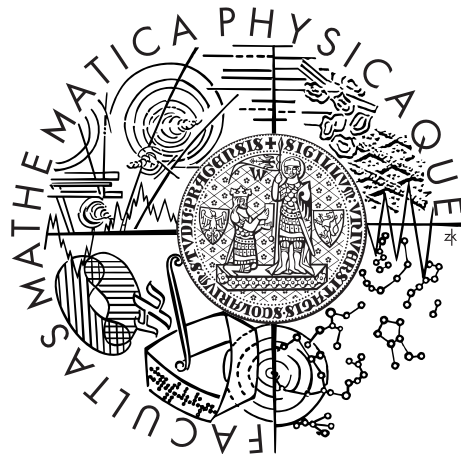


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Bc. Jana Vaverová

Modely časových řad s exogenními proměnnými a jejich aplikace na ekonomická data

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky (32-KPMS)

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční a pojistná matematika

Praha 2014

Chtěla bych poděkovat především mé vedoucí diplomové práce, RNDr. Jitce Zichové, Dr., za její podporu, cenné rady a připomínky, které mi při psaní práce velmi pomohly. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, kteří mě podporovali během celého studia.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze dne 1.12.2014

Podpis autora

Název práce: Modely časových řad s exogenními proměnnými a jejich aplikace na ekonomická data

Autor: Bc. Jana Vaverová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky (32-KPMS)

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce pojednává o analýze vícerozměrných finančních a ekonomických dat. V první části je vyložena teorie mnohorozměrných časových řad a ARMA modelu. Druhá část se věnuje modelům s exogenními proměnnými, konkrétně soustavě simultánních rovnic a ARMAX modelu. Třetí část se zabývá vyšetřováním vzájemné závislosti časových řad inflací a analýzou závislosti míry inflace na různých makroekonomických ukazatelích. Data byla zpracována softwary Mathematica 8, Mathematica 10, EViews a softwarem R.

Klíčová slova: Mnohorozměrná časová řada, ARMA model, víceroznicové soustavy, ARMAX model

Title: Time series models with exogenous variables and their application to economical data

Author: Bc. Jana Vaverová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: RNDr. Jitka Zichová, Dr., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with analyzing multivariate financial and economical data. The first section describes the theory of multivariate time series and multivariate ARMA models. The second part deals with some models with exogenous variables such as simultaneous equations models and ARMAX model. In the final chapter, the described theory is applied to analyze the reciprocal dependence of time series of inflation rates and dependence of inflation rates on various macroeconomical indicators. The results were obtained by software Mathematica 8, Mathematica 10, EViews and R.

Keywords: Multivariate time series, ARMA model, econometric systems of equations, ARMAX model

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 1 |
| Použité značení | 2 |
| 1 Základní pojmy a metody | 3 |
| 1.1 Mnohorozměrný náhodný proces | 3 |
| 1.2 Mnohorozměrný ARMA proces | 6 |
| 1.3 Speciální případy ARMA procesu | 9 |
| 1.3.1 ARMA(0,q) | 9 |
| 1.3.2 ARMA(p,0) | 9 |
| 1.3.3 ARMA(1,1) | 10 |
| 1.4 Odhad modelu | 11 |
| 1.5 Konstrukce předpovědí v ARMA procesu | 12 |
| 2 Modely s exogenními proměnnými | 14 |
| 2.1 Víceroznicové soustavy s exogenními proměnnými | 14 |
| 2.1.1 Soustava simultánních rovnic | 14 |
| 2.1.2 Odhad parametrů | 16 |
| 2.1.3 Verifikace modelu | 17 |
| 2.2 ARMAX model | 18 |
| 2.3 Předpovědi v ARMAX modelu | 20 |
| 2.3.1 Neznámé budoucí exogenní proměnné | 20 |
| 2.3.2 Známé budoucí exogenní proměnné | 23 |
| 2.4 Optimální řízení pomocí ARMAX modelu | 24 |
| 2.5 Volba řádů ARMAX modelu | 29 |
| 2.6 Odhad parametrů ARMAX modelu | 29 |
| 2.6.1 Podmíněná metoda maximální věrohodnosti | 29 |
| 2.6.2 Nepodmíněná metoda maximální věrohodnosti | 34 |
| 2.7 Verifikace ARMAX modelu | 35 |
| 3 Zpracování reálných dat | 37 |
| 3.1 Modelování inflace ARMA procesem | 37 |
| 3.2 Modelování inflace soustavou simultánních rovnic | 42 |
| 3.3 Modelování ARMAX procesem | 47 |

| | | |
|-------|---|-----------|
| 3.4 | Srovnání modelů | 52 |
| 3.5 | Konstrukce předpovědí | 54 |
| 3.5.1 | Znamé budoucí exogenní proměnné | 54 |
| 3.5.2 | Neznámé budoucí exogenní proměnné | 56 |
| | Závěr | 59 |
| | Seznam obrázků | 60 |
| | Seznam tabulek | 61 |
| | Literatura | 62 |

Úvod

Tato práce pojednává o modelování mnohorozměrných časových řad. Ve finanční praxi se většinou setkáváme s daty ve formě časových řad, které se ovlivňují navzájem. Jejich vztahy mohou být jak jednostranné, tak i oboustranné. Proto je vhodné taková data popisovat mnohorozměrnými modely, které zmíněné vazby využívají.

Práce obsahuje celkem 3 kapitoly. V prvních dvou kapitolách je nejprve vložena teoretická část vycházející zejména z (Reinsel, 2003). Poslední kapitola je pak věnována aplikaci na reálných datech z finanční praxe za použití vhodných softwarů.

V první kapitole jsou nejprve zavedeny důležité pojmy a definice z teorie mnohorozměrných náhodných procesů. Poté je popsána teorie mnohorozměrných ARMA modelů včetně identifikace modelu a konstrukce předpovědí.

Druhá kapitola se věnuje modelům s exogenními proměnnými. Je zde popsána teorie soustavy simultánních rovnic a ARMAX modelu. Dále jsou uvedeny postupy pro odhad parametrů a v případě modelu ARMAX i konstrukce předpovědí.

Ve třetí kapitole je popsána teorie aplikována na reálná data. V prvním příkladu se modeluje vývoj míry inflace pomocí mnohorozměrného ARMA modelu. Ve druhém a třetím příkladu pak modelujeme závislost míry inflace na dvou makroekonomických ukazatelích pomocí modelů zavedených ve druhé kapitole. Na závěr jsou použité modely srovnány a zkonstruovány předpovědi. Ty jsou porovnány mezi sebou a se skutečným vývojem. Při výpočtech byly použity softwary Mathematica 8, Mathematica 10, EViews a R.

Použité značení

| | |
|---------------------------------|---|
| $\mathbf{0}$ | sloupcový vektor nebo matice nul, rozměr bude zřejmý z kontextu |
| $\mathbf{1}$ | sloupcový vektor jedniček, délka bude zřejmá z kontextu |
| \mathbf{u} | sloupcový vektor, délka bude zřejmá z kontextu |
| \mathbf{u}^\top | transpozice vektoru \mathbf{u} |
| \mathbf{I}_k | jednotková matice rozměru $k \times k$ |
| $ \mathbf{A} $ | determinant matice \mathbf{A} |
| $\ \mathbf{A}\ $ | norma matice \mathbf{A} |
| $tr\{\mathbf{A}\}$ | stopa matice \mathbf{A} |
| $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ | Kroneckerův součin matic \mathbf{A} a \mathbf{B} |
| $\text{vec}(\mathbf{A})$ | vektORIZACE matice \mathbf{A} |
| \mathbb{R} | množina reálných čísel |
| \mathbb{Z} | množina celých čísel |
| \mathbb{N} | množina přirozených čísel |
| \mathbb{N}_0 | množina přirozených čísel s nulou |
| \log | přirozený logaritmus |

1. Základní pojmy a metody

V úvodní kapitole nejprve zavedeme důležité základní pojmy a definice, které poslouží ke sjednocení značení a názvosloví.

1.1 Mnohorozměrný náhodný proces

Definice 1.1. Nechť náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_k jsou definovány na témž pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Pak vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_k)^\top$ nazveme *náhodným vektorem*.

Definice 1.2. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $T \subset \mathbb{R}$. Nechť pro každé $t \in T$ je \mathbf{Y}_t k -rozměrný reálný náhodný vektor. Potom rodina náhodných vektorů $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$ se nazývá *k -rozměrný náhodný proces*.

V případě, že $T \subset \mathbb{Z}$, mluvíme o *k -rozměrném náhodném procesu s diskrétním časem* nebo *k -rozměrné časové řadě*.

Definice 1.3. Nechť $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$ je k -rozměrný náhodný proces takový, že pro všechna $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathbf{E} \mathbf{Y}_t$. Potom vektorová funkce $\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{E} \mathbf{Y}_t$ definovaná na T se nazývá *střední hodnota k -rozměrného náhodného procesu $\{\mathbf{Y}_t, t \in T\}$* .

Proces, jehož střední hodnota $\boldsymbol{\mu}_t = \mathbf{0}$ pro všechna $t \in T$, se nazývá *centrovaný k -rozměrný náhodný proces*. V dalším textu této práce budeme uvažovat pouze centrované mnohorozměrné náhodné procesy, pokud neuvedeme jinak.

Další text bude pojednávat o mnohorozměrných časových řadách a tedy budeme nadále uvažovat, že $T \subset \mathbb{Z}$. Pokud budeme mluvit o *náhodném procesu*, budeme tím rozumět k -rozměrnou časovou řadu, neuvedeme-li jinak. Dále budeme označovat procesy $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, \dots, Y_{kt})^\top$, $t \in T$, $T \subset \mathbb{Z}$, zjednodušeně $\{\mathbf{Y}_t\}$.

Definice 1.4. Nechť $\{\mathbf{Y}_t\}$ je náhodný proces s konečnými druhými momenty, tedy takový, že platí $\mathbf{E} (Y_{it})^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$ a $i = 1, \dots, k$. Potom funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ předpisem

$$\boldsymbol{\Gamma}(s, t) = \mathbf{E} [(\mathbf{Y}_t - \mathbf{E} \mathbf{Y}_t)(\mathbf{Y}_s - \mathbf{E} \mathbf{Y}_s)^\top]$$

se nazývá *maticová autokovarianční funkce* procesu $\{\mathbf{Y}_t\}$. Funkce $\Gamma(t, t)$ se nazývá *rozptyl* náhodného procesu v čase t .

Definice 1.5. Řekneme, že mnohorozměrný náhodný proces \mathbf{Y}_t je *striktně stacionární*, jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolné reálné náhodné vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ a pro libovolná t_1, \dots, t_n a h taková, že $t_k \in T$, $t_k + h \in T$, $1 \leq k \leq n$, platí rovnost distribučních funkcí

$$\mathbf{F}_{t_1, \dots, t_n}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n) = \mathbf{F}_{t_1+h, \dots, t_n+h}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n).$$

Lze říci, že pokud je proces striktně stacionární, pak všechny náhodné vektory \mathbf{Y}_t mají stejné pravděpodobnostní rozdělení a od něj odvozené základní charakteristiky a jsou z hlediska rozdělení invariantní vůči posunutí v čase.

Definice 1.6. Nechť náhodný proces \mathbf{Y}_t má konečné druhé momenty, konstantní střední hodnotu $\mathbf{E} \mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)^\top$ pro $t \in T$ a jeho autokovarianční funkce $\Gamma(s, t)$ je funkcí pouze rozdílu argumentů $s - t$. Potom říkáme, že proces \mathbf{Y}_t je *slabě stacionární*.

V dalším textu budeme pod pojmem *stacionarita* rozumět právě slabou stacionaritu.

Jestliže je časová řada \mathbf{Y}_t slabě stacionární, potom lze autokovarianční funkci psát zkráceně $\Gamma(t, t+l) = \Gamma(l) = \text{cov}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t+l})$ a $\Gamma(0)$ označuje rozptylovou matici. Jelikož v tomto případě kovariance mezi složkami $Y_{i,t}$ a $Y_{j,t+l}$ závisí pouze na časovém posunutí l a ne na samotném časovém okamžiku t , definujeme *vzájemnou autokovarianční funkci* časových řad Y_{it} a Y_{jt} jako

$$\gamma_{ij}(l) = \text{cov}(Y_{i,t}, Y_{j,t+l}) = \mathbf{E}(Y_{i,t} - \mu_i)(Y_{j,t+l} - \mu_j). \quad (1.1)$$

Maticová autokovarianční funkce pro stacionární vícerozměrné procesy má pro časové posunutí $l \in \mathbb{Z}$ následující tvar

$$\mathbf{\Gamma}(l) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}(l) & \gamma_{12}(l) & \dots & \gamma_{1k}(l) \\ \gamma_{21}(l) & \gamma_{22}(l) & \dots & \gamma_{2k}(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{k1}(l) & \gamma_{k2}(l) & \dots & \gamma_{kk}(l) \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Souvislost s autokovarianční funkcí jednorozměrného náhodného procesu. Autokovarianční funkce, které se používají v teorii jednorozměrných náhodných procesů, se nacházejí v uvedené matici $\mathbf{\Gamma}(l)$ na diagonále. Tedy například $\gamma_{11}(l)$ představuje autokovarianční funkci náhodného procesu generovaného první složkou náhodného vektoru \mathbf{Y}_t .

Príslušná maticová autokorelační funkce má následující tvar

$$\boldsymbol{\rho}(l) = \mathbf{V}^{-1/2} \boldsymbol{\Gamma}(l) \mathbf{V}^{-1/2} = \begin{pmatrix} \rho_{11}(l) & \rho_{12}(l) & \cdots & \rho_{1k}(l) \\ \rho_{21}(l) & \rho_{22}(l) & \cdots & \rho_{2k}(l) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k1}(l) & \rho_{k2}(l) & \cdots & \rho_{kk}(l) \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{V} je diagonální matice s prvky na diagonále $\text{var}(Y_{1t}), \dots, \text{var}(Y_{kt})$ a $\rho_{ij}(l)$ označuje *vzájemnou korelační funkci* udávající korelační koeficient mezi $Y_{i,t}$ a $Y_{j,t+l}$, tedy

$$\rho_{ij}(l) = \frac{\gamma_{ij}(l)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)} \sqrt{\gamma_{jj}(0)}}.$$

Ze symetrie kovarianční funkce (1.1) plyne, že $\boldsymbol{\Gamma}(l)$ a $\boldsymbol{\rho}(l)$ jsou pro $l = 0$ symetrické matice. Také zřejmě platí, že pro $t \in \mathbb{Z}$ je

$$\boldsymbol{\Gamma}(-l) = \boldsymbol{\Gamma}(l)^\top,$$

neboť

$$\gamma_{ij}(l) = \text{cov}(Y_{i,t}, Y_{j,t+l}) = \text{cov}(Y_{j,t+l}, Y_{i,t}) = \text{cov}(Y_{j,t}, Y_{i,t-l}) = \gamma_{ji}(-l).$$

Podobně se dokáže, že platí i $\boldsymbol{\rho}(-l) = \boldsymbol{\rho}(l)^\top$, a proto budeme dále uvažovat pouze $l \in \mathbb{N}_0$.

Zavedme nyní ještě definice odhadů korelační a kovarianční maticové funkce dle (Wei, 1994).

Definice 1.7. Nechť $\{\mathbf{y}_t, t = 1, \dots, T\}$ je výběr pozorovaných realizací časové řady $\{\mathbf{Y}_t\}$. Pak se matice $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}(l)$ s prvky

$$\hat{\gamma}_{ij}(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-l} (y_{i,t} - \bar{y}_i)(y_{j,t+l} - \bar{y}_j), \quad (1.2)$$

kde

$$\bar{y}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{i,t}, \quad i = 1, \dots, k,$$

nazývá *výběrová maticová autokovarianční funkce*.

Definice 1.8. Nechť $\{\mathbf{y}_t, t = 1, \dots, T\}$ jsou pozorované realizace časové řady $\{\mathbf{Y}_t\}$. Pak se matice $\mathbf{r}(l)$ s prvky

$$r_{ij}(l) = \frac{\sum_{t=1}^{T-l} (y_{i,t} - \bar{y}_i)(y_{j,t+l} - \bar{y}_j)}{\sqrt{\left(\sum_{t=1}^T (y_{i,t} - \bar{y}_i)^2\right) \left(\sum_{t=1}^T (y_{j,t} - \bar{y}_j)^2\right)}} \quad (1.3)$$

nazývá *výběrová maticová autokorelační funkce*.

Poznámka. Pokud je mnohorozměrný náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{R}\}$ stacionární, pak platí že i jednorozměrné náhodné procesy generované jednotlivými složkami, tedy $\{Y_{i,t}, t \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, \dots, k$, jsou stacionární. Opačná implikace neplatí.

1.2 Mnohorozměrný ARMA proces

Definice 1.9. Nechť $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost náhodných vektorů s nulovou střední hodnotou a $\mathbf{E}(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t^\top) = \Sigma$ a $\mathbf{E}(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_s^\top) = \mathbf{0}$ pro $s \neq t$. Potom se posloupnost $\{\mathbf{X}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nazývá *mnohorozměrný bílý šum* s varianční maticí Σ , která je pozitivně semidefinitní.

Poznámka. Bílý šum je tedy centrovaná slabě stacionární posloupnost, pro kterou platí, že její maticová autokovarianční funkce $\Gamma(l) = \mathbf{0}$ pro všechna $l \neq 0$ a $\Gamma(0) = \Sigma$. Bílý šum budeme nadále značit $\mathbf{e}_t = (e_{1t}, \dots, e_{kt})^\top$.

Ještě před tím, než zavedeme mnohorozměrný ARMA proces, zavedeme mnohorozměrný (kauzální) lineární proces a některé jeho vlastnosti.

Definice 1.10. Posloupnost matic Ψ_n , $n \in \mathbb{N}_0$, kde $\Psi_n = [\psi_{ij,n}]$, $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, r$ se nazývá *sčitatelná v absolutní hodnotě*, pokud platí, že $\sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi_n\| < \infty$, neboli $\sum_{n=0}^{\infty} |\psi_{ij,n}| < \infty$ pro všechna i, j (tedy posloupnost matic je v každé složce absolutně konvergentní).

Definice 1.11. Nechť \mathbf{e}_t je r -rozměrný bílý šum. Potom definujeme *mnohorozměrný lineární proces* vztahem

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t-j}, \quad (1.4)$$

kde Ψ_j nemusí nutně splňovat podmínku z definice 1.10, ale stačí, pokud splňuje slabší podmínku, že $\sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi_n\|^2 < \infty$.

Podobným způsobem zavedeme i *mnohorozměrný kauzální proces* jako

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t-j}. \quad (1.5)$$

Obecný lineární proces tedy vyjadřuje náhodné vektory \mathbf{Y}_t pomocí minulých, současných a budoucích hodnot \mathbf{e}_s , kdežto kauzální lineární proces pouze pomocí minulých a současných hodnoty \mathbf{e}_s .

Pro mnohorozměrný lineární proces platí

$$\mathbf{E} \mathbf{Y}_t = \mathbf{E} \left[\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t-j} \right] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \mathbf{E} \mathbf{e}_{t-j} = \mathbf{0}$$

a autokovarianční funkci můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$\begin{aligned} \Gamma(l) &= \mathbf{E} (\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_{t+l}^\top) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \Psi_i \mathbf{e}_{t-i} \right) \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j} \right)^\top \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_i \mathbf{E} \mathbf{e}_{t-i} \mathbf{e}_{t-(j-l)}^\top \Psi_j^\top \\ &= \sum_{i \neq j-l} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_i \mathbf{E} \mathbf{e}_{t-i} \mathbf{e}_{t-(j-l)}^\top \Psi_j^\top + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_{j-l} \Sigma \Psi_j^\top \\ &= \mathbf{0} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Psi_{j-l} \Sigma \Psi_j^\top. \end{aligned}$$

Jak je vidět, mnohorozměrný lineární proces je centrovaný a jeho autokovarianční funkce závisí pouze na časovém posunutí l a ne na čase t . Splňuje tedy podmínky slabé stacionarity.

