Univerzita Karlova v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Lenka Koritarová

# Holtova-Wintersova metoda pro sezónní vyrovnávání

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

| | |
|---|---|
| Vedoucí bakalářské práce: | prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc. |
| Studijní program: | Matematika |
| Studijní obor: | Finanční matematika |

Praha 2014

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svému vedoucímu práce prof. RNDr. Tomáši Ciprovi, DrSc. za jeho cenné rady, ochotu a čas, který mi při psaní bakalářské práce věnoval.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Praze, dne 17. 4. 2014 Lenka Koritarová

# Obsah

Název práce: Holtova-Wintersova metoda pro sezónní vyrovnávání

Autor: Lenka Koritarová

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: Tato práce se zabývá metodami exponenciálního vyrovnávání u časových řad. Nejprve jsou popsány principy exponenciálního vyrovnávání, zaměříme se na základní přístupy: jednoduché, zdvojené vyrovnávání a Holtovu metodu. Tyto postupy jsou vhodné pro modelování časových řad bez sezónní složky. V praxi jsou ale velmi časté časové řady vykazující sezónnost, pro tyto časové řady se používá Holtova-Wintersova metoda, která je založena na principech exponenciálního vyrovnávaní. V poslední části práce je ukázáno použití této metody na reálných datech.

Klíčová slova: časová řada, exponenciální vyrovnávání, sezónnost, Holtova-Wintersonova metoda

Title: Holt-Winters method for exponential smoothing

Author: Lenka Koritarová

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: prof. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: This thesis deals with the methods of exponential smoothing. At first the principles of exponential smoothing are explained. We focus on basic approaches: single, double smoothing and the Holt´s method. These procedures are suitable for the modeling time series without seasonal component. However in practice there are frequent time series with seasonality. For such time series the Holt-Winter´s method is used. This method is based just on the principles of exponential smoothing. In the last part of this thesis, there is demonstrated using this methods on real data.

Keywords: time series, exponential smoothing, seasonality, Holt-Wintersons method

# Úvod

Finanční, ekonomická, demografická a další data známe v podobě časových řad. Máme k dispozici pozorování s určitou frekvencí – např. denní, týdenní, měsíční, roční. Takto zadaná data se špatně analyzují, a proto úkolem statistiků je navrhovat různé modely a odhadovat jejich parametry, které nám pomůžou lépe popsat taková data. Z modelu snadněji vyčteme vlastnosti chování řady, můžeme také předpovídat budoucí hodnoty nebo testovat hypotézy.

Tato práce se zabývá jedním takovým modelem, a to exponenciálním vyrovnáváním. Jeho základy vytvořili Holt a Brown-Meyer. V první kapitole definujeme základní pojmy z oblasti časových řad a statistiky a popíšeme dekompozici časových řad na jednotlivé složky.

Poté ve druhé kapitole přejdeme k základním principům exponenciálního vyrovnávaní. Popíšeme si jednoduché, dvojité exponenciální vyrovnávání a také speciální případ dvojitého vyrovnávání tzv. Holtovu metodu. Tyto postupy lze použít, je-li řada očištěna o sezónní složku. Sezónní složka nám znesnadňuje analýzu časové řady, ale mnoho reálných časových řad (vývoj nezaměstnanosti, tržby, ...) obsahují výraznou sezónnost. Proto musíme tyto časové řady analyzovat pomocí jiného modelu, který zohledňuje i sezónnost dat.

Ve třetí kapitole se seznámíme s analýzou sezónních časových řad. Popíšeme Holtovu - Wintersonovu metodu a její vlastosti. Zaměříme se na aditivní a multiplikativní variantu tohoto modelu. Také rozšíříme Holtovu - Wintersovu metodu pro časové řady s dvěma sezónními cykly.

Čtvrtá kapitola se soustředí na praktickou aplikaci výše zmíněných metod. Pro obě varianty Holtovy - Wintersovy metody zvolíme vhodná data a pomocí softwaru na ně aplikujeme tyto metody.

# 1. Úvodní pojmy a vlastnosti časových řad

## 1.1 Základní pojmy

V této části si zavedeme základní pojmy a vlastnosti časových řad, které budeme potřebovat k popisu exponenciálního vyrovnávání.

**Definice 1.**

*Nechť je dán pravděpodobnostní prostor* $(\Omega,\ A,\ P)$*. Časovou řadou neboli náhodným procesem v diskrétním čase rozumíme posloupnost náhodných veličin* $Y_t$ *na* $(\Omega,\ A,\ P)$*, kde index* $t \in Z$ *chápeme jako čas. Realizaci časové řady značíme obvykle jako* $\{y_t\}$*.*

**Definice 2.**

*Časovou řadu nazveme bílý šum, pokud veličiny* $Y_t$ *jsou navzájem nekorelované, mají nulové střední hodnoty* $EY_t = 0$ *a stejný rozptyl* $E(Y_t)^2 = \sigma^2$*.*

**Definice 3.**

*Nechť časová řada* $Y_t$ *splňuje podmínky z definice 2 a navíc platí, že* $Y_i$ *mají normální rozdělení, pak tuto časovou řadu nazýváme normálním bílým šumem.*

**Definice 4.**

*Nechť* $Y_t$ *je skutečná hodnota časové řady a* $\hat{Y}_t$ *její odhadnutá hodnota, pak*

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \tag{1.1}$$

*nazýváme součtem čtvercových chyb (sum of squared errors).*

## 1.2 Dekompozice časových řad

Dekompozice neboli rozklad časových řad patří mezi základní postupy statistické analýzy. Časovou řadu můžeme rozložit do následujích složek:

- Trendová složka $Tr_t$

  Tato část popisuje dlouhodobé chování časové řady, můžeme ji popsat matematickými funkcemi. Zajímá nás její dlouhodobý růst nebo pokles, krátkodobé fluktuace při popisu trendu neuvažujeme.

- Sezónní složka $Sz_t$

  Popisuje sezónní výkyvy, které se pravidelně v průběhu roku opakují. Vyskytuje se nejčastěji u měsíčních a čtvrtletních časových řad. Je způsobena střídáním ročních období a s tím související ekonomickou aktivitou – např. nezaměstnanost vždy přes léto klesá a v zimě roste. V průběhu časového vývoje může dojít ke změně jejího charakteru.

- Cyklická složka $C_t$

  Vyjadřuje dlouhodobé fluktuace kolem trendu, délka cyklů i intenzita fluktuace bývají většinou proměnlivé. Vyskytuje se například u ekonomických řad v průběhu střídání hospodářského cyklu. Většinou ale neznáme její příčinu, a proto bývá obtížné ji od ostatních částí řady oddělit.

- Náhodná (reziduální) složka $E_t$

  Má čistě náhodný charakter, neřadí se mezi předchozí systematické složky, má vlastnosti bílého šumu (Definice 2) a někdy se vyskytuje v podobě normálního bílého šumu (Definice 3)

Dekompozici časových řad provádíme, proto abychom mohli řadu analyzovat po jednotlivých složkách, můžeme také snadněji předpovídat budoucí vývoj těchto částí než u nerozložené řady. Velmi často se zkoumá řada očištěna o nějakou složku, např. u ekonomických časových řad odstraňujeme sezónní složku. Časová řada nemusí obsahovat všechny složky, některé mohou zcela chybět.

Rozlišujeme dva typy dekompozice časové řady:

- Aditivní dekompozice

$$Y_t = Tr_t + Sz_t + C_t + E_t. \tag{1.2}$$

- Multiplikativní dekompozice

$$Y_t = Tr_t * Sz_t * C_t * E_t. \tag{1.3}$$

Při aditivním rozkladu jsou jednotlivé složky vyjádřené ve svých skutečných hodnotách. Při multiplikativní dekompozici se vyjadřuje v skutečné hodnotě trendová složka a ostatní části jsou vyjádřeny v relativních hodnotách vzhledem k trendu. Je zřejmé, že logaritmickou transformací multiplikativní dekompozice získáme aditivní dekompozici.

# 2. Exponenciální vyrovnávání

## 2.1 Základní principy exponenciálního vyrovnávání

V této kapitole předpokládáme, že řada je očištěna o sezónní složku a má tedy tvar:

$$Y_t = Tr_t + E_t. \tag{2.1}$$

Exponenciální vyrovnávání je v praxi velmi používaný nástroj pro analýzu časových řad. Název nesouvisí s tím, že by trendová křivka byla popsána exponenciální funkcí. Tento princip je založen na metodě klouzavých průměrů. Hodnota vyrovnané řady $y_t$, závisí ale na všech předchozích hodnotách $y_1,\ldots,y_t$, proto nemusíme řešit problém s volbou délky klouzavých průměrů. Od vyrovnání pomocí klouzavých průměrů se exponenciální vyrovnávání liší také tím, že jednotlivé pozorování vážíme do minulosti exponenciálně klesajícími váhami. Odhad parametrů je založen na vážené metodě nejmenších čtverců.

Minimalizujeme výraz

$$(y_t - \hat{y}_t)^2 + (y_{t-1} - \hat{y}_{t-1})^2\beta + (y_{t-2} - \hat{y}_{t-2})^2\beta^2 + \ldots, \tag{2.2}$$

kde $\beta$ $(0 < \beta < 1)$ je *diskontní konstanta.*

Z (2.2) vidíme, že vyrovnaná hodnota $\hat{y}_t$ nejvíce závisí na současné pozorované hodnotě $y_t$. Pozorováním, která jsou vzdálenější do minulosti přiřazujeme stále menší váhy a tím klesá jejich dopad na vyrovnanou hodnotu v čase $t$.

Podle volby diskontní konstanty ovlivníme, jak rychle bude vliv jednotlivých pozorování klesat. Jestliže zvolíme konstantu $\beta$ blízko k jedné, budou vzdálenější pozorování více ovlivňovat vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_t$, než pokud se $\beta$ bude blížit k nule. V tomto případě bude vliv minulých pozorování slábnout velmi rychle.

Princip této metody je výpočetně velmi jednoduchý. Lze ho převést na rekurentní vzorce, díky kterým nemusíme uchovávat velké množství dat.

