mathcal{G}(\omega)) \leq t\}$ uzavretá, a teda je funkcia $d(\omega) := \mathrm{dist}(x,\mathcal{G}(\omega))$ merateľná. Z toho plynie, že každá uzavretá multifunkcia $\mathcal{G} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ je merateľná.

Nech je $X(\omega)$ merateľná funkcia z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Potom X nazývame náhodná veličina a jej distribučnú funkciu definujeme ako $F(x) = \mathsf{P}(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$ a *momentovú vytvorujúcu funkciu* ako $M_X(r) = \mathsf{E}\, e^{rX}$, $r \in \mathbb{R}$. Vektor náhodných veličín $X_{[n]} = (X_1, \ldots, X_n)$ je náhodný vektor a jeho združená distribučná funkcia je definovaná vzorcom

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \mathsf{P}(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n).$$

Rozdelenie náhodného vektoru $(X_{r_1}, \ldots, X_{r_k})$ pre $\{r_1, \ldots, r_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $1 \leq k \leq n$ nazývame *marginálne* a jeho distribučná funkcia je taktiež označovaná ako marginálna. Marginálna distribučná funkcia vektoru $(X_1, \ldots, X_k)$ je daná vzťahom

$$F(x_1, \ldots, x_k, \infty, \ldots, \infty) = \lim_{x_{k+1}, \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Záver

Práca sa zaoberá viacstupňovým stochastickým programovaním. V prvej kapitole sme definovali jednostupňový model a na príkladoch poukázali na dôležitosť vzniku modelov s náhodným prvkom. V ďalšej kapitole je definovaná viacstupňová obecne nelineárna stochastická úloha a na príkladoch z rôznych oblastí sú znázornené niektoré formy jej použitia. Tretia kapitola uvažuje špeciálny prípad, kedy je náhoda modelovaná autoregresným procesom a v úlohe sa vyskytujú individuálne pravdepodobnostné obmedzenia. Pre takúto úlohu sme ukázali, akým spôsobom je možné ju určiť pomocou kvantilov distribučnej funkcie reziduí a pomocou znalostí z deterministickej viackriteriálnej optimalizácie sme dospeli k podmienkam, za ktorých je táto úloha dobre definovaná. Ďalej sme sa zaoberali jej aproximáciou a rýchlosťou konvergencie tejto aproximácie. Došli sme k záveru, že rýchlosť konvergencie je závislá na existencii konečných momentov distribučnej funkcie a na základe tohto poznatku sme zaviedli vetu pre viacstupňový stochastický problém. Nakoniec je vo štvrtej kapitole vyriešená dvojstupňová úloha stochastického programovania z oblasti investovania, ktorá má pravdepodobnostné obmedzenie s náhodnou veličinou riadiacou sa autoregresným procesom.

Literatúra

Anděl, J. (2011). *Základy matematické statistiky.* Matfyzpress, Praha. ISBN 978-80-7378-162-0.

Birge, J. R. a Louveaux, F. (1997). *Introduction to Stochastic Programming.* Springer, New York. ISBN 0-387-98217-5.

Dupačová, J. (1995). Multistage stochastic programs: The state-of-the-art and selected bibliography. *Kybernetika*, **31**(2), 151–174.

Dupačová, J., Hurt, J., a Štěpán, J. (2002). *Stochastic Modeling in Economics and Finance.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. ISBN 1-4020-0840-6.

Dupačová, J. a Popela, P. (2005). Melt control: Charge optimization via stochastic programming. In *Applications of Stochastic Programming*, pages 277–298. Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society.

Escudero, L. F., Kamesam, P. V., King, A. J., a Wets, R. J.-B. (1993). Production planning via scenario modelling. *Annals of Operations Research*, **43**(6), 311–335.

Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal Of Mathematical Analysis and Applications*, **22**(3), 618–630.

Houda, M. a Kaňková, V. (2012). Empirical estimates in economic and financial optimization problems. *Bulletin of the Czech Econometric Society*, **19**(29), 50–64.

Kaňková, V. (2007a). Multistage stochastic programs via autoregressive sequences. *Acta Oeconomica Pragensia*, **2007**(4), 99–110.

Kaňková, V. (2007b). Stochastic programming problems with recourse via multiobjective optimization problems. *Mathematical Methods In Economics And Industry*, (15), 68–78.

Kaňková, V. (2008). Multistage stochastic programs via autoregressive sequences and individual probability constraints. *Kybernetika*, **44**(2), 151–170.

Kaňková, V. a Šmíd, M. (2004). A remark on approximation in multistage stochastic programs; markov dependence. **May 2004**(2102).

Kuhn, D. (2005). *Generalized Bounds for Convex Multistage Stochastic Programs*. Springer, Berlin. ISBN 3-540-22540-4.

Küchler, C. (2008). On stability of multistage stochastic programs. *SIAM Journal on Optimization*, **19**(2), 952–968.

Nowak, M. P. a Römisch, W. (2000). Stochastic lagrangian relaxation applied to power scheduling in a hydro-thermal system under uncertainty. *Annals of Operations Research*, **100**(1-4), 251–272.

Pflug, G. C. a Pichler, A. (2011). Multistage optimization. *Stochastic Programming E-Print Series (SPEPS)*, **2011**, 1–22.

Prékopa, A. (1995). *Stochastic Programming*. Akadémiai Kiadó, Budapest. ISBN 963-05-6872-1.

Shapiro, A. (2011). Analysis of stochastic dual dynamic programming method. *European Journal of Operational Research*, **209**(1), 63–72.