Obdobně lze dokázat, že i kauzální lineární proces je slabě stacionární.

$$\begin{aligned} \Gamma(l) &= \mathbf{E} (\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_{t+l}^\top) \\ &= \mathbf{E} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \mathbf{e}_{t-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j} \right)^\top \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_i \mathbf{E} \mathbf{e}_{t-i} \mathbf{e}_{t-(j-l)}^\top \Psi_j^\top \\ &= \sum_{j=l}^{\infty} \Psi_{j-l} \Sigma \Psi_j^\top. \end{aligned}$$

Definice 1.12. Nechť \mathbf{e}_t je k -rozměrný bílý šum a definujme matice $\Theta_1, \dots, \Theta_q$ a Φ_1, \dots, Φ_p rozměru $k \times k$, kde $p, q \in \mathbb{N}$ a Θ_q a Φ_p jsou nenulové. Potom náhodný proces $\{\mathbf{Y}_t, t \in \mathbb{Z}\}$ nazýváme *mnohorozměrným ARMA procesem řádu (p, q)* , neboli *smíšeným procesem autoregrese a klouzavých součtů*, jestliže platí

$$\mathbf{Y}_t + \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \dots + \Phi_p \mathbf{Y}_{t-p} = \mathbf{e}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1} + \dots + \Theta_q \mathbf{e}_{t-q}, \quad (1.6)$$

neboli

$$\mathbf{Y}_t + \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{Y}_{t-j} = \mathbf{e}_t + \sum_{j=1}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t-j}. \quad (1.7)$$

Toto vyjádření lze zjednodušit zavedením *operátoru zpětného posunutí* a vyjádřit ARMA model v následujícím tvaru

$$\Phi(\mathbf{B})\mathbf{Y}_t = \Theta(\mathbf{B})\mathbf{e}_t, \quad (1.8)$$

kde $\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{I} + \Phi_1\mathbf{B} + \Phi_2\mathbf{B}^2 + \dots + \Phi_p\mathbf{B}^p = \sum_{i=0}^p \Phi_i\mathbf{B}^i$ a podobně $\Theta(\mathbf{B}) = \mathbf{I} + \Theta_1\mathbf{B} + \Theta_2\mathbf{B}^2 + \dots + \Theta_q\mathbf{B}^q = \sum_{j=0}^q \Theta_j\mathbf{B}^j$. Symbol \mathbf{B} značí operátor zpětného časového posunu, který se definuje předpisem

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t-1}, \quad \mathbf{B}^k\mathbf{X}_t = \mathbf{B}^{k-1}(\mathbf{B}\mathbf{X}_t) = \dots = \mathbf{X}_{t-k}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vyjádření mnohorozměrného ARMA procesu (1.6) je zobecněním jednorozměrného ARMA(p, q) modelu (viz například (Prášková, 2007)) a bude užitečné při modelování mnohorozměrných časových řad v následujících kapitolách. Dále budeme pojem mnohorozměrný vynechávat a pokud budeme hovořit o modelu (procesu) ARMA(p, q), budeme tím rozumět proces z definice 1.12.

Poznámka. Pro názornost se ještě podrobněji podíváme na operátor zpětného posunutí. Pokud jej aplikujeme na náhodný vektor, dostaneme

$$\mathbf{B}\mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \\ \vdots \\ X_{k,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{1,t-1} \\ X_{2,t-1} \\ \vdots \\ X_{k,t-1} \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{t-1}.$$

Definice 1.13. Nechť \mathbf{Y}_t je proces řídicí se modelem ARMA(p, q). Potom platí, že řada \mathbf{Y}_t je *stacionární*, jestliže existuje posloupnost matic Ψ_j rozměru $k \times k$ taková, že $\sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi_j\| < \infty$ a platí $\mathbf{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t-j}$.

Za určitých podmínek lze ARMA proces vyjádřit ve tvaru kauzálního procesu (1.5). Tyto podmínky shrnuje následující věta.

Věta 1.1. Nechť \mathbf{Y}_t je proces řídicí se modelem ARMA(p, q) ve smyslu definice 1.12. Potom je \mathbf{Y}_t stacionární, pokud kořeny polynomu $|\Phi(\mathbf{B})|$ leží vně jednotkového kruhu.

Důkaz. Viz (Reinsel, 2003). □

Definice 1.14. Nechť \mathbf{Y}_t je proces, který se řídí modelem ARMA(p, q). Potom se řada \mathbf{Y}_t se nazývá *invertibilní*, jestliže existuje posloupnost matic Π_j taková, že $\sum_{j=1}^{\infty} \|\Pi_j\| < \infty$ a platí $\mathbf{Y}_t = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j \mathbf{Y}_{t-j} + \mathbf{e}_t$.

Věta 1.2. Nechť \mathbf{Y}_t je proces, který se řídí modelem ARMA(p, q) ve smyslu definice 1.12. Potom je \mathbf{Y}_t invertibilní, pokud kořeny polynomu $|\Theta(\mathbf{B})|$ leží vně jednotkového kruhu.

Důkaz. Viz (Reinsel, 2003). □

1.3 Speciální případy ARMA procesu

1.3.1 ARMA(0, q)

Prvním speciálním případem ARMA modelu je ARMA(0, q), tedy položíme $\Phi(\mathbf{B}) = \mathbf{I}$ v modelu (1.8). V takovém případě mluvíme o *mnohorozměrné posloupnosti klouzavých součtů řádu q* , kterou značíme MA(q) a definujeme jako

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{e}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1} + \cdots + \Theta_q \mathbf{e}_{t-q} = \mathbf{e}_t + \sum_{j=1}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Použitím operátoru zpětného posunutí pak dostaneme vyjádření

$$\mathbf{Y}_t = \Theta(\mathbf{B})\mathbf{e}_t.$$

Tento model je vždy stacionární, na rozdíl od ARMA(p, q) modelu, který je stacionární pouze za podmínek daných větou 1.1.

Všimněme si, že *kauzální proces* (1.5) lze vyjádřit jako MA(∞). Jak je také vidět, v modelu posloupnosti klouzavých součtů vyjadřujeme náhodné vektory \mathbf{Y}_t pouze za pomoci současné a minulých hodnot bílého šumu, což potvrzuje stacionaritu procesu.

1.3.2 ARMA($p, 0$)

Vezměme si nyní případ ARMA procesu, kde $q = 0$, tedy model ARMA($p, 0$). Taková k -rozměrná náhodná posloupnost se nazývá *mnohorozměrná autoregresní posloupnost řádu p* a značíme ji AR(p). Rovnicové vyjádření modelu je následující

$$\mathbf{Y}_t = -\Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} - \cdots - \Phi_p \mathbf{Y}_{t-p} + \mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t - \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{Y}_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

neboli při použití operátoru zpětného posunutí

$$\Phi(\mathbf{B})\mathbf{Y}_t = \mathbf{e}_t.$$

1.3.3 ARMA(1,1)

Uvažujme nyní mnohorozměrný ARMA(1,1) model definovaný předpisem

$$\mathbf{Y}_t + \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} = \mathbf{e}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1},$$

nebo

$$\mathbf{Y}_t = -\Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \mathbf{e}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1}. \quad (1.9)$$

Pro názornost uvedeme maticový zápis

$$\begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \\ \vdots \\ Y_{k,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,k} \\ \Phi_{2,1} & \cdots & \Phi_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{k,1} & \cdots & \Phi_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \\ \vdots \\ Y_{k,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \\ \vdots \\ e_{k,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_{1,1} & \cdots & \Theta_{1,k} \\ \Theta_{2,1} & \cdots & \Theta_{2,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{k,1} & \cdots & \Theta_{k,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,t-1} \\ e_{2,t-1} \\ \vdots \\ e_{k,t-1} \end{pmatrix}.$$

Při použití operátoru zpětného posunutí pak dostaneme vyjádření

$$\pi(\mathbf{B})\mathbf{Y}_t = \mathbf{e}_t,$$

kde

$$\pi(\mathbf{B}) = \Theta(\mathbf{B})^{-1}\Phi(\mathbf{B}) = (\mathbf{I} + \Theta_1)^{-1}(\mathbf{I} + \Phi_1).$$

Dle věty 1.1 tedy dostaneme, že model ARMA(1,1) je stacionární, pokud kořeny polynomu $|\mathbf{I} + \Phi_1|$ leží vně jednotkového kruhu. Z věty 1.2 zjistíme, že proces je invertibilní, pokud kořeny polynomu $|\mathbf{I} + \Theta_1|$ leží vně jednotkového kruhu.

Pro vyjádření autokovarianční funkce procesu ARMA(1,1) musíme obě strany rovnice (1.9) vynásobit zpožděnou hodnotou náhodného vektoru \mathbf{Y}_{t-l}^\top ,

$$\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_{t-l}^\top = -\Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-l}^\top + \mathbf{e}_t \mathbf{Y}_{t-l}^\top + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-l}^\top.$$

Vzhledem k (1.1) dostaneme po aplikaci střední hodnoty

$$\Gamma(-l) = -\Phi_1 \Gamma(-l+1) + \mathbf{E}(\mathbf{e}_t \mathbf{Y}_{t-l}^\top) + \Theta_1 \mathbf{E}(\mathbf{e}_{t-1} \mathbf{Y}_{t-l}^\top),$$

a díky platnosti $\Gamma(-l) = \Gamma(l)^\top$ máme

$$\Gamma(l)^\top = -\Phi_1 \Gamma(l-1)^\top + \mathbf{E}(e_t \mathbf{Y}_{t-l}^\top) + \Theta_1 \mathbf{E}(e_{t-1} \mathbf{Y}_{t-l}^\top).$$

Potom dostaneme následující vyjádření autokovarianční funkce ARMA(1,1) procesu

$$\Gamma(l) = \begin{cases} -\Gamma(1)^\top \Phi_1^\top + \Sigma + (-\Phi_1 + \Theta_1) \Sigma \Theta_1^\top, & l = 0, \\ -\Gamma(0) \Phi_1^\top + \Sigma \Theta_1^\top, & l = 1, \\ -\Gamma(l-1) \Phi_1^\top, & l \geq 2. \end{cases}$$

Poznámka. Konkrétně pro $l = 0$ máme:

$$\Gamma(0) = -\Phi_1 \Gamma(1) + \mathbf{E}(e_t \mathbf{Y}_t^\top) + \Theta_1 \mathbf{E}(e_{t-1} \mathbf{Y}_t^\top).$$

S využitím (1.9) a vlastností bílého šumu máme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(e_t \mathbf{Y}_t^\top) &= \mathbf{E}(-e_t \mathbf{Y}_{t-1}^\top \Phi_1^\top + e_t e_t^\top + e_t e_{t-1}^\top \Theta_1^\top) = \Sigma, \\ \Theta_1 \mathbf{E}(e_{t-1} \mathbf{Y}_t^\top) &= \Theta_1 \mathbf{E}(-e_{t-1} \mathbf{Y}_{t-1}^\top \Phi_1^\top + e_{t-1} e_t^\top + e_{t-1} e_{t-1}^\top \Theta_1^\top) \\ &= \Theta_1 [\mathbf{E}(-e_{t-1} (-\mathbf{Y}_{t-2}^\top \Phi_1^\top + e_{t-1}^\top + e_{t-2}^\top \Theta_1^\top) \Phi_1^\top) + \Sigma \Theta_1^\top] \\ &= -\Theta_1 \Sigma \Phi_1^\top + \Theta_1 \Sigma \Theta_1^\top = \Theta_1 \Sigma (-\Phi_1^\top + \Theta_1^\top). \end{aligned}$$

A tedy

$$\Gamma(0) = -\Phi_1 \Gamma(1) + \Sigma + \Theta_1 \Sigma (-\Phi_1^\top + \Theta_1^\top).$$

Transpozicí dostaneme (protože $\Gamma(0)$ je symetrická)

$$\Gamma(0) = -\Gamma(1)^\top \Phi_1^\top + \Sigma + (-\Phi_1 + \Theta_1) \Sigma \Theta_1^\top.$$

1.4 Odhad modelu

Pro modelování dat ARMA procesem je důležitá identifikace řádů p , q a odhad parametrů. V této kapitole jen stručně zmíníme vybrané postupy a vzorce. Detailnějším popisem a odvozováním se budeme zabývat v kapitole 2.5, kde se tatáž teorie aplikuje na obecnější ARMAX proces.

Pro identifikaci řádů modelu se nejčastěji používají informační kritéria. Jedním z těchto kritérií je Akaikeho informační kritérium (AIC), které má podle (Cipra, 2008) po úpravě na mnohorozměrný ARMA(p, q) následující tvar

$$AIC(p, q) = \log(|\hat{\Sigma}|) + \frac{2[k^2(p+q)]}{T}, \quad (1.10)$$

kde $|\widehat{\Sigma}|$ je determinant z odhadnuté rozptylové matice procesu bílého šumu $\Sigma = \text{var}(\mathbf{e}_t)$. Řády modelu volíme tak, aby hodnota AIC byla minimální.

Druhým kritériem, které v této práci budeme používat, je Bayesovo informační kritérium (BIC) ve tvaru

$$BIC(p, q) = \log(|\widehat{\Sigma}|) + 2 [k^2(p + q)] \frac{\log T}{T}. \quad (1.11)$$

Pro odhad parametrů modelu použijeme podmíněnou metodu maximální věrohodnosti. Logaritmičká věrohodnostní funkce má tvar

$$\begin{aligned} l(\Phi, \Theta, \Sigma) &= -\frac{T}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top (\mathbf{I}_T \otimes \Sigma^{-1}) \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= -\frac{T}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top (\Theta^{-1})^\top (\mathbf{I}_T \otimes \Sigma^{-1}) \Theta^{-1} \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde

$$\mathbf{w} = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^p (B^i \mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\phi}_i.$$

Použité značení je podrobně objasněno v kapitole 2.6.1.

1.5 Konstrukce předpovědí v ARMA procesu

Předpovědi budeme konstruovat s využitím nekonečné minulosti pomocí rekurentních postupů.

Označme $\widehat{\mathbf{Y}}_t(l)$ předpověď náhodného vektoru \mathbf{Y}_t o l časových jednotek dopředu při pevně dané minulosti do času t . Při její konstrukci se nejčastěji minimalizuje střední čtvercová chyba

$$\mathbf{E} (\mathbf{Y}_{t+l} - \widehat{\mathbf{Y}}_t(l))^\top (\mathbf{Y}_{t+l} - \widehat{\mathbf{Y}}_t(l)).$$

Hledáme tedy k -rozměrnou vektorovou funkci \mathbf{g} , pro kterou výraz

$$\mathbf{E} (\mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{g}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots))^\top (\mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{g}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots)) \quad (1.13)$$

nabývá minimální hodnoty.

Označme $\mathbb{Y}_t = (\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots)$ a $\mathbb{Y}_{i,t} = (Y_{i,t}, Y_{i,t-1}, \dots)$. Potom

$$\mathbf{E} (\mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{g}(\mathbb{Y}_t))^\top (\mathbf{Y}_{t+l} - \mathbf{g}(\mathbb{Y}_t)) = \sum_{i=1}^k \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))^2.$$

Aplikací postupu popsaného ve skriptech (Prášková, 2007) na každou složku $i = 1, \dots, k$ dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))^2 &= \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) + \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))^2 \\ &= \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}))^2 + \mathbf{E} (\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))^2 \\ &\quad + 2\mathbf{E} [(Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t})) (\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))], \end{aligned}$$

přičemž poslední sčítanec se rovná nule, neboť

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [(Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t})) (\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))] \\ &= \mathbf{E} [\mathbf{E} [(Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t})) (\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t})) | \mathbb{Y}_{i,t}]] \\ &= \mathbf{E} [(\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t})) (\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))] = 0. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))^2 &= \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}))^2 + \mathbf{E} (\mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}) - g_i(\mathbb{Y}_{i,t}))^2 \\ &\geq \mathbf{E} (Y_{i,t+l} - \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t}))^2 \quad (1.14) \end{aligned}$$

a rovnost nastane, když $g_i(\mathbb{Y}_{i,t}) = \mathbf{E}(Y_{i,t+l}|\mathbb{Y}_{i,t})$. Odtud plyne, že řešení minimalizace střední čtvercové chyby (1.13) je

$$\mathbf{g}(\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots) = \mathbf{E}(\mathbf{Y}_{t+l}|\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots). \quad (1.15)$$

Jelikož

$$\mathbf{E}(\mathbf{e}_{t+l-j}|\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots) = \mathbf{0} \quad \text{pro } l-j > 0, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{e}_{t+l-j}|\mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots) = \mathbf{e}_{t+l-j} \quad \text{pro } l-j \leq 0, \quad (1.17)$$

můžeme z vyjádření ARMA procesu (1.7) zapsat (1.15) pro $l = 1, \dots, q$ následovně

$$\hat{\mathbf{Y}}_t(l) = \sum_{j=l}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t+l-j} - \sum_{j=1}^p \Phi_j \hat{\mathbf{Y}}_t(l-j), \quad (1.18)$$

kde $\hat{\mathbf{Y}}_t(l-j) = \mathbf{Y}_{t+l-j}$ pro $l \leq j$.

Poznámka. Pro $l > q$ klademe

$$\hat{\mathbf{Y}}_t(l) = - \sum_{j=1}^p \Phi_j \hat{\mathbf{Y}}_t(l-j).$$

2. Modely s exogenními proměnnými

Ve finanční a ekonomické analýze je mnohdy nutné pracovat současně s větším počtem proměnných. Proměnné zastupují různé veličiny, které se navzájem ovlivňují. V předchozí kapitole jsme se zabývali mnohorozměrnými procesy, pomocí kterých jsme modelovali vícerozměrné náhodné vektory jako lineární funkce jejich zpožděných hodnot a bílého šumu. Praktickou aplikací by byla například analýza časových řad vektorů kurzu koruny vůči různým měnám.

Nyní se budeme zabývat situacemi, kdy modelujeme časové řady pomocí exogenních proměnných vstupujících do modelu zvenčí. Vysvětlovaná proměnná (výstup z modelu) je ovlivněná těmito exogenními proměnnými, přičemž vliv není oboustranný.

2.1 Vícerovnicové soustavy s exogenními proměnnými

V následujícím textu se budeme zabývat popisem chování proměnných $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{kt})^\top$ pomocí proměnných $\mathbf{X}_t = (X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{rt})^\top$, které označujeme jako exogenní. Modelů zabývajících se touto problematikou je mnoho, zde se zaměříme na vícerovnicové soustavy a poté na ARMAX model.

2.1.1 Soustava simultánních rovnic

Jedním ze základních tvarů vícerovnicových soustav s exogenními proměnnými je *soustava simultánních rovnic*. Tento systém se skládá z několika jednotlivých modelů, které jsou propojené tím, že jejich reziduální složky jsou korelované ve stejném čase, ale nejsou korelované v různých časech. Navíc tento model může obsahovat na pravé straně kromě exogenních proměnných \mathbf{X}_t i endogenní proměnné \mathbf{Y}_t . Zapisujeme jej následovně

$$y_{jt} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \gamma_{ji} y_{it} + \sum_{i=1}^r \beta_{ji} x_{it} + e_{jt}, \quad j = 1, \dots, k, \quad t = 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

přičemž prvky $x_{1t} = 1$ pro všechna t . V modelu se předpokládá, že $\gamma_{ji} \neq 0$ pro nějaké $i \neq j$, tedy, alespoň jedna rovnice obsahuje více než jednu endogenní proměnnou. Dále předpokládáme, že reziduální složky jsou náhodné veličiny takové, že $\mathbf{E} e_{jt} = 0$, $\mathbf{E}(e_{jt}e_{it}) \neq 0$, pro $i \neq j$ a $\mathbf{E}(e_{jt}e_{is}) = 0$ pro $t \neq s$.

Maticový zápis (nazývaný také strukturální) má následující tvar

$$\mathbf{Y}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

kde

- \mathbf{Y} je matice endogenních proměnných ($T \times k$) a $\mathbf{\Gamma}$ je matice příslušných parametrů ($k \times k$)

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{k1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{1T} & y_{2T} & \cdots & y_{kT} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{k1} \\ \gamma_{12} & -1 & \cdots & \gamma_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{1k} & \gamma_{2k} & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

- \mathbf{X} je matice ($T \times r$) exogenních proměnných a \mathbf{B} je matice parametrů ($r \times k$)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{21} & \cdots & x_{r1} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{2T} & \cdots & x_{rT} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{k1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1r} & \beta_{2r} & \cdots & \beta_{kr} \end{pmatrix},$$

- \mathbf{E} je matice reziduálních složek ($T \times k$)

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{k1} \\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1T} & e_{2T} & \cdots & e_{kT} \end{pmatrix}.$$

Pokud je matice parametrů $\mathbf{\Gamma}$ regulární, můžeme soustavu simultánních rovnic vyjádřit v redukováném tvaru

$$\mathbf{Y} = -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}^{-1} - \mathbf{E}\mathbf{\Gamma}^{-1}. \quad (2.3)$$

Onačíme-li $\mathbf{\Phi} = -\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}^{-1}$ a $\mathbf{V} = -\mathbf{E}\mathbf{\Gamma}^{-1}$, lze psát

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{\Phi} + \mathbf{V}. \quad (2.4)$$

2.1.2 Odhad parametrů

Pro odhad parametrů soustavy simultánních rovnic není vhodné používat obecnou metodu nejmenších čtverců, neboť takový odhad dle (Cipra, 2008) není ani nestranný, ani konzistentní. Používá se proto buď *nepřímý odhad metodou nejmenších čtverců*, *dvoustupňová metoda nejmenších čtverců*, nebo *třístupňová metoda nejmenších čtverců*. V této práci se budeme zabývat pouze druhou metodou. Popis první metody lze nalézt v (Vaverová, 2011) nebo v (Cipra, 2008).