Podle tvaru trendové křivky rozlišujeme následující typy exponenciálního vyrovnávání:

- jednoduché pro konstantní trend
- dvojité pro lineární trend
- trojité pro kvadratický trend

V další části práce popíšeme základní postupy jednoduchého a dvojitého exponenciálního vyrovnávání. Dále se budeme věnovat modifikaci dvojitého vyrovnávání a to tzv. Holtově metodě, ze které vychází Holtova-Wintersova metoda.

## 2.2 Jednoduché exponenciální vyrovnávání

Předpokládáme trendovou křivku ve tvaru

$$Tr_t = \beta_0. \tag{2.3}$$

Trend můžeme v krátkých časových úsecích považovat za konstantní. Musíme nalézt odhad paremetru $\beta_0$. Odhad $\beta_0$ bude záviset na čase ve kterém byl proveden.

Označme jako $b_0(t)$ odhad parametru $\beta_0$ v čase $t$. Bude představovat zároveň hodnotu trendu v čase $t$ a také vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_t$. Jeho velikost bude záviset na všech dostupných pozorovaných hodnotách $y_1, \ldots, y_t$. Podle (2.2) převedeme naši úlohu na

$$\min \sum_{j=1}^{\infty} (y_{t-j} - \beta_0)^2 \beta^j, \tag{2.4}$$

kde $\beta$ $(0 < \beta < 1)$ je *diskontní konstanta.*

Výraz (2.4) má tvar nekonečné sumy, ale ve skutečnosti známe jen konečný počet hodnot. Toto vyjádření nám ale zjednoduší naše výpočty. Pokud zderivujeme (2.4) podle $\beta_0$ a derivaci položíme rovnou 0 dostaneme vztah pro odhad parametru $\beta_0$

$$b_0(t) = (1-\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t-j} \tag{2.5}$$

nebo pro vyrovnanou hodnotu řady $\hat{y}_t$

$$\hat{y}_t = (1-\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t-j}. \tag{2.6}$$

Z (2.6) vyplývá, že vyrovnaná hodnota řady je váženým součtem jednotlivých pozorování s exponenciálně klesajícími vahami

$$1-\beta, (1-\beta)\beta, (1-\beta)\beta^2, (1-\beta)\beta^3, \ldots$$

V případě výpočtu vyrovnaných hodnot řady $\hat{y}_t$ podle vztahu (2.6) musíme uchovávat všechna pozorování $y_1, \ldots y_t$. Vztah (2.6) lze ale převést na praktičtější rekurentní vyjádření, kdy pro výpočet $\hat{y}_t$ nám stačí znát aktuální hodnotu $y_t$ a předchozí vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_{t-1}$.

Potom

$$\begin{aligned}
\hat{y}_t &= (1-\beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j y_{t-j} = \\
&= (1-\beta) y_t + (1-\beta) \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t-j} = \\
&= (1-\beta) y_t + \beta \underbrace{(1-\beta) \sum_{j=1}^{\infty} \beta^{j-1} y_{t-j}}_{\hat{y}_{t-1}} .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Položíme - li $\alpha = 1 - \beta$, můžeme vztah (2.7) přepsat jako

$$\hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1}, \tag{2.8}$$

kde konstantu $\alpha (0 < \alpha < 1)$ nazveme *vyrovnávací konstantou.*

Předpovídání budoucích hodnot pro libovolné $\tau > 0$ je dáno vzorcem:

$$\hat{y}_{t+\tau} = \hat{y}_t. \tag{2.9}$$

Pro realizaci této metody ještě potřebujeme zvolit konstantu $\alpha$ a počáteční vyrovnanou hodnotu $\hat{y}_0$. Počáteční hodnota $\hat{y}_0$ se buď volí jako aritmetický průměr prvních několika hodnot nebo jako první pozorovaná hodnota $y_1$. Pro volbu vyrovnávací konstanty můžeme použít jeden z těchto způsobů

- Fixní hodnota

  Nejčastěji se volí $\alpha = 0,1$ nebo $\alpha = 0,2$.

- Výběr z několika hodnot dle nejmenší SSE

  Vybereme některé hodnoty $\alpha$, např. $\alpha = 0,01;\ 0,02;\ \ldots;\ 0,03$ a z nich zvolíme tu, která poskytuje nejlepší předpovědi s minimálním SSE podle (1.1). Podle potřeby můžeme zvolit řidší nebo hustší dělení.

## 2.3 Dvojité exponenciální vyrovnávání

Dvojité exponenciální vyrovnávání využíváme pro řady s lokálně lineárním trendem.

$$Tr_{t-j} = \beta_0 + \beta_1(-j) \tag{2.10}$$

Označme $b_0(t)$ a $b_1(t)$ jako odhady parametrů $\beta_0$ a $\beta_1$. Použijeme váženou metodu nejmenších čtverců, odhady získáme minimalizací následujícího výrazu

$$\min \sum_{j=1}^{\infty} [(y_{t-j} - (\beta_0 + \beta_1(-j))]^2 \beta^j, \tag{2.11}$$

kde $\beta$ $(0 < \beta < 1)$ je předem daná *diskontní konstanta.*

Nyní vypočteme parciální derivace podle $\beta_0$ a $\beta_1$. Pokud položíme tyto derivace rovny nule dostaneme soustavu normálních rovnic

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t-j} - \beta_0 \sum_{j=1}^{\infty} \beta^j + \beta_1 \sum_{j=1}^{\infty} j\beta^j = 0, \tag{2.12a}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\beta^j y_{t-j} - \beta_0 \sum_{j=1}^{\infty} j\beta^j + \beta_1 \sum_{j=1}^{\infty} j^2\beta^j = 0. \tag{2.12b}$$

Využijeme těchto vzorců pro součty řad

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j = \frac{1}{1-\beta},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\beta^j = \frac{\beta}{(1-\beta)^2},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2\beta^j = \frac{\beta(1+\beta)}{(1-\beta)^3},$$

a zjednodušíme rovnice (2.12a) a (2.12b) na tvar

$$\beta_0 - \frac{\beta}{1-\beta}\beta_1 = (1-\beta)\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t-j}, \tag{2.13a}$$

$$\beta\beta_0 - \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta}\beta_1 = (1-\beta)^2\sum_{j=1}^{\infty} j\beta^j y_{t-j}. \tag{2.13b}$$

Pro lepší orientaci zavedeme tzv. *vyrovnávací statistiku*

$$S_t = (1-\beta)\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j y_{t-j}. \tag{2.14}$$

Výraz pro $S_t$ je shodný s výrazem pro vyrovnanou hodnotu řady při použití jednoduchého exponenciálního vyrovnávání. Podle (2.8) ho také můžeme vyjádřit v rekurentním tvaru

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}, \tag{2.15}$$

kde $\alpha = 1-\beta$.

Stejným způsobem zavedeme *dvojitou vyrovnávací statistiku* a vyjádříme ji v rekurentním tvaru

$$S_t^{[2]} = (1-\beta)\sum_{j=1}^{\infty} \beta^j S_{t-j}, \tag{2.16}$$

$$S_t^{[2]} = \alpha S_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{[2]}. \tag{2.17}$$

Pokud použijeme vztahy pro vyrovnávací statistiky, lze rovnice soustavy (2.13a) a (2.13b) převést na tvar

$$\beta_0 - \frac{\beta}{1-\beta}\beta_1 = S_t, \tag{2.18a}$$

$$\beta\beta_0 - \frac{\beta(1+\beta)}{1-\beta}\beta_1 = S_t^{[2]} - (1-\beta)S_t. \tag{2.18b}$$

Z těchto rovnic vyjádříme vztahy pro odhady $b_0(t)$ a $b_1(t)$

$$b_0(t) = 2S_t - S_t^{[2]}, \tag{2.19}$$

$$b_1(t) = \frac{1-\beta}{\beta}(S_t - S_t^{[2]}). \tag{2.20}$$

Vyrovnaná hodnota časové řady $\hat{y}_t$ je rovna parametru $b_0(t)$

$$\hat{y}_t = 2S_t - S_t^{[2]}. \tag{2.21}$$

Předpověď pro libovolné $\tau > 0$ je dána vztahem

$$\hat{y}_{t+\tau} = b_0(t) + b_1(t)\tau = \left(2 + \frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) S_t - \left(1 + \frac{\alpha\tau}{1-\alpha}\right) S_t^{[2]}, \tag{2.22}$$

kde $\alpha = 1 - \beta$ je vyrovnávací konstanta.

Pro realizaci musíme zvolit vyrovnávací konstantu $\alpha$ a počáteční hodnoty jednoduché a dvojité vyrovnávací statistiky $S_0$ a $S_0^{[2]}$. Konstantu $\alpha$ volíme stejným způsobem jako u jednoduchého exponenciálního vyrovnávání, tj. fixní volbou nebo výběrem ze sítě hodnot podle nejmenší SSE.

Hodnoty $S_0$ a $S_0^{[2]}$ získáme pomocí vztahů (2.19) a (2.20). Počátečním úsekem časové řady proložíme přímku. Metodou nejmenších čtverců odhadneme její parametry $b_0(0)$ a $b_1(0)$. Potom získáme vztahy pro $S_0$ a $S_0^{[2]}$

$$\begin{aligned} S_0 &= b_0 - \frac{1-\alpha}{\alpha} b_1(0), \\ S_0^{[2]} &= b_0 - \frac{2(1-\alpha)}{\alpha} b_1(0). \end{aligned} \tag{2.23}$$

## 2.4 Holtova metoda

Holtovou metodou se dá v praxi analyzovat velké množství časových řad. Je vhodná pro časové řady, kde se nevyskytuje sezónní složka. Trendovou křivku je možné lokálně popsat lineární funkcí, jejíž směrnice se může v čase měnit. Její výhodou je výpočetní jednoduchost jako u ostatních typů exponenciálního vyrovnávání. Stav časové řady je popsán úrovní $L_t$ a směrnicí trendu $T_t$. Pro tento model jsou zapotřebí dvě vyrovnávací konstanty: $\alpha$ pro vyrovnávání úrovně $L_t$ a $\beta$ pro vyrovnání směrnice trendu $T_t$.

Pro vyrovnávací konstanty platí: $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$.