Shapiro, A., Dentcheva, D., a Ruszczyński, A. (2009). *Lectures on Stochastic Programming, Modeling and Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society, Philadelphia. ISBN 978-0-898716-87-0.

Vallender, S. S. (1974). Calculation of the wasserstein distance between probability distributions on the line. *Theory of Probability and Its Applications*, **18**(4), 784–786.

Zoznam obrázkov

Zoznam tabuliek

Zoznam použitých skratiek

$\emptyset$	prázdna množina
$\times$	karteziánsky súčin
$\cup, \cap$	operácie zjednotenia a prieniku
$x \in A$	bod x patrí do množiny A
$A \subset B$	množina A je podmnožinou množiny B
$\mathbb{N}$	prirodzené čísla
$\mathbb{R}$	reálne čísla
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$	$n-$rozmerný priestor
min	minimum
max	maximum
inf	infimum
sup	supremum
z.p.	za podmienok
E	stredná hodnota
P	pravdepodobnostná miera
Ω	priestor náhodných elementov
Σ	sigma algebra definovaná na množine Ω
$(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$	pravdepodobnostný priestor náhodných elementov
ω	náhodný element z $(\Omega, \Sigma, \mathsf{P})$
SP	stochastické programovanie
T	počet stupňov (fáz, periód)
$\forall$	všeobecný kvantifikátor
s.i.	skoro iste
$\bar{A}$	uzáver množiny A
$\\|\cdot\\|$	norma
$\mathcal{L}_i$	priestor s normou $\\|\cdot\\|_i$

Príloha

Skript použitý na výpočet úlohy z kapitoly 4 v programe GAMS.

```
SET J MNOZINA OBMEDZENI NEROVNOSTNYCH /01*05/
    K MNOZINA OBMEDZENI ROVNOSTNYCH /06*021/
    I MNOZINA PREMENNYCH /1*42/;

TABLE INVESTICIE(J,I) VYNOSY A INVESTICIE
     1     2     3  4  5  6  7  8  9  10
01   1     1     0  0  0  0  0  0  0  0
02   -1.28 -1.14 1  0  0  0  1  0  0  0
03   -1.28 -1.06 0  1  0  0  0  1  0  0
04   -0.92 -1.14 0  0  1  0  0  0  1  0
05   -0.92 -1.06 0  0  0  1  0  0  0  1
+
    11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
01  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
02  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
03  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
04  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
05  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
+
    27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42
01  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
02  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
03  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
04  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
05  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0

TABLE VYNOSY(K,I) VYNOSY A STRATY
     1 2 3    4    5    6    7    8    9    10
06   0 0 1.28 0    0    0    1.14 0    0    0
07   0 0 0    1.28 0    0    0    1.14 0    0
```

```
O8    0 0 0    0    1.28 0    0    0    1.14 0
O9    0 0 0    0    0    1.28 0    0    0    1.14
O10   0 0 1.28 0    0    0    1.06 0    0    0
O11   0 0 0    1.28 0    0    0    1.06 0    0
O12   0 0 0    0    1.28 0    0    0    1.06 0
O13   0 0 0    0    0    1.28 0    0    0    0
O14   0 0 0.92 0    0    0    1.14 0    0    0
O15   0 0 0    0.92 0    0    0    1.14 0    0
O16   0 0 0    0    0.92 0    0    0    1.14 0
O17   0 0 0    0    0    0.92 0    0    0    1.14
O18   0 0 0.92 0    0    0    1.06 0    0    0
O19   0 0 0    0.92 0    0    0    1.06 0    0
O20   0 0 0    0    0.92 0    0    0    1.06 0
O21   0 0 0    0    0    0.92 0    0    0    1.06
+
    11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26
O6  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O7  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O8  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O9  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O10 0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O11 0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O12 0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0  0
O13 0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0  0
O14 0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0  0
O15 0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0  0
O16 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0  0
O17 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0  0
O18 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0  0
O19 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0  0
O20 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1 0
O21 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  -1
+
    27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42
O6  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O7  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O8  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O9  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O10 0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O11 0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
```

```
O12 0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0
O13 0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0  0
O14 0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0  0
O15 0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0  0
O16 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0  0
O17 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0  0
O18 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0  0
O19 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0  0
O20 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1  0
O21 0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1

* Pre N(0,100): M=163.5515
* Pre P(2.018,1): M=180.0257
PARAMETER V(I)  VEKTOR VYNOSOV Z INVESTICII
                /1*10 0, 11*26 -1.03, 27*42 1.05/
          OI(J) PRAVA STRANA VYNOSOV A INVESTICII
                /O1 300, O2*O5 M/
          OE(K) PRAVA STRANA VYNOSOV A STRAT
                /O6*O21 550/;

POSITIVE VARIABLES X(I) INVESTICIE;
VARIABLE OBJ HODNOTA UCELOVEJ FUNKCIE;

EQUATIONS
 OBMIE(J) NEROVNOSTNE OBMEDZENIA
 OBME(K)  ROVNOSTNE OBMEDZENIA
 UCEL     UCELOVA FUNKCIA;

UCEL..      OBJ =E= SUM(I, V(I)*X(I))/16;
OBMIE(J).. SUM(I, INVESTICIE(J,I)*X(I)) =L= OI(J);
OBME(K)..  SUM(I, VYNOSY(K,I)*X(I))     =E= OE(K);

MODEL OPTIM /UCEL,OBMIE,OBME/;

SOLVE OPTIM MINIMIZING OBJ USING LP;
```