Dvoustupňový odhad metodou nejmenších čtverců (dále jako 2SLS-odhad) lze použít v případě, že $r - r_j \geq k_j - 1$, kde k_j a r_j jsou počty endogenních a exogenních proměnných v j -té rovnici soustavy (2.1). V opačném případě nelze odhad metodou nejmenších čtverců provést.

Dle (Vaverová, 2011) se konstrukce 2SLS-odhadu provádí ve dvou stupních a pro každou rovnici zvlášť

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{e}_j, \quad (2.5)$$

kde $\mathbf{y}_j = (\mathbf{y}_{j1}, \dots, \mathbf{y}_{jT})^\top$ je vektor $(T \times 1)$ hodnot j -té endogenní proměnné, \mathbf{Y}_j je matice $(T \times (k_j - 1))$ hodnot endogenních proměnných na pravé straně j -té rovnice, \mathbf{X}_j je matice $(T \times r_j)$ hodnot exogenních proměnných j -té rovnice a $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$ jsou příslušné vektory parametrů j -té rovnice.

V prvním kroku se odhadnou endogenní proměnné na pravé straně rovnice (2.5) pomocí jejich pozorovaných hodnot a hodnot všech exogenních proměnných soustavy OLS odhadem

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j. \quad (2.6)$$

Druhý stupeň spočívá v nahrazení regresorů \mathbf{Y}_j na pravé straně v původní rovnici (2.5) vypočítanými odhady $\hat{\mathbf{Y}}_j$ z prvního stupně

$$\mathbf{y}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{e}_j. \quad (2.7)$$

Z rovnice (2.7) dostaneme OLS odhady parametrů $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$

$$\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_j \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{y}_j \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Konzistentní odhad rozptylové matice reziduální složky dostaneme ve tvaru

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_j = \hat{\sigma}_j^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j^\top \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j \end{pmatrix}^{-1}, \quad (2.9)$$

kde

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\mathbf{y}_j^\top \mathbf{y}_j + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_j^\top \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{Y}_j \hat{\boldsymbol{\gamma}}_j - 2\hat{\boldsymbol{\gamma}}_j^\top \mathbf{Y}_j^\top \mathbf{y}_j - \hat{\boldsymbol{\beta}}_j^\top \mathbf{X}_j^\top \mathbf{X}_j \hat{\boldsymbol{\beta}}_j}{T}. \quad (2.10)$$

Tento postup dává dle (Cipra, 2008) konzistentní, asymptoticky normální a asymptoticky eficientní odhady parametrů j -té rovnice.

2.1.3 Verifikace modelu

Normalita reziduí

Pro posouzení normality odhadnutých reziduí se často používají histogramy jednotlivých reziduálních složek a jejich srovnání s histogramem normálního rozdělení. Další možností je použití některého z testů normality zabudovaných v softwarových produktech.

Testování nulovosti parametrů γ_{ji}

Dále můžeme ověřit nulovost parametrů γ_{ji} . Testuje se nulová hypotéza

$$H_0 : \gamma_{ji} = 0.$$

K jejímu testování se dle (Anděl, 2007) používá tzv. *t-poměr*

$$t_{1-\alpha}(T - k_j - r_j - 1) \leq \frac{|\hat{\gamma}_{ji}|}{\sqrt{v_{ss}}}, \quad (2.11)$$

kde $\hat{\gamma}_{ji}$ je odhadnutý regresní parametr endogenní proměnné na pravé straně j -té rovnice (2.1), v_{ss} je s -tý prvek na diagonále matice $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_j$ z (2.9), k_j a r_j jsou počty endogenních a exogenních proměnných j -té rovnice, včetně interceptu a $t_{1-\alpha}(T - k_j - r_j - 1)$ je $(1 - \alpha)$ -kvantil Studentova rozdělení o $(T - k_j - r_j - 1)$ stupních volnosti. Pokud testová statistika na pravé straně (2.11) překročí kvantil Studentova rozdělení, zamítáme nulovou hypotézu.

2.2 ARMAX model

Uvažujme nyní k -rozměrnou časovou řadu, kterou lze zapsat v následujícím tvaru

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^* \mathbf{X}_{t-j} + \mathbf{N}_t, \quad (2.12)$$

kde Ψ_j^* jsou matice rozměru $k \times r$ a \mathbf{N}_t je r -rozměrný vektor šumu, který se řídí mnohorozměrným ARMA modelem, tedy

$$\Phi(\mathbf{B})\mathbf{N}_t = \Theta(\mathbf{B})\mathbf{e}_t. \quad (2.13)$$

Navíc předpokládejme, že proces $\{\mathbf{X}_t\}$ je generován nezávisle na procesu šumu $\{\mathbf{N}_t\}$. Tento model je stručně popsán například v (Reinsel, 2003).

Exogenní proměnné \mathbf{X}_t mohou být náhodné i nenáhodné (deterministické), jako například periodické sezónní funkce času k zachycení sezonnosti výstupní proměnné Y_{it} . Dalším příkladem deterministických proměnných může být indikátor nabývající hodnot 1 a 0.

Nejjednodušší speciální případ modelu (2.12) je *mnohorozměrný lineární regresní model*

$$\mathbf{Y}_t = \Psi_0^* \mathbf{X}_t + \mathbf{N}_t,$$

kde \mathbf{N}_t splňuje (2.13). Jedná se o zobecnění klasického mnohorozměrného lineárního regresního modelu, ve kterém $\mathbf{N}_t = \mathbf{e}_t$ (viz např. (Mardia a kol., 1979)).

Dalším modelem s výskytem exogenních proměnných je *ARMAX* (p, q, s) model (ARMA model with eXternal input).

Pro sestavení rovnice ARMAX modelu se vychází ze vztahu (2.12), přičemž předpokládáme, že operátor $\Psi^*(\mathbf{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^* \mathbf{B}^j$ lze vyjádřit rozkladem

$$\Psi^*(\mathbf{B}) = \Phi^*(\mathbf{B})^{-1} \Theta^*(\mathbf{B}), \quad (2.14)$$

kde

$$\Theta^*(\mathbf{B}) = \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \mathbf{B}^j$$

a Θ_j^* je posloupnost matic rozměru $k \times r$. Potom můžeme přepsat model (2.12) do tvaru

$$\mathbf{Y}_t = \Phi^*(\mathbf{B})^{-1} \Theta^*(\mathbf{B}) \mathbf{X}_t + \mathbf{N}_t.$$

Předpokládejme navíc, že matice $\Phi^*(\mathbf{B}) = \Phi(\mathbf{B})$. Potom můžeme model (2.12) s využitím (2.13) zapsat jako

$$\Phi(\mathbf{B})\mathbf{Y}_t = \Theta^*(\mathbf{B})\mathbf{X}_t + \Phi(\mathbf{B})\mathbf{N}_t = \Theta^*(\mathbf{B})\mathbf{X}_t + \Theta(\mathbf{B})\mathbf{e}_t,$$

a tedy

$$\mathbf{Y}_t + \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{Y}_{t-j} = \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \mathbf{X}_{t-j} + \mathbf{e}_t + \sum_{j=1}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t-j}. \quad (2.15)$$

Vyjádření (2.15) se označuje jako ARMAX model.

Příklad. Pro názornost uvedeme obecný tvar procesu ARMAX(1, 1, 1) pro $k = 2$ a $r = 4$:

$$\mathbf{Y}_t + \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} = \Theta_0^* \mathbf{X}_t + \Theta_1^* \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{e}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1}.$$

Maticový zápis má tvar

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_{0,11}^* & \cdots & \Theta_{0,14}^* \\ \Theta_{0,21}^* & \cdots & \Theta_{0,24}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ \vdots \\ X_{4t} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \Theta_{1,11}^* & \cdots & \Theta_{1,14}^* \\ \Theta_{1,21}^* & \cdots & \Theta_{1,24}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-1} \\ \vdots \\ X_{4,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,t-1} \\ e_{2,t-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Zapsáním po složkách dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} Y_{1t} &= -\Phi_{11} Y_{1,t-1} - \Phi_{12} Y_{2,t-1} + \Theta_{0,11}^* X_{1t} + \cdots + \Theta_{0,14}^* X_{4t} \\ &+ \Theta_{1,11}^* X_{1,t-1} + \cdots + \Theta_{1,14}^* X_{4,t-1} + e_{1t} + \Theta_{11} e_{1,t-1} + \Theta_{12} e_{2,t-1}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} Y_{2t} &= -\Phi_{21} Y_{1,t-1} - \Phi_{22} Y_{2,t-1} + \Theta_{0,21}^* X_{1t} + \cdots + \Theta_{0,24}^* X_{4t} \\ &+ \Theta_{1,21}^* X_{1,t-1} + \cdots + \Theta_{1,24}^* X_{4,t-1} + e_{2t} + \Theta_{21} e_{1,t-1} + \Theta_{22} e_{2,t-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Předpokládejme nyní, že exogenní proměnná $\{\mathbf{X}_t\}$ je stacionární časová řada. Pokud navíc kořeny polynomu $|\Phi(\mathbf{B})|$ leží vně jednotkového kruhu, potom jsou procesy $\{\mathbf{N}_t\}$ i $\{\mathbf{Y}_t\}$ stacionární. Potom můžeme proces $\{\mathbf{Y}_t\}$ vyjádřit jako

$$\mathbf{Y}_t = \Psi^*(\mathbf{B}) \mathbf{X}_t + \Psi(\mathbf{B}) \mathbf{e}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^* \mathbf{X}_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t-j}, \quad (2.19)$$

kde $\Psi(\mathbf{B}) = \Phi(\mathbf{B})^{-1} \Theta(\mathbf{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{B}^j$.

Matice koeficientů Ψ_j^* v posledním výrazu vyjadřuje, jaký dopad má změna exogenní proměnné \mathbf{X}_t na výstupní proměnnou \mathbf{Y}_t v různých časech, a tyto matice pak nazýváme *matice odezvy na impuls*.

2.3 Předpovědi v ARMAX modelu

2.3.1 Neznámé budoucí exogenní proměnné

Uvažujme nejprve situaci, kdy exogenní proměnné \mathbf{X}_t v ARMAX modelu (2.15) jsou náhodné a jejich budoucí hodnoty jsou neznámé. V takovém případě je pro předpověď vysvětlovaných proměnných \mathbf{Y}_t nutné předpovědět také budoucí hodnoty exogenních proměnných \mathbf{X}_t . Budeme předpokládat, že \mathbf{X}_t je modelována ARMA procesem řádu (p, q)

$$\mathbf{X}_t + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} = \mathbf{a}_t + \sum_{j=1}^q \mathbf{C}_j \mathbf{a}_{t-j}, \quad (2.20)$$

kde předpokládáme, že $\{\mathbf{a}_t\}$ a $\{\mathbf{e}_t\}$ jsou nezávislé procesy bílého šumu. Při počítání předpovědi \mathbf{Y}_t budeme tedy využívat předpovědi \mathbf{X}_t získaných postupem pro konstrukci předpovědi v ARMA modelu (viz kapitola 1.5), tedy podle (1.18)

$$\widehat{\mathbf{X}}_t(l) = \sum_{j=l}^q \mathbf{C}_j \mathbf{a}_{t+l-j} - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \widehat{\mathbf{X}}_t(l-j),$$

kde $\widehat{\mathbf{X}}_t(l-j) = \mathbf{X}_{t+l-j}$ pro $l \leq j$.

Nejlepší lineární předpověď \mathbf{Y}_{t+l} na základě $\{\mathbf{Y}_u, u \leq t\}$ a $\{\mathbf{X}_u, u \leq t\}$ je

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(l) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_{t+l} \mid \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots).$$

Rekurentní vyjádření optimální předpovědi je potom

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(l) = - \sum_{j=1}^p \Phi_j \widehat{\mathbf{Y}}_t(l-j) + \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \widehat{\mathbf{X}}_t(l-j) + \sum_{j=l}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t+l-j}, \quad (2.21)$$

pro $l = 1, \dots, q$ a

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(l) = - \sum_{j=1}^p \Phi_j \widehat{\mathbf{Y}}_t(l-j) + \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \widehat{\mathbf{X}}_t(l-j), \quad (2.22)$$

pro $l > q$. Platí, že

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}_t(l-j) &= \mathbf{Y}_{t+l-j} && \text{pro } l \leq j, \\ \widehat{\mathbf{X}}_t(l-j) &= \mathbf{X}_{t+l-j} && \text{pro } l \leq j, \\ \widehat{\mathbf{e}}_t(l-j) &= \mathbf{e}_{t+l-j} && \text{pro } l \leq j, \\ \widehat{\mathbf{e}}_t(l-j) &= \mathbf{0} && \text{pro } l > j. \end{aligned}$$

Nyní se podíváme na chyby těchto předpovědí $\mathbf{err}_t(l) = \mathbf{Y}_{t+l} - \widehat{\mathbf{Y}}_t(l)$ získané z (2.21). Předchozí vzorce (2.19) a (2.20) vedou k následujícímu vyjádření

$$\mathbf{Y}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{V}_j \mathbf{a}_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t-j},$$

kde $\mathbf{V}(\mathbf{B}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{V}_j \mathbf{B}^j = \Psi^*(\mathbf{B}) \Psi_x(\mathbf{B})$, kde $\Psi^*(\mathbf{B}) = \Phi(\mathbf{B})^{-1} \Theta^*(\mathbf{B})$ a $\Psi_x(\mathbf{B}) = A(\mathbf{B})^{-1} C(\mathbf{B})$, a tedy

$$\mathbf{Y}_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{V}_j \mathbf{a}_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j}.$$

Jelikož

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{e}_{t+l-j} | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots) &= 0 && \text{pro } l-j > 0, \\ \mathbf{E}(\mathbf{a}_{t+l-j} | \mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-1}, \dots) &= 0 && \text{pro } l-j > 0, \end{aligned}$$

dostaneme předpověď ve tvaru

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(l) = \sum_{j=l}^{\infty} \mathbf{V}_j \mathbf{a}_{t+l-j} + \sum_{j=l}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j},$$

a tedy

$$\mathbf{err}_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{V}_j \mathbf{a}_{t+l-j} + \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j}.$$

MSE matici předpovědi o l kroků definujeme předpisem

$$\Sigma(l) = \mathbf{E}[\mathbf{err}_t(l) \mathbf{err}_t(l)^\top] = \sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{V}_j \Sigma_a \mathbf{V}_j^\top + \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j \Sigma_e \Psi_j^\top, \quad (2.23)$$

kde $\Sigma_a = \text{var}(\mathbf{a}_t)$ a $\Sigma_e = \text{var}(\mathbf{e}_t)$ jsou varianční matice procesů $\{\mathbf{a}_t\}$ a $\{\mathbf{e}_t\}$.

Příklad. Pro názornost si opět uvedeme obecný zápis pro ARMAX(1,1,1), kde $k=2$ a $r=4$. Rekurentní výpočet předpovědi o l kroků je podle (2.21)

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(1) = -\Phi_1 \mathbf{Y}_t + \Theta_0^* \widehat{\mathbf{X}}_t(1) + \Theta_1^* \mathbf{X}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_t,$$

a podle (2.22) máme

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(l) = -\Phi_1 \widehat{\mathbf{Y}}_t(l-1) + \Theta_0^* \widehat{\mathbf{X}}_t(l) + \Theta_1^* \widehat{\mathbf{X}}_t(l-1), \quad \text{pro } l > 1.$$

Po rozepsání dostaneme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{Y}_{1t}(1) \\ \widehat{Y}_{2t}(1) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_{0,11}^* & \cdots & \Theta_{0,14}^* \\ \Theta_{0,21}^* & \cdots & \Theta_{0,24}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_{1t}(1) \\ \vdots \\ \widehat{X}_{4t}(1) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \Theta_{1,11}^* & \cdots & \Theta_{1,14}^* \\ \Theta_{1,21}^* & \cdots & \Theta_{1,24}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1t} \\ \vdots \\ X_{4t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{pmatrix} \quad (2.24) \end{aligned}$$

a pro $l > 1$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{Y}_{1t}(l) \\ \widehat{Y}_{2t}(l) \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{21} & \Phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{Y}_{1t}(l-1) \\ \widehat{Y}_{2t}(l-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Theta_{0,11}^* & \cdots & \Theta_{0,14}^* \\ \Theta_{0,21}^* & \cdots & \Theta_{0,24}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_{1t}(l) \\ \vdots \\ \widehat{X}_{4t}(l) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \Theta_{1,11}^* & \cdots & \Theta_{1,14}^* \\ \Theta_{1,21}^* & \cdots & \Theta_{1,24}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{X}_{1t}(l-1) \\ \vdots \\ \widehat{X}_{4t}(l-1) \end{pmatrix}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

To vede k následujícím soustavám

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{1t}(1) &= -\Phi_{11}Y_{1t} - \Phi_{12}Y_{2t} + \Theta_{0,11}^*\widehat{X}_{1t}(1) + \cdots + \Theta_{0,14}^*\widehat{X}_{4t}(1) \\ &+ \Theta_{1,11}^*X_{1t} + \cdots + \Theta_{1,14}^*X_{4t} + \Theta_{11}e_{1t} + \Theta_{12}e_{2t}, \quad (2.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{2t}(1) &= -\Phi_{21}Y_{1t} - \Phi_{22}Y_{2t} + \Theta_{0,21}^*\widehat{X}_{1t}(1) + \cdots + \Theta_{0,24}^*\widehat{X}_{4t}(1) \\ &+ \Theta_{1,21}^*X_{1t} + \cdots + \Theta_{1,24}^*X_{4t} + \Theta_{21}e_{1t} + \Theta_{22}e_{2t} \quad (2.27) \end{aligned}$$

a pro $l > 1$

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{1t}(l) &= -\Phi_{11}\widehat{Y}_{1t}(l-1) - \Phi_{12}\widehat{Y}_{2t}(l-1) + \Theta_{0,11}^*\widehat{X}_{1t}(l) + \cdots + \Theta_{0,14}^*\widehat{X}_{4t}(l) \\ &+ \Theta_{1,11}^*\widehat{X}_{1t}(l-1) + \cdots + \Theta_{1,14}^*\widehat{X}_{4t}(l-1), \quad (2.28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{Y}_{2t}(l) &= -\Phi_{21}\widehat{Y}_{1t}(l-1) - \Phi_{22}\widehat{Y}_{2t}(l-1) + \Theta_{0,21}^*\widehat{X}_{1t}(l) + \cdots + \Theta_{0,24}^*\widehat{X}_{4t}(l) \\ &+ \Theta_{1,21}^*\widehat{X}_{1t}(l-1) + \cdots + \Theta_{1,24}^*\widehat{X}_{4t}(l-1). \quad (2.29) \end{aligned}$$

2.3.2 Známé budoucí exogenní proměnné

Předchozí kapitola se zabývala předpověďmi hodnot \mathbf{Y}_t v případě, kdy exogenní proměnné \mathbf{X}_t byly náhodné a jejich budoucí vývoj byl neznámý. V některých případech mohou být budoucí hodnoty \mathbf{X}_t známé, deterministické nebo předem pevně stanovené. Proces předpovídání vysvětlující proměnné \mathbf{Y}_t se bude lišit od postupu popsaného výše. Budeme konstruovat předpovědi \mathbf{Y}_t podmíněné danými budoucími hodnotami proměnných \mathbf{X}_t .

Budeme-li nyní vycházet z vyjádření ARMAX modelu (2.15), dostaneme, že předpověď $\tilde{\mathbf{Y}}_t(l)$ hodnoty \mathbf{Y}_{t+l} na základě známých minulých i budoucích hodnot $\mathbf{X}_{t+1}, \dots, \mathbf{X}_{t+l}$ se vyjádří v analogii s (2.21) a (2.22) jako

$$\tilde{\mathbf{Y}}_t(l) = - \sum_{j=1}^p \Phi_j \tilde{\mathbf{Y}}_t(l-j) + \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \mathbf{X}_{t+l-j} + \sum_{j=l}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t+l-j},$$

kde $l = 1, \dots, q$ a

$$\tilde{\mathbf{Y}}_t(l) = - \sum_{j=1}^p \Phi_j \tilde{\mathbf{Y}}_t(l-j) + \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \mathbf{X}_{t+l-j}, \quad (2.30)$$

pro $l > q$ a kde $\tilde{\mathbf{Y}}_t(l) = \mathbf{Y}_{t+l-j}$ pro $l \leq j$.