Hodnota urovně $L_t$ je zároveň vyrovnanou hodnotou časové řady v čase $t$.

$$\hat{y}_t = L_t. \tag{2.24}$$

Pro předpovídání budoucích hodnot použijeme směrnici trendu $T_t$, předpověď pro čas $t+\tau$ v čase $t$, $(\tau > 0)$ je dána vztahem

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t\tau. \tag{2.25}$$

Hodnotu úrovně $L_t$ získáme jako konvexní kombinaci aktuální hodnoty časové řady a aktuální vyrovnané hodnoty vypočtené v čase $t-1$.

$$L_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}). \tag{2.26}$$

Vzhledem k lineárnímu trendu můžeme $T_t$ přibližně odhadnout jako

$$T_t \approx L_t - L_{t-1}.$$

Poté obdobně hodnotu směrnice trendu $T_t$ vyjádříme jako konvexní kombinaci předchozí směrnice trendu a odhadu aktuální směrnice trendu.

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}. \tag{2.27}$$

Pro inicializaci této metody volíme $L_0 = y_1$ a $T_0 = y_2 - y_1$. Vyrovnávací konstanty $\alpha$ a $\beta$ volíme analogickým způsobem jako u jednoduchého exponenciálního vyrovnávání.

# 3. Sezónnost v časových řadách

Tato kapitola se zabývá analýzou časových řad, kde je přítomna sezónní složka. Tyto řady je obtížnější charakterizovat, protože sezónní složka nám může zkreslovat skutečné chování řady. Naším cílem bude tuto složku eliminovat, abychom mohli lépe popsat dlouhodobější zákonitosti v dané řadě a konstruovat přesnější předpovědi, případně pro očištěnou řadu navrhnout ekonometrický model.

Existuje více přístupů k sezónnosti dat. Popis těch nejjednodušších přístupů pro aditivní a multiplikativní dekompozici nalezneme v Cipra(2008). V této práci se ale budeme podrobněji zabývat Holtovou - Wintersovou metodou. Ještě předtím popíšeme regresní přístup k sezónnosti, protože tento postup je využíván u Holtovy - Wintersovy metody pro volbu počátečních hodnot.

## 3.1 Regresní přístup k sezónnosti

Kvalitativní proměnné se používají pro popis kvalitativních vlastností, např. sezónnost nebo zařazení do ratingové skupiny. Tyto vlastnosti nabývají konečného počtu hodnot, které označujeme jako kategorie, proto je označujeme jako kategoriální proměnné. Každou kvalitativní proměnnou můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci tzv. *dummy proměnných*, které nabývají hodnoty nula a jedna. Obvykle se používá hodnota jedna pro přítomnost dané vlastnosti a nula pro její nepřítomnost.

Pro časovou řadu ve tvaru aditivní dekompozice se sezónnost modeluje jako kvalitativní proměnná v lineárním regresním modelu s použitím $s-1$ dummy proměnných, kde $s$ je délka sezóny.

Regresní model je ve tvaru

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \alpha_2 x_{t2} + \ldots + \alpha_s x_{ts} + E_t. \tag{3.1}$$

Sezónní složku vyjádříme jako

$$Sz_t = \alpha_2 x_{t2} + \ldots + \alpha_s x_{ts}, \tag{3.2}$$

kde $x_{t2}, \ldots, x_{ts}$ jsou dummy proměnné definované

$$x_{tj} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } t = j, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Odhady parametrů $b_0, b_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ získáme metodou nejmenších čtverců. Trendová a sezónní složka jsou dány vztahy

$$Tr_t = b_0 + b_1 t, \tag{3.3}$$

$$Sz_1 = 0, Sz_2 = a_2, \ldots, Sz_s = a_s. \tag{3.4}$$

## 3.2 Holtova - Wintersova metoda

Tento model poprvé navrhl v roce 1960 Holtův postgraduální student Peter Winters. Funguje na principu exponenciálního vyrovnávání, ale dokáže si poradit se sezónními časovými řadami. Existuje ve dvou variantách: aditivní a multiplikativní. Pro obě varianty zavedeme tři vyrovnávací konstanty: $\alpha$ pro úroveň $L_t$, $\beta$ pro směrnici trendu $T_t$ a $\gamma$ pro sezónní složku $Sz_t$. Aditivní metoda je vhodnější pro data s neměnnou sezóností, multiplikativní metodu můžeme použít pro časovou řadu, u které se sezónní složka mění v závislosti na úrovni této řady. U aditivní metody je sezónní složka vyjádřena v absolutní hodnotě, řada je očištěna o sezónní složku jejím odečtením. U multiplikativního modelu je vyjádřena v relativní hodnotě a řadu sezónně očistíme jejím vydělením.

Pro vyrovnávácí konstanty platí $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$.

## 3.3 Aditivní Holtova - Wintersonova metoda

Podobně jako Holtovu metodu, tak i tento model lze popsat pomocí rekurentních formulí. Jako u Holtovy metody budeme předpokládat lokálně lineární trend. Označme $s$ jako počet pozorovaní v jedné sezóně (tzn. délku sezóny). V našem případě budeme nejčastěji používat čtvrtletní data, proto $s = 4$, pro měsíční data $s = 12$.

Úroveň řady $L_t$ je rovna konvexní kombinaci aktuální pozorované hodnoty očištěnou o nejaktuálnější odhadnutou sezónní složku $Sz_{t-s}$ z předchozí sezóny a součtu odhadu úrovně řady v čase $t-1$ a odhadu směrnice trendu v čase $t-1$.

$$L_t = \alpha(y_t - Sz_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \tag{3.5}$$

Odhad směrnice trendu $T_t$ je vyjádřen konvexní kombinací přibližného odhadu směrnice trendu $T_t$ v čase $t$ (neboť $T_t \approx L_t - L_{t-1}$) a předchozího odhadu směrnice trendu $T_{t-1}$ v čase $t-1$.

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1} \tag{3.6}$$

Sezónní složka je popsána jako konvexní kombinace odhadu aktuální sezónní složky, který je vyjádřen rozdílem pozorované hodnoty $y_t$ a úrovně $L_t$ v čase $t$, a odhadu sezónní složky z času $t-s$ (použijeme nejaktuálnější hodnotu z předchozí sezóny).

$$Sz_t = \gamma(y_t - L_t) + (1-\gamma)Sz_{t-s} \tag{3.7}$$

Vyrovnaná hodnota $\hat{y}_t$ je poté rovna součtu úrovně a sezónní složky v čase $t$.

$$\hat{y}_t = L_t + Sz_t \tag{3.8}$$

Předpověď pro budoucí období je dána obdobným vztahem jako pro Holtovu metodu, kde navíc přičítáme sezónní složku. Musíme ale rozlišit, o kolik sezón dopředu předpovídáme. Můžeme očekávat, že předpovědi vzdálenější více do budoucnosti už nebudou tolik přesné.

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + \tau T_t + Sz_{t+\tau-s} \text{ pro } \tau = 1, \ldots, s, \tag{3.9}$$

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + \tau T_t + Sz_{t+\tau-2s} \text{ pro } \tau = s+1, \ldots, 2s. \tag{3.10}$$

Analogicky bychom dostali předpovědi pro další sezóny, tj. pro $\tau = 2s + 1, \ldots$

Pro realizaci této metody musíme zvolit vyrovnávací konstanty a počáteční hodnoty.

Pro volbu vyrovnávacích konstanty můžeme použít:

- Fixní hodnoty

  Nejčastěji se volí $\alpha, \gamma = 0,4$ a $\beta = 0,1$.

- Výběr ze sítě hodnot dle nejmenší SSE

  Podobně jako u exponenciálního vyrovnávání zvolíme síť hodnot pro konstanty $\alpha, \beta, \gamma$ a z nich vybereme ty hodnoty, které poskytují nejlepší předpovědi s minimálním SSE podle (1.1).

Pro volbu počátečních hodnot $L_0, T_0, Sz_{-s+1}, Sz_{-s+2}, \ldots, Sz_0$ použijeme regresní přístup k sezónnosti. Díky odhadům regresního modelu $b_0, b_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ odhadneme naše počáteční hodnoty jako

$$L_0 = b_0, T_0 = b_1, Sz_{-s+1} = 0, Sz_{-s+2} = a_2, \ldots, Sz_0 = a_s. \tag{3.11}$$

Vztahy pro Holtovu aditivní metodu lze také převést do tzv. *chybového tvaru* (viz Hyndman et al. (2008)). Označme jako $e_t$ rozdíl aktuální hodnoty časové řady a hodnoty vypočtené v čase $t-1$ pro čas $t$ podle (3.9).

$$e_t = y_t - (L_{t-1} + T_{t-1} + Sz_{t-s}) \tag{3.12}$$

Pro úroveň časové řady $L_t$ můžeme rekurentní vztah (3.5) rozepsat

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha(y_t - Sz_{t-s}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) = \\ &= L_{t-1} + T_{t-1} + \alpha[y_t - (L_{t-1} + T_{t-1} + Sz_{t-s})] = \\ &= L_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Směrnici trendu $T_t$ lze vyjádřit

$$
\begin{aligned}
T_t &= \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1} = \\
&= T_{t-1} + \beta \underbrace{(L_t - L_{t-1} - T_{t-1})}_{\alpha e_t} = \\
&= T_{t-1} + \beta\alpha e_t
\end{aligned} \tag{3.14}
$$

Při odvození chybového tvaru pro sezónní složku, za $L_t$ dosadíme výše odvozený vztah (3.13)

$$
\begin{aligned}
Sz_t &= \gamma(y_t - L_t) + (1-\gamma)Sz_{t-s} = Sz_{t-s} + \gamma[y_t - (L_t + Sz_{t-s})] = \\
&= Sz_{t-s} + \gamma[y_t - (L_{t-1} + T_{t-1} + \alpha e_t + Sz_{t-s})] = \\
&= Sz_{t-s} + \gamma\left[y_t - (L_{t-1} + T_{t-1} + Sz_{t-s}) - \alpha e_t\right] = \\
&= Sz_{t-s} + \gamma(e_t - \alpha e_t) = Sz_{t-s} + \gamma(1-\alpha)e_t.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

Vyrovnaná hodnota $\hat{y}_t$ je rovna

$$\hat{y}_t = L_{t-1} + T_{t-1} + Sz_{t-s} + e_t. \tag{3.16}$$

## 3.4 Multiplikativní Holtova - Wintersova metoda

Rekurentní formule jsou analogické aditivní Holtově – Wintersově metodě. Předpokládáme časovou řadu s multiplikativní sezónní složkou, proto příslušné součty a rozdíly jsou nahrazeny součiny a podíly.