Vezmeme-li vyjádření ARMAX modelu (2.19), můžeme (2.30) přepsat do následujícího tvaru

$$\tilde{\mathbf{Y}}_t(l) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^* \mathbf{X}_{t+l-j} + \sum_{j=l}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j}$$

a vyjádření chyby předpovědi je

$$\widetilde{\mathbf{err}}_t(l) = \mathbf{Y}_{t+l} - \tilde{\mathbf{Y}}_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j}.$$

Chceme-li vyjádřit MSE matici předpovědi o l kroků, dostaneme

$$\tilde{\Sigma}(l) = \mathbf{E} [\tilde{\mathbf{e}}_t(l) \tilde{\mathbf{e}}_t(l)^\top] = \sum_{j=0}^{l-1} \Psi_j \Sigma_e \Psi_j^\top. \quad (2.31)$$

Jak můžeme vidět ze srovnání (2.23) a (2.31), $\tilde{\Sigma}(l)$ je druhou sumou výrazu (2.23), která odpovídá chybové MSE matici při předpovídání šumu $\mathbf{N}_{t+l} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathbf{e}_{t+l-j}$ v modelu (2.19), zatímco první suma výrazu (2.23) představuje chybovou MSE matici při předpovídání exogenních proměnných v modelu (2.19). Jelikož nyní předpokládáme, že známe budoucí vývoj exogenních proměnných, tak tato část ve vyjádření $\tilde{\Sigma}(l)$ již není.

2.4 Optimální řízení pomocí ARMAX modelu

Použití ARMAX modelu je mimo jiné výhodné i díky možnosti jeho využití pro optimální řízení. Ukážeme, že budoucí hodnoty exogenních proměnných v modelu (2.15) je možné určitým způsobem řídit. Budeme se snažit najít optimální hodnotu \mathbf{X}_{t+1}^* exogenní proměnné v čase $t + 1$, na základě informace do času t , a to tak, aby výstupní proměnná \mathbf{Y}_{t+1} byla co nejlíže požadované hodnotě \mathbf{Y}_{t+1}^0 . Někdy se také může volit další podmínka na hodnotu \mathbf{X}_{t+1} a to, aby byla co nejlíže stanovené hodnotě \mathbf{X}_{t+1}^0 .

Potom optimální řízení o jeden krok dopředu pomocí ARMAX modelu je optimalizační úloha hledající vzhledem k \mathbf{X}_{t+1} minimum funkce

$$\mathbb{E}_t[(\mathbf{Y}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{Y}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0) + (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1}(\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)], \quad (2.32)$$

kde \mathbb{E}_t značí podmíněnou střední hodnotu na základě informací do času t a \mathbf{Q}_{t+1} a \mathbf{P}_{t+1} jsou symetrické pozitivně semidefinitní matice vah.

Rozepíšme ARMAX model (2.15) ve tvaru

$$\mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} + \mathbf{e}_{t+1}, \quad (2.33)$$

kde \mathbf{b}_t představuje složku danou realizací proměnných do času t , tedy

$$\mathbf{b}_t = - \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{Y}_{t+1-j} + \sum_{j=1}^s \Theta_j^* \mathbf{X}_{t+1-j} + \sum_{j=1}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t+1-j},$$

a s využitím (2.19) je $\mathbf{B}^\top = \Psi_0^*$. Dále pak \mathbf{c}_{t+1} představuje přidaný vliv budoucích exogenních proměnných \mathbf{X}_{t+2}, \dots o kterých předpokládáme, že jsou známé.

Dosaďme nyní vyjádření \mathbf{Y}_{t+1} z (2.33) do (2.32)

$$\mathbb{E}_t[(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} + \mathbf{e}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} + \mathbf{e}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0) + (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1}(\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)]. \quad (2.34)$$

Jelikož pouze \mathbf{e}_{t+1} je náhodná a ostatní proměnné v podmíněné střední hodnotě jsou pevné, hledáme hodnotu \mathbf{X}_{t+1} , která minimalizuje

$$V_{t+1} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0) + (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1}(\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0) + \mathbb{E}_t[\mathbf{e}_{t+1}^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{e}_{t+1}]. \quad (2.35)$$

Protože hodnota \mathbf{e}_{t+1} závisí pouze na hodnotách v čase $(t + 1)$ a nezávisí na informacích do času t , můžeme přepsat (2.35) bez použití podmíněné střední hodnoty

$$V_{t+1} = (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0) \\ + (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1} (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0) + \mathbb{E}[\mathbf{e}_{t+1}^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{e}_{t+1}].$$

Nyní uvedeme vybraná pravidla maticového derivování dle (Mardia a kol., 1979).

Tvrzení 2.1. Nechť \mathbf{a} je sloupcový vektor konstant délky n , \mathbf{A} je symetrická matice konstant $(n \times n)$ a \mathbf{x} , \mathbf{y} jsou sloupcové vektory proměnných délky n , kde \mathbf{y} nezávisí na \mathbf{x} . Pak platí:

- (i) $\frac{\partial \mathbf{a}^\top \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{a}$,
- (ii) $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}$,
- (iii) $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A} \mathbf{x}$,
- (iv) $\frac{\partial \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{y}$.

Důkaz. Viz (Mardia a kol., 1979). □

Za použití tvrzení 2.1 dostaneme derivaci (2.35) podle \mathbf{X}_{t+1}

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} &= \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(1)} + \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(2)} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{c}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(3)} - \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{Y}_{t+1}^0}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(4)} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial \mathbf{b}_t^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(5)} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{c}_{t+1}^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(6)} \\ &- \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(7)} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{t+1}^\top \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(8)} \\ &- \underbrace{\frac{\partial \mathbf{X}_{t+1}^\top \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}^0}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(9)} - \underbrace{\frac{\partial (\mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}}}_{(10)}. \end{aligned}$$

Jednotlivé členy zderivujeme následovně

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \frac{\partial(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} = \frac{\partial \mathbf{X}_{t+1}^\top \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(iii)}{=} 2\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1}, \\
(2) \quad & \frac{\partial(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} = \frac{\partial \mathbf{X}_{t+1}^\top \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{b}_t}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(iv)}{=} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{b}_t \\
(3) \quad & \frac{\partial(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{c}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(iv)}{=} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{c}_{t+1} \\
(4) \quad & \frac{\partial(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{Y}_{t+1}^0}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(iv)}{=} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{Y}_{t+1}^0 \\
(5) \quad & \frac{\partial \mathbf{b}_t^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(i)}{=} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{b}_t \\
(6) \quad & \frac{\partial \mathbf{c}_{t+1}^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(i)}{=} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{c}_{t+1} \\
(7) \quad & \frac{\partial(\mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1})}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(i)}{=} \mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{Y}_{t+1}^0, \\
(8) \quad & \frac{\partial \mathbf{X}_{t+1}^\top \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(iii)}{=} 2\mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}, \\
(9) \quad & \frac{\partial \mathbf{X}_{t+1}^\top \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}^0}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(iv)}{=} \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}^0, \\
(10) \quad & \frac{\partial(\mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} \stackrel{(i)}{=} \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}^0.
\end{aligned}$$

Položení derivace rovné nule

$$\frac{\partial V_{t+1}}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} = 2\{\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0) + \mathbf{P}_{t+1}(\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)\} = 0$$

vede k optimální hodnotě

$$\mathbf{X}_{t+1}^* = (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top + \mathbf{P}_{t+1})^{-1} [\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1}(\mathbf{Y}_{t+1}^0 - \mathbf{b}_t - \mathbf{c}_{t+1}) + \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}^0] \quad (2.36)$$

za předpokladu, že matice $\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top + \mathbf{P}_{t+1}$ je regulární.

Pokud položíme $\mathbf{P}_{t+1} = 0$, odebereme tím omezení na exogenní proměnné \mathbf{X}_{t+1} . V tom případě je nutné, aby matice $\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top$ byla regulární. Toho lze docílit, když počet exogenních proměnných r je menší nebo roven počtu vysvětlovaných proměnných k . V případě, kdy $r > k$, je matice $\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top$ singulární, neboť má rozměr $r \times r$, ale hodnost je maximálně k . Za těchto okolností můžeme v (2.36) použít pseudoinverzní matici (viz (Anděl, 2007)). Stejně lze postupovat v případě, že $\mathbf{P}_{t+1} \neq 0$.

Vraťme se nyní k vyjádření (2.33). Známe-li vývoj \mathbf{Y}_t a \mathbf{X}_t do času t , budoucí hodnoty \mathbf{X}_{t+1} a \mathbf{c}_{t+1} , má předpověď o jeden krok dopředu tvar

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(1) = \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1}. \quad (2.37)$$

Nyní chceme najít \mathbf{X}_{t+1}^* tak, aby předpověď $\widehat{\mathbf{Y}}_t(1)$ byla co nejbližší požadované hodnotě \mathbf{Y}_{t+1}^0 . Chceme tedy minimalizovat $(\widehat{\mathbf{Y}}_t(1) - \mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\widehat{\mathbf{Y}}_t(1) - \mathbf{Y}_{t+1}^0)$ vzhledem k \mathbf{X}_{t+1} . Označme

$$V_{t+1}^* = (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0).$$

Aplikací stejného postupu jako výše dostaneme derivaci

$$\frac{\partial V_{t+1}^*}{\partial \mathbf{X}_{t+1}} = 2\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{c}_{t+1} - \mathbf{Y}_{t+1}^0).$$

To vede k řešení

$$\mathbf{X}_{t+1}^* = (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{B}^\top)^{-1} [\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+1} (\mathbf{Y}_{t+1}^0 - \mathbf{b}_t - \mathbf{c}_{t+1})],$$

které je jednoznačné pro $r \leq k$. Pro $r > k$ klademe $\widehat{\mathbf{Y}}_t(1) = \mathbf{Y}_{t+1}^0$. Po dosazení $\mathbf{P}_{t+1} = 0$ do (2.35) v tom případě dostaneme vzhledem k (2.37)

$$V_{t+1} = \mathbf{E}[\mathbf{e}_{t+1}^\top \mathbf{Q}_{t+1} \mathbf{e}_{t+1}] = \text{tr}\{\mathbf{Q}_{t+1} \boldsymbol{\Sigma}_e\}.$$

Výše uvedené postupy se mohou aplikovat i na případ, kdy \mathbf{X}_t ovlivňuje proměnnou \mathbf{Y}_t zpožděně o $b > 0$ kroků. Pak lze upravit ARMAX model (2.15) na obecnější zápis

$$\mathbf{Y}_t + \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\Phi}_j \mathbf{Y}_{t-j} = \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t-b} + \sum_{j=1}^s \boldsymbol{\Theta}_j^* \mathbf{X}_{t-b-j} + \mathbf{e}_t + \sum_{j=1}^q \boldsymbol{\Theta}_j \mathbf{e}_{t-j}.$$

Proměnné \mathbf{X}_{t+1} tedy neovlivní vysvětlovanou proměnnou až do času $t+b+1$, a tedy v čase t chceme minimalizovat ztrátovou funkci

$$V_{t+b+1} = \mathbf{E}_t[(\mathbf{Y}_{t+b+1} - \mathbf{Y}_{t+b+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+b+1} (\mathbf{Y}_{t+b+1} - \mathbf{Y}_{t+b+1}^0) + (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1} (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)]. \quad (2.38)$$

Předpověď o $(b+1)$ kroků dopředu má tvar

$$\widehat{\mathbf{Y}}_t(b+1) = \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t, \quad (2.39)$$

kde

$$\mathbf{b}_t = - \sum_{j=1}^p \boldsymbol{\Phi}_j \widehat{\mathbf{Y}}_t(b+1-j) + \sum_{j=1}^s \boldsymbol{\Theta}_j^* \mathbf{X}_{t+1-j} + \sum_{j=b+1}^q \boldsymbol{\Theta}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j}.$$

Jak jsme ukázali v kapitole 2.3.2, chyba předpovědi¹ o l kroků je

$$\mathbf{Y}_{t+l} - \tilde{\mathbf{Y}}_t(l) = \sum_{j=0}^{l-1} \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+l-j},$$

a tedy chyba o $(b+1)$ kroků je

$$\mathbf{Y}_{t+b+1} - \tilde{\mathbf{Y}}_t(b+1) = \sum_{j=0}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j}.$$

Potom můžeme \mathbf{Y}_{t+b+1} vyjádřit následovně

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{t+b+1} &= \hat{\mathbf{Y}}_t(b+1) + \mathbf{e}_{t+b+1} + \sum_{j=1}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j} \\ &= \mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t + \mathbf{e}_{t+b+1} + \sum_{j=1}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Po dosazení do (2.38), dostaneme

$$\begin{aligned} V_{t+b+1} &= (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t - \mathbf{Y}_{t+b+1}^0)^\top \mathbf{Q}_{t+b+1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{b}_t - \mathbf{Y}_{t+b+1}^0) \\ &\quad + (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0)^\top \mathbf{P}_{t+1} (\mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_{t+1}^0) \\ &\quad + \mathbf{E} \left[(\mathbf{e}_{t+b+1} + \sum_{j=1}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j})^\top \mathbf{Q}_{t+b+1} (\mathbf{e}_{t+b+1} + \sum_{j=1}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j}) \right]. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Minimalizací vzhledem \mathbf{X}_{t+1} dostaneme za použití tvrzení 2.1 následující řešení

$$\mathbf{X}_{t+1}^* = (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+b+1} \mathbf{B}^\top)^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{Q}_{t+b+1} (\mathbf{Y}_{t+b+1}^0 - \mathbf{b}_t) + \mathbf{P}_{t+1} \mathbf{X}_{t+1}^0).$$

Stejně jako v předchozím případě, kdy exogenní proměnné ovlivňovaly vysvětlovanou proměnnou bez časového posunutí, bude opět předpověď $\hat{\mathbf{Y}}_t(b+1)$ nejbližší stanovené hodnotě \mathbf{Y}_{t+b+1}^0 , pokud položíme $\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{0}$. Pokud navíc budeme mít $r \geq k$, potom opět optimální hodnota \mathbf{X}_{t+1}^* povede k rovnosti $\hat{\mathbf{Y}}_t(b+1) = \mathbf{Y}_{t+b+1}^0$, a tedy minimum ztrátové funkce se redukuje na následující tvar

$$\begin{aligned} V_{t+b+1} &= \mathbf{E} \left[(\mathbf{e}_{t+b+1} + \sum_{j=1}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j})^\top \mathbf{Q}_{t+b+1} (\mathbf{e}_{t+b+1} + \sum_{j=1}^b \boldsymbol{\Psi}_j \mathbf{e}_{t+b+1-j}) \right] \\ &= \text{tr} \{ \mathbf{Q}_{t+b+1} \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(b+1) \}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}(b+1) = \sum_{j=0}^b \boldsymbol{\Psi}_j \boldsymbol{\Sigma}_e \boldsymbol{\Psi}_j^\top$ z (2.31).

¹tuto chybu předpovědi můžeme použít, protože předpokládáme, že \mathbf{X}_{t+1} nemá na endogenní proměnnou vliv do času $t+b+1$

2.5 Volba řádů ARMAX modelu

První fází konstrukce modelu pro daná data délky T je jeho identifikace, která spočívá v určení správných řádů p , q , s v rovnici (2.15). Ty lze identifikovat například pomocí autokorelační funkce (ACF) a parciální autokorelační funkce (PACF), ale tyto postupy nejsou zcela automatizovatelné, jelikož vyžadují subjektivní analýzu grafů odhadnutých ACF a PACF. V mnohorozměrném případě jsou navíc ACF a PACF maticové funkce, jak bylo naznačeno v kapitole 1. Proto zde uvedeme pouze statistická kritéria, která se využívají k rozhodnutí, zda je zvolený model pro data vhodný, případně napomáhají k volbě mezi několika modely.

Nejčastěji používaným je *AIC kritérium* (Akaikeho informační kritérium). Dle (Reinsel, 2003) je obecný tvar AIC kritéria pro mnohorozměrné časové řady

$$AIC(k) = \log(|\widehat{\Sigma}|) + \frac{2m}{T},$$

kde $\widehat{\Sigma}$ je odhad rozptylu reziduální složky, m je počet parametrů modelu a T je počet pozorování. V našem případě tedy máme

$$AIC(p, q, s) = \log(|\widehat{\Sigma}_e|) + \frac{2[k^2(p+q) + kr(s+1)]}{T}, \quad (2.43)$$

kde $|\widehat{\Sigma}_e|$ je determinant z odhadu rozptylové matice procesu bílého šumu $\Sigma_e = \text{var}(e_t)$. Řády modelu volíme tak, aby hodnota AIC byla minimální.

Dalším používaným kritériem je *BIC* (Bayesovo informační kritérium)

$$BIC(p, q, s) = \log(|\widehat{\Sigma}_e|) + 2[k^2(p+q) + kr(s+1)] \frac{\log T}{T}, \quad (2.44)$$

přičemž opět volíme model s takovými řády, které hodnotu BIC minimalizují .

2.6 Odhad parametrů ARMAX modelu

2.6.1 Podmíněná metoda maximální věrohodnosti

Budeme se zabývat podmíněnou metodou maximální věrohodnosti pro odhad parametrů v modelu (2.15)

$$\mathbf{Y}_t + \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{Y}_{t-j} = \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \mathbf{X}_{t-j} + e_t + \sum_{j=1}^q \Theta_j e_{t-j},$$

na základě známých hodnot procesů \mathbf{Y}_t a \mathbf{X}_t , $t = 1, \dots, T$ a za podmínky, že známe počáteční hodnoty $\mathbf{Y}_{1-p}, \dots, \mathbf{Y}_{-1}, \mathbf{Y}_0, \mathbf{X}_{1-s}, \dots, \mathbf{X}_{-1}, \mathbf{X}_0$. Počáteční hodnoty bílého šumu $\mathbf{e}_{1-q}, \dots, \mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_0$ předpokládáme nulové. Dále předpokládáme mnohorozměrné normální rozdělení bílého šumu \mathbf{e}_t s nulovou střední hodnotou a rozptylovou maticí Σ_e .

Nejprve vyjádříme \mathbf{e}_t ze vztahu (2.15)

$$\mathbf{e}_t = \mathbf{Y}_t + \sum_{j=1}^p \Phi_j \mathbf{Y}_{t-j} - \sum_{j=0}^s \Theta_j^* \mathbf{X}_{t-j} - \sum_{j=1}^q \Theta_j \mathbf{e}_{t-j}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.45)$$

Věrohodnostní funkce je hustota sdruženého rozdělení reziduí $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_T$, přičemž vycházíme z předpokladu, že $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_T$ jsou vzájemně nezávislé. Má tedy tvar

$$L(\Phi, \Theta^*, \Theta, \Sigma_e | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_T, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T) = \prod_{t=1}^T ((2\pi)^k |\Sigma_e|)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{-\mathbf{e}_t^\top \Sigma_e^{-1} \mathbf{e}_t}{2} \right\}, \quad (2.46)$$

odtud dostaneme logaritmickou věrohodnostní funkci, kterou stačí maximalizovat ve tvaru

$$l(\Phi, \Theta^*, \Theta, \Sigma_e | \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_T, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T) = -\frac{T}{2} \log |\Sigma_e| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \mathbf{e}_t^\top \Sigma_e^{-1} \mathbf{e}_t. \quad (2.47)$$

Vyjádření \mathbf{e}_t v rovnici (2.45) obsahuje na pravé straně své zpožděné hodnoty, ale pro maximalizaci logaritmické věrohodnostní funkce je zapotřebí vyjádřit \mathbf{e}_t pouze pomocí endogenních a exogenních proměnných a parametrů. Proto zavedeme tzv. vektorizaci, která nám umožní vyjádřit \mathbf{e}_t bez použití zpožděných hodnot na pravé straně.

Nejdříve vyjádříme rovnici (2.15) maticově pro všechna $t = 1, \dots, T$ současně.

$$\mathbf{Y} + \sum_{i=1}^p B^i \mathbf{Y} \Phi_i^\top - \sum_{i=0}^s B^i \mathbf{X} \Theta_i^{*T} = \mathbf{e} + \sum_{i=1}^q B^i \mathbf{e} \Theta_i^\top, \quad (2.48)$$

kde

- $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_T)^\top$,
- $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_T)^\top$,
- $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_T)^\top$,
- $B^i \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_{1-i}, \dots, \mathbf{Y}_{T-i})^\top$,

- $B^i \mathbf{X} = (\mathbf{X}_{1-i}, \dots, \mathbf{X}_{T-i})^\top$,
- $B^i \mathbf{e} = (\mathbf{e}_{1-i}, \dots, \mathbf{e}_{T-i})^\top$.

Příklad. Uvažujme opět proces ARMAX(1,1,1) a $k = 2$, $r = 4$:

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} Y_{1t} & Y_{2t} \\ \vdots & \vdots \\ Y_{1T} & Y_{2T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} & Y_{2,t-1} \\ \vdots & \vdots \\ Y_{1,T-1} & Y_{2,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{21} \\ \Phi_{12} & \Phi_{22} \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} X_{1t} & \cdots & X_{4t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1T} & \cdots & X_{4T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{0,11}^* & \Theta_{0,21}^* \\ \vdots & \vdots \\ \Theta_{0,14}^* & \Theta_{0,24}^* \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} X_{1,t-1} & \cdots & X_{4,t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1,T-1} & \cdots & X_{4,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{1,11}^* & \Theta_{1,21}^* \\ \vdots & \vdots \\ \Theta_{1,14}^* & \Theta_{1,24}^* \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} e_{1t} & e_{2t} \\ \vdots & \vdots \\ e_{1T} & e_{2T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{1,t-1} & e_{2,t-1} \\ \vdots & \vdots \\ e_{1,T-1} & e_{2,T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{21} \\ \Theta_{12} & \Theta_{22} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Definice 2.1. Necht \mathbf{A} je matice o rozměru $k \times l$. Vektorizací matice \mathbf{A} nazýváme vektor $\mathbf{a} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{k1}, a_{12}, \dots, a_{k2}, \dots, a_{1l}, \dots, a_{kl})^\top$. Vektorizaci matice \mathbf{A} značíme $\mathbf{a} = \text{vec}(\mathbf{A})$.

Definice 2.2. Necht \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou matice rozměrů $k \times l$ a $m \times n$. Kroneckerův součin matic \mathbf{A} a \mathbf{B} je matice tvaru

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1l}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2l}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}\mathbf{B} & a_{k2}\mathbf{B} & \cdots & a_{kl}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

kde

$$a_{11}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Kroneckerův součin značíme $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$.

Označme

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \text{vec}(\mathbf{Y}^\top) = (\mathbf{Y}_1^\top, \dots, \mathbf{Y}_T^\top)^\top, & B^i \mathbf{y} &= \text{vec}[(B^i \mathbf{Y})^\top], \\ \mathbf{x} &= \text{vec}(\mathbf{X}^\top) = (\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_T^\top)^\top, & B^i \mathbf{x} &= \text{vec}[(B^i \mathbf{X})^\top], \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{vec}(\mathbf{e}^\top) = (\mathbf{e}_1^\top, \dots, \mathbf{e}_T^\top)^\top, & B^i \boldsymbol{\varepsilon} &= \text{vec}[(B^i \mathbf{e})^\top], \\ \boldsymbol{\phi}_i &= \text{vec}(\boldsymbol{\Phi}_i), \text{ pro } i = 1, \dots, p, & \boldsymbol{\theta}_i &= \text{vec}(\boldsymbol{\Theta}_i), \text{ pro } i = 1, \dots, q.\end{aligned}$$

Dle (Mardia a kol., 1979) ještě zavedeme pomocné tvrzení.

Tvrzení 2.2. Nechť \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} jsou matice korespondujících rozměrů. Potom vektorizací jejich součinu dostaneme

$$\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^\top \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B}).$$

Důkaz. Viz (Mardia a kol., 1979). □

Nyní vyjádření (2.48) transponujeme a použijeme vektorizaci a s využitím tvrzení 2.2 dostaneme

$$\mathbf{y} + \sum_{i=1}^p (B^i \mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\phi}_i - \sum_{i=0}^s (B^i \mathbf{X} \otimes \mathbf{I}_r) \boldsymbol{\theta}_i^* = \boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{i=1}^q (B^i \mathbf{e} \otimes \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\theta}_i, \quad (2.49)$$

kde \mathbf{I}_j je jednotková matice rozměru $j \times j$.

Pro vyjádření $\boldsymbol{\varepsilon}$ z pravé strany rovnice, zavedeme matici zpětného posunutí \mathbf{P} rozměru $T \times T$, která má pod hlavní diagonálou jedničky, jinde nuly. S využitím podmínky na nulové počáteční hodnoty bílého šumu $(\mathbf{e}_{1-q}, \dots, \mathbf{e}_{-1}, \mathbf{e}_0)$, můžeme psát

$$B^i \mathbf{e} = \mathbf{P}^i \mathbf{e} = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{T-i})^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{k1} \\ e_{12} & e_{22} & \cdots & e_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{1,T-i} & e_{2,T-i} & \cdots & e_{k,T-i} \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{aligned}B^i \boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{P}^i \otimes \mathbf{I}_k) \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{0}^\top, \dots, \mathbf{0}^\top, \mathbf{e}_1^\top, \dots, \mathbf{e}_{T-i}^\top)^\top \\ &= (0, 0, \dots, 0, e_{11}, \dots, e_{k1}, \dots, e_{1,T-i}, \dots, e_{k,T-i})^\top.\end{aligned}$$

Potom můžeme vztah (2.49) přepsat na

$$\begin{aligned} \mathbf{y} + \sum_{i=1}^p (B^i \mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}_k) \phi_i - \sum_{i=0}^s (B^i \mathbf{X} \otimes \mathbf{I}_r) \theta_i^* &= \boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{i=1}^q (\mathbf{P}^i \mathbf{e} \otimes \mathbf{I}_k) \theta_i, \\ \mathbf{w} &= \boldsymbol{\varepsilon} + \sum_{i=1}^q (\mathbf{P}^i \otimes \boldsymbol{\Theta}_i) \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{w} &= \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned}$$

kde

$$\boldsymbol{\Theta} = (\mathbf{I}_T \otimes \mathbf{I}_k) + \sum_{i=1}^q (\mathbf{P}^i \otimes \boldsymbol{\Theta}_i).$$

Nyní dosadíme do (2.47) a dostaneme

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}^*, \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Sigma}_e) &= -\frac{T}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}_e| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top (\mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1}) \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= -\frac{T}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}_e| - \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top (\boldsymbol{\Theta}^{-1})^\top (\mathbf{I}_T \otimes \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1}) \boldsymbol{\Theta}^{-1} \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

kde

$$\mathbf{w} = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^p (B^i \mathbf{Y} \otimes \mathbf{I}_k) \phi_i - \sum_{i=0}^s (B^i \mathbf{X} \otimes \mathbf{I}_r) \theta_i^*.$$

Maximalizací tohoto výrazu vzhledem k $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Theta}^*$, $\boldsymbol{\Theta}$ a $\boldsymbol{\Sigma}$ dojdeme k odhadům parametrů ARMAX modelu.

Příklad. Maticový zápis logaritmické věrohodnostní funkce procesu ARMAX(1,1,1) pro $k = 2$ a $r = 4$ má tvar

$$\begin{aligned} l(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Theta}^*, \boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\Sigma}_e) &= -\frac{T}{2} \log \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_{2T} \end{pmatrix} (\boldsymbol{\Theta}^{-1})^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Sigma}_e^{-1} \end{pmatrix} \boldsymbol{\Theta}^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{2T} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{2T-1} \\ w_{2T} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{11} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{1T} \\ Y_{2T} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{1,0} & 0 & Y_{2,0} & 0 \\ 0 & Y_{1,1} & 0 & Y_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{1,T-1} & 0 & Y_{2,T-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{0,11} \\ \Phi_{0,21} \\ \Phi_{0,12} \\ \Phi_{0,22} \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} X_{1,1} & 0 & X_{2,1} & 0 \\ 0 & X_{1,2} & 0 & X_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1,T} & 0 & X_{2,T} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{0,11}^* \\ \Theta_{0,21}^* \\ \Theta_{0,12}^* \\ \Theta_{0,22}^* \end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix} X_{1,0} & 0 & X_{2,0} & 0 \\ 0 & X_{1,1} & 0 & X_{2,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{1,T-1} & 0 & X_{2,T-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta_{1,11}^* \\ \Theta_{1,21}^* \\ \Theta_{1,12}^* \\ \Theta_{1,22}^* \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.6.2 Nepodmíněná metoda maximální věrohodnosti

V případě, že exogenní proměnné \mathbf{X}_t jsou stochastické a řídí se modelem AR-MA (viz (2.20)), můžeme pro odhad neznámých parametrů použít také odhad nepodmíněnou metodou maximální věrohodnosti. V takovém případě je vhodné uvažovat kombinovaný proces $\mathbf{Z}_t = (\mathbf{Y}_t^\top, \mathbf{X}_t^\top)^\top$ řídící se mnohorozměrným ARMA modelem. Tedy

$$\mathbf{Z}_t + \sum_{j=1}^p \bar{\Phi}_j \mathbf{Z}_{t-j} = \mathbf{u}_t + \sum_{j=1}^q \bar{\Theta}_j \mathbf{u}_{t-j}, \quad (2.51)$$

kde

$$\mathbf{u}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \Theta_0^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_t \\ \mathbf{a}_t \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Phi}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \Theta_0^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_j & -\Theta_j^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_j & -\Theta_j^* + \Theta_0^* \mathbf{A}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_j \end{bmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\bar{\Theta}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \Theta_0^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & -\Theta_0^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_j & -\Theta_j \Theta_0^* + \Theta_0^* \mathbf{C}_j \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_j \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

přičemž předpokládáme $p \geq s$ a $\Theta_j^* \equiv 0$ pro $j > s$.

Potom můžeme použít maximálně věrohodný odhad jako u mnohorozměrného ARMA modelu s podmínkou nulové matice v levém dolním bloku parametrů $\bar{\Phi}_j$ a $\bar{\Theta}_j$. Postup lze najít v (Reinsel, 2003).

2.7 Verifikace ARMAX modelu

Po odhadnutí parametrů je důležité model verifikovat.

Ověření stacionarity

Prvním krokem verifikace většinou bývá ověření stacionarity modelu. Jak bylo zmíněno výše, je potřeba, aby kořeny polynomu

$$|\hat{\Phi}(z)| = \det(\mathbf{I}_k + \hat{\Phi}_1 z + \dots + \hat{\Phi}_p z^p)$$

ležely vně jednotkového kruhu. Ekvivalentně lze požadovat, aby kořeny polynomu

$$\det(\mathbf{I}_k z^p + \hat{\Phi}_1 z^{p-1} + \dots + \hat{\Phi}_p)$$

ležely uvnitř jednotkového kruhu.

Normalita odhadnuté reziduální složky

Stejně jako u verifikace normality odhadnutých reziduí při odhadu soustavou simultánních rovnic, je potřeba normalitu otestovat i v případě odhadu ARMAX procesem. Při verifikaci normality se postupuje stejně jako v předchozí kapitole.

Nekorelovanost odhadnuté reziduální složky

Důležitým nástrojem pro ověření modelu je testování časové nekorelovanosti reziduální složky. V (Cipra, 2008) je uveden například k -rozměrný Q-test s kritickým oborem

$$\begin{aligned} Q_k &= T^2 \sum_{i=1}^K \frac{1}{T-i} \text{tr}\{\hat{\Gamma}(i)^\top \hat{\Gamma}(0)^{-1} \hat{\Gamma}(i) \hat{\Gamma}(0)^{-1}\} \\ &\geq \chi_{1-\alpha}^2(k^2(K-p-q) + kr(K-s-1)), \end{aligned} \quad (2.54)$$

kde $\hat{\Gamma}(i)$ je odhad maticové autokovarianční funkce podle definice 1.7 a $\chi_{1-\alpha}^2$ je $(1-\alpha)$ -kvantil chí-kvadrát rozdělení. Za hodnotu K se doporučuje volit \sqrt{T} .

Další možností je Bartlettova aproximace. Testují se hypotézy $\rho_{ij}(l) = 0$ s kritickým oborem

$$|r_{ij}(l)| \geq 2\sqrt{\frac{1}{T}}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (2.55)$$

kde $r_{ij}(l)$ jsou odhadnuté autokorelace a vzájemné autokorelace odhadnutých reziduálních složek podle definice 1.8.

3. Zpracování reálných dat

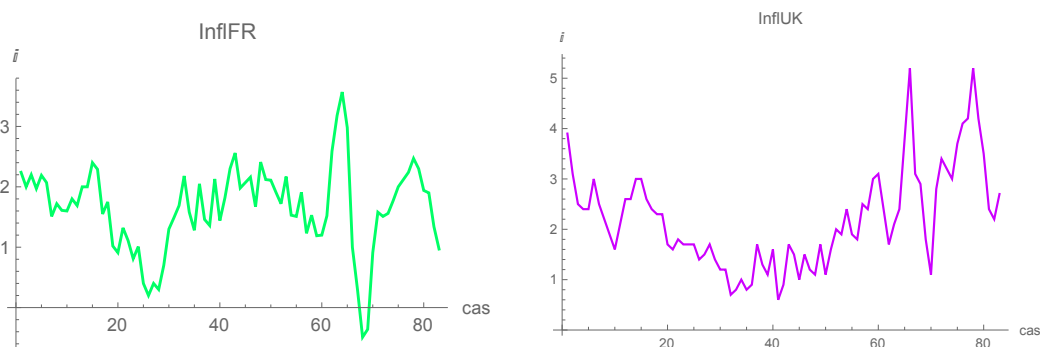
V této kapitole použijeme popsané metody pro analýzu mnohorozměrných časových řad na reálná data. Konkrétně se budeme zabývat dvourozměrnou časovou řadou hodnot míry inflace ve Velké Británii a ve Francii.

Nejprve popíšeme data pomocí mnohorozměrného ARMA modelu, tedy modelu bez použití exogenních proměnných. Potom budeme aplikovat model soustavy simultánních rovnic a nakonec se zaměříme na modelování dat ARMAX procesem. Na závěr zmíněné modely porovnáme. K výpočtům použijeme primárně software Mathematica 8.1 a 10.0, pro podpůrné výpočty také software R a EViews.

3.1 Modelování inflace ARMA procesem

V této kapitole se budeme zabývat modelováním roční míry inflace ve Velké Británii a ve Francii pomocí mnohorozměrného ARMA procesu. Budeme pracovat se čtvrtletními daty o délce 83, od 2. čtvrtletí roku 1992 do 4. čtvrtletí roku 2012. Data jsou získána z webových stránek (International Monetary Fund). Pozorujeme tedy 83 realizací náhodného vektoru $\mathbf{Y}_t = (Y_{1t}, Y_{2t})^\top$, $t = 1, \dots, 83$, kde Y_{1t} jsou hodnoty ve Francii a Y_{2t} ve Velké Británii.

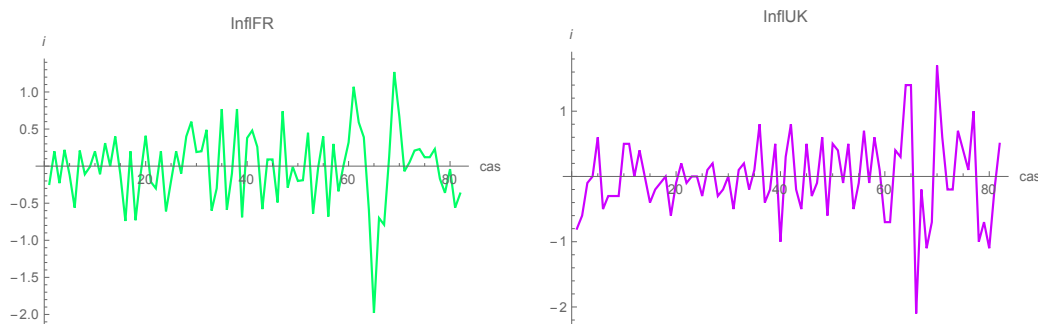
Na následujících grafech jsou vykresleny záznamy vývoje roční míry inflace v procentech, pozorováno kvartálně, v jednotlivých zemích.



Obrázek 3.1: Míry inflace ve Francii a ve Velké Británii

Jak je vidět z grafů, časové řady nejsou stacionární ani centrované. Podle (Cipra, 2008) můžeme pro testování stacionarity použít například Dickeyův-Fullerův test, který je zabudovaný v softwaru Mathematica (funkce *UnitRootTest*), a KPSS-test, který byl proveden v softwaru R. Dickeyův-Fullerův test ani

u jedné řady nulovou hypotézu nestacionarity s jednotkovým kořenem na hladině 5 % nezamítl (p-hodnoty 0.186 a 0.216). KPSS-test stacionaritu řady inflace ve Francii nezamítl, ale zamítl stacionaritu řady inflace ve Velké Británii na hladině 5 %. Proto jsme se rozhodli obě časové řady transformovat na první diference ($Y_{jt} - Y_{j,t-1}$), $j = 1, 2$, které lze interpretovat jako přírůstky míry inflace mezi čtvrtletími. Tím dostaneme řady na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Transformované časové řady

U takto transformovaných časových řad již Dickeyův-Fullerův test nulovou hypotézu jednotkového kořene (a tedy nestacionarity) na hladině 5 % zamítá (p-hodnoty jsou rovné nule). KPSS-test v tomto případě stacionaritu na hladině 5 % nezamítá.

Hodnoty výběrové maticové autokorelační funkce ukazují mírné vzájemné ovlivnění přírůstků míry inflace ve stejném i různých časech, až na hodnotu $r_{21}(1)$, která ukazuje silnější závislost inflace ve Velké Británii na zpožděných hodnotách inflace ve Francii o 1 období.

| Zpoždění l | $r_{11}(l)$ | $r_{12}(l)$ | $r_{21}(l)$ | $r_{22}(l)$ |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0 | 1 | 0.155 | 0.155 | 1 |
| 1 | -0.108 | -0.268 | 0.586 | 0.007 |
| 2 | -0.005 | -0.036 | 0.080 | -0.173 |

Tabulka 3.1: Výběrová maticová autokorelační funkce

Konstrukce modelu

V teoretické části práce jsme popsali podmíněnou metodu maximální věrohodnosti pro odhad parametrů. Optimalizační úloha hledající maximum logaritmicke věrohodnostní funkce (1.12) je však výpočetně velmi náročná a z technických důvodů se ji nepodařilo aplikovat. Proto jsme použili zabudované funkce v softwaru

Mathematica. Verze Mathematica 10.1 nabízí v základní verzi zabudovaný algoritmus *EstimatedProcess*, nicméně jeho použití na naše data nebylo možné, neboť při odhadu pomocí podmíněné maximální věrohodnosti nekonvergovaly příslušné procedury k řešení. Proto jsme použili software Mathematica 8.1, kde balíček *Time Series* nabízí zabudovanou proceduru *Hannan - Rissanen*, která je založena na odhadu metodou nejmenších čtverců. Dále pak balíček obsahuje i proceduru pro odhad parametrů podmíněnou ML metodou, která již v této verzi softwaru fungovala uspokojivě.

Algoritmus Hannan - Rissanen navrhl 4 vhodné modely: AR(1), AR(2), ARMA(1,1) a AR(3). Tyto modely jsme seřadili podle velikosti informačních kritérií (1.10) a (1.11). Jejich hodnoty jsou uvedeny pro všechny navržené procesy v tabulce 3.2.

| Model | AIC | BIC |
|-----------|-------|-------|
| AR(1) | -2.99 | -2.88 |
| AR(2) | -2.93 | -2.69 |
| ARMA(1,1) | -2.82 | -2.59 |
| AR(3) | -2.91 | -2.57 |

Tabulka 3.2: Hodnoty informačních kritérií

Ačkoli minimální hodnoty kritérií jsou v případě procesu AR(1), budeme dále pracovat s modelem ARMA(1,1), kterému se podrobněji věnuje teoretická část práce.