Vztahy pro úroveň, směrnici trendu, sezónnost a předpovědi jsou dány následujícími vzorci

$$L_t = \alpha \frac{y_t}{Sz_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}), \tag{3.17}$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}, \tag{3.18}$$

$$Sz_t = \gamma \frac{y_t}{L_t} + (1-\gamma)Sz_{t-s}, \tag{3.19}$$

$$\hat{y}_t = L_t Sz_t, \tag{3.20}$$

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = (L_t + T_t\tau)Sz_{t+\tau-s} \text{ pro } \tau = 1, \ldots, s, \tag{3.21}$$

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = (L_t + T_t\tau)Sz_{t+\tau-2s} \text{ pro } \tau = s+1, \ldots, 2s. \tag{3.22}$$

Obdobně bychom získali (nerealistické) předpovědi pro další sezóny, tj. pro $\tau = 2s + 1, \dots$

Pro realizaci je opět nutné zvolit vyrovnávací konstanty a počáteční hodnoty. Volba vyrovnávacích konstant je shodná s aditivní Holtovou – Wintersovou metodu. Pro volbu počátečních hodnot nemůžeme použít regresní přístup k sezónnosti, proto odhadneme počáteční hodnoty následujícími vztahy

$$\begin{aligned} T_0 &= \bar{y}_m - \frac{\bar{y}_1}{(m-1)s}, \\ L_0 &= \bar{y}_1 - \frac{s+1}{2} T_0, \\ Sz_{j-s} &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{y_{j+s \cdot i}}{\bar{y}_{i+1} - (\frac{s+1}{2} - j) T_0} \text{ pro } j = 1, \dots, s. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Obdobně jako aditivní Holtovu - Wintersovu metodu můžeme také převést všechny vztahy multiplikativní Holtovy - Wintersovy metody do chybového tvaru (viz Hyndman et al. (2008)). Označme jako $e_t$ rozdíl aktuální hodnoty časové řady a hodnoty vypočtené v čase $t-1$ pro čas $t$ podle (3.21).

$$e_t = y_t - (L_{t-1} + T_{t-1}) Sz_{t-s}. \tag{3.24}$$

Úroveň $L_t$

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha \frac{y_t}{Sz_{t-s}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) = \\ &= L_{t-1} + T_{t-1} + \frac{\alpha}{Sz_{t-s}} \left[ y_t - (L_{t-1} + T_{t-1}) Sz_{t-s} \right] = \\ &= L_{t-1} + T_{t-1} + \frac{\alpha}{Sz_{t-s}} e_t. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Směrnice trendu $T_t$, za $L_t$ dosadíme předchozí vypočtený vztah (3.25)

$$T_t = \beta \underbrace{(L_t - L_{t-1})}_{\frac{\alpha}{Sz_{t-s}} e_t} + (1-\beta) T_{t-1} = T_{t-1} + \frac{\alpha\beta}{Sz_{t-s}} e_t. \tag{3.26}$$

Sezónní složka $Sz_t$

$$
\begin{aligned}
Sz_t &= \gamma\frac{y_t}{L_t} + (1-\gamma)Sz_{t-s} = Sz_{t-s} + \gamma\left(\frac{y_t}{L_t} - Sz_{t-s}\right) = \\
&= Sz_{t-s} + \frac{\gamma}{L_t}\left(y_t - L_t Sz_{t-s}\right) =
\end{aligned}
$$

Za $L_t$ dosadíme jeho chybový tvar (3.23)

$$
\begin{aligned}
&= Sz_{t-s} + \frac{\gamma}{L_t}\left[y_t - \left(L_{t-1} + T_{t-1} + \frac{\alpha}{Sz_{t-s}}e_t\right)Sz_{t-s}\right] = \\
&= Sz_{t-s} + \frac{\gamma}{L_t}[\underbrace{y_t - (L_{t-1} + T_{t-1})\,Sz_{t-s}}_{e_t} - \alpha e_t] = \\
&= Sz_{t-s} + \frac{\gamma}{L_t}(e_t - \alpha e_t) = \\
&= Sz_{t-s} + \frac{\gamma}{L_t}\left[(1-\alpha)\,e_t\right].
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

## 3.5 Rozšíření Holtovy - Wintersovy metody pro časové řady s dvěma sezónními cykly

Holtova - Wintersova metoda je nejčastěji používaný model pro sezónní data. Dobře modeluje data s jednoduchou sezónností - např. data, která vykazují v průběhu jednoho roku týdenní, měsíční, čtvrtletní sezónnost. Existují, ale časové řady, které vykazují více sezónních cyklů - např. bylo zjištěno, že u spotřeby elektřiny, přístupů na webové stránky nebo využívání veřejné dopravy se vyskytuje hodinová sezónnost v rámci jednoho dne a také denní sezónnost během jednoho týdne. Pro tento typ časových řad není vhodná Holtova - Wintersova metoda. Taylor (2003) rozšířil ve své práci Holtovu - Wintersovu metodu, aby byla vhodná pro řady se dvěma sezónními cykly. Tato metoda opět existuje v aditivní a multiplikativní verzi. Vztahy jsou velmi podobné předchozí Holtově - Wintersově metodě. Sezónní složka se ale rozdělí do dvou částí a přibude nová vyrovnávací konstanta pro druhou část.

## 3.6 Aditivní metoda pro dva sezónní cykly

Označme $s_1$ délku prvního (kratšího) cyklu, $s_2$ délku druhého (delšího) cyklu. Pokud budeme uvažovat hodinovou sezónnost v rámci dne a denní sezónnost v průběhu týdne, potom $s_1 = 24$ a $s_2 = 168$. Zavedeme vyrovnávací konstantu $\alpha$ pro úroveň $L_t$, $\beta$ pro směrnici trendu $T_t$, $\gamma$ pro sezónnost v prvním cyklu $Sz_t^{(1)}$, $\delta$ pro sezónnost v druhém cyklu $Sz_t^{(2)}$.
Pro všechny vyrovnávací konstanty platí $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$. Uvedeme rekurentní vztahy pro jednotlivé složky časové řady a pro předpovědi

$$L_t = \alpha(y_t - Sz_{t-s_1}{}^{(1)} - Sz_{t-s_2}{}^{(2)}) + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}), \tag{3.28}$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}, \tag{3.29}$$

$$Sz_t^{(1)} = \gamma(y_t - L_t - Sz_{t-s_2}{}^{(2)}) + (1-\gamma)Sz_{t-s_1}{}^{(1)}, \tag{3.30}$$

$$Sz_t^{(2)} = \delta(y_t - L_t - Sz_{t-s_1}{}^{(1)}) + (1-\delta)Sz_{t-s_2}{}^{(2)}, \tag{3.31}$$

$$\hat{y}_t = L_t + Sz_{t-s_1}{}^{(1)} + Sz_{t-s_2}{}^{(2)}, \tag{3.32}$$

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = L_t + T_t\tau + Sz_{t-s_1+\tau}{}^{(1)} + Sz_{t-s_2+\tau}{}^{(2)} \text{ pro } \tau \leq s_1. \tag{3.33}$$

## 3.7 Multiplikativní metoda pro dva sezónní cykly

Označení je stejné jako pro předchozí aditivní metody. Vztahy jsou analogické vzorcům (3.28) - (3.33). Vzhledem k multiplikativní sezónnosti nahradíme pouze příslušné součty součiny a rozdíly podíly.

$$L_t = \alpha\frac{y_t}{Sz_{t-s_1}{}^{(1)}Sz_{t-s_2}{}^{(2)}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}), \tag{3.34}$$

$$T_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)T_{t-1}, \tag{3.35}$$

$$Sz_t^{(1)} = \gamma\frac{y_t}{L_t Sz_{t-s_2}{}^{(2)}} + (1-\gamma)Sz_{t-s_1}{}^{(1)}, \tag{3.36}$$

$$Sz_t^{(2)} = \delta\frac{y_t}{L_t Sz_{t-s_1}{}^{(1)}} + (1-\delta)Sz_{t-s_2}{}^{(2)}, \tag{3.37}$$

$$\hat{y}_t = L_t Sz_{t-s_1}{}^{(1)} Sz_{t-s_2}{}^{(2)}, \tag{3.38}$$

$$\hat{y}_{t+\tau}(t) = (L_t + T_t\tau)Sz_{t-s_1+\tau}{}^{(1)} Sz_{t-s_2+\tau}{}^{(2)} \text{ pro } \tau \leq s_1. \tag{3.39}$$

Postup pro volbu počátečních hodnot i vyrovnávacích konstant lze nalézt v Taylor (2003).

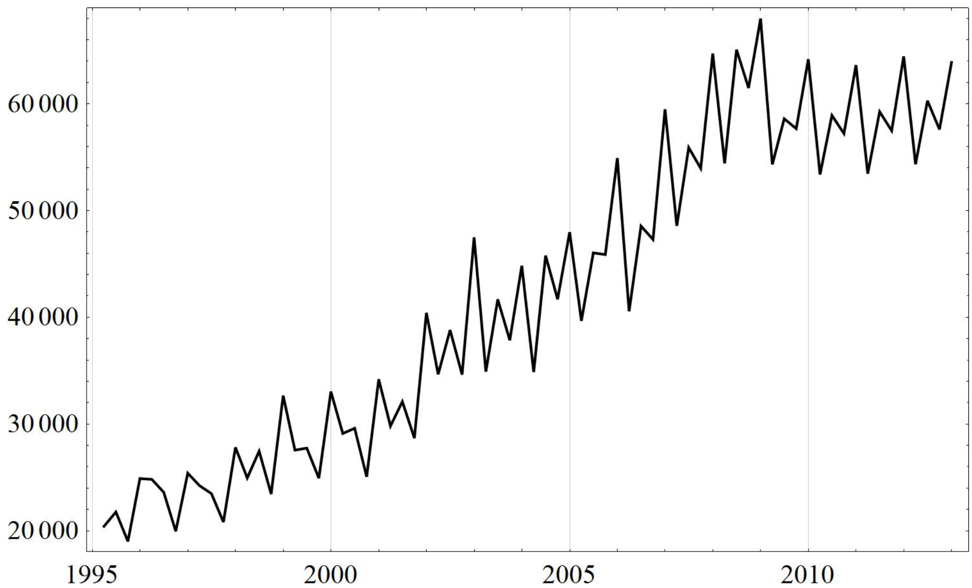
**Poznámka:** Úplně stejným způsobem lze rozšířit Holtovu - Wintersovu metodu i pro více sezónních cyklů.

# 4. Aplikace Holtovy - Wintersovy metody na reálná data

V této časti se zaměříme na praktické použití Holtovy - Wintersovy metody. Vybereme data vhodná pro aditivní a multiplikativní verzi. Použijeme údaje o výši zdrojů hrubého domácího produktu. Aditivní Holtovu - Wintersovu metodu aplikujeme na profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti, multiplikativní metodu na vývoj ve stavebnictví.

**Příklad 1. : Aditivní Holtova - Wintersova metoda**

Přehled dat pro tuto metodu uvádí tabulka 4.1. Máme k dispozici čtvrtletní údaje od 1995$Q1$ do 2012$Q4$, tedy délka řady $n = 42$ a $s = 4$. Z obrázku 4.1 vidíme, že tato data jsou vhodná pro použití aditivní Holtovy - Wintersovy metody, neboť se vzrůstajícím trendem sezónní výkyvy zůstávají přibližně na stejné úrovni.




Obrázek 4.1: Vývoj výše zdroje HDP - profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti v 1995 - 2012

| Období | $y_t$ (v mil. Kč) | Období | $y_t$ (v mil. Kč) |
|---|---|---|---|
| 1995$Q1$ | 20 424 | 2004$Q1$ | 34 870 |
| 1995$Q2$ | 21 766 | 2004$Q2$ | 45 791 |
| 1995$Q3$ | 19 014 | 2004$Q3$ | 41 697 |
| 1995$Q4$ | 24 899 | 2004$Q4$ | 47 982 |
| 1996$Q1$ | 24 824 | 2005$Q1$ | 39 677 |
| 1996$Q2$ | 23 615 | 2005$Q2$ | 46 042 |
| 1996$Q3$ | 19 958 | 2005$Q3$ | 45 883 |
| 1996$Q4$ | 25 402 | 2005$Q4$ | 54 920 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1997$Q1$ | 24 234 | 2006$Q1$ | 40 565 |
| 1997$Q2$ | 23 489 | 2006$Q2$ | 48 555 |
| 1997$Q3$ | 20 826 | 2006$Q3$ | 47 298 |
| 1997$Q4$ | 27 818 | 2006$Q4$ | 59 499 |
| 1998$Q1$ | 24 954 | 2007$Q1$ | 48 576 |
| 1998$Q2$ | 27 464 | 2007$Q2$ | 55 907 |
| 1998$Q3$ | 23 453 | 2007$Q3$ | 53 958 |
| 1998$Q4$ | 32 669 | 2007$Q4$ | 64 709 |
| 1999$Q1$ | 27 564 | 2008$Q1$ | 54 430 |
| 1999$Q2$ | 27 746 | 2008$Q2$ | 65 079 |
| 1999$Q3$ | 24 932 | 2008$Q3$ | 61 494 |
| 1999$Q4$ | 33 051 | 2008$Q4$ | 67 991 |
| 2000$Q1$ | 29 123 | 2009$Q1$ | 54 331 |
| 2000$Q2$ | 29 607 | 2009$Q2$ | 58 608 |
| 2000$Q3$ | 25 066 | 2009$Q3$ | 57 681 |
| 2000$Q4$ | 34 200 | 2009$Q4$ | 64 179 |
| 2001$Q1$ | 29 815 | 2010$Q1$ | 53 390 |
| 2001$Q2$ | 32 108 | 2010$Q2$ | 58 920 |
| 2001$Q3$ | 28 686 | 2010$Q3$ | 57 223 |
| 2001$Q4$ | 40 422 | 2010$Q4$ | 63 634 |
| 2002$Q1$ | 34 663 | 2011$Q1$ | 53 464 |
| 2002$Q2$ | 38 816 | 2011$Q2$ | 59 268 |
| 2002$Q3$ | 34 640 | 2011$Q3$ | 57 493 |
| 2002$Q4$ | 47 498 | 2011$Q4$ | 64 457 |
| 2003$Q1$ | 34 917 | 2012$Q1$ | 54 344 |
| 2003$Q2$ | 41 688 | 2012$Q2$ | 60 294 |
| 2003$Q3$ | 37 856 | 2012$Q3$ | 57 606 |
| 2003$Q4$ | 44 840 | 2012$Q4$ | 63 881 |

Tabulka 4.1: Profesní, vědecké, techcnické a administratinvní činnosti 1995 - 2012

Nejdříve musíme odhadnout počáteční hodnoty $L_0, T_0, Sz_{-s+1}, Sz_{-s+2}, \ldots, Sz_0$. Použijeme regresní přístup k sezónnosti. Použijeme tento model dle vztahu (3.1) se třemi dummy proměnnými. Odhady parametrů $b_0, b_1, a_2, a_3, a_4$ určíme pomocí metody nejmenších čtverců. Využijeme tyto odhady a odhadneme počáteční hodnoty jako

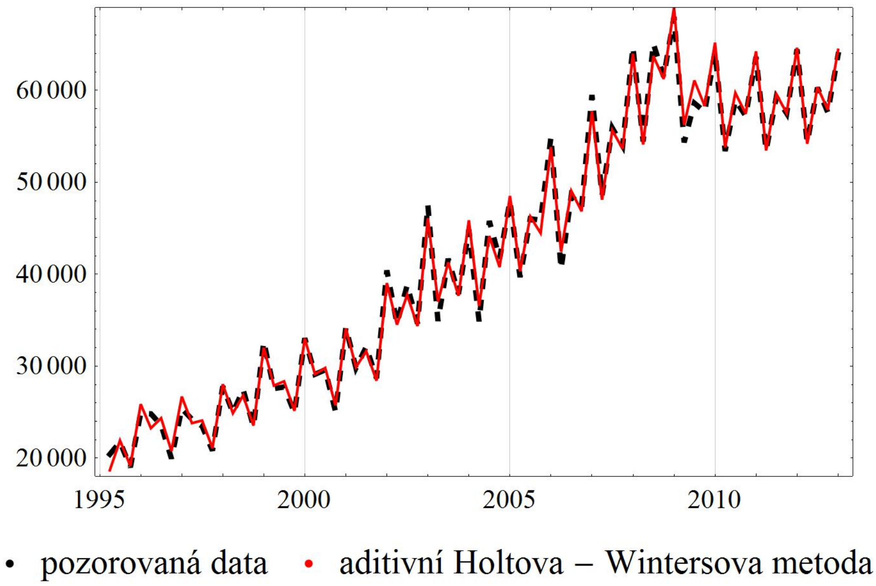
$$L_0 = 14945.7, T_0 = 658.955,$$

$$Sz_{-3} = 0, Sz_{-2} = 3818.71, Sz_{-1} = 382.034, Sz_0 = 7905.69$$

.

Vyrovnávací konstanty $\alpha$ pro úroveň, $\beta$ pro směrnici trendu a $\gamma$ pro sezónnost zvolíme podle Cipra (2008) jako

$$\alpha = 0.4, \beta = 0.1, \gamma = 0.4.$$




Obrázek 4.2: Vývoj výše zdroje HDP - profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti v 1995 - 2012 a vyrovnání pomocí aditivní Holtovy - Wintersovy metody

Nyní můžeme spočítat $L_t, T_t, Sz_t, \hat{y}_t$ pro časy $t = 1, \ldots, 72$. Použijeme software Mathematica, vztahy implementujeme podle (3.5) - (3.8).

Na obrázku 4.2 je znázorněno vyrovnání těchto dat pomocí aditivní Holtovy - Wintersovy metody. Vidíme, že vyrovnaná řada je téměř shodná s pozorovanými hodnotami (tzn. že jednotlivé složky časové řady byly dobře odhadnuty). V tabulce 4.2 lze nalézt všechny vypočtené hodnoty. Na obrázku 4.3 je zobrazen rozklad naší časové řady na jednotlivé složky: úroveň, směrnici trendu a sezónnost.