Metoda Hannan-Rissanen odhadla matice parametrů modelu ARMA(1,1) a varianční matice bílého šumu následovně (v Mathematice jsou parametry matice Φ s opačnými znaménky, kvůli rozdílnému zápisu ARMA modelu, proto byl výstup upraven podle teoretické části diplomové práce)

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} -0.168 & 0.216 \\ -0.858 & -0.064 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Theta} = \begin{pmatrix} -0.157 & 0.024 \\ -0.220 & 0.065 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.236 & -0.073 \\ -0.073 & 0.233 \end{pmatrix}.$$

Tyto odhady jsme ještě použili jako počáteční hodnoty v zabudované proceduře odhadu podmíněnou metodou maximální věrohodnosti, která poskytla následující výsledky

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} 0.158 & -0.034 \\ -2.205 & 0.052 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Theta} = \begin{pmatrix} 0.198 & -0.280 \\ -1.579 & 0.137 \end{pmatrix},$$

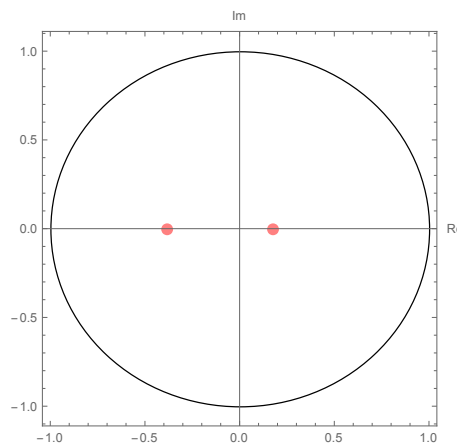
$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.220 & -0.059 \\ -0.059 & 0.202 \end{pmatrix}.$$

Pro výsledný odhadnutý model byla hodnota $AIC = -3.00$, a proto jsme se rozhodli s ním dále pracovat. Dosazením odhadů do (1.9) dostaneme

$$\begin{pmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.158 & -0.034 \\ -2.205 & 0.052 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.198 & -0.280 \\ -1.579 & 0.137 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{1,t-1} \\ e_{2,t-1} \end{pmatrix}.$$

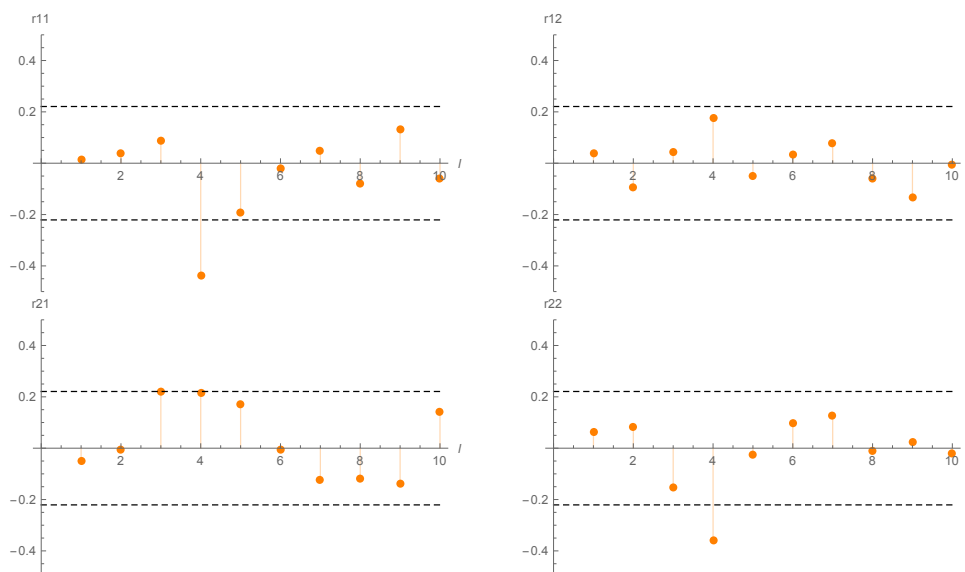
Verifikace modelu

Nejprve jsme ověřili stacionaritu odhadnutého modelu. Zabudovaná funkce v Mathematice, *WeakStationarity*, nám potvrdila slabou stacionaritu modelu. Pro stacionaritu modelu dle věty 1.1 stačí, aby kořeny polynomu $|\hat{\Phi}(z)| = \det(\mathbf{I} + \hat{\Phi}_1 z)$ ležely vně jednotkového kruhu. Pro lepší názornost zde vykreslíme kořeny polynomu $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_1)$, na něž klademe podmínku, aby ležely uvnitř jednotkového kruhu.



Obrázek 3.3: Znázornění kořenů polynomu $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_1)$

Dále jsme testovali nekorelovanost odhadnutého bílého šumu. Nejdříve jsme použili test pomocí Bartlettovy aproximace. Jednotlivé prvky odhadnuté maticové autokorelační funkce reziduální složky jsme porovnali s hodnotou 0.221 (viz (2.55)). Na následujících obrázcích jsou znázorněny prvky výběrových korelačních matic reziduí (červené body) a také porovnávací hodnota Bartlettovy aproximace (čárkovaně).



Obrázek 3.4: Hodnoty výběrových autokorelačních matic

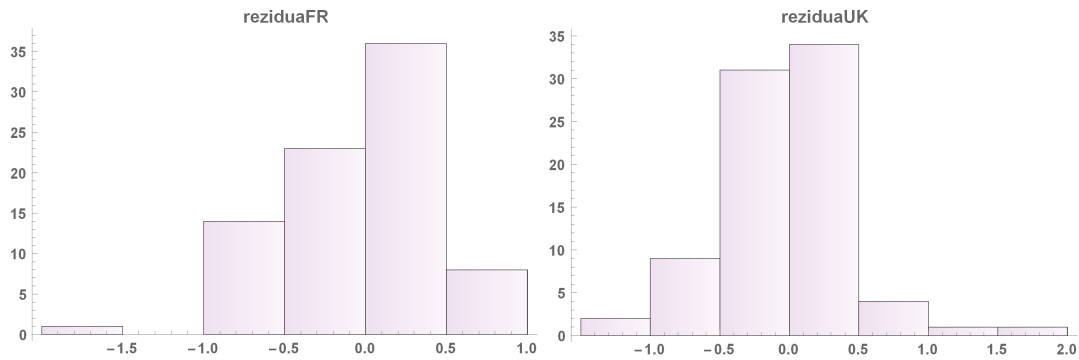
Jak je vidět, odhadnuté reziduální složky lze považovat za nekorelované, kromě tří hodnot překračující kritickou hranici. Konkrétně jsou to hodnoty $r_{11}(4) = 0.439$, $r_{21}(3) = 0.221$, $r_{22}(4) = 0.359$. Z toho lze usoudit, že některé korelace nejsou zanedbatelné. Jak je vidět, nejvýznamnější korelace jsou pro zpoždění $l = 4$. Protože se zabýváme čtvrtletními daty, lze usoudit, že časová řada inflace bude korelovaná ročně z důvodu její sezónnosti. Zahrnutí zpožděných hodnot až do řádu 4 by ale vedlo k přeparametrizování modelu.

Také jsme použili k -rozměrný Q-test s kritickým oborem (2.54). Testová statistika vyšla 52.790. Tuto hodnotu jsme porovnávali s hodnotou kvantilu chí-kvadrát rozdělení o 28 stupních volnosti na hladině $\alpha = 0.05$, tedy s hodnotou 41.337. Proto na hladině 5 % zamítáme nulovou hypotézu časové nekorelovanosti reziduí. I na hladině 1 % bychom nulovou hypotézu těsně zamítli. Důvodem zamítnutí je zřejmě již komentovaná významná autokorelace se zpožděním $l = 4$.

Shapiro-Wilkův test normalitu reziduí na hladině 5 % nezamítá. Hodnoty testu jsou vyčísleny v tabulce 3.3 a grafy příslušných histogramů jsou vykresleny na obrázku 3.5.

| Stát | Statistika | p-hodnota |
|---------|------------|-----------|
| Francie | 0.973 | 0.078 |
| UK | 0.974 | 0.098 |

Tabulka 3.3: Hodnoty Shapiro-Wilkova testu



Obrázek 3.5: Histogramy reziduí

3.2 Modelování inflace soustavou simultánních rovnic

V předchozí kapitole jsme modelovali míru inflace pouze s použitím jejích zpožděných hodnot a bílého šumu. V praxi však míru inflace mohou ovlivnit další veličiny. Proto nyní budeme modelovat míru inflace ve Velké Británii a ve Francii pomocí exogenních proměnných, a to konkrétně hrubého domácího produktu (HDP) a míry nezaměstnanosti v dané zemi. Použijeme k tomu soustavu simultánních rovnic (SEM). Výpočty byly provedeny v softwaru Mathematica 10.1.

Data pro jednotlivé státy byla opět získána z internetových stránek (International Monetary Fund). Máme k dispozici čtvrtletní data časových řad roční míry inflace [%], roční změny HDP a průměrné míry nezaměstnanosti [%] od 2. čtvrtletí roku 1992 do 4. čtvrtletí roku 2012.

Budeme odhadovat následující soustavu simultánních rovnic pro $t = 1, \dots, 83$

$$I_{1t} = \gamma_{12}I_{2t} + \beta_{11} + \beta_{12}HDP_{1t} + \beta_{13}N_{1t} + e_{1t},$$

$$I_{2t} = \gamma_{21}I_{1t} + \beta_{21} + \beta_{24}HDP_{2t} + \beta_{25}N_{2t} + e_{2t},$$

kde jsme použili následující veličiny:

- I_{jt} roční míra inflace [%] v j -té zemi v čase t ,
- HDP_{jt} roční změna hrubého domácího produktu,
- N_{jt} průměrná míra nezaměstnanosti [%] za období t ,
- $j = 1$ Francie,
- $j = 2$ Velká Británie.

Jak bylo popsáno v kapitole 2.1, je zapotřebí převést model do strukturálního tvaru (2.2). Položme proto

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} \\ \vdots & \vdots \\ I_{1,83} & I_{2,83} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & HDP_{11} & N_{11} & HDP_{21} & N_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & HDP_{1,83} & N_{1,83} & HDP_{2,83} & N_{2,83} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \\ \beta_{12} & 0 \\ \beta_{13} & 0 \\ 0 & \beta_{24} \\ 0 & \beta_{25} \end{pmatrix}.$$

Odhad parametrů

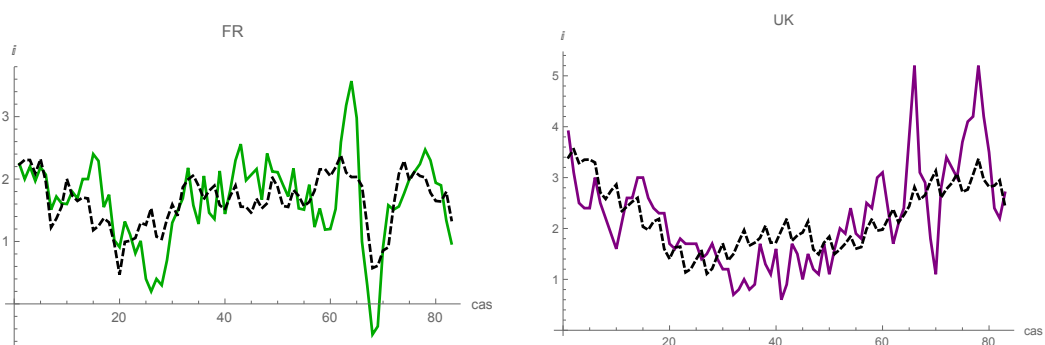
Odhad parametrů soustavy provedeme dvoustupňovou metodou, jak bylo popsáno v kapitole 2.1.2. Pro každou rovnici (2.5) zvlášť. Máme

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{e}_j.$$

Nejprve odhadneme hodnoty vysvětlujících endogenních proměnných v každé rovnici klasickou metodou nejmenších čtverců podle (2.6)

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}_j.$$

Obrázek 3.6 znázorňuje odhadnuté hodnoty \mathbf{Y}_j , $j = 1, 2$ (čárkovaně) spolu s původními časovými řadami míry inflace.



Obrázek 3.6: První stupeň 2SLS odhadu

Dále položíme podle (2.7)

$$\mathbf{y}_j = \widehat{\mathbf{Y}}_j \boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{X}_j \boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{e}_j$$

a s použitím (2.8) dostaneme odhad parametrů $\boldsymbol{\gamma}_j$ a $\boldsymbol{\beta}_j$ ve tvaru

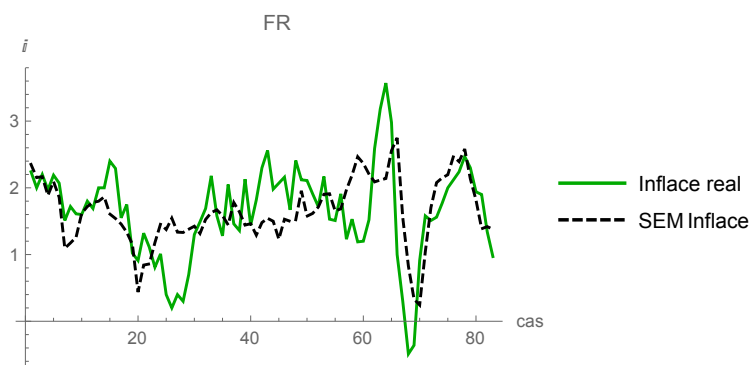
$$\begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.320 \\ 1.491 \\ 0.180 \\ -0.116 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\gamma}}_2 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.512 \\ -0.268 \\ -0.025 \\ 0.258 \end{pmatrix}.$$

Dosažením do původních rovnic dostaneme následující soustavu

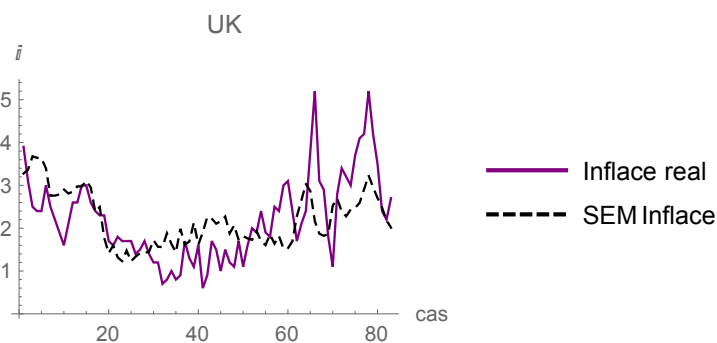
$$I_{1t} = 0.320I_{2t} + 1.491 + 0.180HDP_{1t} - 0.116N_{1t} + e_{2t}, \quad (3.1)$$

$$I_{2t} = 0.512I_{1t} - 0.268 - 0.025HDP_{2t} + 0.258N_{2t} + e_{1t}. \quad (3.2)$$

Následující obrázky znázorňují proložení časových řad modelem SEM.



Obrázek 3.7: Skutečné hodnoty míry inflace ve Francii s odhadnutými hodnotami



Obrázek 3.8: Skutečné hodnoty míry inflace v UK s odhadnutými hodnotami

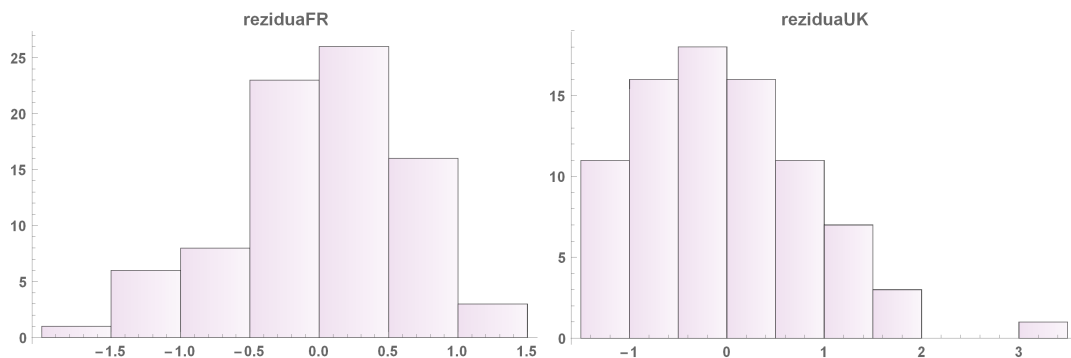
Verifikace modelu

Nejprve jsme ověřili normalitu reziduí. Na obrázku 3.9 jsou vykresleny příslušné histogramy. Na testování normality jsme použili Shapiro-Wilkův test, jehož výsledky jsou vyčísleny v tabulce 3.4. Na hladině 5 % nezamítá normalitu reziduí v rovnici pro Francii. V rovnici pro Velkou Británii je normalita na 5% hladině zamítnuta, proto bychom měli být opatrní při použití dalších statistických testů na odhadnutý model.

Zamítnutí normality reziduí v rovnici pro Velkou Británii (3.2) je způsobeno pravděpodobně několika odlehlými hodnotami, jak je vidět na obrázku 3.9. Tyto vyšší hodnoty reziduí jsou patrně důsledkem nepřesnosti odhadnutého modelu, které do odhadu přinesly výkyvy inflace ve Francii (regresor I_{1t} ve (3.2)). Viz poslední třetinu sledovaného období na obrázcích 3.7 a 3.8.

| Stát | Statistika | p-hodnota |
|---------|------------|-----------|
| Francie | 0.975 | 0.106 |
| UK | 0.967 | 0.029 |

Tabulka 3.4: Hodnoty Shapiro-Wilkova testu



Obrázek 3.9: Histogramy reziduí

Dále jsme testovali nulovost koeficientů u endogenních proměnných na pravé straně jednotlivých rovnic použitím (2.11), pro každou rovnici zvlášť. U obou rovnic se testová statistika porovnávala s kvantilem Studentova rozdělení $t_{79}(0.95) = 1.664$. Z výsledků bylo patrné, že nulovost obou parametrů se zamítla (testové statistiky byly 3.726 a 4.523).

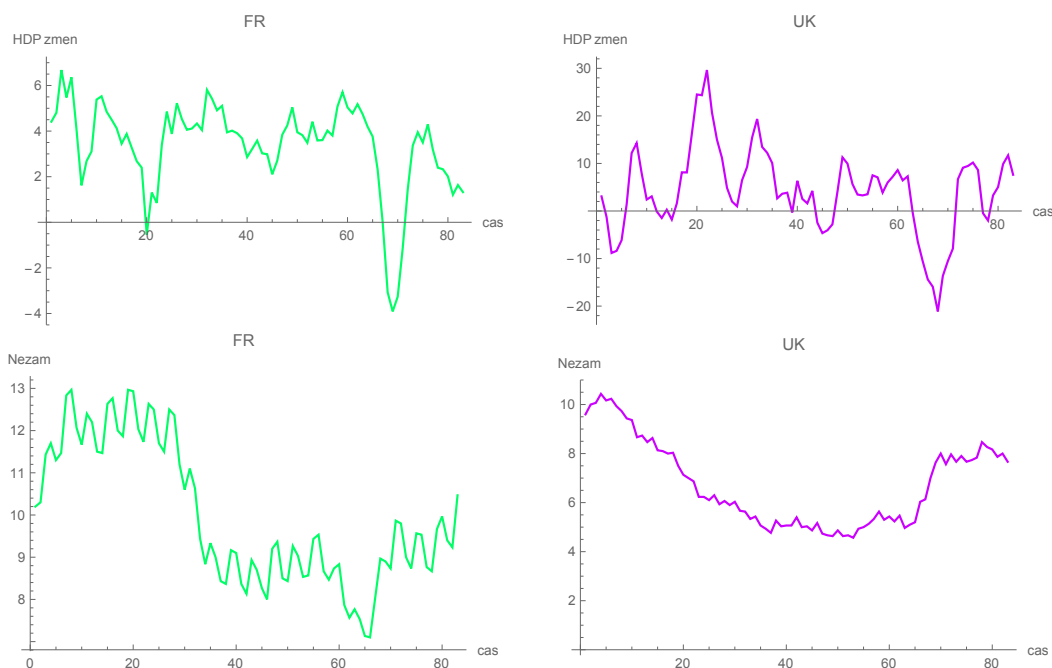
Poznámka. Výsledky získané v programu Mathematica 10.1 jsme srovnali s výstupy softwaru EViews. Ten má již zabudovanou funkci odhadu 2SLS-metodou a použití bylo velice jednoduché, přehledné a rychlé. Jak je vidět v tabulce 3.5, odhady parametrů jsou stejné jako vypočítané hodnoty v Mathematice.

| | | | | |
|--|-------------|--------------------|-------------|--------|
| System: SYS_INFL_2SLS | | | | |
| Estimation Method: Two-Stage Least Squares | | | | |
| Date: 11/19/14 Time: 09:39 | | | | |
| Sample: 1992Q2 2012Q4 | | | | |
| Included observations: 83 | | | | |
| Total system (balanced) observations 166 | | | | |
| | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Prob. |
| C(11) | 0.320445 | 0.112535 | 2.847513 | 0.0050 |
| C(12) | 1.490779 | 0.533297 | 2.795402 | 0.0058 |
| C(13) | 0.179875 | 0.035864 | 5.015527 | 0.0000 |
| C(14) | -0.116014 | 0.042144 | -2.752790 | 0.0066 |
| C(21) | 0.511556 | 0.226481 | 2.258715 | 0.0253 |
| C(22) | -0.268087 | 0.546272 | -0.490757 | 0.6243 |
| C(23) | -0.025321 | 0.010872 | -2.328893 | 0.0211 |
| C(24) | 0.257988 | 0.055992 | 4.607618 | 0.0000 |
| Determinant residual covariance | | 0.160525 | | |
| Equation: INFL_FR = C(11)*INFL_GB + C(12) + C(13)*GDP_FR+C(14)*UNEM_FR | | | | |
| Instruments: GDP_FR GDP_GB UNEM_BG UNEM_FR C | | | | |
| Observations: 83 | | | | |
| R-squared | 0.232296 | Mean dependent var | 1.647349 | |
| Adjusted R-squared | 0.203143 | S.D. dependent var | 0.704557 | |
| S.E. of regression | 0.628936 | Sum squared resid | 31.24924 | |
| Durbin-Watson stat | 0.753389 | | | |
| Equation: INFL_GB = C(21)*INFL_FR + C(22) + C(23)*GDP_GB+C(24)*UNEM_BG | | | | |
| Instruments: GDP_FR GDP_GB UNEM_BG UNEM_FR C | | | | |
| Observations: 83 | | | | |
| R-squared | 0.245406 | Mean dependent var | 2.203614 | |
| Adjusted R-squared | 0.216751 | S.D. dependent var | 0.988648 | |
| S.E. of regression | 0.874967 | Sum squared resid | 60.47987 | |
| Durbin-Watson stat | 0.635993 | | | |

Tabulka 3.5: Výstup softwaru EViews

3.3 Modelování ARMAX procesem

V tomto příkladu jsme analyzovali stejná data jako v kapitole 3.2. Na rozdíl od předchozího příkladu je zapotřebí pracovat se stacionárními časovými řadami. Jak jsme ukázali v příkladu 3.1, časové řady inflace stacionární nebyly a na obrázku 3.3 je vidět, že ani časové řady exogenních proměnných stacionární nejsou.