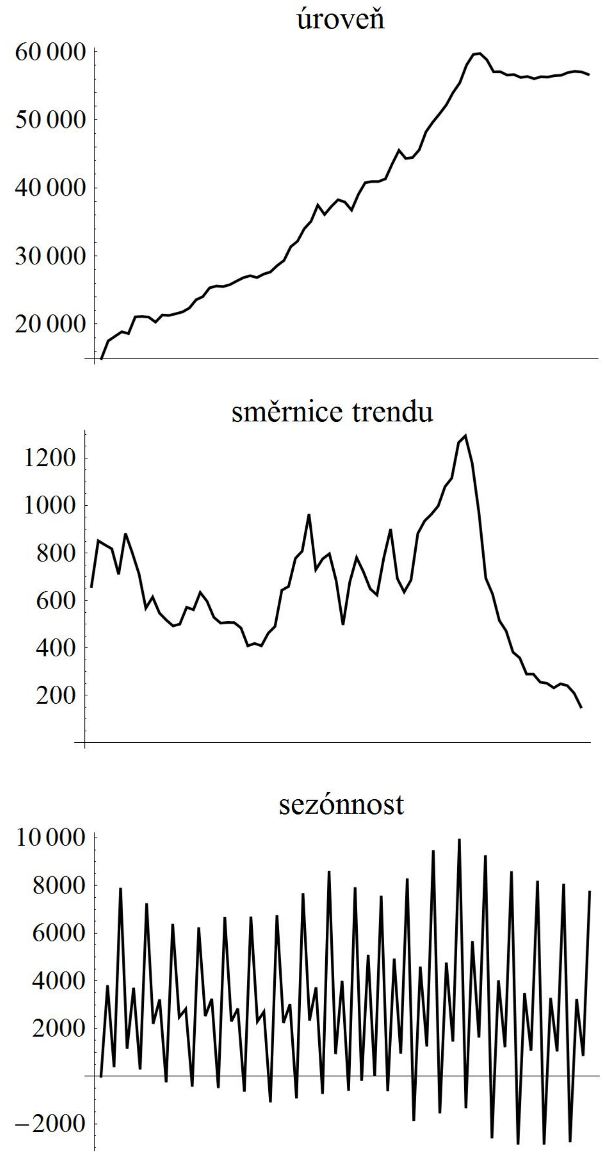
| **Období** | $L_t$ | $T_t$ | $Sz_t$ | $\hat{y}_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1995$Q$1 | 17532.4 | 851.727 | 1156.63 | 18689.1 |
| 1995$Q$2 | 18209.4 | 834.253 | 3713.87 | 21923.3 |
| 1995$Q$3 | 18879.0 | 817.785 | 283.229 | 19162.2 |
| 1995$Q$4 | 18615.4 | 709.647 | 7256.86 | 25872.2 |
| 1996$Q$1 | 21062.0 | 883.341 | 2198.79 | 23260.8 |
| 1996$Q$2 | 21127.6 | 801.574 | 3223.27 | 24350.9 |
| 1996$Q$3 | 21027.4 | 711.396 | -257.837 | 20769.6 |
| 1996$Q$4 | 20301.4 | 567.649 | 6394.38 | 26695.7 |
| 1997$Q$1 | 21335.5 | 614.297 | 2478.68 | 23814.2 |
| 1997$Q$2 | 21276.2 | 546.935 | 2819.09 | 24095.3 |
| 1997$Q$3 | 21527.4 | 517.364 | -435.259 | 21092.1 |
| 1997$Q$4 | 21796.3 | 492.519 | 6245.3 | 28041.6 |
| 1998$Q$1 | 22363.4 | 499.979 | 2523.44 | 24886.9 |
| 1998$Q$2 | 23576.0 | 571.239 | 3246.66 | 26822.7 |
| 1998$Q$3 | 24043.6 | 560.88 | -497.415 | 23546.2 |
| 1998$Q$4 | 25332.2 | 633.647 | 6681.9 | 32014.1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1999$Q$1 | 25595.7 | 596.635 | 2301.37 | 27897.1 |
| 1999$Q$2 | 25515.2 | 528.914 | 2840.33 | 28355.5 |
| 1999$Q$3 | 25798.2 | 504.328 | -644.932 | 25153.3 |
| 1999$Q$4 | 26329.2 | 506.991 | 6697.88 | 33027.0 |
| 2000$Q$1 | 26830.3 | 506.41 | 2297.89 | 29128.2 |
| 2000$Q$2 | 27108.7 | 483.606 | 2703.51 | 29812.2 |
| 2000$Q$3 | 26839.8 | 408.351 | -1096.47 | 25743.3 |
| 2000$Q$4 | 27349.7 | 418.511 | 6758.84 | 34108.6 |
| 2001$Q$1 | 27667.8 | 408.466 | 2237.62 | 29905.4 |
| 2001$Q$2 | 28607.5 | 461.596 | 3022.29 | 31629.8 |
| 2001$Q$3 | 29354.5 | 490.129 | -925.268 | 28429.2 |
| 2001$Q$4 | 31372.0 | 642.871 | 7675.29 | 39047.3 |
| 2002$Q$1 | 32179.1 | 659.291 | 2336.14 | 34515.2 |
| 2002$Q$2 | 34020.5 | 777.504 | 3731.57 | 37752.1 |
| 2002$Q$3 | 35104.9 | 808.194 | -741.128 | 34363.8 |
| 2002$Q$4 | 37476.9 | 964.578 | 8613.6 | 46090.5 |
| 2003$Q$1 | 36097.3 | 730.151 | 929.577 | 37026.8 |
| 2003$Q$2 | 37279.0 | 775.312 | 4002.53 | 41281.6 |
| 2003$Q$3 | 38271.5 | 797.024 | -610.857 | 37660.6 |
| 2003$Q$4 | 37931.6 | 683.341 | 7931.5 | 45863.1 |
| 2004$Q$1 | 36745.2 | 496.358 | -192.319 | 36552.8 |
| 2004$Q$2 | 39060.3 | 678.236 | 5093.8 | 44154.1 |
| 2004$Q$3 | 40766.3 | 781.009 | 5.78023 | 40772.0 |
| 2004$Q$4 | 40948.6 | 721.138 | 7572.27 | 48520.8 |
| 2005$Q$1 | 40949.5 | 649.123 | -624.411 | 40325.1 |
| 2005$Q$2 | 41338.5 | 623.104 | 4937.69 | 46276.2 |
| 2005$Q$3 | 43527.8 | 779.729 | 945.532 | 44473.4 |
| 2005$Q$4 | 45523.6 | 901.336 | 8301.91 | 53825.5 |
| 2006$Q$1 | 44330.7 | 691.913 | -1880.94 | 42449.8 |
| 2006$Q$2 | 44460.5 | 635.7 | 4600.4 | 49060.9 |
| 2006$Q$3 | 45598.7 | 685.949 | 1247.03 | 46845.8 |
| 2006$Q$4 | 48249.6 | 882.446 | 9480.89 | 57730.5 |
| 2007$Q$1 | 49662.0 | 935.441 | -1562.98 | 48099.0 |
| 2007$Q$2 | 50881.1 | 963.806 | 4770.59 | 55651.7 |
| 2007$Q$3 | 52191.3 | 998.448 | 1454.88 | 53646.2 |
| 2007$Q$4 | 54005.1 | 1079.98 | 9970.09 | 63975.2 |
| 2008$Q$1 | 55448.2 | 1116.3 | -1345.09 | 54103.2 |
| 2008$Q$2 | 58062.1 | 1266.05 | 5669.12 | 63731.2 |
| 2008$Q$3 | 59612.5 | 1294.49 | 1625.52 | 61238.0 |
| 2008$Q$4 | 59752.6 | 1179.04 | 9277.42 | 69030.0 |
| 2009$Q$1 | 58829.4 | 968.823 | -2606.41 | 56223.0 |
| 2009$Q$2 | 57054.5 | 694.449 | 4022.88 | 61077.4 |
| 2009$Q$3 | 57071.6 | 626.711 | 1219.09 | 58290.6 |
| 2009$Q$4 | 56579.6 | 514.843 | 8606.22 | 65185.8 |
| 2010$Q$1 | 56655.2 | 470.923 | -2869.94 | 53785.3 |
| 2010$Q$2 | 56234.5 | 381.762 | 3487.91 | 59722.4 |
| 2010$Q$3 | 56371.3 | 357.266 | 1072.11 | 57443.5 |
| 2010$Q$4 | 56048.3 | 289.233 | 8198.02 | 64246.3 |

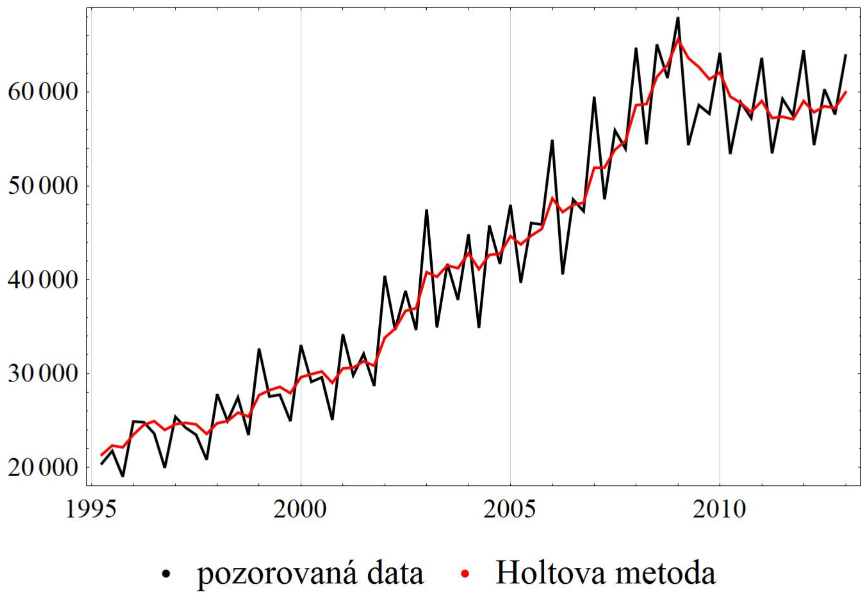
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2011$Q$1 | 56336.1 | 289.09 | -2870.8 | 53465.3 |
| 2011$Q$2 | 56287.1 | 255.287 | 3285.09 | 59572.2 |
| 2011$Q$3 | 56493.8 | 250.425 | 1042.94 | 64631.7 |
| 2011$Q$4 | 56550.1 | 231.015 | 8081.56 | 57536.8 |
| 2012$Q$1 | 56954.6 | 248.361 | -2766.72 | 54187.9 |
| 2012$Q$2 | 57125.3 | 240.598 | 3238.52 | 60363.9 |
| 2012$Q$3 | 57044.8 | 208.483 | 850.251 | 57895.0 |
| 2012$Q$4 | 56671.7 | 150.33 | 7732.64 | 64404.4 |

Tabulka 4.2: Aditivní Holtova - Wintersova metoda: vypočtená data

Na obrázku 4.4 je pro srovnání zobrazeno použití Holtovy metody (odstavec 2.4), která nezohledňuje sezónnost dat. Hodnoty vyrovnávacích konstant pro Holtovu metodu byly voleny $\alpha, \beta = 0.3$. Vyrovnaná časová řada se liší od původních hodnot, protože jsme ignorovali sezónní složku. Proto tato metoda není pro sezónní časové řady vhodná.




Obrázek 4.3: Rozklad na jednotlivé složky pomocí aditivní Holtovy - Wintersovy metody




Obrázek 4.4: Vývoj výše zdroje HDP - profesní, vědecké, technické a administrativní činnosti v 1995 - 2012 a vyrovnání pomocí Holtovy metody

**Příklad 2. : Multiplikativní Holtova - Wintersova metoda**

Data máme k dispozici opět čtvrtletně od $1995Q1$ do $2012Q4$. Z obrázku 4.5 lze vidět, že tato data jsou vhodnější pro multiplikativní Holtovu - Wintersovu metodu, protože se vzrůstajícím trendem se zvyšují sezónní výkyvy. Číselné hodnoty pro jednotlivá čtvrtletí jsou v tabulce 4.3.

| **Období** | $y_t$ **(v mil. Kč)** | **Období** | $y_t$ **(v mil. Kč)** |
|---|---|---|---|
| $1995Q1$ | 18 977 | $2004Q1$ | 32 822 |
| $1995Q2$ | 28 723 | $2004Q2$ | 44 086 |
| $1995Q3$ | 27 834 | $2004Q3$ | 51 849 |
| $1995Q4$ | 31 594 | $2004Q4$ | 53 544 |
| $1996Q1$ | 25 486 | $2005Q1$ | 34 432 |
| $1996Q2$ | 31 836 | $2005Q2$ | 47 191 |
| $1996Q3$ | 36 170 | $2005Q3$ | 54 950 |
| $1996Q4$ | 37 058 | $2005Q4$ | 52 719 |
| $1997Q1$ | 26 336 | $2006Q1$ | 31 974 |
| $1997Q2$ | 31 579 | $2006Q2$ | 48 445 |
| $1997Q3$ | 33 380 | $2006Q3$ | 58 097 |
| $1997Q4$ | 41 936 | $2006Q4$ | 60 642 |
| $1998Q1$ | 27 652 | $2007Q1$ | 39 952 |
| $1998Q2$ | 35 620 | $2007Q2$ | 53 791 |
| $1998Q3$ | 40 102 | $2007Q3$ | 63 269 |
| $1998Q4$ | 39 914 | $2007Q4$ | 67 863 |
| $1999Q1$ | 28 611 | $2008Q1$ | 41 410 |
| $1999Q2$ | 34 748 | $2008Q2$ | 58 274 |
| $1999Q3$ | 36 941 | $2008Q3$ | 71 130 |
| $1999Q4$ | 38 706 | $2008Q4$ | 64 844 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2000$Q1$ | 28 208 | 2009$Q1$ | 42 239 |
| 2000$Q2$ | 31 045 | 2009$Q2$ | 60 522 |
| 2000$Q3$ | 36 357 | 2009$Q3$ | 68 929 |
| 2000$Q4$ | 39 997 | 2009$Q4$ | 70 526 |
| 2001$Q1$ | 27 956 | 2010$Q1$ | 40 534 |
| 2001$Q2$ | 32 403 | 2010$Q2$ | 63 832 |
| 2001$Q3$ | 39 039 | 2010$Q3$ | 71 747 |
| 2001$Q4$ | 42 122 | 2010$Q4$ | 74 673 |
| 2002$Q1$ | 30 590 | 2011$Q1$ | 35 642 |
| 2002$Q2$ | 35 657 | 2011$Q2$ | 59 644 |
| 2002$Q3$ | 42 951 | 2011$Q3$ | 65 105 |
| 2002$Q4$ | 43 324 | 2011$Q4$ | 73 546 |
| 2003$Q1$ | 29 003 | 2012$Q1$ | 32 612 |
| 2003$Q2$ | 40 781 | 2012$Q2$ | 55 219 |
| 2003$Q3$ | 47 504 | 2012$Q3$ | 61 337 |
| 2003$Q4$ | 46 264 | 2012$Q4$ | 67 609 |

Tabulka 4.3: Stavebnictví 1995 $-$ 2012

Počáteční hodnoty $L_0, T_0, Sz_{-s+1}, Sz_{-s+2}, \ldots, Sz_0$ odhadneme s využitím vztahů (3.23). Pro naše data dostaneme tyto hodnoty

$$L_0 = 25774.2, T_0 = 403.121,$$

$$Sz_{-3} = 0.736799, Sz_{-2} = 0.987752, Sz_{-1} = 1.11261, Sz_0 = 1.15647$$

.

Vyrovnávací konstanty $\alpha$ pro úroveň, $\beta$ pro směrnici trendu a $\gamma$ pro sezónnost zvolíme stejně jako v předchozím příkladu

$$\alpha = 0.4, \beta = 0.1, \gamma = 0.4.$$

Pro výpočet $L_t, T_t, Sz_t, \hat{y}_t$ pro časy $t = 1, \ldots, 72$ využijeme rekurentních vztahů (3.17) - (3.20).

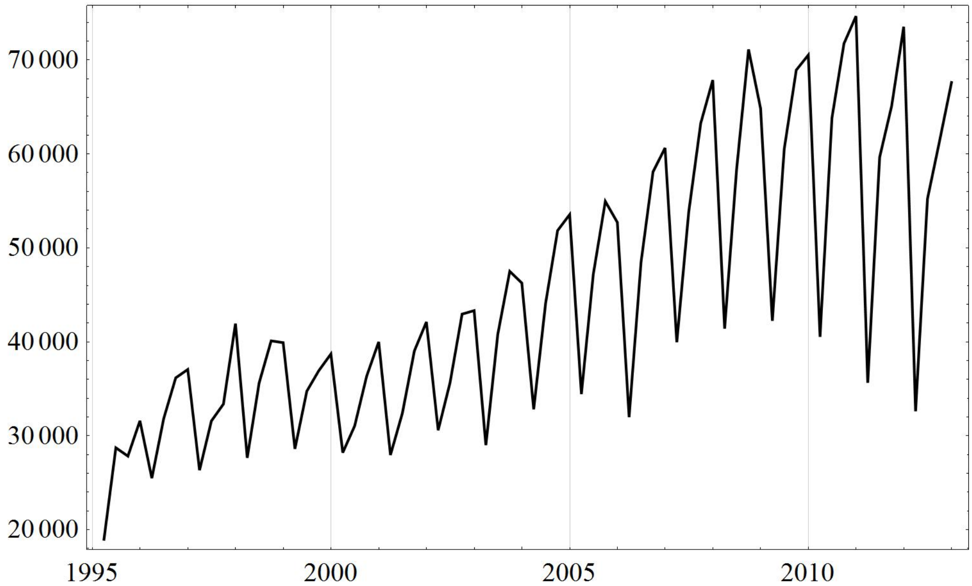
Na obrázku 4.6 je znázorněno vyrovnání těchto dat pomocí multiplikativní Holtovy - Wintersovy metody. Vyrovnaná řada je také téměř shodná s pozorovanými hodnotami. V tabulce 4.4 lze nalézt všechny vypočtené hodnoty. Na obrázku 4.7 je zobrazen rozklad této časové řady na jednotlivé složky: úroveň, směrnici trendu a sezónnost.

| **Období** | $L_t$ | $T_t$ | $Sz_t$ | $\hat{y}_t$ |
|---|---|---|---|---|
| 1995$Q1$ | 26008.8 | 386.269 | 0.733934 | 19088.7 |
| 1995$Q2$ | 27468.7 | 493.633 | 1.01092 | 27768.6 |
| 1995$Q3$ | 26784.2 | 375.817 | 1.08324 | 29013.7 |
| 1995$Q4$ | 27223.8 | 382.195 | 1.15809 | 31527.6 |
| 1996$Q1$ | 30453.7 | 666.963 | 0.775112 | 23605.0 |
| 1996$Q2$ | 31269.3 | 681.827 | 1.0138 | 31700.8 |
| 1996$Q3$ | 32526.9 | 739.405 | 1.09475 | 35608.7 |