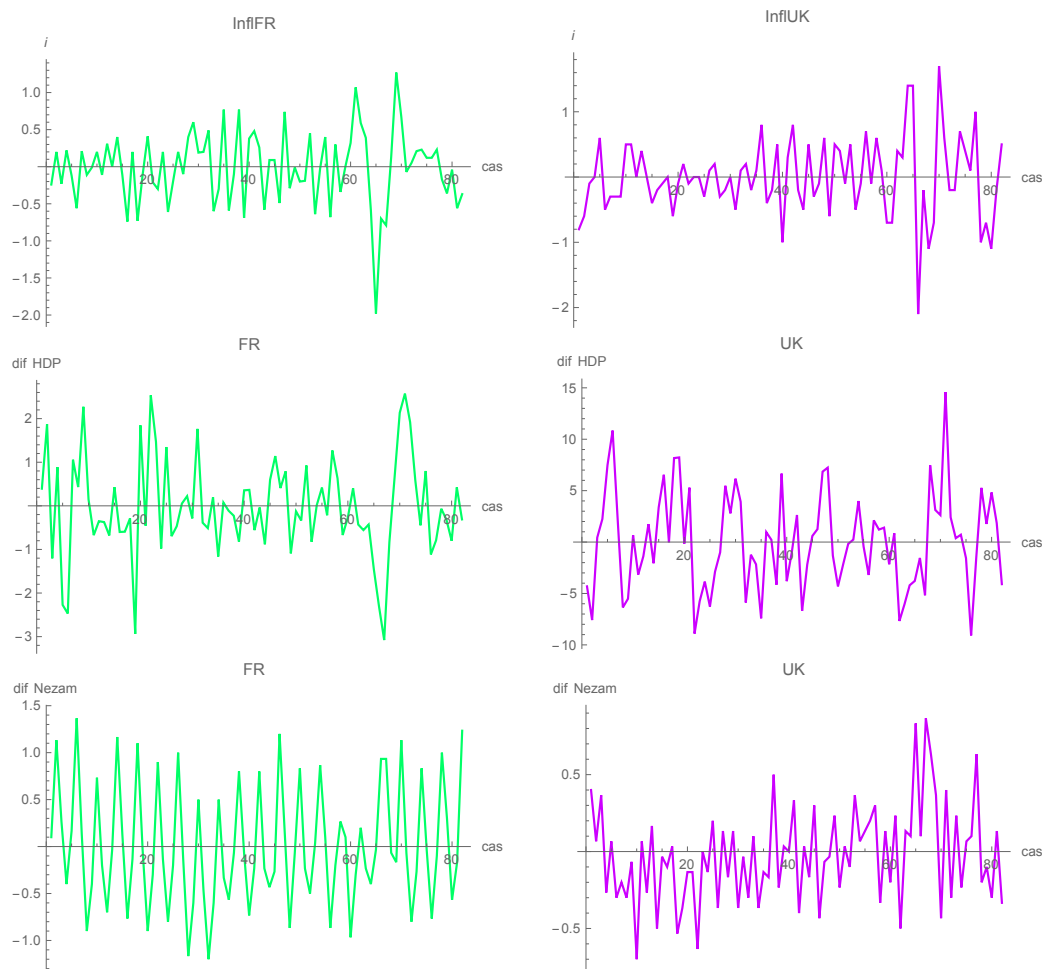
Obrázek 3.10: Vývoj exogenních proměnných

Opět jsme zvolili transformaci pomocí prvních diferencí. Budeme tedy pracovat s daty vykreslenými na obrázku 3.11.

Na ověření stacionarity jsme použili Dickeův-Fullerův test, jehož výsledky jsou v tabulce 3.6.

| Řada | Původní řady | 1. Diference |
|-----------------|--------------|--------------|
| <i>Infl_FR</i> | 0.186 | 0 |
| <i>Infl_UK</i> | 0.216 | 0 |
| <i>HDP_FR</i> | 0.169 | 0 |
| <i>HDP_UK</i> | 0.032 | 0 |
| <i>Nezam_FR</i> | 0.648 | 0 |
| <i>Nezam_UK</i> | 0.581 | 0 |

Tabulka 3.6: Dickeův-Fullerův test (p -hodnoty)



Obrázek 3.11: Transformované časové řady

Konstrukce modelu

Při použití metody podmíněné maximální věrohodnosti (2.50) pro odhad parametrů ARMAX modelu vznikly technické potíže při nelineární optimalizaci, neboť logaritmická věrohodnostní funkce obsahuje výpočet inverzní matice vysokého řádu ($kT \times kT$). Protože software Mathematica nemá zabudovanou funkci pro odhad parametrů modelů s exogenními proměnnými, rozhodli jsme se použít software R. V něm jsme použili balíček *dse*, který je možné použít i na ARMAX model.

V tomto balíčku je zabudovaná funkce *estMaxLik* odhadující parametry metodou maximální věrohodnosti. Tato funkce potřebuje mimo jiné jako vstupní hodnoty i počáteční hodnoty parametrů. Jelikož je tato funkce citlivá na volbu těchto počátečních hodnot, použijeme jako startovní hodnoty odhady parametrů pomocí softwaru Mathematica, které získáme použitím postupu popsaného v kapitole 2.6.2.

Nejprve si tedy vytvoříme kombinovaný proces $\mathbf{Z}_t = (\mathbf{Y}_t^\top, \mathbf{X}_t^\top)^\top$ a na tuto časovou řadu použijeme stejný odhad, jako v kapitole 3.1. Budeme vycházet z modelu

$$\mathbf{Z}_t + \sum_{j=1}^p \bar{\Phi}_j \mathbf{Z}_{t-j} = \mathbf{u}_t + \sum_{j=1}^q \bar{\Theta}_j \mathbf{u}_{t-j}. \quad (3.3)$$

V softwaru Mathematica 8.1 jsme použili zabudovanou proceduru *Hannan-Rissanen*, která navrhla 4 vhodné modely - AR(2), AR(1), MA(1) a ARMA(2,1). Při porovnání těchto modelů pomocí informačních kritérií AIC (1.10) a BIC (1.11) jsme se rozhodli pracovat s modelem ARMA(2,1), pro který byla hodnota AIC nejmenší. Hodnoty informačních kritérií jsou vyčísleny v tabulce 3.7.

| Model | AIC | BIC |
|-----------|-------|-------|
| AR(2) | -4.48 | -2.44 |
| AR(1) | -3.15 | -2.13 |
| MA(1) | -2.36 | -1.34 |
| ARMA(2,1) | -4.54 | -1.48 |

Tabulka 3.7: Hodnoty informačních kritérií

Přestože odhadnuté matice parametrů $\bar{\Phi}_j$ a $\bar{\Theta}_j$ nesplňovaly podmínku nulových hodnot v levém dolním bloku (v softwaru Mathematica nebylo možné klást tuto podmínku při výpočtu), dostali jsme kvalitní počáteční hodnoty matic parametrů modelu (3.4) pro výpočet odhadů v softwaru R. Startovací hodnoty matic parametrů jsme dostali postupným vyjádřením z odhadnutých matic $\bar{\Phi}_j$ a $\bar{\Theta}$ dle (2.52) a (2.53).

Protože jsme se rozhodli pro model ARMA(2,1), budeme odhadovat matice parametrů modelu ARMAX(2,2,1)

$$\mathbf{Y}_t + \Phi_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \Phi_2 \mathbf{Y}_{t-2} = \Theta_0^* \mathbf{X}_t + \Theta_1^* \mathbf{X}_{t-1} + \Theta_2^* \mathbf{X}_{t-2} + \mathbf{e}_t + \Theta_1 \mathbf{e}_{t-1}. \quad (3.4)$$

Rovnost řádů p a s v modelu ARMAX(p, q, s) obecně neplatí. Pokud se ale odhadují parametry pomocí kombinovaného procesu $\mathbf{Z}_t = (\mathbf{Y}_t^\top, \mathbf{X}_t^\top)^\top$, nastane rovnost.

Software R odhadl parametry modelu (3.4) následovně

$$\hat{\Phi}_1 = \begin{pmatrix} 0.224 & -0.057 \\ -2.851 & -0.363 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0.188 & 0.056 \\ 0.175 & -0.357 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Theta}_0^* = \begin{pmatrix} 0.108 & 0.000 & -0.207 & -0.400 \\ -0.012 & -0.010 & 0.126 & 0.194 \end{pmatrix},$$

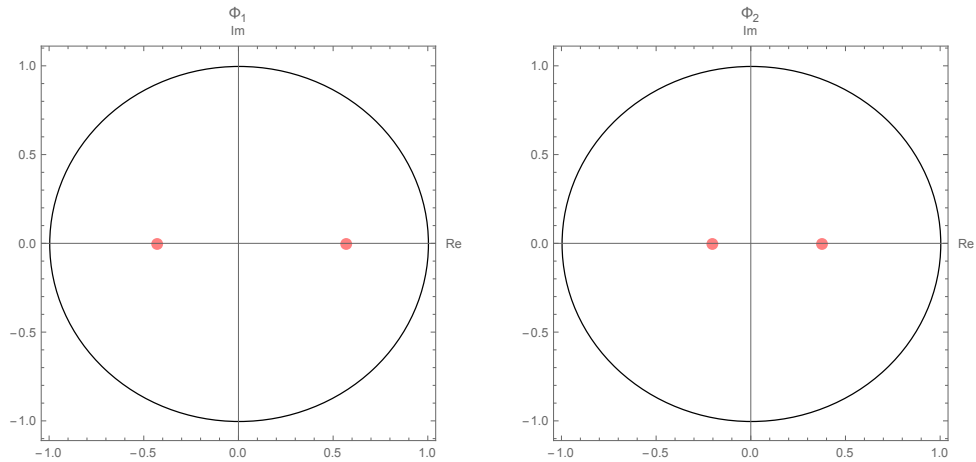
$$\hat{\Theta}_1^* = \begin{pmatrix} 0.028 & 0.010 & -0.060 & 0.210 \\ -0.216 & -0.018 & 0.203 & 0.486 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Theta}_2^* = \begin{pmatrix} -0.020 & -0.001 & -0.021 & 0.231 \\ 0.021 & 0.003 & 0.025 & -0.558 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\Theta}_1 = \begin{pmatrix} 0.183 & -0.452 \\ -2.334 & -0.136 \end{pmatrix}.$$

Verifikace modelu

Na obrázku 3.12 jsou graficky znázorněné kořeny polynomů $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_1)$ a $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_2)$. Jak je vidět, kořeny leží uvnitř jednotkového kruhu a tedy podmínka stacionarity je splněna.

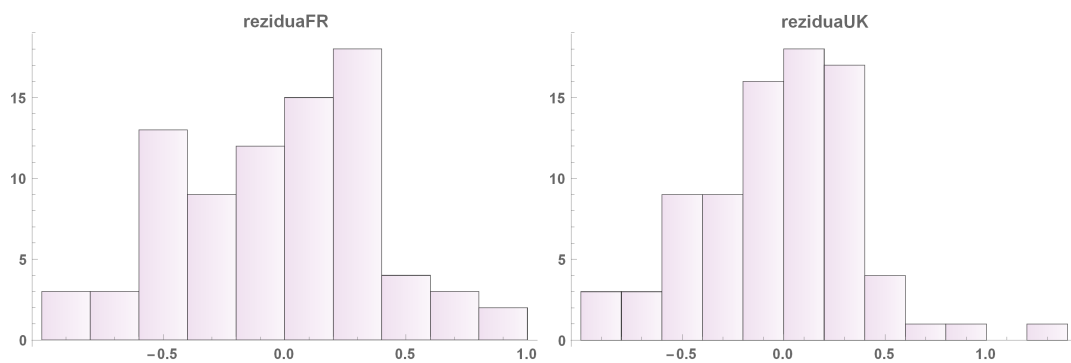


Obrázek 3.12: Znázornění kořenů $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_1)$ a $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_2)$

Normalitu reziduální složky Shapiro-Wilkův test na hladině 5 % nezamítl. Hodnoty testu jsou zobrazené v tabulce 3.8. Na obrázku 3.13 jsou uvedeny histogramy reziduální složky modelu.

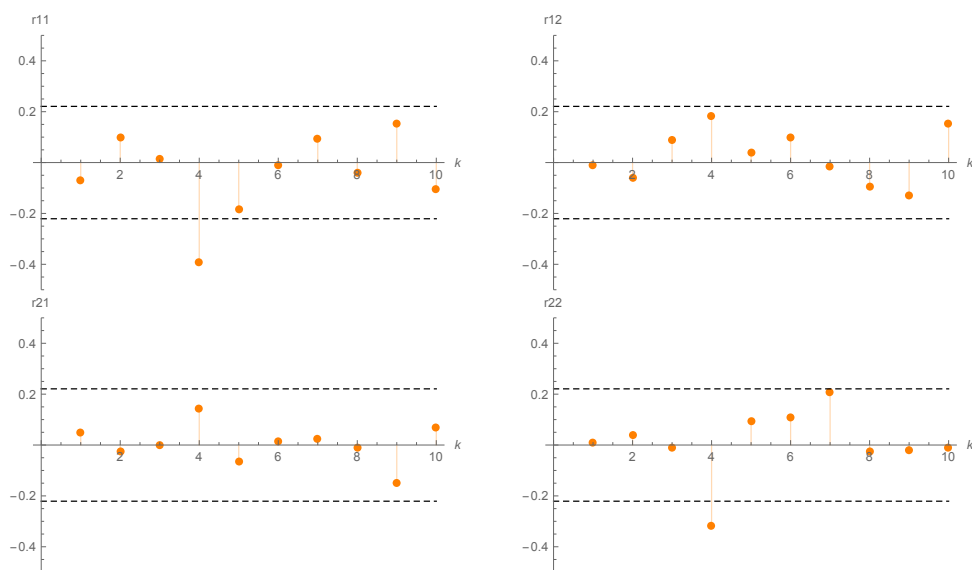
| Stát | Statistika | p-hodnota |
|---------|------------|-----------|
| UK | 0.979 | 0.192 |
| Francie | 0.975 | 0.110 |

Tabulka 3.8: Hodnoty Shapiro-Wilkova testu



Obrázek 3.13: Histogramy reziduí

Dále jsme také testovali nekorelovanost odhadnutých reziduí pomocí Bartlettovy aproximace. Na obrázku 3.14 můžeme vidět, že zamítáme na 5% hladině nekorelovanost ve dvou případech opět pro zpoždění 4. Protože pracujeme se čtvrtletními daty, ukazuje se, korelace mezi ročními daty nejsou zanedbatelné. Použití ARMAX modelu až do řádu 4 by ale vedlo k přeparametrizování modelu.



Obrázek 3.14: Hodnoty výběrových autokorelačních matic

3.4 Srovnání modelů

Nejprve jsme porovnali základní charakteristiky modelu, které jsou zobrazené v tabulkách 3.9 - 3.11 (vzorce pro výpočty lze nalézt v (Cipra, 2008)).

| Stát | Součet čtverců chyb | Odhad střední hodnoty chyb | Koeficient determinace | Adjustovaný koef. deter. |
|---------|---------------------|----------------------------|------------------------|--------------------------|
| UK | 17.201 | -0.013 | 0.407 | 0.385 |
| Francie | 17.862 | -0.018 | 0.075 | 0.040 |

Tabulka 3.9: Charakteristické vlastnosti ARMA(1,1) modelu

| Stát | Součet čtverců chyb | Odhad střední hodnoty chyb | Koeficient determinace | Adjustovaný koef. deter. |
|---------|---------------------|----------------------------|------------------------|--------------------------|
| UK | 60.480 | -5.506×10^{-15} | 0.245 | 0.217 |
| Francie | 31.249 | -4.048×10^{-15} | 0.232 | 0.203 |

Tabulka 3.10: Charakteristické vlastnosti SEM modelu

| Stát | Součet čtverců chyb | Odhad střední hodnoty chyb | Koeficient determinace | Adjustovaný koef. deter. |
|---------|---------------------|----------------------------|------------------------|--------------------------|
| UK | 12.756 | -0.023 | 0.561 | 0.544 |
| Francie | 13.814 | -0.024 | 0.285 | 0.257 |

Tabulka 3.11: Charakteristické vlastnosti ARMAX(2,2,1) modelu

Pro přehlednost modely označme:

- $Model_1 \sim ARMA(1,1)$,
- $Model_2 \sim SEM$,
- $Model_3 \sim ARMAX(2,2,1)$.

Součet čtverců chyb v druhém modelu je největší a to i přesto, že odhad střední hodnoty reziduí je nejmenší. Důvodem je několik odlehlých hodnot reziduí, jak ukazují histogramy na obrázku 3.9, zejména v případě modelování inflace ve Velké Británii, což je pravděpodobně způsobeno výkyvy hodnot inflace ve Francii.

Na první pohled se také zdá, že součet čtverců chyb při použití modelu₂ je značně větší, než při odhadování dat modelem₁ nebo modelem₃. Nicméně je

nutné vzít v úvahu, že v modelu_2 se pracovalo s původními daty a ve zbylých dvou modelech bylo zapotřebí časové řady transformovat na stacionární.

Při porovnávání použitých modelů je proto v tomto případě více vypovídající koeficient determinace.

V modelu_2 se v jednotlivých rovnicích vysvětlovaly hodnoty endogenních proměnných pouze na základě exogenních proměnných a pomocí ostatních endogenních proměnných. V modelu_3 pak do modelu vstupovaly exogenní proměnné a zpožděné hodnoty všech endogenních proměnných. Jak je vidět na základě koeficientů determinace modelu_2 a modelu_3, modelovaná data jsou lépe vysvětlována, pokud mezi regresory zahrneme i zpožděné hodnoty vysvětlované řady.

V modelu_1 vyšel koeficient determinace v případě modelování inflace ve Velké Británii podstatně větší (0.407), než u modelování inflace ve Francii (0.075), což vysvětluje významná závislost mezi inflací v UK a zpožděných hodnot inflace ve Francii (viz tabulka hodnot výběrové autokorelační funkce 3.1). Přidání exogenních proměnných v případě modelu_3 popis dat celkově vylepšilo. Koeficient determinace v případě modelování inflace ve Francii značně vzrostl, neboť jak ukazuje tabulka 3.12, transformovaná časová řada inflace ve Francii je méně či více korelovaná s transformovanými řadami exogenních proměnných.

| Korelace | Zpoždění $k = 0$ | Zpoždění $k = 1$ |
|-------------------------|------------------|------------------|
| $(infl_UK, HDP_UK)$ | -0.063 | -0.215 |
| $(infl_UK, nezam_UK)$ | -0.006 | -0.187 |
| $(infl_UK, HDP_FR)$ | 0.069 | 0.265 |
| $(infl_UK, nezam_FR)$ | 0.004 | -0.123 |
| $(infl_FR, HDP_FR)$ | 0.309 | 0.077 |
| $(infl_FR, nezam_FR)$ | -0.110 | -0.051 |
| $(infl_FR, HDP_UK)$ | -0.028 | 0.150 |
| $(infl_FR, nezam_UK)$ | -0.180 | 0.047 |

Tabulka 3.12: Výběrová maticová autokorelační funkce transformovaných řad

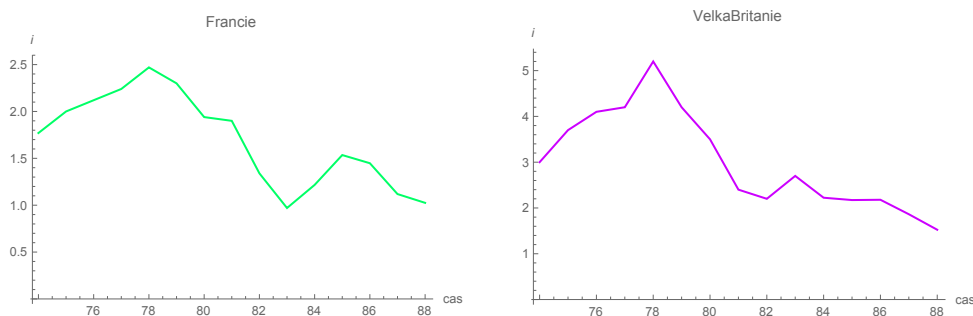
3.5 Konstrukce předpovědí

Nyní odhadnuté modely použijeme ke konstrukci předpovědí pěti budoucích hodnot, tedy vývoje inflace od prvního čtvrtletí roku 2013 do prvního čtvrtletí 2014.