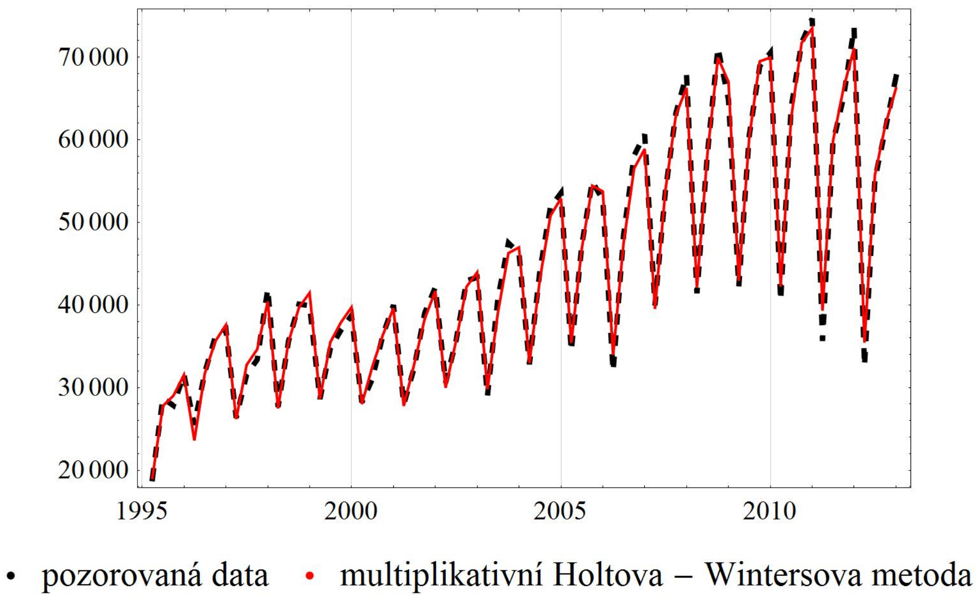
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1996$Q4$ | 32759.4 | 688.722 | 1.14734 | 37586.3 |
| 1997$Q1$ | 33659.7 | 709.877 | 0.778035 | 26188.4 |
| 1997$Q2$ | 33081.4 | 581.059 | 0.990114 | 32754.4 |
| 1997$Q3$ | 32393.9 | 454.204 | 1.06902 | 34629.9 |
| 1997$Q4$ | 34329.1 | 602.303 | 1.17704 | 40406.7 |
| 1998$Q1$ | 35175.2 | 626.679 | 0.78127 | 27481.3 |
| 1998$Q2$ | 35871.4 | 633.632 | 0.991265 | 35558.0 |
| 1998$Q3$ | 36908.1 | 673.94 | 1.07603 | 39714.2 |
| 1998$Q4$ | 36113.4 | 527.079 | 1.14832 | 41469.8 |
| 1999$Q1$ | 36632.8 | 526.305 | 0.781171 | 28616.4 |
| 1999$Q2$ | 36317.1 | 442.11 | 0.977477 | 35499.1 |
| 1999$Q3$ | 35787.9 | 344.975 | 1.05851 | 37881.7 |
| 1999$Q4$ | 35162.4 | 247.926 | 1.1293 | 39709.0 |
| 2000$Q1$ | 35690.1 | 275.911 | 0.784846 | 28011.3 |
| 2000$Q2$ | 34283.8 | 107.683 | 0.948698 | 32524.9 |
| 2000$Q3$ | 34373.9 | 105.924 | 1.05818 | 36373.8 |
| 2000$Q4$ | 34854.8 | 143.428 | 1.13659 | 39615.8 |
| 2001$Q1$ | 35246.8 | 168.287 | 0.788167 | 27780.4 |
| 2001$Q2$ | 34911.2 | 117.891 | 0.940481 | 32833.3 |
| 2001$Q3$ | 35774.5 | 192.431 | 1.07141 | 38329.1 |
| 2001$Q4$ | 36404.1 | 236.148 | 1.14478 | 41674.8 |
| 2002$Q1$ | 37508.8 | 323.002 | 0.799118 | 29973.9 |
| 2002$Q2$ | 37864.5 | 326.275 | 0.940969 | 35629.3 |
| 2002$Q3$ | 38949.8 | 402.177 | 1.08394 | 42219.1 |
| 2002$Q4$ | 38749.0 | 341.886 | 1.1341 | 43945.2 |
| 2003$Q1$ | 37972.1 | 230.0 | 0.78499 | 29807.7 |
| 2003$Q2$ | 40257.0 | 435.492 | 0.969788 | 39040.7 |
| 2003$Q3$ | 41945.7 | 560.81 | 1.10337 | 46281.5 |
| 2003$Q4$ | 41821.4 | 492.298 | 1.12295 | 46963.3 |
| 2004$Q1$ | 42113.0 | 472.233 | 0.782746 | 32963.8 |
| 2004$Q2$ | 43734.9 | 587.2 | 0.985084 | 43082.6 |
| 2004$Q3$ | 45389.9 | 693.98 | 1.11894 | 50788.6 |
| 2004$Q4$ | 46723.0 | 757.887 | 1.13217 | 52898.1 |
| 2005$Q1$ | 46084.0 | 618.203 | 0.76851 | 35416.0 |
| 2005$Q2$ | 47183.5 | 666.338 | 0.991114 | 46764.3 |
| 2005$Q3$ | 48353.5 | 716.699 | 1.12593 | 54442.8 |
| 2005$Q4$ | 48068.0 | 616.481 | 1.118 | 53740.2 |
| 2006$Q1$ | 45852.8 | 333.307 | 0.740034 | 33932.6 |
| 2006$Q2$ | 47263.4 | 441.039 | 1.00467 | 47484.0 |
| 2006$Q3$ | 49262.2 | 596.82 | 1.1473 | 56518.4 |
| 2006$Q4$ | 51612.0 | 772.112 | 1.14079 | 58878.2 |
| 2007$Q1$ | 53025.1 | 836.218 | 0.745402 | 39525.0 |
| 2007$Q2$ | 53733.2 | 823.405 | 1.00323 | 53906.9 |
| 2007$Q3$ | 54792.4 | 846.985 | 1.15026 | 63025.5 |
| 2007$Q4$ | 57178.8 | 1000.93 | 1.15921 | 66282.5 |
| 2008$Q1$ | 57129.4 | 895.893 | 0.737179 | 42114.6 |
| 2008$Q2$ | 58049.7 | 898.333 | 1.00348 | 58252.0 |
| 2008$Q3$ | 60104.1 | 1013.94 | 1.16353 | 69933.2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2008$Q$4 | 59046.0 | 806.734 | 1.13481 | 67005.8 |
| 2009$Q$1 | 58830.9 | 704.55 | 0.729497 | 42917.0 |
| 2009$Q$2 | 59846.0 | 735.607 | 1.00661 | 60241.5 |
| 2009$Q$3 | 60045.4 | 681.984 | 1.1573 | 69490.5 |
| 2009$Q$4 | 61295.7 | 738.812 | 1.14112 | 69945.6 |
| 2010$Q$1 | 59446.4 | 480.006 | 0.710441 | 42233.2 |
| 2010$Q$2 | 61321.0 | 619.467 | 1.02034 | 62568.6 |
| 2010$Q$3 | 61962.4 | 621.654 | 1.15754 | 71724.2 |
| 2010$Q$4 | 63725.8 | 735.831 | 1.15339 | 73500.4 |
| 2011$Q$1 | 58744.5 | 164.119 | 0.668956 | 39297.5 |
| 2011$Q$2 | 58727.1 | 145.965 | 1.01845 | 59810.7 |
| 2011$Q$3 | 57821.4 | 40.805 | 1.14491 | 66200.5 |
| 2011$Q$4 | 60223.5 | 276.928 | 1.18052 | 71094.9 |
| 2012$Q$1 | 55800.5 | -193.066 | 0.63515 | 35441.6 |
| 2012$Q$2 | 55051.9 | -248.619 | 1.01229 | 55728.2 |
| 2012$Q$3 | 54311.3 | -297.81 | 1.13869 | 61843.9 |
| 2012$Q$4 | 55316.4 | -167.528 | 1.1972 | 66224.8 |

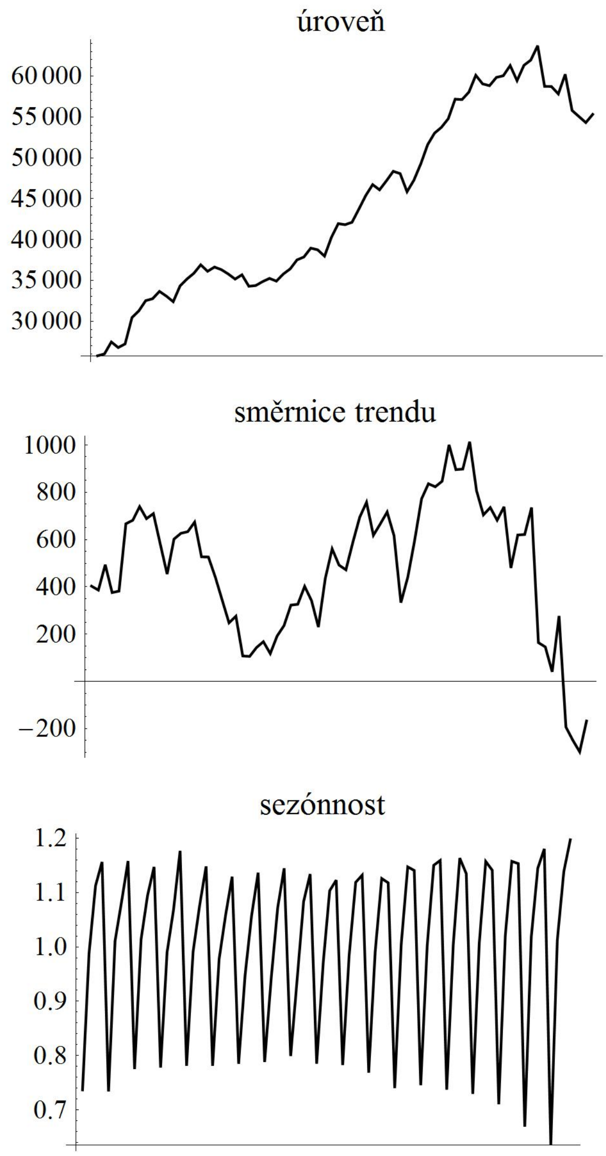
Tabulka 4.4: Multiplikativní Holtova-Wintersova metoda: vypočtená data




Obrázek 4.5: Vývoj výše zdroje HDP - stavebnictví v 1995 - 2012




Obrázek 4.6: Vývoj výše zdroje HDP - stavebnictví a vyrovnání pomocí multiplikativní Holtovy - Wintersovy metody




Obrázek 4.7: Rozklad na jednotlivé složky pomocí multiplikatini Holtovy - Wintersovy metody

# Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s principy exponenciálního vyrovnávání a jeho rozšířením na sezónní časové řady. Exponenciální vyrovnávání patří mezi často používané dekompoziční techniky pro modelování časových řad. Vzorce pro vyrovnanou hodnotu časových řad lze převést do rekurentních formulí, které redukují paměťovou složitost výpočtu. Podle typu trendu lze volit mezi jednoduchým, dvojitým, trojitým exponenciálním vyrovnáváním, případně Holtovou metodou. Všechny tyto typy jsou vhodné pro časové řady bez sezónní složky. Pro eliminaci sezónní složky se používá Holtova - Wintersova metoda. Byla představena ve dvou variantách, pro aditivní a multiplikativní sezónnost. Stručně také bylo popsáno rozšíření této metody pro dva sezónní cykly. V poslední části práce bylo ukázáno použití Holtovy - Wintersovy metody na reálných datech. Grafické výstupy uvedených příkladů svědčí o tom, že daná metoda přes svou jednoduchost je poměrně účinným dekompozičním nástrojem.

# Seznam obrázků

# Seznam tabulek

# Literatura


[1] CIPRA T. *Finanční ekonometrie*. 1. vyd. Ekopress, Praha, 1986.

[2] CIPRA T. *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii.* 1. vydání. Státní nakladatelství technické literatury, Praha ; Alfa, Bratislava, 1986.

[3] HYNDMAN, R. J. et al. *Forecasting with exponential smoothing: the state space approach.* Springer, Berlín, 2008.

[4] TAYLOR, James W. *Short-term electricity demand forecasting using double seasonal exponential smoothing.* Journal of Operational Research Society, Vol. 54, 2003, str. 799-805.

[5] ČESKÝ STATISTICKÝ ÚŘAD, Časové řady ukazatelů čtvrtletních účtů, *Tab_Z Zdroje hrubého domácího produktu* [online].
Dostupné z: <http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/hdp_cr>.