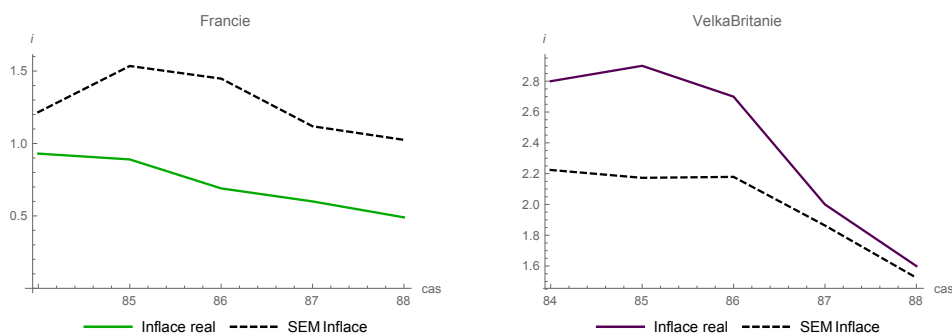
3.5.1 Známé budoucí exogenní proměnné

Předpověď soustavou simultánních rovnic

V případě známého vývoje budoucích exogenních proměnných můžeme použít odhadnutý model pomocí soustavy simultánních rovnic pro konstrukci předpovědí endogenních proměnných. Dosazením známých budoucích hodnot exogenních proměnných do (3.1) a (3.2) jsme dostali odhad očekávaného vývoje inflace ve Francii a Velké Británii, které jsou vykresleny spolu s deseti posledními hodnotami řady do čtvrtého čtvrtletí roku 2012 na obrázku 3.15. Na obrázku 3.16 je pak vykreslen odhad budoucího vývoje a skutečné hodnoty.



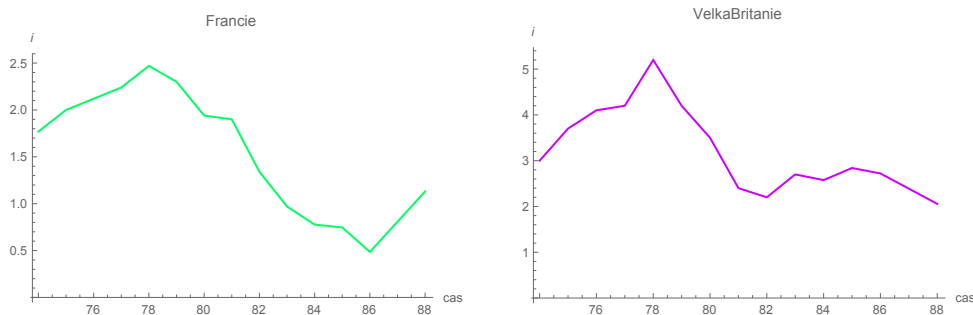
Obrázek 3.15: Předpověď modelem SEM



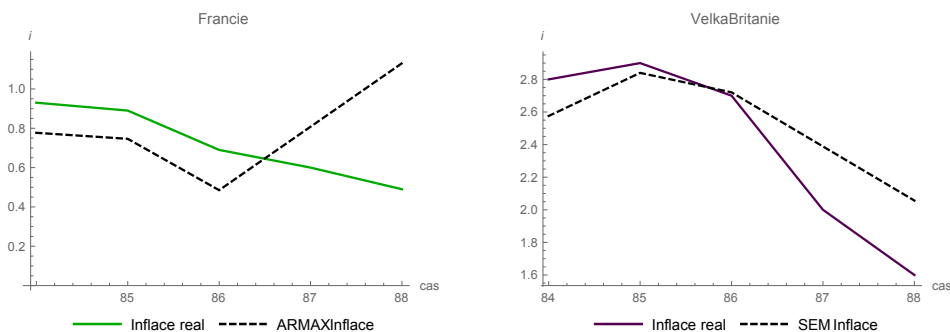
Obrázek 3.16: Předpověď spolu se skutečným vývojem

Předpověď ARMAX modelem

Odhadnutý model ARMAX(2,2,1) jsme použili ke konstrukci předpovědi transformovaných řad inflace za použití (2.30). Po zpětné transformaci jsme dostali 5 budoucích předpovědí původních časových řad. Na následujících obrázcích jsou tyto předpovědi vykresleny nejprve s 10 posledními hodnotami modelovaných řad a na obrázku 3.18 je pak znázorněn vývoj zkonstruované předpovědi spolu se skutečnými hodnotami inflace v období prvního čtvrtletí roku 2013 do prvního čtvrtletí roku 2014.



Obrázek 3.17: Předpověď modelem ARMAX(2,2,1)



Obrázek 3.18: Předpověď spolu se skutečným vývojem

Závěr

V tabulce 3.15 jsou zobrazeny chyby předpovědí oproti skutečnému vývoji. Potvrzuje se, že přesnost předpovědí se značně zvýšila po zavedení zpožděných hodnot v ARMAX modelu.

| Model | Francie | Velká Británie |
|--------------|---------|----------------|
| SEM | 1.628 | 1.157 |
| ARMAX(2,2,1) | 0.540 | 0.414 |

Tabulka 3.13: Součet čtverců chyb předpovědí inflace

3.5.2 Neznámé budoucí exogenní proměnné

Předpověď ARMAX modelem

V případě neznámých budoucích hodnot exogenních proměnných můžeme zkonstruovat předpověď pomocí ARMAX modelu za použití postupu uvedeného v kapitole 2.3.1.

Nejprve jsme předpověděli vývoj exogenních proměnných ARMA(2,1) modelem

$$\widehat{\mathbf{X}}_t(l) = \mathbf{C}_1 \mathbf{a}_{t+l-1} - \mathbf{A}_1 \widehat{\mathbf{X}}_t(l-1) - \mathbf{A}_2 \widehat{\mathbf{X}}_t(l-2),$$

kde $\widehat{\mathbf{X}}_t(l-j) = \mathbf{X}_{t+l-j}$ pro $l \leq j$ a $\mathbf{a}_{t+l-i} = 0$ pro $i < l$. Pro odhad matic parametrů \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , a \mathbf{C}_1 jsme použili software R, kde jsme jako počáteční hodnoty parametrů vzali hodnoty navržené procedurou Hannan-Rissanen (aplikovali jsme tedy stejný postup jako při odhadování parametrů ARMAX modelu). Software R odhadl matice parametrů následovně

$$\widehat{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} -0.409 & -0.167 & 0.060 & -0.413 \\ -2.139 & 0.357 & -1.352 & -0.574 \\ -0.534 & -0.082 & -0.353 & -1.539 \\ -0.051 & 0.004 & 0.265 & 0.552 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 0.085 & 0.008 & 0.151 & 0.302 \\ 0.335 & 0.066 & -1.399 & -0.317 \\ 0.091 & 0.018 & 0.833 & -0.105 \\ 0.030 & 0.026 & -0.304 & -0.642 \end{pmatrix},$$

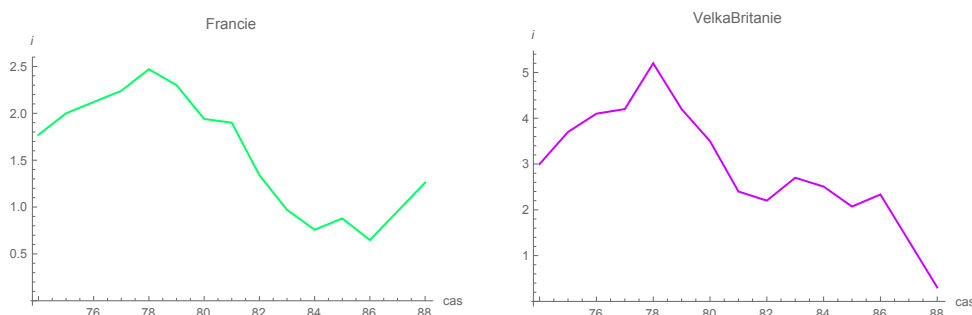
$$\widehat{\mathbf{C}}_1 = \begin{pmatrix} -0.239 & -0.149 & 0.418 & -1.154 \\ -2.264 & 0.816 & 0.730 & -1.514 \\ -0.588 & -0.086 & -0.050 & -1.077 \\ -0.053 & -0.021 & 0.362 & 0.861 \end{pmatrix}.$$

V tabulce 3.14 jsou koeficienty determinace jednotlivých složek exogenních proměnných modelovaných ARMA(2,1) procesem. Protože koeficient determinace HDP ve Francii je malý, lze očekávat nižší přesnost předpovědí.

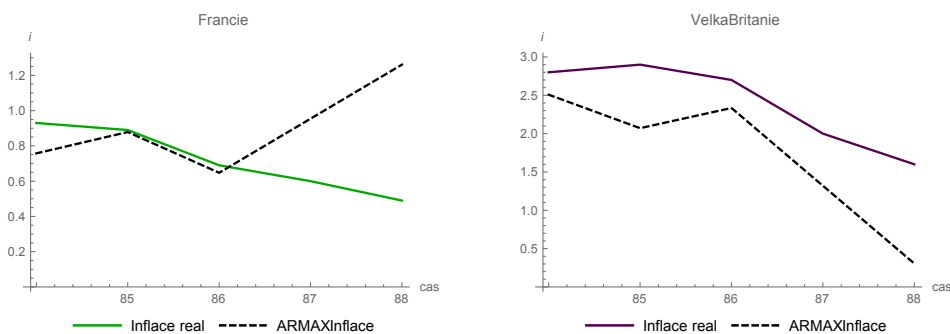
| Řada | HDP_FR | HDP_UK | Nezam_FR | Nezam_UK |
|------------------------|--------|--------|----------|----------|
| Koeficient determinace | 0.079 | 0.303 | 0.847 | 0.621 |

Tabulka 3.14: Charakteristické vlastnosti ARMA(2,1) odhadu

Použitím předpovědí exogenních proměnných jsme zkonstruovali 5 předpovědí vývoje inflace ve Francii a UK podle (2.21) a (2.22) a zpětně ztransformovali. Na obrázku 3.19 jsou zachycené předpovědi spolu s posledními deseti hodnotami vývoje inflace do 2012Q4. Potom na obrázku 3.20 jsou předpovědi srovnány s reálnými hodnotami.



Obrázek 3.19: Předpověď modelem ARMAX(2,2,1)

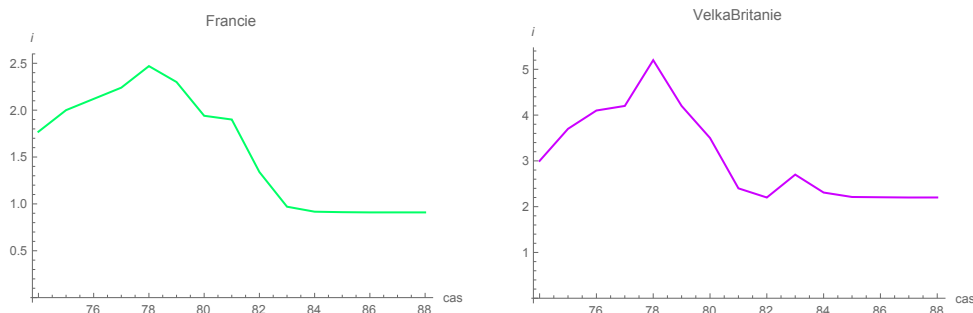


Obrázek 3.20: Předpověď spolu se skutečným vývojem

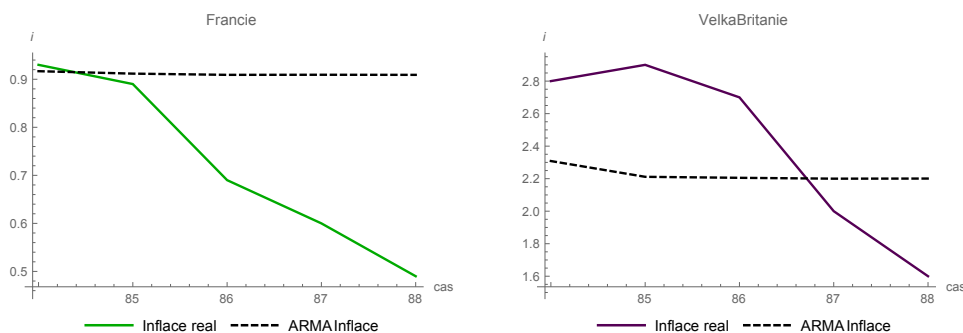
Předpověď ARMA modelem

V příkladu 3.1 jsme modelovali vývoj inflace ARMA(1,1) procesem bez vstupu exogenních proměnných. Proto je možné předpovědi zkonstruované tímto procesem srovnat s předpověďmi zkonstruovanými procesem ARMAX(2,2,1) v případě, že neznáme vývoj exogenních proměnných.

Předpovědi inflace modelem (1.18) je zachycena na obrázcích (3.21) a (3.22). Tyto předpovědi reprezentují úroveň, kolem které by měly hodnoty inflace kolísat, neboť si můžeme všimnout, že mají téměř konstantní trend. Důvodem jsou poměrně malé hodnoty odhadnutých parametrů modelu.



Obrázek 3.21: Předpověď modelem ARMA(1,1)



Obrázek 3.22: Předpověď spolu se skutečným vývojem

Závěr

V tabulce 3.15 jsou zobrazeny chyby předpovědí oproti skutečnému vývoji. Můžeme vidět, že chyba modelu ARMAX se značně zvýšila a překračuje chybu při modelování ARMA procesem. Jak bylo zmíněno výše, je to zapříčiněno chybou předpovědí exogenních proměnných.

| Model | Francie | Velká Británie |
|--------------|---------|----------------|
| ARMA(1,1) | 0.320 | 1.136 |
| ARMAX(2,2,1) | 0.751 | 3.045 |

Tabulka 3.15: Součet čtverců chyb předpovědí inflace

Závěr

Cílem práce bylo vyložit teorii o mnohorozměrných časových řadách s exogenními proměnnými, zaměřit se na model ARMAX a aplikovat teorii na finanční a ekonomická data.

V teoretické části byly vyloženy základní vlastnosti mnohorozměrných časových řad a byl popsán mnohorozměrný ARMA model, který se využívá v teorii ARMAX procesu. Potom jsme přešli k modelům s exogenními proměnnými. Věnovali jsme se soustavě simultánních rovnic a zaměřili jsme se na model ARMAX, kde jsme popsali teoretickou konstrukci tohoto modelu a výpočet předpovědí.

V praktické části je pomocí vyložených modelů zkoumána časová řada měr inflací ve Francii a Velké Británii.

Nejprve jsme modelovali řadu inflací ARMA(1,1) procesem, tedy pomocí zpožděných hodnot časové řady a bílého šumu. Jak se ukázalo, výpočet odhadů regresních parametrů je technicky náročný, což je nespíše důvodem určité nepopularity modelu a upřednostňování mnohorozměrného AR modelu.

Modelování řady inflací jsme rozšířili o využití dalších makroekonomických ukazatelů a zkonstruovali SEM soustavu. Z výsledků je patrné, že použitý model je vhodný pro analýzu těchto dat.

Poslední model pužitý pro analýzu dat byl ARMAX(2,2,1), který do jisté míry můžeme vnímat jako kombinaci dvou předchozích modelů. Při odhadování parametrů modelu jsme opět narazili na velkou náročnost výpočtu a museli jsme použít kombinaci dvou softwarů, abychom docílili přijatelných výsledků.

Na závěr jsme modely porovnali a pro popis námi analyzovaných makroekonomických časových řad se model ARMAX(2,2,1) ukázal jako nejvodnější.

Vytvořené spustitelné programy jsou uvedeny na CD.

Seznam obrázků

| | | |
|------|---|----|
| 3.1 | Míry inflace ve Francii a ve Velké Británii | 37 |
| 3.2 | Transformované časové řady | 38 |
| 3.3 | Znázornění kořenů polynomu $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_1)$ | 40 |
| 3.4 | Hodnoty výběrových autokorelačních matic | 41 |
| 3.5 | Histogramy reziduí | 42 |
| 3.6 | První stupeň 2SLS odhadu | 43 |
| 3.7 | Skutečné hodnoty míry inflace ve Francii s odhadnutými hodnotami | 44 |
| 3.8 | Skutečné hodnoty míry inflace v UK s odhadnutými hodnotami . | 44 |
| 3.9 | Histogramy reziduí | 45 |
| 3.10 | Vývoj exogenních proměnných | 47 |
| 3.11 | Transformované časové řady | 48 |
| 3.12 | Znázornění kořenů $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_1)$ a $\det(\mathbf{I}z + \hat{\Phi}_2)$ | 50 |
| 3.13 | Histogramy reziduí | 51 |
| 3.14 | Hodnoty výběrových autokorelačních matic | 51 |
| 3.15 | Předpověď modelem SEM | 54 |
| 3.16 | Předpověď spolu se skutečným vývojem | 54 |
| 3.17 | Předpověď modelem ARMAX(2,2,1) | 55 |
| 3.18 | Předpověď spolu se skutečným vývojem | 55 |
| 3.19 | Předpověď modelem ARMAX(2,2,1) | 57 |
| 3.20 | Předpověď spolu se skutečným vývojem | 57 |
| 3.21 | Předpověď modelem ARMA(1,1) | 58 |
| 3.22 | Předpověď spolu se skutečným vývojem | 58 |

Seznam tabulek

| | | |
|------|---|----|
| 3.1 | Výběrová maticová autokorelační funkce | 38 |
| 3.2 | Hodnoty informačních kritérií | 39 |
| 3.3 | Hodnoty Shapiro-Wilkova testu | 41 |
| 3.4 | Hodnoty Shapiro-Wilkova testu | 45 |
| 3.5 | Výstup softwaru EViews | 46 |
| 3.6 | Dickeův-Fullerův test (p -hodnoty) | 47 |
| 3.7 | Hodnoty informačních kritérií | 49 |
| 3.8 | Hodnoty Shapiro-Wilkova testu | 50 |
| 3.9 | Charakteristické vlastnosti ARMA(1,1) modelu | 52 |
| 3.10 | Charakteristické vlastnosti SEM modelu | 52 |
| 3.11 | Charakteristické vlastnosti ARMAX(2,2,1) modelu | 52 |
| 3.12 | Výběrová maticová autokorelační funkce transformovaných řad | 53 |
| 3.13 | Součet čtverců chyb předpovědí inflace | 56 |
| 3.14 | Charakteristické vlastnosti ARMA(2,1) odhadu | 57 |
| 3.15 | Součet čtverců chyb předpovědí inflace | 58 |

Literatura

- ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky*. MATFYZPRESS, Praha. ISBN 80-7378-001-1.
- CIPRA, T. (2008). *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha. ISBN 978-8-086929-43-9.
- INTERNATIONAL MONETARY FUND. IMF Financial Database. URL <http://www.imf.org/external/data.htm>.
- MARDIA, K. V., KENT, J. T. a BIBBY, J. M. (1979). *Multivariate analysis*. Academic press, London. ISBN 0-12-471250-9.
- PRÁŠKOVÁ, Z. (2007). *Základy náhodných procesů II*. Karolinum, Praha. ISBN 978-80-246-0971-3.
- REINSEL, G. C. (2003). *Elements of multivariate time series analysis*. Springer, New York. ISBN 978-1-4684-0200-1.
- VAVEROVÁ, J. (2011). *Víceroznicové soustavy jako nástroj pro zpracování finančních a ekonomických dat*. MFF UK, Praha.
- WEI, W. (1994). *Time series analysis*. Addison-Wesley, New York. ISBN 0-201-15911-2.